УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

УДК 537.8: 517.951.5

Жизневский
Валерий Анатольевич

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.04.03 – Радиофизика

Минск 2011

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет им. П.М.Машерова»

Научный руководитель: **Андрушкевич Иосиф Евгеньевич,**
кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Полоцкого государственного университета

Официальные оппоненты: **Слепян Григорий Яковлевич,**
доктор физико-математических наук, гл. научный сотрудник лаборатории электродинамики неоднородных сред Научно-исследовательского учреждения "Институт ядерных проблем" Белорусского государственного университета;

Попкова Татьяна Леонидовна,
кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры антенн и устройств СВЧ учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Оппонирующая организация: **Белорусский государственный университет**

Защита состоится «19» мая 2011 года в 14^{00} часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.15.05 при учреждении образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» по адресу 220013, г. Минск, ул. П.Бровки, 6, тел. 293-89-89, e-mail: dissovet@bsuir.by

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Интерес к проблеме расчета электромагнитного поля возник давно и постоянно стимулировался потребностями и перспективами различных практических приложений электродинамики. Результативность решения данной проблемы определяется используемыми математическими методами и эффективностью математических моделей, с точки зрения возможности их исследования этими методами. Математический аппарат электродинамики, основанный на численных методах и наиболее часто используемый сейчас в инженерной практике, не лишен ряда недостатков. Но эти недостатки не смогли закрыть существенное преимущество численных методов в сравнении с аналитическими: применение к несравненно более широкому кругу задач и относительную простоту программной реализации на ЭВМ. В то же время, эффективность аналитических методов с точки зрения построения адекватной математической модели очень высока, а проблемы популяризации этих методов лежат в плоскости преодоления математических проблем применения и создания соответствующих программно-алгоритмических средств.

Говоря об актуальности поиска новых подходов построения аналитических решений, стоит упомянуть, что, с одной стороны, они остаются основным средством решения фундаментальных проблем теоретической физики, а с другой, стимулируют появление и апробацию новых численных методов для решения прикладных задач.

В данной работе исследуются и развиваются возможности обобщенного метода Фурье разделения переменных (ОМФ) для построения аналитических решений дифференциальных уравнений с частными производными, моделирующих электромагнитные поля в неоднородных и нелинейных средах. В современном понимании разделение переменных – сопоставление системы (систем) обыкновенных дифференциальных уравнений эквивалентной (эквивалентных) на определенном классе функций исходному дифференциальному уравнению с частными производными. В случае успеха получаем возможность использовать хорошо развитую качественную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений к анализу решений уравнений в частных производных.

Развитие ОМФ в рамках данной работы направлено на преодоление математических проблем его использования при решении краевых задач электродинамики. Полученные результаты явились основой способа моделирования и исследования электромагнитного поля в средах с пространственно-временными изменениями электродинамических параметров в инженерных целях. Для создания соответствующего проблемно-ориентированного программного обеспечения использовалась система компьютерной алгебры MAPLE.

Фундаментальность и сложность проблемы наряду с потребностями разработчиков СВЧ устройств в повышении качества исследований электродинамических процессов и эффективности проведения адаптационных и проектных работ по радиосистемам различного назначения определяют актуальность и необходимость выполнения данных исследований.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами), темами. Тема диссертации соответствует направлению 5 « Информационно-коммуникационные, авиационные и космические технологии и аппаратура», пунктам 5.1 «методы математического и компьютерного моделирования, компьютерные технологии и интеллектуальные системы поддержки принятия решений» и 5.11 «методы, средства и технологии обеспечения высоких тактико-технических характеристик перспективных образцов бортовой аппаратуры авиационной и ракетно-космической техники, конструкций авиационных и космических аппаратов, систем управления и приема-передачи авиационной и космической информации» Перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований РБ на 2011–2015 годы, утверждённого Постановлением Совета Министров от 19.04.2010 № 585.

Исследования, в качестве ответственного исполнителя, выполнялись в рамках следующих НИР:

- г/б №214. «Решение волновых уравнений в нелинейных средах» (Гос. рег. № 19961286, 1996-2000 г.г.)
- ГПФИ «Радиофизика. Электромагнитные волны в неоднородных и нелинейных средах. (Волна)» по теме "Построение приближенных аналитических решений уравнений Максвелла в неоднородных средах методом разделения переменных" (Гос. рег. № 19961295, 1996-2000 г.г.)
- НИР ВПД №ВПД-004 ВГТУ «Моделирование электромагнитных волн в гетерогенных средах» (Гос. рег. №2001306, 2001-2005 г.г.)
- ГПОФИ "Электроника 40",по теме «Построение приближенных аналитических решений уравнений электродинамики в нелинейных средах с пространственно-временными изменениями параметров» (Гос. рег. №20014745, 2001-2005 г.г.)

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является нахождение правил и закономерностей применения обобщенного метода Фурье разделения переменных для построения аналитических .решений краевых задач электродинамики неоднородных и нелинейных сред.

Для достижения этой цели в работе были поставлены следующие задачи:

1. Классифицировать и формализовать волновые уравнения электродинамики, моделирующие электромагнитное поле в средах с пространственно-временными изменениями параметров.
2. Исследовать общие закономерности и найти правила определения постоянных разделения при использовании ОМФ для аналитического решения волновых уравнений.
3. Разработать алгоритм применения улучшенного ОМФ для решения краевых задач электродинамики неоднородных и нелинейных сред с пространственно-временными изменениями параметров.
4. Реализовать разработанный алгоритм в виде проблемно-ориентированного программного обеспечения.

Объектом исследования является электромагнитное поле в средах с пространственно-временными изменениями электромагнитных параметров. Предметом исследования являются математические методы аналитического решения волновых уравнений электродинамики. Данный выбор объекта и предмета исследования обусловлен потребностями прикладной электродинамики.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Общий вид скалярных волновых уравнений, моделирующих электромагнитное поле в средах с пространственно-временными изменениями электромагнитных параметров.
2. Способ улучшения ОМФ, заключающийся в обоснованном приведении матрицы постоянных разделения к специальному виду.
3. Алгоритм применения улучшенного ОМФ для решения краевых задач электродинамики неоднородных и нелинейных сред.
4. Комплекс программ для математического моделирования и исследования электромагнитного поля в средах с пространственно-временными изменениями параметров.

Личный вклад соискателя. Результаты диссертационной работы, сформулированные в защищаемых положениях и выводах, отражают личный вклад соискателя. Из совместно опубликованных работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором лично, а также результаты, полученные на паритетных началах с соавтором, являющимся научным руководителем.

Апробация результатов диссертации. Результаты исследований докладывались на следующих конференциях:

- МНК "Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании"», Минск, БГУ, 1997г.
- XXXI НТК преподавателей и сотрудников Витебск, ВГТУ, 1998г.
- XXXII НТК преподавателей и сотрудников Витебск, ВГТУ, 1999г.
- II МНК CAS-99, Минск, БГУ, 1999г.
- 54 НТК БГПА, Минск, 2000г.
- РНК студентов и аспирантов. Гомель: ГГУ, 2002г.
- МНК "Еругинские чтения - IX", Витебск, ВГУ, 2003г.
- II МНК «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Минск, БГУ, 2009 г.

Опубликованность результатов диссертации. Основные результаты диссертационных исследований опубликованы в 20 научных работах, в том числе в 9 статьях в рецензируемых журналах, 3 электронных публикации на рецензируемых ресурсах удаленного доступа, 1 статье в сборнике материалов конференции, 7 тезисах докладов конференций. Из этих работ 9 научных публикаций (общим объемом 3,15 авторских листа), соответствуют пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в РБ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, включающих 12 разделов, заключения, библиографического списка, 8 приложений. В первой главе определен общий вид скалярного волнового уравнения, моделирующего электромагнитное поле в средах с пространственно-временными изменениями электромагнитных параметров. Вторая глава посвящена изложению теории ОМФ, определению проблемы его практического использования и решению этой проблемы. Третья глава посвящена практической реализации улучшенного ОМФ. Полный объём диссертации составляет 170 страниц; из них 6 страниц занимают иллюстрации, 76 страниц занимают приложения. Библиографический список состоит из 117 наименований (на 9 страницах), из которых 20 – публикации соискателя.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе **первой главы** приведен обзор существующих методов решения задач прикладной электродинамики определяющий актуальность тематики данных исследований. Из приведенного обзора математических методов построения решений в задачах электродинамики следует, что каждый из них работает в своей ограниченной области определения задачи. Поэтому говорить о создании метода моделирования и исследования электромагнитного поля, обладающего определенной универсальностью, на базе какого-то из них не приходится. В то же время общая отправная точка задач электродинамики в виде уравнений Максвелла говорит о возможности такого метода.

В этой связи привлекательны аналитические методы. Среди известных аналитических методов представляет интерес, с точки зрения возможности применения в задачах прикладной электродинамики, один из основных методов для уравнений в частных производных – метод разделения переменных, часто именуемый методом Фурье. Рассматривая только общие этапы применения классического метода Фурье (КМФ), можно представить следующую схему для случая двух переменных:

1. В исходную задачу, содержащую уравнение с частными производными $L\left(x, y, \Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right) = 0$ и дополнительные условия (начальные, граничные и др.), подставляется формальное частное решение в виде:
$$\Psi = X(x)Y(y) \tag{1}$$
2. В получившемся уравнении выделяют части по независимым переменным (предполагается, что это возможно):
$$L_1(x, X, X', X'') + L_2(y, Y, Y', Y'') = 0$$
3. Строятся системы разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений эквивалентных исходному уравнению в частных производных:
$$L(x, X, X', X'') = \lambda, \quad L(y, Y, Y', Y'') = -\lambda$$

Стоит отметить, что успех применения этого метода достигается в ограниченном числе случаев как исходных уравнений в частных производных, так и видов граничных условий для краевых задач.

Поскольку объектами для этого метода являются скалярные уравнения в частных производных, то необходима процедура разделения системы векторных уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Иногда эту процедуру называют скаляризацией и, традиционно, ее результативность определяла возможность применения метода Фурье для задач электродинамики. В развиваемом методе построения аналитических решений в полном, классическом, смысле скаляризация не является обязательной, т.к. имеется возможность работать и с системой уравнений в частных производных. Однако, в случае успеха разделения уравнений Максвелла, упрощается алгоритм решения и уменьшается объем требуемых вычислений. В рамках данной работы рассматриваются пространственно-неоднородные и (или) нестационарные среды, параметры которых представляют собой функции от координат и времени ($\varepsilon = \varepsilon(\vec{r},t)$, $\mu = \mu(\vec{r},t)$, $\sigma = \sigma(\vec{r},t)$). Для анизотропных сред рассмотрены лишь некоторые частные случаи неоднородностей. Во всех рассматриваемых случаях проведен анализ условий, при которых возможна скаляризация уравнений Максвелла. В приложении А рассмотрены примеры сред, интересных с практической точки зрения, для которых с достаточностью возможно получение независимых уравнений для пары полевых векторов или одного из них. В рамках этого раздела рассмотрены необходимые преобразования, на основе которых были разработаны алгоритмы построения волновых уравнений в неоднородных и нелинейных средах и их программная реализация на языке системы компьютерной алгебры MAPLE. Пакет созданных программ позволяет строить волновые уравнения для компонент векторов электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для произвольных зависимостей параметров среды от координат и времени в рамках класса неоднородных сред. Листинги этих программ представлены в приложение Б. В приложении В приведена программа, которая позволяет построить скалярные волновые уравнения для электродинамических потенциалов в неоднородных и нелинейных средах. Все программы допускают построение волновых уравнений в любой ортогональной системе координат. Более того, построив волновые уравнения в одной системе координат, имеется возможность перейти к произвольным неортогональным координатам. Единственным требованием такого перехода является невырожденность преобразования. Для проведения прямых и обратных преобразований в волновых уравнениях с заменой переменных создан программный модуль, листинг которого приведен в приложении Г.

Безусловно, создание упомянутого программного обеспечения не является самоцелью. Его использование автоматизировало довольно трудоемкий этап построения аналитических решений уравнений Максвелла для рассматриваемых сред и, что немаловажно, позволило провести анализ построенных волновых уравнений с целью определения метода дальнейшего их решения. В приложении Д приведены построенные волновые уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в различных типах неоднородных сред.

В качестве основного результата по первой главе можно отметить определение объекта применения метода разделения переменных в виде формализованных волновых уравнений. В общем случае неполяризованной волны в неоднородных и нестационарных средах получается система из шести уравнений вида:

$$\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(x_1,...,x_4)\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{4} B_{ij}(x_1,...,x_4)\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{6} C_i(x_1,...,x_4)\Psi_i + D(x_1,...,x_4) = 0 \tag{2}$$

где Ψ_n – неизвестные функции-компоненты, векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

A, B, C – коэффициенты, в которые входят функциональные зависимости параметров среды или их производные.

Возможно неполное разделение уравнений Максвелла, когда формируются две системы для компонентов полевых векторов по три уравнения вида:

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(x_1,\dots,x_4)\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} B_{ij}(x_1,\dots,x_4)\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{3} C_i(x_1,\dots,x_4)\Psi_i + D(x_1,\dots,x_4) = 0\end{gathered} \tag{3}$$

Возможны случаи полного разделения уравнений Максвелла, когда в итоге мы будем иметь независимые уравнения для определения отдельных компонент $\vec{E}$ и (или) $\vec{H}$ вида:

$$\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(x_1,\dots,x_4)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{4} B_i(x_1,\dots,x_4)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} + C(x_1,\dots,x_4)\Psi + D(x_1,\dots,x_4) = 0 \tag{4}$$

В случае монохроматических полей в анизотропных неоднородных средах, рассмотренных в разделе 1.2.4, система состоит из трех уравнений следующего формализованного вида:

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{3} C_i(x_1,x_2,x_3)\Psi_i + D(x_1,x_2,x_3) = 0\end{gathered} \tag{5}$$

Без потери общности, с целью сокращения используемых выражений, в дальнейшем изложении будет использоваться только уравнение вида (4) для двумерного случая.

Вторая глава посвящена изложению теории развиваемого метода построения аналитических решений и определении проблем его практического использования. В первом разделе второй главы обосновывается выбор метода Фурье разделения переменных в качестве основы поиска аналитических решений, и рассматриваются причины ограниченности традиционного варианта этого метода.

Показано, что попытка применить этот метод к уравнению (4) приводит к необходимости решения уравнения вида: $\sum_i f_i(x)g_i(y) = 0$, где i – для рассматриваемых сред не менее 3.

Это функциональное билинейное уравнение. КМФ, а именно 2 этап его применения, для подобных выражений с успехом работает при двух слагаемых, но в общем случае не применим. Возникает необходимость развития технологии метода с целью поиска решения подобных уравнений. В этой связи представляет интерес подход харьковской школы математиков, в котором рассматривается развитие КМФ через решение функциональных билинейных уравнений. В соответствие с этим подходом, в качестве исходного, возьмем уравнение (4), которое в двумерном случае может быть записано в виде:

$$A_{21}(x,y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+A_{22}(x,y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+A_{23}(x,y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+A_{11}(x,y)\frac{\partial\Psi}{\partial x}+$$
$$+A_{12}(x,y)\frac{\partial\Psi}{\partial y}+A_{01}(x,y)\Psi+A_{00}(x,y)=0 \qquad (6)$$

Введя обозначение дифференциального оператора

$$L=A_{21}(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_{22}(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A_{23}(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+$$
$$+A_{11}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+A_{12}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+A_{01}(x,y), \qquad (7)$$

уравнение (6) может быть записано в виде:

$$L\Psi(x,y)+A_{00}(x,y)=0, \qquad (8)$$

В отличие от (1), частные решения ищутся в виде

$$\Psi(x,y)=\sum_{k=1}^{S}X_k(x)\,Y_k(y) \qquad (9)$$

Неоднородность представляется в виде:

$$A_{00}(x,y)=\sum_{k=1}^{t}\Phi_k(x)\,\mathrm{T}_k(y), \qquad (10)$$

Автор[1] указывает, что данный подход реализуется только в случае, когда оператор уравнения (6) является разделяющимся, то есть существует совокупность операторов L_{ix},L_{iy} $(i=\overline{1,l};l$ - некоторое натуральное число), таких, что L_{ix},L_{iy} действуют только по переменным x и y соответственно, и для всех функций вида (9), на которых определен оператор L, выполняется тождество

$$L\Psi(x,y)=\sum_{i=1}^{l}L_{ix}(X_1(x),X_2(x),...,X_S(x))L_{iy}(Y_1(y),Y_2(y),...,Y_S(y)) \qquad (11)$$

Данное условие применительно к уравнению (6) означает требование разделимости функциональных коэффициентов дифференциального оператора (7), т.е. возможность представления их в виде:

$$A_i(x,y)=\sum_{j=1}^{m_i}A_{xij}(x)\,A_{yij}(y), \qquad (12)$$

где $i=\overline{1...6}$, а $\sum_i m_i=m$.

Уравнение (6) с учетом (9) и (12) приобретает вид билинейного функционального

---

[1] Скоробогатько, В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными / Скоробогатько В.Я. – Киев: Наукова думка, 1980 – 244 с.

$$\sum_{k=1}^{N} f_k(x) g_k(y) = 0 \qquad (13)$$

где $N = m \times S + t$, а S называют модификацией ОМФ, и обозначают ОМФ-S.

Очевидно, что предполагается в (13) $f_k(x)$, $g_k(y)$ тождественно не равны нулю для любого $k = \overline{1,N}$. В противном случае это уравнение сохраняет свой вид, но с меньшим значением N. Так же отмечено, что наборы функций $X_k(x)$, $Y_k(y)$ являются линейно независимыми. Иначе в (9) количество слагаемых уменьшится.

Уравнение (13) представляется в матричном виде:

$$\mathbf{f}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{g} = 0,$$

$$\text{где } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_N(x) \end{pmatrix}; \ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \dots \\ g_N(x) \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$ - матрица, транспонированная к $\mathbf{f}$.

Далее строятся матрицы $\mathrm{A}[i^r]$, элементы которых a_{ij} определяются соотношениями:

$$\mathsf{a}_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \alpha_{ij}, i \in \{j^r\}, j \in \{i^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}, \end{cases} \qquad (15)$$

где α_{ij} - произвольные числовые коэффициенты (параметры разделения), а целочисленные множества $\{i^r\}$, $\{j^r\}$, такие, что

$$\left.\begin{array}{l} \{i^r\} = \{i_1,.\,.i_r\}, 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le N, \\ \{j^r\} = \{j_1,..j_{N-r}\}, 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_{N-r} \le N \\ r = \overline{1,N}, \{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1,2,..N\}, \quad \{i^r\} \cap \{j^r\} = \varnothing\} \end{array}\right\}.$$

С использованием матриц строятся системы разделенных уравнений

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}[i^r])\,\mathbf{f} = 0, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}[i^r]\,\mathbf{g} = 0 \qquad (16)$$

Здесь $\mathbf{E}$ - единичная матрица порядка N, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}[i^r]$ - матрица, транспонированная к $\mathbf{A}[i^r]$.

В соответствие с теоремой автора, решение систем (16) может быть представлено как

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}[i^r]_{i_1,\dots,i_r} \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ F_r(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}[i^r])_{j_1,\dots,j_{N-r}} \begin{pmatrix} G_1(y) \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{N-r}(y) \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где $\mathbf{A}[i^r]_{k_1,\dots,k_s}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}[i^r]_{k_1,\dots,k_s}$, - матрицы, образованные столбцами $k_1,\dots,k_S$ матриц $\mathbf{A}[i^r], \mathbf{A}^{\mathrm{T}}[i^r]$, соответственно; $F_1(x),\dots,F_r(x)$ - произвольная линейно независимая система функций от переменной x, выступающих в качестве базисных для определения остальных функций этой переменной, а $G_1(y),\dots,G_{N-r}(y)$ - произвольная система функций от y.

Для нахождения всех решений уравнения (13) необходимо рассмотреть 2^N, систем уравнений определяемых (16). В итоге результаты данной теории малопригодны к практическому применению из-за своей объемности и сложности. Действительно, простейший анализ показывает, что если в уравнении (13) $N=6$, необходимо решить 64 переопределенных систем вида (17), а при $N=9$ число систем подлежащих рассмотрению увеличивается до 512. Так же автор, говоря о «неудобстве» практического использования отмечает, что «...необходимо решать переопределенные системы уравнений с произвольными свободными членами, которые нужно подобрать так, чтобы системы были совместны».

Обосновывая выбор этого подхода для решения прикладных задач электродинамики, в первую очередь стоит подчеркнуть ее потенциальные возможности, которые заложены в представлении искомой функции (9). Для раскрытия этих возможностей воспользуемся теоремой Колмогорова, которая завершает серию исследований по точному представлению многомерной функции, и устанавливает, «...что каждая непрерывная функция n переменных, заданная на единичном кубе n-мерного пространства, представима в виде:

$$f(x_1,x_1,\dots,x_n)=\sum_{q=1}^{2n+1}h_q\left[\sum_{p=1}^{n}\varphi_q^p(x_p)\right]$$

где функции h непрерывны, а функции φ кроме того, еще и стандартны, т.е. не зависят от выбора функции f ».

Из данной теоремы следует, что для любой непрерывной функции двух переменных необходимы максимум 10 слагаемых в виде произведения функций по каждой переменной. Записать аналитически можно следующим образом:

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=\sum_{q=1}^{5}h_q(u)\left[\sum_{p=1}^{2}\varphi_{pq}(x_p)\right]=\sum_{q=1}^{5}h_q(u)\big(\varphi_{1q}(x_1)+\varphi_{2q}(x_2)\big)=\\&=h_1(u)\big(\varphi_{11}(x_1)+\varphi_{21}(x_2)\big)+h_2(u)\big(\varphi_{12}(x_1)+\varphi_{22}(x_2)\big)+\\&+h_3(u)\big(\varphi_{13}(x_1)+\varphi_{23}(x_2)\big)+h_4(u)\big(\varphi_{14}(x_1)+\varphi_{24}(x_2)\big)+\\&+h_5(u)\big(\varphi_{15}(x_1)+\varphi_{25}(x_2)\big)=h_1(u)\varphi_{11}(x_1)+h_1(u)\varphi_{21}(x_2)+\\&+h_2(u)\varphi_{12}(x_1)+h_2(u)\varphi_{22}(x_2)+h_3(u)\varphi_{13}(x_1)+h_3(u)\varphi_{23}(x_2)+\\&+h_4(u)\varphi_{14}(x_1)+h_4(u)\varphi_{24}(x_2)+h_5(u)\varphi_{15}(x_1)+h_5(u)\varphi_{25}(x_2)\end{aligned},$$

где u – одна из переменных x_1,x_2.

Основываясь на этой теореме можно утверждать, что:

- представление частных решений вида (9) значительно расширяет класс функций по сравнению с (1), на котором ищется решение;
- снимается ограничение применения этого метода, вытекающие из требования о разделимости оператора (12), что очевидно возможно, как следствие теоремы

Колмогорова. Другими словами, данная теорема позволяет относить операторы уравнений электродинамики рассматриваемых сред к классу разделяющихся.

Возвращаясь к возможности применения теории харьковских математиков для построения аналитических решений уравнений прикладной электродинамики отметим, что проблема обьемности требуемых вычислений на практике была решена Андрушкевичем И.Е. Им в виде ряда теорем обосновано уменьшение количества систем подлежащих рассмотрению до $N-2S$. Но на пути алгоритмизации этого метода, а, следовательно, и повышения его практической значимости применительно к рассматриваемым задачам осталась проблема в виде необходимости нахождения большого числа произвольных коэффициентов α_{ij}, которых в каждой системе (17) по $(N\text{-}r)\times r$. Возникает проблема количественной избыточности этих параметров, которая не позволяет формализовать для алгоритмизации построение решения.

Для решения этой проблемы доказываются пять теорем, обосновывающих количественную избыточность блока неопределенных коэффициентов α_{ij}. Основа доказательства – поиск невырожденного унитарного преобразования матрицы коэффициентов в различных случаях соотношения между N (размерностью билинейного уравнения) и r (количество базисных функций из набора функций $f_k(x),\left(k=\overline{1,N}\right)$):

Теорема 1.

Если N – четное, $r=N/2$, то для матриц $\mathbf{A}[i^r]$, определенных (15), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и проводящее блок неопределенных коэффициентов α_{ij} к диагональному виду.

В этом случае матрица $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ заменяется подобной ей $\mathbf{B}\left[i^r\right]$, с элементами

$$\mathrm{b}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\left\{i^{N/2}\right\}, \\ 0, i\in\left\{i^{N/2}\right\}, j\in\left\{i^{N/2}\right\}, i\neq j, \\ \beta_{i_k,j_n}\delta_{kn}, i\in\left\{j^{N/2}\right\}, j\in\left\{i^{N/2}\right\}, \\ 0, j\in\left\{j^{N/2}\right\}, \end{cases} \tag{18}$$

Теорема 2.

Если $r\langle N/2$, то для матриц $\mathbf{A}[i^r]$, определенных (15), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и проводящее квадратный блок $r\times r$ неопределенных коэффициентов α_{ij} к диагональному виду.

В этом случае матрица $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ заменяется подобной ей $\mathbf{B}\left[i^r\right]$, с элементами

$$
b_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{j_n, i_k} \delta_{nk}, i \in \{ j_1, ..., j_n, ..., j_r\}, \ j \in \{i_1, ..., i_k, ..., i_r\}, \\ \beta_{j_n, i_k}, i \in \{ j_{r+1}, ..., j_n, ..., j_{N-r}\}, \ j \in \{i_1, ..., i_k, ..., i_r\}, \\ 0, \ j \in \{j^r\}. \end{cases} \qquad (19)
$$

Теорема 3.

Если $r \rangle N/2$, то для матриц $A[i^r]$, определенных (15), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и проводящее квадратный блок $(N-r)\times(N-r)$ неопределенных коэффициентов α_{ij} к диагональному виду.

В этом случае матрица $A[i^r]$ заменяется подобной ей $B[i^r]$, с элементами

$$
b_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \in \{i^r\}, \\ 0, \ i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \beta_{j_n, i_k} \delta_{nk}, \ i \in \{ j_1, ..., j_n, ..., j_{N-r}\}, j \in \{i_1, ..., i_k, ..., i_{N-r}\}, \\ \beta_{j_n, i_k}, \ i \in \{ j_1, ..., j_n, ..., j_{N-r}\}, j \in \{i_{N-r+1}, ..., i_k, ..., i_r\}, \\ 0, \ j \in \{j^r\}. \end{cases} \qquad (20)
$$

Терема 4

Если $r \langle N/2$, то для матриц $A[i^r]$, определенных (19), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов до $N-r$.

Терема 5.

Если $r \rangle N/2$, то для матриц $A[i^r]$, определенных (20), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов до r.

Данные теоремы определили достаточное количество параметров разделения, а необходимое определяется следующей леммой:

Для нахождения нетривиального решения уравнения вида (13) количество значимых параметров разделения не может быть меньше:

1) $N-r$ для случая $r \le N/2$;

2) r для случая $r \ge N/2$.

Учитывая в совокупности теоремы 1-5 и лемму, основную теорему[2] из теории ОМФ применительно к задачам прикладной электродинамики можно сформулировать следующим образом:

[2] Андрушкевич И.Е. Обобщенный метод Фурье разделения переменных. ./ И.Е. Андрушкевич// Вестник Полоцкого государственного университета. – №4. – 2005. – С.28 – 34.

Для построения аналитического решения вида (9) уравнения вида (6), необходимо и достаточно, используя представление в виде (13) получить решения $N-2S$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\left(\mathbf{E}-\mathbf{C}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f}=0, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]\mathbf{g}=0$$

где $\mathbf{C}\left[i^r\right]$ - матрица размерности $N \times N$, элементы которой определяются следующими соотношениями для случаев соответственно:

1. $r = N/2$ $\quad \mathbf{c}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\left\{i^r\right\}, \\ 0, i\in\left\{i^r\right\}, j\in\left\{i^r\right\}, i\neq j, \\ \chi_{j_n, i_k}\delta_{nk}, , i\in\left\{j_1,\ldots,j_n,\ldots,j_{N/2}\right\}, j\in\left\{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_r\right\}, \\ 0, j\in\left\{j^r\right\}. \end{cases}$

2. $r < N/2$ $\quad \mathbf{c}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\left\{i^r\right\}, \\ 0, i\in\left\{i^r\right\}, j\in\left\{i^r\right\}, i\neq j, \\ \chi_{j_n, i_k}\delta_{lk}, l=n-\left[\dfrac{n}{r}\right]r, \begin{cases} i\in\left\{j_1,\ldots,j_n,\ldots,j_{N-r}\right\} \\ j\in\left\{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_r\right\}\end{cases}, \\ 0, j\in\left\{j^r\right\}. \end{cases}$

3. $r > N/2$ $\quad \mathbf{c}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\left\{i^r\right\}, \\ 0, i\in\left\{i^r\right\}, j\in\left\{i^r\right\}, i\neq j, \\ \chi_{j_n, i_k}\delta_{nl}, l=k-\left[\dfrac{r}{k}\right]r, \begin{cases} i\in\left\{j_1,\ldots,j_n,\ldots,j_{N-r}\right\} \\ j\in\left\{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_r\right\}\end{cases}, \\ 0, j\in\left\{j^r\right\}. \end{cases}$

где χ_{ij} - произвольные числовые коэффициенты, $\left\{i^r\right\}, \left\{j^r\right\}$ – для каждого $r=\overline{S, N-S}$ одна из возможных пар упорядоченных целочисленных множеств, таких, что

$$\left\{i^r\right\}=\left\{i_1,\ldots,i_r\right\}; \left\{j^r\right\}=\left\{j_1,\ldots,j_{N-r}\right\}; \left\{i^0\right\}=\varnothing; \left\{j^0\right\}=\left\{1,2,\ldots,N\right\},$$

$$1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le N; 1\le j_1<j_2<\ldots<j_{N-r}\le N; \left\{i^r\right\}\cup\left\{j^r\right\}=\left\{1,2,\ldots,N\right\}; \left\{i^r\right\}\cap\left\{j^r\right\}=\varnothing.$$

Обозначение $\left[\dfrac{n}{r}\right]$ применяется для целой части числа $\dfrac{n}{r}$, т.е. наибольшее целое, не превосходящее этого числа.

Данную теорему можно рассматривать как теоретическую основу для алгоритмизации применения ОМФ при решении прикладных задач электродинамики сред с пространственно-временными изменениями параметров.

Третья глава посвящена практической реализации улучшенного ОМФ. В качестве основы алгоритма предлагается схема применения ОМФ состоящая из следующих этапов:

1. В исходной задаче, содержащей

а) уравнение вида $\sum_i A_i(x,y)L_i=0$,

где $L_i=a_{i,0}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+a_{i,1}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+a_{i,2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+a_{i,3}\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}+a_{i,4}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}+a_{i,5}\Psi+a_{i,6}$,

$a_{i,j}$ - числовые константы;

б) краевые условия $\Phi[\Psi(a,y),\Psi'(b,y),\Psi(x,c),\Psi'(x,d),x,y]=0$,
где Φ - функциональный оператор, *a, b, c, d* – const,
в случае необходимости, осуществляем замену переменных $\begin{cases} x=U(u,v) \\ y=V(u,v) \end{cases}$, $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial u} & \dfrac{\partial U}{\partial v} \\ \dfrac{\partial V}{\partial u} & \dfrac{\partial V}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ для представления коэффициентов уравнения в виде $A_i(x,y)=\sum_{j=1}^{S_i} A_{uij}(u)\,A_{vij}(v)$.

2. Путем подстановки вида частных решений $\Psi(u,v)=\sum_{i=1}^{S} X_i(u)Y_i(v)$, ($S=1..10$, значение выбирается из вида уравнения и краевых условий) исходное уравнение приводится к виду билинейного функционального $\sum_{k=1}^{N} f_k(u)\cdot g_k(v)=0$,

где $f_k=b_{k,0}(u)+\sum_{i=1}^{S} b_{k,1}(u)X_i+\sum_{i=1}^{S} b_{k,2}(u)X_i'+\sum_{i=1}^{S} b_{k,3}(u)X_i''$,

$g_k=c_{k,0}(v)+\sum_{i=1}^{S} c_{k,1}(v)Y_i+\sum_{i=1}^{S} c_{k,2}(v)Y_i'+\sum_{i=1}^{S} c_{k,3}(v)Y_i''$

3. Выбираем $r=S$ линейно-независимых функций на множестве f_k и формируем матрицы функций $\mathbf{F}_r^{\mathrm{T}}=(f_1,...f_r)$; $\mathbf{F}_{N-r}^{\mathrm{T}}=(f_{r+1},...f_N)$; $\mathbf{G}_r^{\mathrm{T}}=(g_{r+1},...g_N)$; $\mathbf{G}_{N-r}^{\mathrm{T}}=(g_1,...g_r)$.
4. Формируем матрицу $\mathbf{A}_r$ параметров разделения с учетом обоснованного уменьшения количества коэффициентов систем разделенных уравнений по одному из следующих правил:
   - *а)* Если $r=N/2$, то $a_{ij}=\alpha_{j_n,i_k}\delta_{nk}$

где $i\in\{j_1,...,j_n,...,j_{N/2}\}$, $j\in\{i_1,...i_k,...,i_{N/2}\}$
   - *б)* Если $r\langle N/2$, то $a_{ij}=\alpha_{j_n,i_k}\delta_{lk}$,

где $l=n-\left[\dfrac{n}{r}\right]r$, $i\in\{j_1,...,j_n,...,j_{N-r}\}$, $j\in\{i_1,...i_k,...,i_r\}$
   - *в)* Если $r\rangle N/2$, то $a_{ij}=\alpha_{j_n,i_k}\delta_{nl}$,

где $l=k-\left[\dfrac{r}{k}\right]r$, $i\in\{j_1,...,j_n,...,j_{N-r}\}$, $j\in\{i_1,...,i_k,...i_r\}$

где α_{ij} - произвольные числовые коэффициенты,
$\{i^r\},\{j^r\}$, такие, что

$$\{i^r\}=\{i_1,...,i_r\};\{j^r\}=\{j_1,...,j_{N-r}\};\{i^0\}=\varnothing;\{j^0\}=\{1,2,..,N\},$$
$$1\le i_1\langle i_2\langle...\langle i_r\le N;\ 1\le j_1\langle j_2\langle...\langle j_{N-r}\le N;\ \{i^r\}\cup\{j^r\}=\{1,2,...,N\};\ \{i^r\}\cap\{j^r\}=\varnothing,$$

5. Для выбранных *S* и *r* формируем системы разделенных ОДУ:
а)по переменной *u* $\mathbf{F}_{N-r}=\mathbf{A}_r\mathbf{F}_r$; б)по переменной *v* $\mathbf{G}_r+\mathbf{A}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{N-r}=0$.
6. На основании краевых условий с учетом представления искомой функции п.3 записываем требования вида:

а)по переменной u $\Phi_u[X_1(u),...,X_S(u),X_1'(u),...,X_S'(u),Y_1(a),...,Y_S(a),Y_1'(b),..Y_S'(b)]=0$;

б)по переменной v

$\Phi_v[X_1(c),...,X_S(c),X_1'(d),...,X_S'(d),Y_1(v),...,Y_S(v),Y_1'(v),..Y_S'(v)]=0$;

где Φ_u, Φ_v - функциональные операторы, a, b, c, d – const

7. Решая задачу п.5а, п.6а, находим собственные значения параметров разделения $\alpha_{i,j,n}$, $n=1,2,...$ и соответствующие им наборы собственных функций по переменной u $\{X_{1,n},...X_{S,n}\}$
8. Решая задачу п.5б, п.6б, находим наборы функций по переменной v $\{Y_{1,n},...Y_{S,n}\}$, соответствующие уже известным собственным значениям параметров разделения $\alpha_{i,j,n}$
9. В случае несовместности полученных систем уравнений п.7, п.8 повторяем этапы построения решения, начиная с п.3 с другим значением r из диапазона от S до $N-S$
10. В случае неудачи повторяем этапы построения решения, начиная с п.2, с другим значением S из диапазона от 1 до 10.
11. Общее решение исходной задачи ищем на основе принципа суперпозиции в виде ряда $\Psi(u,v)=\sum\limits_n\sum\limits_i h_n X_{n,i}\,Y_{n,i}$, где коэффициенты h_n определяются из требований краевых условий.
12. На заключительном этапе исследуем сходимость ряда в заданной области изменения аргументов. При необходимости осуществляется переход обратный п.1 к старым переменным.

Данная схема определяет требования к программной среде для ее реализации. В первую очередь стоит упомянуть, что помимо традиционных арифметико-логических процедур необходимо выполнение достаточно большого объема сложных символьных (аналитических) вычислений. Это явилось основным аргументом при выборе в качестве программной оболочки для реализации системы компьютерной алгебры MAPLE. Листинги программных процедур для отдельных этапов построения аналитических решений развиваемым методом приведены в приложении Д. Апробация разработанного комплекса программ проведена на тестовых примерах, рассматриваемых в заключительном разделе. Рассмотрены следующие задачи:

- Внутренние смешанные краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца в прямоугольной области;
- Расчет поля направляющей структуры треугольного сечения, определение семейства E- и H-волн;
- Взаимодействие электромагнитной волны со слоем особой проводящей среды.

С одной стороны эти задачи имеют тестовый характер, т.е. на них исследовалась теория и отрабатывалась технология применения ОМФ. С другой стороны рассматриваемые задачи, имея прикладной характер, иллюстрируют практические возможности развиваемого метода и являются подтверждением достоверности результатов данных исследований. Известные решения аналогичных задач в более простой постановке вытекают из представленных результатов как частные случаи. Тематика приведенных тестовых задач подобрана для максимальной иллюстративности возможностей развиваемого метода построения аналитических решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Научная новизна и значимость полученных в работе результатов состоит в том, что:

1. На основании анализа разделимости уравнений Максвелла в средах с пространственно-временными изменениями параметров получен общий вид скалярных волновых уравнений, моделирующих электромагнитное поле и обоснован выбор в качестве метода для построения аналитических решений таких уравнений современного варианта развития классического метода разделения переменных – ОМФ, основанного на сведении исходного уравнения к билинейному функциональному. [4–А, 10–А, 11–А, 13–А, 14–А, 15–А]
2. Разработан и обоснован способ улучшения ОМФ, заключающийся в приведении матрицы постоянных разделения к специальному виду. Доказана необходимость и достаточность матрицы этого вида для получения нетривиального решения систем разделенных уравнений эквивалентных на определенном классе функций исходному волновому уравнению с частными производными. В зависимости от соотношения между размерностью билинейного функционального уравнения N и количеством линейно-независимых функций определенных в качестве базисных r определены различные пути такого уменьшения:

- теорема 1 при $r = N/2$ позволяет уменьшить количество коэффициентов с r^2 до r. Например, для случая $N = 8$, $r = 4$ вместо 16 коэффициентов достаточно найти 4;
- теорема 2 при $r \langle N/2$ позволяет уменьшить количество коэффициентов с $(N-r)\times r$ до $(N-2r)\times r + r$. Например, для случая $N = 9$, $r = 3$ вместо 18 коэффициентов достаточно найти 12;
- теорема 3 при $r \rangle N/2$ позволяет уменьшить количество коэффициентов с $(N-r)\times r$ до $(2r-N)\times(N-r)+(N-r)$.Например, при $N = 10$, $r = 6$ вместо 24 коэффициентов достаточно определить 12;
- теорема 4 при $r \langle N/2$ позволяет уменьшить количество коэффициентов с $(N-2r)\times r + r$ до $N-r$. Например, для случая $N = 10$, $r = 3$ вместо 15 коэффициентов достаточно найти 7;
- теорема 5 при $r \rangle N/2$ позволяет уменьшить количество коэффициентов с $(2r-N)\times(N-r)+(N-r)$ до r. Например, при $N = 11$, $r = 6$ вместо 10 коэффициентов достаточно определить 6.

С учетом доказанных теорем, а так же леммы определяющей вид матрицы с минимально возможным количеством ненулевых параметров разделения, удалось сформулировать основную итоговую теорему по применению ОМФ к уравнениям электродинамики неоднородных и нелинейных сред. Данная теорема упростила построение решений разделенных уравнений, т.о. открыла возможность алгоритмизации ОМФ с целью создания исследовательского проблемно-ориентированного программного обеспечения. [5–А, 6–А, 8–А]

3. Разработан алгоритм применения улучшенного ОМФ для решения краевых задач электродинамики сред с пространственно-временными изменениями параметров. [6–А, 7–А, 9–А]

В качестве иллюстрации возможностей ОМФ и апробации разработанного способа моделирования и средств исследования решены задачи:

- внутренняя со смешанными граничными условиями в прямоугольной области для уравнений Лапласа и Гельмгольца [2–А, 19–А]
- определения семейства *E*- и *H*-волн в направляющей структуре треугольного профиля [1–А, 18–А, 20–А]
- взаимодействия электромагнитной волны со средой с особыми проводящими свойствами [3–А]

4. Разработан комплекс программ на входном языке системы компьютерной алгебры MAPLE реализующий применение ОМФ для математического моделирования и исследования электромагнитного поля в средах с пространственно-временными изменениями параметров. [7–А, 10–А, 14–А, 16–А]

Рекомендации по практическому использованию результатов

Благодаря прогнозированию изменения спектра радиосигнала из-за флуктуаций параметров среды во времени и дифракционных явлений, обусловленных пространственными изменениями можно оптимизировать работу радиолинии в сложной среде. Разработанный способ моделирования и исследования электродинамических процессов для рассматриваемых сред позволяет повысить качество и снизить затратность проектных и адаптационных работ по радиоустройствам и приборам СВЧ различного назначения.

Научные аспекты исследований нашли свою реализацию и внедрены в учебном процессе при изучении курсов «Системы компьютерной алгебры» и «Компьютерное моделирование физических процессов» для студентов физического факультета в УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» по специальности 1-31 04 01 – Физика (по направлениям), квалификация «Физик. Инженер». Данное внедрение позволило повысить качество подготовки специалистов по вышеуказанной специальности вследствие получения практических навыков использования современных средств и методов математического моделирования реальных физических процессов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в научных журналах.

1–А. Андрушкевич, И.Е. Применение обобщенного метода Фурье в задаче волновода треугольного сечения / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2002. – № 2 (24). – С.124–128.

2–А. Андрушкевич, И.Е. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца обобщенным методом Фурье / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2002. – № 3 (25). – С.113–118.

3–А. Андрушкевич, И.Е. Взаимодействие электромагнитной волны со средой с особыми проводящими свойствами / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2003. – № 1 (27). – С.116–120.

4–А. Андрушкевич, И.Е. О классификации сред с точки зрения разделимости уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский, Ю.В. Шиенок // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – №1 (35), – 2005. – С.112–118.

5–А. Андрушкевич, И.Е. Развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки – №4. – 2006. – С.26–35.

6–А. Андрушкевич, И.Е. Новые возможности применения метода разделения переменных в электродинамике неоднородных и нестационарных сред / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // «Вестник БГУ», серия «Физика. Математика. Информатика» – №2. – 2006. – С.47–53.

7–А. Жизневский, В.А. Алгоритмизация моделирования и исследования волновых процессов неоднородной электродинамики с использованием процедуры разделения переменных / В.А. Жизневский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – №3 (53), – 2009. – С.142–147.

8–А. Андрушкевич, И.Е. Дальнейшее развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – №4 (58), – 2010. – С.19–23.

9–А. Жизневский, В.А. Решение уравнений прикладной электродинамики методом разделения переменных / В.А. Жизневский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки – №9. – 2010. – С.10–18.

Статья в сборнике материалов конференций

10–А. Zhiznevskiy, V.A. Maple V and transformation of wave equations to a special kind. / I.E. Andrushkevich, V.A. Zhiznevskiy // Computer algebra in fundamental and applied research and education: proceedings of second international scientific conference, Minsk, September 20–24, 1999/ Belarusian State University. – Minsk. – 1999. – P.95–100.

Тезисы докладов на конференциях

11–А. Андрушкевич, И.Е Системы компьютерной алгебры и метод разделения переменных. / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // ТД МНК "Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании", Минск, 8-11 декабря 1997 г.»./ Минск, – БГУ. – 1997. – С.52–55.

12–А. Андрушкевич, И.Е Разделяющие ортогональные системы координат для обобщенного метода Фурье / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // ТД XXXI НТК ВГТУ, 1998г./ Витебск, – ВГТУ. – 1998. – С.54–55.

13–А. Жизневский, В.А. Неоднородные среды, допускающие разделение переменных с позиций обобщенного метода Фурье. /В.А. Жизневский// ТД XXXII НТК ВГТУ, 1999г./ Витебск, – ВГТУ. – 1999. – С.46-47.

14–А. Жизневский, В.А. Применение Maple V для решения задач распространения электромагнитных волн. /В.А. Жизневский// ТД 54 НТК БГПА, Минск, 2000/ Минск. – БГПА. – 2000. – С.167–168.

15–А. Жизневский, В.А. Преобразования координат приводящие к разделению переменных обобщенным методом Фурье в волновых уравнениях. /В.А. Жизневский, В.А. Кулешова// ТД V РНК студентов и аспирантов. Гомель: ГГУ, 2002. / Гомель: – ГГУ. – 2002. – С.124–125.

16–А. Андрушкевич, И.Е СКА "Maple" в решении задач электродинамики неоднородных и нелинейных сред. / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Международная математическая конференция "Еругинские чтения - IX", г.Витебск, 2003 / Витебск, – ВГУ. – 2003. – С.55–56.

17–А. Андрушкевич, И.Е Реализация обобщенного метода Фурье для прикладных задач электродинамики./ И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы Второй междунар. математической конф., г.Минск, 24-28 авг. 2009 г./ Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2009. – С.16–18.

Публикации на ресурсах удаленного доступа.

18–А. Андрушкевич, И.Е Семейства волн треугольного волновода. /И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // «ЖУРНАЛ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» N 5, 2002. [Электронный ресурс] – 2002. – Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/may02/index.html

19–А. Zhiznevskiy, V.A. Use of generalized Fourier method in solving interior hybrid boundary value problems / I.E. Andrushkevich, V.A. Zhiznevskiy // ElectroDynamic Systems Software Scientific http://www.eds-soft.com [Электронный ресурс] – 2004. – Режим доступа: http://www.eds-soft.com/en/publications/articles/2004/index.php?ID=24

20–А. Zhiznevskiy, V.A. Application of the generalized Fourier method to the problem of hollow waveguide with triangular cross section / I.E. Andrushkevich, V.A. Zhiznevskiy // ElectroDynamic Systems Software Scientific http://www.eds-soft.com [Электронный ресурс] – 2004. – Режим доступа: http://www.eds-soft.com/en/publications/articles/2004/index.php?ID=25

РЭЗЮМЭ

Жызнеўскі Валерый Анатольевіч

МЕТАД РАЗДЗЯЛЕННЯ ПЕРАМЕННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРЫКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРАДЫНАМІКІ

Ключавыя словы: аналітычныя рашэнні, сістэма ўраўненняў Максвела, асяроддзі з прасторава-часавымі зменамі параметраў, раздзяленне пераменных, абагульнены метад Фур'е.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца знаходжанне правіл і заканамернасцяў ужывання абагульненага метаду Фур'е раздзялення пераменных (АМФ) для пабудовы аналітычных рашэнняў краявых задач электрадынамікі неаднастайных і нелінейных асяроддзяў.

Аб'ектам даследавання з'яўляецца электрамагнітнае поле ў асяроддзях з прасторава-часавымі зменамі электрамагнітных параметраў.

Прадметам даследавання з'яўляюцца матэматычныя метады аналітычнага рашэння хвалевых ураўненняў электрадынамікі.

Найбольш важнымі новымі навуковымі вынікамі з'яўляюцца:

- Агульны выгляд скалярных хвалевых ураўненняў, якія мадэлююць электрамагнітнае поле ў асяроддзях з прасторава-часавымі зменамі параметраў і абгрунтаванне выбару метаду для пабудовы аналітычных рашэнняў гэтых ураўненняў варыянту развіцця класічнага метаду раздзялення пераменных – АМФ, заснаванага на звядзенні зыходнага ураўнення да білінейнага функцыянальнага.
- Прапанаваны і абгрунтаваны спосаб паляпшэння АМФ, які складаецца ў прывядзенні матрыцы пастаянных раздзялення да спецыяльнага выгляду. Даказана неабходнасць і дастатковасць матрыцы гэтага выгляду для атрымання нетрывіяльнага рашэння сістэм раздзеленых ураўненняў эквівалентных на вызначаным класе функцый зыходнаму хвалеваму ураўненню прыкладной электрадынамікі.
- Распрацаваны алгарытм ужывання палепшанага АМФ для рашэння краявых задач электрадынамікі асяроддзяў з прасторава-часавымі зменамі параметраў.
- Распрацаваны комплекс праграм з выкарыстаннем сістэмы камп'ютарнай алгебры MAPLE для матэматычнага мадэлявання і даследавання электрамагнітнага поля ў асяроддзях з прасторава-часавымі зменамі параметраў.

РЕЗЮМЕ

Жизневский Валерий Анатольевич

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Ключевые слова: аналитические решения, система уравнений Максвелла, среды с пространственно-временными изменениями параметров, разделение переменных, обобщенный метод Фурье.

Целью диссертационной работы является нахождение правил и закономерностей применения обобщенного метода Фурье разделения переменных (ОМФ) для построения аналитических решений краевых задач электродинамики неоднородных и нелинейных сред.

Объектом исследования является электромагнитное поле в средах с пространственно-временными изменениями электромагнитных параметров.

Предметом исследования являются математические методы аналитического решения волновых уравнений электродинамики.

Наиболее важными новыми научными результатами являются:

- Общий вид скалярных волновых уравнений, моделирующих электромагнитное поле в средах с пространственно-временными изменениями параметров и обоснование выбора метода для построения аналитических решений этих уравнений варианта развития классического метода разделения переменных – ОМФ, основанного на сведении исходного уравнения к билинейному функциональному.
- Предложен и обоснован способ улучшения ОМФ, заключающийся в приведении матрицы постоянных разделения к специальному виду. Доказана необходимость и достаточность матрицы этого вида для получения нетривиального решения систем разделенных уравнений эквивалентных на определенном классе функций исходному волновому уравнению прикладной электродинамики.
- Разработан алгоритм применения улучшенного ОМФ для решения краевых задач электродинамики сред с пространственно-временными изменениями параметров.
- Разработан комплекс программ с использованием системы компьютерной алгебры MAPLE для математического моделирования и исследования электромагнитного поля в средах с пространственно-временными изменениями параметров.

SUMMARY

Zhyznevski Valery

VARIABLE SEPARATION METHOD FOR THE PURPOSE OF APPLIED ELECTRODYNAMICS

Keywords: analytical solutions, the system of Maxwell's equations, a medium with spatial and temporal changes of the parameters, separation of variables, generalized Fourier method.

The aim of the thesis is to find the rules and regularities of the generalized Fourier method of separation of variables (GFM) for the construction of analytical solutions of boundary value problems in electrodynamics of inhomogeneous and nonlinear media.

The object of the research is the electromagnetic field in media with spatial and temporal changes of electromagnetic parameters.

The subject of the research is mathematical methods of analytical solutions of wave equations of electrodynamics.

The research novelty:

- The general form of the scalar wave equation simulating the electromagnetic field in media with spatial and temporal changes of the parameters and rationale for selecting a method for constructing analytical solutions of these equations as the variants of the classical method of separation of variables – GFM based on the reduction of the original equation to a bilinear functional.
- The way to improve the GFM, which consists in reducing a matrix of permanent separation to a special form has been proposed and justified. The necessity and sufficiency of the matrix of this kind for non-trivial solutions of systems of equations separated by a certain class of equivalent functions of the initial wave equation applied electrodynamics have been proved.
- The algorithm of the improved GFM for solving boundary value problems in electrodynamics of media with spatial and temporal changes of parameters has been proved.
- A set of programs using a computer algebra system MAPLE for Mathematical simulation and the research of the electromagnetic field in media with spatial and temporal changes of parameters has been developed.

Научное издание

Жизневский
Валерий Анатольевич

Метод разделения переменных для задач прикладной электродинамики

Специальность 01.04.03 – Радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук