

УДК 621.391

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМА ДЕКОДИРОВАНИЯ «MIN-SUM» И ЕГО МОДИФИКАЦИЙ

Абрамов И.О., Барабанов М.Ю. – магистранты гр.167001

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

г. Минск, Республика Беларусь

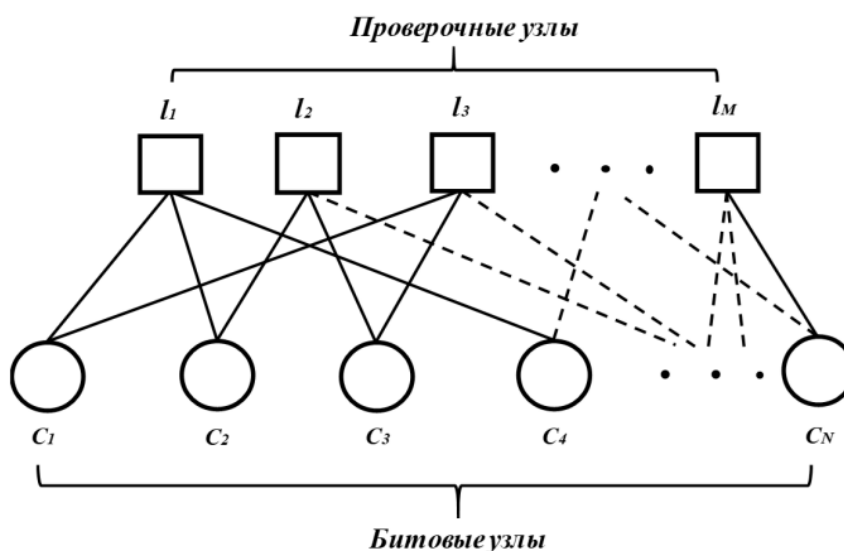
Астровский И.И. – канд. техн. наук

Аннотация. В данной статье приведена оценка сложности алгоритма декодирования LDPC кодов «Min sum» и его модификаций. Проанализированы отличия сложности алгоритмов «Min-sum», «Min-sum normalized», «Min-sum offset».

Ключевые слова. LDPC-код, алгоритм декодирования, низкостепенная матрица, вычислительная сложность.

LDPC-код представляет собой линейный блочный код, характеризующийся разреженной проверочной матрицей $H(N \times M)$, где M – количество проверочных строк; N – длина кода, т.е. количество столбцов в матрице; K – длина исходных данных. Если количество ненулевых элементов в каждой строке равно $dr < N$ и количество ненулевых элементов в каждом столбце равно $dc < M$, то код называется регулярным, в противном случае – нерегулярным.

Графически LDPC-коды можно представить с помощью графа Таннера (рисунок 1).



В данной статье рассмотрим и проведём оценку вычислительной сложности алгоритма «min-sum» и его модификаций.

Для оценки сложности алгоритмов декодирования в качестве базовой используется методика, предложенная в [2]. Данная методика в полной мере учитывает операции сложения (N_+), умножения (N_x), сравнения ($N/$), взятия модуля числа ($N|a|$) и сложения по модулю 2 (N_{\oplus}) на одну итерацию декодирования. Операция вычитания приравнивается к операции сложения. Число операций различного типа будет зависеть от «весов» строк (k) и столбцов (j) проверочной матрицы, а также от длины кодового слова (l), количества уравнений в матрице проверки на четность (m) и алгоритма декодирования.

Работу любого алгоритма декодирования кодов с малой плотностью проверок на четность можно разделить на несколько этапов, представленных на рисунке 2. Подсчет элементарных операций будет вестись для этапов 1-4, выполняемых итеративно.

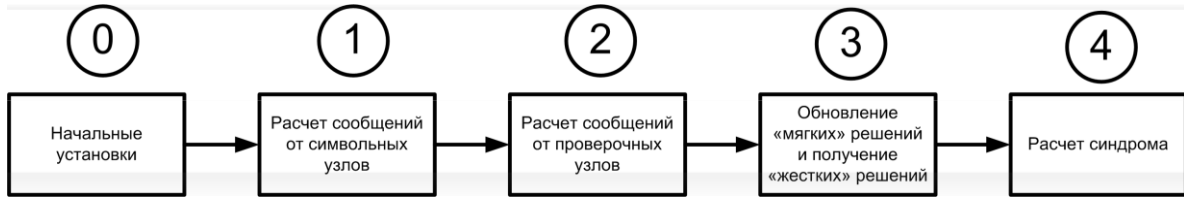


Рисунок 2 – Этапы декодирования LDPC кодов

Алгоритм минимума суммы «Min-sum»

Шаг 1. Расчет сообщений от символьных узлов графа Таннера.

Для первой итерации сообщения от символьных узлов $L(qm, l)$ устанавливаются как входные мягкие решения $L(CI)$. На последующих итерациях на данном шаге используются только операции сложения, количество которых выражается формулой:

$$N_+ = \sum_{i=1}^l (j_i - 1) \cdot j_i, \quad (1)$$

где j_i - вес i -ого столбца проверочной матрицы. Количество столбцов в матрице соответствует длине кодового слова l .

Шаг 2. Расчет сообщений от проверочных узлов графа Таннера.

Для формирования сообщений от проверочных узлов к символьным узлам используются операции сравнения, умножения и взятия модуля числа. Количество умножений, выполняемых на данном этапе, выражается формулой:

$$N_x = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (k_i - 1), \quad (2)$$

где k_i - вес i -ой строки проверочной матрицы.

Количество сравнений, выполняемых на данном этапе, выражается формулой:

$$N_j = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (2 \cdot k_i - 3), \quad (3)$$

Количество взятых модуля числа, выполняемых на данном этапе, выражается формулой:

$$N_{|a|} = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (k_i - 1), \quad (4)$$

Шаг 3. Обновление мягких решений и получение жестких решений.

На данном этапе используются операции сложения для обновления мягких решений и операции сравнения с нулем для получения жестких решений. Количество сложений, выполняемых при обновлении мягких решений, выражается формулой:

$$N_+ = \sum_{i=1}^l j_i, \quad (5)$$

Количество сравнений, выполняемых для получения жестких решений, выражается формулой:

$$N_j = l \quad (6)$$

Шаг 4. Расчет синдрома.

На данном этапе используются только операции сложения по модулю 2 для расчета синдрома. Количество сложений по модулю 2, выполняемых на данном этапе, выражается формулой:

$$N_{\oplus} = \sum_{i=1}^m (k_i - 1), \quad (7)$$

Итоговые формулы для расчета количества операций.

Общее число операций сложения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_+ = \sum_{i=1}^l j_i^2, \quad (8)$$

Общее число операций умножения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{\times} = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (k_i - 1), \quad (9)$$

Общее число сравнения умножения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{/} = 1 + l + \sum_{i=1}^m k_i \cdot (2 \cdot k_i - 3), \quad (10)$$

Здесь, и далее для других алгоритмов, первый член суммы, равный 1, как и в [2], учитывает сравнение счетчика итераций с максимальным числом.

Общее число операций взятия модуля числа на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{|a|} = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (k_i - 1), \quad (11)$$

Общее число операций сложения по модулю 2 на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{\oplus} = \sum_{i=1}^m (k_i - 1), \quad (12)$$

Общее число операций различного типа, необходимых для выполнения одной итерации декодирования по алгоритму «Min-sum» с низкоплотной матрицей проверки на четность из Subframe2 размерностью 600 на 1200, содержащей 4818 ненулевых элементов, представлено в таблице 1. Приводимые далее количественные оценки вычислительной сложности для других алгоритмов декодирования получены для этой же матрицы проверки на четность.

Таблица 1 – Сложность алгоритма «Min-sum».

| Операция | Количество на итерацию декодирования |
|----------------------|--------------------------------------|
| Сложение | 37024 |
| Умножение | 33888 |
| Сравнение | 64159 |
| Взятие модуля | 33888 |
| Сложение по модулю 2 | 4218 |

Алгоритм «Min-sum normalized» имеет отличия от алгоритма «Min-sum» только расчетом сообщений от проверочных узлов графа Таннера (шаг 2). Как следствие, шаги 1,3 и 4 имеют одинаковую сложность и не описываются здесь.

Шаг 2. Расчет сообщений от проверочных узлов графа Таннера.

Для формирования сообщений от проверочных узлов к символьным узлам используются операции сравнения, умножения и взятия модуля числа. Количество умножений, выполняемых на данном шаге, выражается формулой:

$$N_{\times} = \sum_{i=1}^l k_i^2, \quad (13)$$

Количество сравнений и взятий модуля числа на данном шаге не претерпело изменений по сравнению с алгоритмом «Min - sum» и может быть вычислено по формулам (3) и (4), соответственно.

Итоговые формулы для расчета количества операций.

Общее число операций сложения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{+} = \sum_{i=1}^l j_i^2, \quad (14)$$

Общее число операций умножения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{\times} = \sum_{i=1}^m k_i^2, \quad (15)$$

Общее число операций сравнения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{/} = 1 + l + \sum_{i=1}^m k_i \cdot (2 \cdot k_i - 3), \quad (16)$$

Общее число операций взятия модуля числа на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{|a|} = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (k_i - 1), \quad (17)$$

Общее число операций сложения по модулю 2 на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{\oplus} = \sum_{i=1}^m (k_i - 1), \quad (18)$$

Общее число операций различного типа, необходимых для выполнения одной итерации декодирования по алгоритму «Min-sum normalized», представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Сложность алгоритма «Min-sum normalized».

| Операция | Количество на итерацию декодирования |
|----------------------|--------------------------------------|
| Сложение | 37024 |
| Умножение | 38706 |
| Сравнение | 64159 |
| Взятие модуля | 33888 |
| Сложение по модулю 2 | 4218 |

Алгоритм «Min-sum offset» имеет отличия от алгоритма «Min-sum» только расчетом сообщений от проверочных узлов графа Таннера (шаг 2). Как следствие, шаги 1,3 и 4 имеют одинаковую сложность и не описываются здесь.

Шаг 2. Расчет сообщений от проверочных узлов графа Таннера.

Для формирования сообщений от проверочных узлов к символьным узлам используются операции сложения, сравнения, умножения и взятия модуля числа.

Количество сложений, выполняемых на данном шаге, выражается формулой:

$$N_+ = \sum_{i=1}^m k_i, \quad (19)$$

Количество сравнений, выполняемых на данном шаге, выражается формулой:

$$N_j = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (2 \cdot k_i - 2), \quad (20)$$

Количество умножений и взятий модуля числа на данном шаге не претерпело изменений по сравнению с алгоритмом «Min - sum» и может быть вычислено по формулам (2) и (4), соответственно.

Итоговые формулы для расчета количества операций.

Общее число операций сложения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_+ = \sum_{i=1}^l j_i^2 + \sum_{i=1}^m k_i, \quad (21)$$

Общее число операций умножения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_x = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (k_i - 1), \quad (22)$$

Общее число операций сравнения на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_j = 1 + l + \sum_{i=1}^m k_i \cdot (2 \cdot k_i - 2), \quad (23)$$

Общее число операций взятия модуля числа на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{|a|} = \sum_{i=1}^m k_i \cdot (k_i - 1), \quad (24)$$

Общее число операций сложения по модулю 2 на одну итерацию декодирования выражается формулой:

$$N_{\oplus} = \sum_{i=1}^m (k_i - 1), \quad (25)$$

Общее число операций различного типа, необходимых для выполнения одной итерации декодирования по алгоритму «Min-sum offset», представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Сложность алгоритма «Min-sum offset».

| Операция | Количество на итерацию декодирования |
|----------------------|--------------------------------------|
| Сложение | 41842 |
| Умножение | 33888 |
| Сравнение | 68977 |
| Взятие модуля | 33888 |
| Сложение по модулю 2 | 4218 |

Проанализировав алгоритм декодирования «Min-sum» и его модификации «Min-sum normalized» и «Min-sum offset» можем сделать вывод, что:

Сложность алгоритма «Min-sum normalized» имеет отличия от сложности алгоритма «Min-sum» на число умножений, равное количеству элементов в проверочной матрице низкоплотностного кода, то есть на количество отнормированных сообщений, которое формируется от проверочных узлов графа Таннера к символьным узлам.

Сложность алгоритма «Min-sum offset» имеет отличия от сложности алгоритма «Min-sum» на число сложений и сравнений, каждое из которых равно количеству элементов в проверочной

матрице низкоплотного кода, то есть количеству сообщений, которое формируется от проверочных узлов графа Таннера к символьным узлам.

Список использованных источников:

1. V. Sh. Le. // Optimization of the min-sum decoding algorithm for low-density parity-check codes, 2021. P 16–17.
2. Soltanov A.G. // Decoding schemes and performance evaluation of LDPC codes. Application, advantages and development prospects // Security of information technologies, 2010, M.: No. 2, P. 61-67.
3. Wikipedia, the free encyclopedia [Electronic resource]. – Access mode: https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity. – Access date: 01.03.2023.

UDC 621.391

COMPLEXITY EVALUATION OF THE "MIN-SUM" DECODING ALGORITHM AND ITS MODIFICATIONS

Abramov I.O., Barabanov M.Y.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Astrovskiy I.I. – PhD in Engineering sciences

Annotation. This article provides an estimate of the complexity of the decoding algorithm for LDPC "min sum" codes and its modifications. Differences in the complexity of the "min-sum", "min-sum normalized", "min-sum offset" algorithms are shown.

Keywords. LDPC code, decoding algorithm, low-bandwidth matrix, computational complexity.