САМОЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Головин Е.С., Жук Я.С.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук

Более и менее рациональные числа – относительно новая концепция, связанная с анализом иррациональных чисел и возможностью наиболее точного их приближения к рациональным. Данная концепция стала ещё одним способом объяснить причину, по которой число φ столь распространено в природе.

В данной работе рассматривается метод записи иррациональных чисел в виде бесконечных цепных дробей. Исходя из этого, приводится объяснение связи значения каждого i-го коэффициента дроби с возможностью их рационализации, то есть нахождения такого дробного числа, которое будет наиболее точно аппроксимировать его.

Целью данного исследования является разработка и анализ метода для определения характеристики аппроксимации числа, а также установления связи иррациональных соотношений между различными величинами в природе.

Метод представления чисел в виде цепных дробей: Цепная дробь – это конечная (в случае рациональных чисел) или бесконечная (в случае иррациональных) последовательность, в которой числа представляются в следующем виде:

$$x = [x] + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_{2+\frac{1}{x_{3+..}}}}},$$

где x – некоторое нецелое число, [x] – целая часть числа, x_i – коэффициенты дроби. Алгоритм представления чисел в данном виде следующий:

1. Целая часть числа отбрасывается, ведется работа только с нецелой частью.
2. Нецелая часть переворачивается, в итоге получается число, большее единицы. Его целая часть записывается в x_i коэффициент. Второй шаг повторяется до тех пор, пока необходимая точность не будет достигнута, либо не будет получено целое число.

Связь между дробными коэффициентами и степенью рациональности числа. Иррациональные числа при записи их описанным ранее способом будут всегда образовывать бесконечные цепные дроби. Однако при анализе дробных коэффициентов можно найти достаточно близкие по значению рациональные числа. При анализе установлено, что на возможность аппроксимации с высокой точностью может указывать большое значения x_{k+1} коэффициента, на котором планируется отбросить оставшуюся часть цепной дроби. Связано это с тем, что максимальное значение оставшейся бесконечной части цепной дроби равно единице:

$$\frac{x_k}{x_{k+1} + \frac{1}{x_{k+2} + \frac{1}{x_{k+3} + \frac{1}{x_{k+3+\cdots}}}}} \leq \frac{x_k}{x_{k+1} + 1}$$

На основании написанного нами выше, отношение значения оставшейся цепной дроби к x_{k+1} не превосходит следующего значения:

$$\frac{\dfrac{1}{x_{k+2}+\dfrac{1}{x_{k+3}+\dfrac{1}{x_{k+4}+\dfrac{1}{x_{k+5+\cdots}}}}}}{x_{k+1}} < \frac{1}{x_{k+1}}$$

Таким образом, мы получили, что чем больше x_{k+1}, тем меньшую часть значения имеет оставшаяся цепная дробь и, следовательно, тем легче для данного числа находится близкое по значению рациональное число.

Связь между иррациональностью чисел и расположением семян. Рассмотрим задачу расположения семян у цветков с точки зрения оптимальной стратегии для их максимального количества на ограниченной территории. Предположим, что цветы могут выбирать способ размещения. Один из возможных методов - размещение вдоль различных направлений в плоскости, образуя равномерный круг, разделенный на несколько частей. В случае расположения нескольких рядов на ограниченной территории, самым оптимальным решением является такое, при котором каждое семя не находится на территории другой.

Это возможно, если выбрать в качестве частоты вращения иррациональное число. При этом каждый полный оборот будет отклоняться от предыдущего на некоторый угол, так как невозможно поделить окружность на иррациональное число так, чтобы получилось целое число, означающее период. Из всех иррациональных чисел необходимо выбрать то, которое наиболее удалено от целых чисел. Таким образом, найти зависимость степени «кривых» и «прямых» рядов пыльцы от иррациональности числа является необходимым для решения данной задачи.

Проблема заключается в том, что простое увеличение значения иррационального числа может привести к бесконечности, что не соответствует реальности. Наши исследования показали, что существует способ решения, который позволяет найти оптимальное значение, что подтверждают предыдущие исследования в этой области. С помощью анализа поведения расположения семян при «частоте вращения» равной первому и второму приближениям одних из самых известных в математике чисел - π и *e*, была найдена зависимость, описанная ранее. Кроме того, было найдено число, которое частично выполняет поставленную задачу – максимальное заполнение пространства. Этим иррациональным числом является число 0.116.., которое можно представить в виде бесконечной цепной дроби [0, 8, 11, 8, 11, 8, 11, ...]. Как следует из вышеизложенного, оно должно создавать сложные узоры. Однако, если построить график, используя это число, то мы увидим, что его "цветок" не имеет особо сложной структуры, а выглядит как простой радиальный узор. Это происходит вследствие того, что в цепной дроби этого числа используются два относительно больших по значению различных числа – 8 и 11, которые, чередуясь между собой, создают хороший, однако просматриваемый узор. Таким образом, мы получаем относительно равномерное распределение пыльцы вдоль окружности.

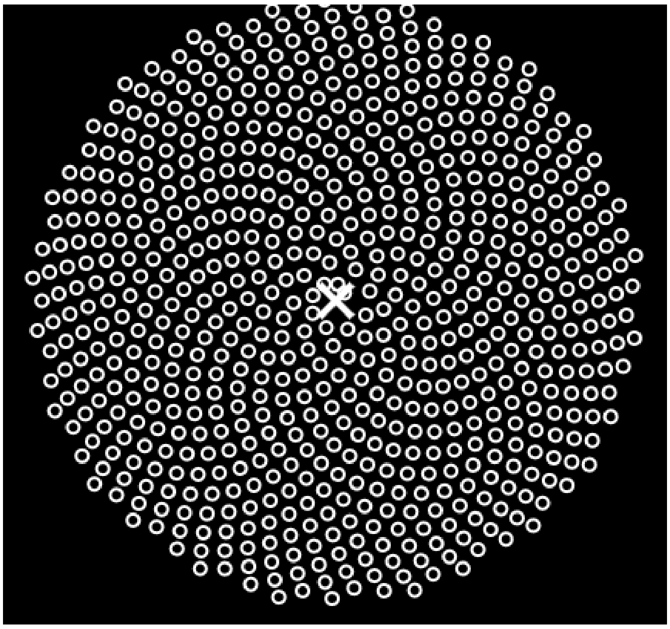

Рисунок 7 – Расположение семян при «частоте вращения» равной числу 0.116…

Следуя изложенному выше, можно с легкостью подобрать такое число, для которого рационализация будет иметь наибольшую погрешность. Таковым является число, у которого в цепной дроби в коэффициентах встречаются только единицы:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

При попытках подсчитать данную дробь ее значение стремится к золотому сечению. Одной из самых важных и занимательных особенностей такого представления чисел является то, что чем менее оно рационально, тем более хаотично и равномерно оно заполняет какую-то площадь, а чем более оно рационально, тем больше проявляются паттерны и появляется пустое пространство. Особенность числа φ состоит в том, что если взять его в качестве частоты размещения, то пространство заполняется наиболее плотно:

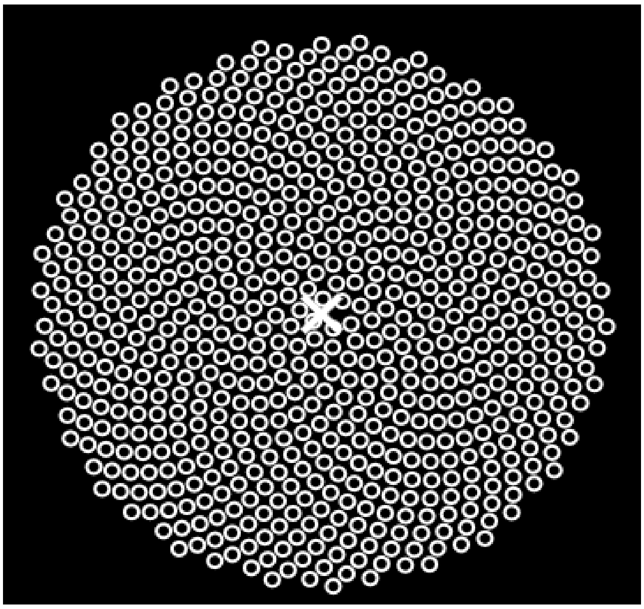

Рисунок 8 - Расположение семян при «частоте вращения» равной золотому сечению

Список использованных источников:

1. Непрерывная дробь [Электронный ресурс]. – Режим доступа https://ru.wikipedia.org/wiki/Непрерывная_дробь Режим доступа: 03.04.2023.

2. The Golden Ratio: Why it is so irrational [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.numberphile.com/videos/the-golden-ratio-why-it-is-so-irrational – Дата доступа: 03.04.2023.