ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ РАБОТЫ ГРУЗОВЫХ ТЕРМИНАЛОВ

Голубович Ю.И.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Дугинов О.И. – канд. физ.-мат. наук

В настоящей работе рассматривается задача, в которой требуется разбить фиксированную долю реберно-взвешенного сбалансированного полного двудольного графа на заданное количество подмножеств и найти в этом графе совершенное паросочетание по критерию минимума максимального суммарного веса ребер паросочетания, инцидентных вершинам одного из подмножеств разбиения доли. Анализируются варианты этой задачи, в которых ограничены сверху мощности подмножеств разбиения доли или суммы весов ребер паросочетания, инцидентных любому из подмножеств разбиения доли. Выделены полиномиально разрешимые и NP-трудные случаи задач. Обсуждаются целочисленные модели.

Постановка задач. Приведем содержательные постановки рассматриваемых в работе задач. Пусть *U, W* – множества соответственно контейнеров на временной площадке и свободных мест на основной площадке в терминале; *m* – число погрузчиков, которые перемещают контейнеры с временной площадки на основную. Для любого контейнера *u* из множества контейнеров *U* и любого места *w* из множества *W* известно время перемещения c_{uv} контейнера *u* на место *w*. В задаче требуется, во-первых, каждому контейнеру *u* из множества *U* назначить место *w* из множества *W* и, во-вторых, каждому из *m* погрузчиков назначить перевозимые им контейнеры таким образом, чтобы время завершения работы последнего погрузчика было минимальным. Будем говорить об этой задаче как о задаче *A*. Добавив к задаче *A* дополнительное условие, а именно ограничение сверху на количество контейнеров, перевозимых *i*-м погрузчиком с временной площадки на основную (i = 1, 2, …, m), получим задачу *B*. Наконец, если к задаче *A* добавить дополнительное условие – ограничения сверху на общее время работы каждого из погрузчиков, то получим задачу *C*.

Представим формулировки рассматриваемых задач в теоретико-графовой терминологии. Пусть $G = (U \cup W, E)$ – сбалансированный полный двудольный граф с долями *U, W* и множеством ребер *E*. Для любого ребра графа задан неотрицательный целочисленный вес $\omega: E \to \{0, 1, 2, \cdots\}$. Также задано натуральное число *m*. Пусть $Y = \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ – это разбиение доли *U* на *m* подмножеств (U_i – это множество контейнеров, перевозимых *i*-м погрузчиком) и *M* – это совершенное паросочетание графа *G*, которое задает соответствие между контейнерами и позициями на основной контейнерной площадке. Стоимость совершенного паросочетания *M* относительно разбиения *Y* определим следующим образом:

$$c_Y(M) = \max[(\omega(\delta(U_1) \cap M), (\omega(\delta(U_2) \cap M), \ldots, (\omega(\delta(U_m) \cap M)],$$

где $\delta(U_i)$ – множество ребер графа *G*, инцидентных вершинам подмножества U_i. В задаче требуется найти разбиение множества *U* на *m* необязательно непустых подмножеств $Y = (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ и совершенное паросочетание *M* графа *G* с минимальной стоимостью $c_Y(M)$. Если мы дополнительно потребуем, чтобы выполнялось условие $|U_i| \le b_i$ для каждого i = 1, 2, … , m, где $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – это заданные целые неотрицательные числа, то получим задачу *B*. Если дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие $\omega(\delta(U_i) \cap M) \le c_i$ для каждого i = 1, 2, … , m, то получится задача *C*.

Сформулируем задачу А в виде задачи распознавания. Условие: задан сбалансированный полный двудольный граф $G = (U \cup W, E)$ с весами на ребрах $\omega: E \to \{0, 1, 2, \cdots\}$ и целое неотрицательное число *k*. Вопрос: существуют ли совершенное паросочетание *M* в графе *G* и разбиение *Y* доли *U* на *m* подмножеств такие, что $c_Y(M) \le k$? Распознавательные версии задач *B* и *C* имеют схожий вид.

Цель работы заключается в исследовании вопросов, связанных со сложностью решения рассматриваемых задач. Мотивацией для исследований служит слабая изученность задач и актуальность их приложений в области оптимизации работ контейнерных терминалов. Отметим также, что в литературе изучаются и другие задачи, которые моделируют различные ситуации, возникающие при транспортировке грузовых контейнеров [1 – 3].

Переходим к описанию полученных результатов.

Задача А для сбалансированного полного двудольного графа с весами 0, 1 на ребрах. Предлагается следующий алгоритм решения задачи *A*, ограниченной сбалансированными полными двудольными графами с весами на ребрах из множества {0, 1}:

Шаг 1. Найдем паросочетание минимального веса *M* с помощью любого известного полиномиального (псевдополиномиального) алгоритма [4 – 6].

Шаг 2. Разобьем множество вершин доли *U* графа *G* на *m* подмножеств $Y = (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ следующим образом:

Шаг 2.1. Упорядочим ребра паросочетания *M* в порядке неубывания их веса; пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – это список ребер паросочетания *M* такой, что $\omega(e_i) \geq \omega(e_{i+1})$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

Шаг 2.2. По упорядоченности ребер *M* циклично относительно подмножеств разбиения будем добавлять инцидентную очередному ребру вершину в подмножество разбиения *Y* (т.е. в U_1 добавим инцидентную ребру e_1 вершину u_1, в U_2 – инцидентную ребру e_2 вершину u_2 и т.д.).

Таким образом, получим разбиение *Y* доли *U*. Методом от противного можно доказать, что полученное решение (*M*, *Y*) оптимально. Нетрудно видеть, что представленный алгоритм является полиномиальным. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1. Задача *A* решается за полиномиальное время в классе сбалансированных полных двудольных графов с весами 0, 1 на ребрах.

Задача В для сбалансированных полных двудольных графов с весами 0, 1 и 2 на ребрах. В работе [1] установлена сильная NP-трудность задачи *B*. При этом веса ребер графа в задаче не ограничены никакой константой. Следующая теорема усиливает этот результат.

Теорема 2. Задача *B* в классе сбалансированных полных двудольных графов с весами 0, 1 и 2 является NP-трудной.

В основе доказательства этой теоремы лежит полиномиальное сведение от NP-трудного случая задачи Наибольшая Часть Совершенного Паросочетания [7].

Целочисленная линейная модель задачи С. Сформулируем задачу *C* в виде задачи целочисленного линейного программирования.

Пусть $G = (U \cup W, E)$ – сбалансированный полный двудольный граф с заданными весами на ребрах $\omega\colon E \to \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\breve{c}_i$ – максимальное время работы *i*-го погрузчика, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Без ограничения общности можем полагать, что $U = \{1, 2, \ldots, p\}$ и $W = \{1, 2, \ldots, q\}$. Задача *C* в виде задачи ЦЛП имеет следующий вид:

$$\begin{cases} t \to \min \\ t \geq \sum\limits_{i\in U}\sum\limits_{j\in W} c_{ij} z_{ijk}, & \forall k \in \{1, \ldots, m\} \\ \sum\limits_{i\in U}\sum\limits_{j\in W} c_{ij} z_{ijk} \leq \breve{c}_k, & \forall k \in \{1, \ldots, m\} \\ z_{ijk} \geq y_{ik} + x_{ij} - 1, & \forall i \in U,\ j \in W,\ k \in \{1, \ldots, m\} \\ z_{ijk} \geq 0, & \forall i \in U,\ j \in W,\ k \in \{1, \ldots, m\} \\ \sum\limits_{j\in W} x_{ij} \leq 1, & \forall i \in U \\ \sum\limits_{i\in U} x_{ij} \leq 1, & \forall j \in W \\ \sum\limits_{k=1}^{m} y_{ik} = 1, & \forall i \in U \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, & \forall \{i, j\} \in E \\ y_{ik} \in \{0, 1\}, & \forall i \in U,\quad k \in \{1, \ldots, m\} \end{cases}$$

где z_{ijk} – переменная, принимающая значение 1, если в графе *G* ребро {*i*, *j*} принадлежит паросочетанию *M* и *i*-я вершина доли *U* принадлежит подмножеству разбиения U_k, иначе – 0; c_{ij} – вес ребра {*i*, *j*} графа *G*; x_{ij} – переменная, соответствующая ребру {*i*, *j*} графа *G*, принимает значение 1, если ребро принадлежит паросочетанию *M*, иначе – 0; y_{ik} – переменная, принимающая значение 1, если *i*-я вершина доли *U* графа *G* принадлежит подмножеству разбиения U_k, иначе – 0.

Список использованных источников:

1. Kress, D. The partitioning min-max weighted matching problem / D. Kress, S. Meiswinkel, and E. Pesch // Eur. J. Oper. Res. – 2015. Vol. 247. – P. 745-754.

2. Li X., Otto A., Pesch E. Solving the single crane scheduling problem at rail transshipment yards / X. Li, A. Otto, E. Pesch // Discrete Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 264. – P.134 – 147.

3. Meiswinkel, S. On Combinatorial Optimization and Mechanism Design Problems Arising at Container Ports. Springer Gabler, Wiesbaden, 2018. 123 p.

4. Ramshaw, L. A weight-scaling algorithm for min-cost imperfect matchings in bipartite graphs / L. Ramshaw, R. E. Tarjan // In Proc. 53rd Annu. Symp. Foundations of Computer Science, New Brunswick, NJ, USA, Oct. 20–23, 2012 (IEEE, Piscataway, 2012), pp. 581–590.

5. H. N. Gabow and R. E. Tarjan, Faster scaling algorithms for general graph matching problems / H. N. Gabow, R. E. Tarjan // J. ACM. – 1991. Vol. 38 (4). – P. 815-853.

6. Gabow, H. N. Faster scaling algorithms for network problems / H. N. Gabow, R. E. Tarjan // SIAM J. Comput. – 1989. – Vol. 18. – P. 1013-1036.

7. Дугинов, О.И. Взвешенное совершенное паросочетание с ограничениями на суммарный вес его частей / О.И. Дугинов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2021. – Т. 28., № 3. – С. 5-37.