ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦЫ

Карлюк П.А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Рачковский Н.Н. – канд. физ.-мат. наук

Рассмотрены рефлексивные, симметричные, асимметричные, транзитивные бинарные отношения на конечном множестве и их представление с помощью квадратных матриц, а также построение транзитивного пополнения и транзитивной оболочки бинарного отношения.

Под бинарным отношением на множестве A понимают подмножество декартова произведения этих множеств: $M \subseteq A \times A$, то есть $aMb \Leftrightarrow (a; b) \in M$ [1].

Пусть есть конечное множество $A = \{a_i, a_j, \ldots, a_n\}$ и бинарное отношение $M \subseteq A \times A$. Тогда определим матрицу M этого бинарного отношения размеров n x n по правилу:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (a_i, a_j) \in M, \\ 0, \text{если } (a_i, a_j) \notin M. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим 4 свойства бинарных отношений, а именно рефлексивность, симметричность, асимметричность и транзитивность.

- Рефлексивность.
  Бинарное отношение M на множестве A называется рефлексивным, если всякий элемент множества находится в отношении с самим собой ($\forall a \in A$: aMa). В матрице бинарного отношения: $m_{ii} = 1$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Симметричность.
  Бинарное отношение M на множестве A называется симметричным, если для каждой пары элементов множества (a_i, a_j) выполнение отношения a_iMa_j влечет a_jMa_i ($\forall a, b \in A$ $aMb \Rightarrow bMa$). Симметричность бинарного отношения означает симметричность матрицы этого бинарного отношения.
- Асимметричность.
  Бинарное отношение называется ассиметричным, если означает выполнение следующего условия: $\forall a_i, a_j \in A$ $a_iMa_j \Rightarrow \neg a_jMa_i$. Для матрицы асимметричного бинарного отношения справедливо соотношение: $m_{ij} \neq m_{ji}$.
- Транзитивность.
  Бинарное отношение M на множестве A называется транзитивным, если для любых трех элементов a_i, a_j, a_k выполнение отношений a_iMa_j и a_iMa_k влечет выполнение отношения a_iMa_k ($\forall a_i, a_j, a_k \in A$: $a_iMa_j \wedge a_jMa_k \Rightarrow a_iMa_k$). Матрица транзитивного бинарного отношения обладает следующим свойством: $m_{ij} = 1$, $m_{jk} = 1 \Rightarrow m_{ik} = 1$. Определим матрицу *M`* следующим образом: $m_{ij}` = \min \{1; c_{ij}\}$, где c_{ij} – элементы матрицы $M \cdot M$. Матрица *M* будет являться матрицей транзитивного бинарного отношения в том и только том случае, когда *M`* = *M*. Матрица *M`* определяет бинарное отношение, которое назовем транзитивным пополнением исходного бинарного отношения M [2].

Также к рассмотрению будут взяты отношение эквивалентности, отношение предпорядка и отношение строгого предпорядка.

- Отношение эквивалентности (~) – бинарное отношение, являющееся симметричным, рефлексивным, транзитивным. Для матрицы отношения эквивалентности справедливы следующие соотношения:

$$m_{ii} = 1; m_{ij} = m_{ji}; m_{ij} = 1, m_{jk} = 1 \Rightarrow m_{ik} = 1. \quad (2)$$

- Отношение предпорядка (≼) – бинарное отношение, которое является рефлексивным и транзитивным. Матрица отношения предпорядка удовлетворяет следующим условиям:

$$m_{ii} = 1; m_{ij} = 1, m_{jk} = 1 \Rightarrow m_{ik} = 1. \quad (3)$$

- Отношение строгого предпорядка (≺) – ассиметричное и транзитивное бинарное отношение. Для матрицы отношения строго предпорядка справедливо [3]:

$$m_{ii} = 0;\ mij \neq m_{ji};\ m_{ij} = 1,\ m_{jk} = 1 \Rightarrow m_{ik} = 1. \qquad (4)$$

Для отношения предпорядка ≼ рассмотрим максимальное по включению входящее в него отношение эквивалентности ~ и отношение строго предпорядка ≺. Для получения матрицы $M_{\sim}$ отношения эквивалентности ~ применятся операция поэлементного умножения матриц. Поэлементно умножив матрицу $M_{\preccurlyeq}$ отношения предпорядка ≼ на транспонированную к ней матрицу, получим матрицу эквивалентности:

$$M_{\preccurlyeq} \circ M^{T}_{\preccurlyeq} = M_{\sim}. \qquad (5)$$

В свою очередь, матрицу $M_{\prec}$ отношения строго предпорядка ≺ можно получить, отняв от матрицы $M_{\preccurlyeq}$ отношения предпорядка матрицу $M_{\sim}$ отношения эквивалентности:

$$M_{\preccurlyeq} - M_{\sim} = M_{\prec}. \qquad (6)$$

Транзитивное замыкание (транзитивная оболочка) бинарного отношения M на множестве A есть наименьшее транзитивное отношение на множестве A, включающее M. Для приведения матрицы транзитивного отношения к матрице транзитивной оболочки необходимо прибегнуть к описанной выше операции транзитивного пополнения до тех пор, пока не будет выполнятся условие:

$$(M_k)` = M_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, n, \qquad (7)$$

где $M_1 = M`$; $M_k = (M_{k-1})`$.

Поскольку множество A конечно, то для получения транзитивной оболочки достаточно провести операцию транзитивного пополнения конечное число раз.

Пример. Рассмотрим бинарное отношение на множестве (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6), задаваемое матрицей $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для этого бинарного отношения построим транзитивную оболочку.

$$M` = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\ M_1` = M_1 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\ M_2` = M_2 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\ M_3` = M_3 \cdot M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица M_3 равна матрице M_4 из этого следует, что транзитивная оболочка построена.

Список использованных источников:

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы / Мальцев А.И. – М.: Наука, 1970. – 390 с.

2. Капитонова Ю.В., Кривой С.Л., Летичевский А.А. Лекции по дискретной математике. – Санкт-Питербург, БХВ-Петербург, 2004. – 20 с.

3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для педагогических институтов. – М.: Высшая школа, 1979. -559 с.