БИНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Крутько А.А., Трубач К.И.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Данная работа посвящена рассмотрению вопроса бинарной проблемы Гольдбаха, установлению нового рекорда в количестве проверенных на соответствие гипотезе чисел, а также поиску зависимостей между чётным натуральным числом и относительным количеством его разбиений Гольдбаха.

В 1742 году математик Христиан Гольдбах послал письмо Леонарду Эйлеру [1], в котором он высказал следующее предположение: каждое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел. Эйлер заинтересовался проблемой и выдвинул более сильную гипотезу: каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел. В этом и заключается бинарная проблема Гольдбаха.

Для сбора данных (точек и их количества пар Гольдбаха) нами были использованы встроенные средства языка C#, такие как методы длинной арифметики. Помимо этого, реализованы более эффективные, чем решето Эратосфена, способы проверки числа на простоту (с помощью теста Миллера-Рабина). Также было разработано программное средство, предоставляющее возможность получить указанные точки в удобном для обработки формате. Поскольку установленный рекорд проверенного на соответствие гипотезе числа равен $4 \cdot 10^{18}$ [2], наша программа начала работать именно с этого значения. По состоянию на 02:45 2 апреля 2023 года проверено число 4000000004770320679, то есть рекорд превзойдён практически на 5 миллиардов чисел.

Если пронаблюдать за количеством разложений для разных чисел, становится заметно, что существуют такие числа, у которых пар Гольдбаха значительно больше, чем у их левого и правого соседей, – точки выброса. С использованием упомянутого программного средства нами был получен график, представленный на рисунке 2 и изображающий на плоскости все точки, связывающие чётные натуральные числа и количество их разложений Гольдбаха.

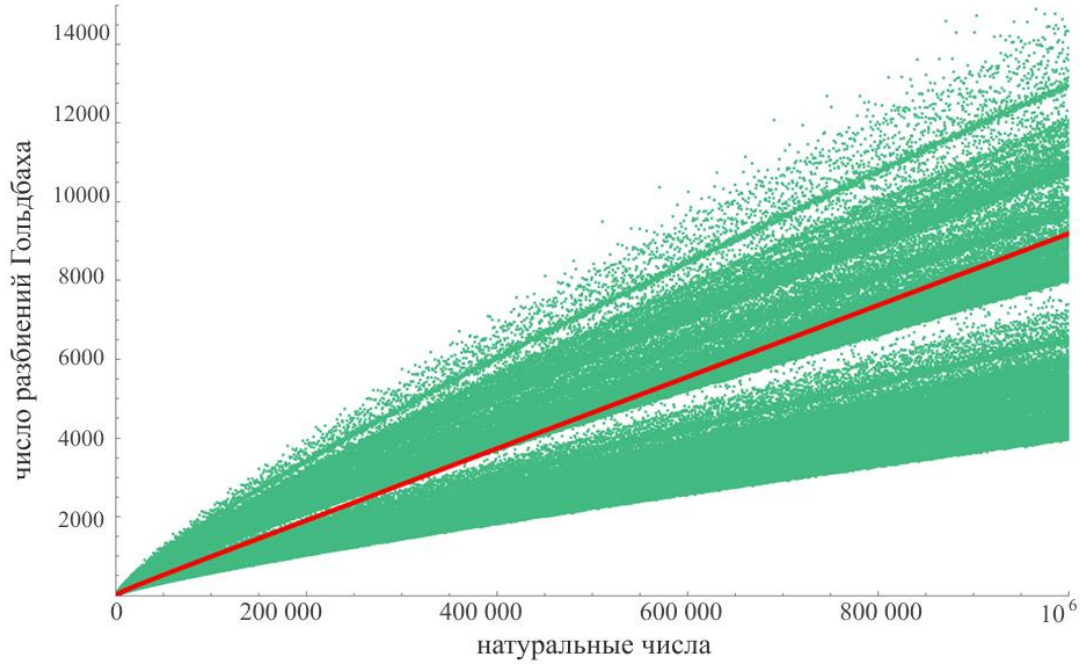

Рисунок 1 – распределение точек, а также усредненное значение (красная линия)

Поскольку любое следующее простое число можно получить из суммы определённых предыдущих простых, а также ввиду того, что для получения любого числа достаточно иметь некоторое количество двоек и троек, очевидно, что, если x среди простых множителей содержит и 2, и 3, оно обладает большим числом пар по сравнению с, например, k, имеющим в разложении только 2. Отсюда вытекает три следствия: на количество пар влияют (в порядке убывания степени влияния) число уникальных простых множителей, затем – общее число простых множителей, затем – количество чисел-близнецов, которые связаны с конкретным x.

Изучая график (рис. 2), мы смогли обнаружить некоторую интересную зависимость:

$$x = 30n, n \in N \quad (1),$$

Возникновение такого большого числа пар Гольдбаха (последовательность показана на рисунке 3) у элементов этой зависимости обусловлено тем, что само число 30 раскладывается на простые множители 2, 3, 5 – т. е. уникальность его равна 3, а также с ним связаны две пары чисел близнецов (т.е. в разложении числа на сумму простых участвуют пары (11,13), (17,19)). Сами по себе числа-близнецы – простые числа, разность которых равна двум. Как правило, их пары, кроме первых двух, имеют вид $30n \pm 1$, либо $30n + 12 \pm 1$, либо $30n + 18 \pm 1, n \in Z, n \geq 0$.

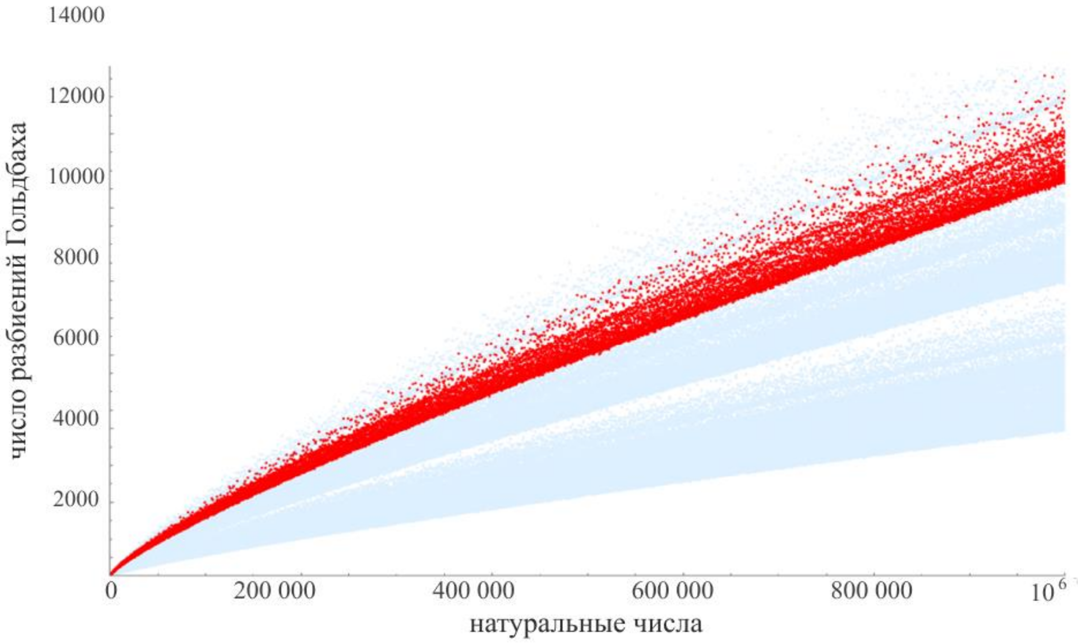

Рисунок 2 – распределение точек последовательности $x = 30n, n \in N$

Из имеющейся информации нам удалось получить три вывода: последовательности вида $x = kn, k = \{30, 42, 48\}, n \in N$ – будут иметь большее по сравнению с остальными последовательностями число пар; последовательность вида $x = (k-2)n, k = \{30, 42, 48\}, n \in N$ – будет иметь среднее число пар ввиду свойств чисел-близнецов; последовательность вида $x = (k+2)n, k = \{30, 42, 48\}, n \in N$ – будет иметь наименьшее число пар ввиду наличия только одного уникального простого множителя;

Примеры каждой из приведённых последовательностей изображены на рисунке 3.

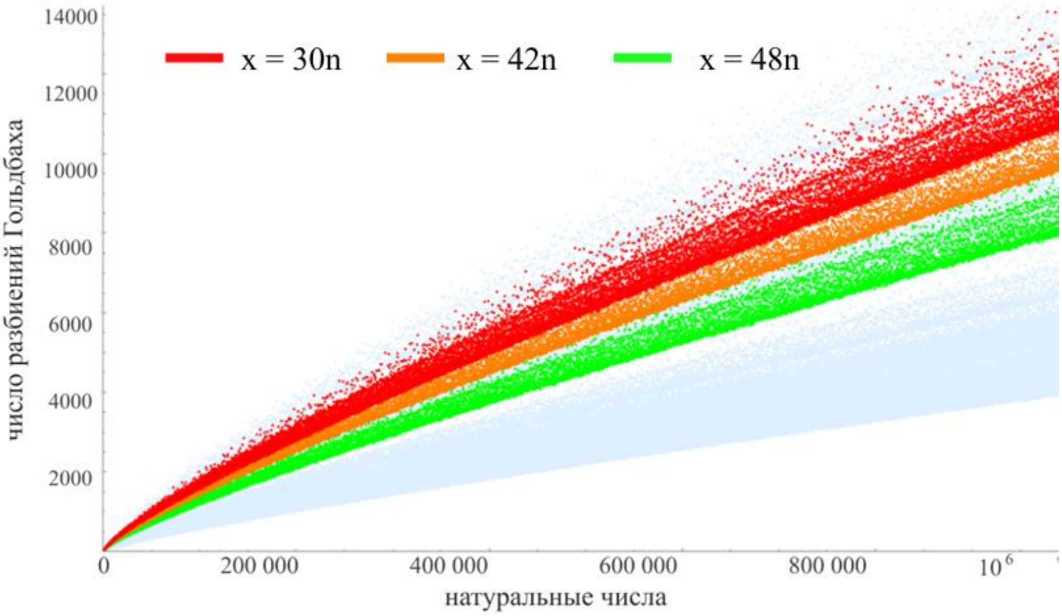

Рисунок 3 – Распределение высших точек графика

На графиках видно, что избранные последовательности чисел представляют собой несколько нечёткую линию. Это происходит ввиду того, что некоторые числа, принадлежащие данной последовательности, дают значительно большее число пар Гольдбаха. Данный феномен связан с тем, что при выборе именно простого n в последовательности $x = (k \pm 2)n$ (где x – число на оси абсцисс; k – чётное натуральное число, задающее кратность; $n \in N$) количество уникальных простых множителей данного x будет на единицу превышать аналогичный параметр для соседних значений x при $n \in N$, что и повышает число разложений Гольдбаха. На рисунке 4 представлены две последовательности, содержащие последовательности с такими множителями, которые обладают четырьмя и пятью уникальными простыми множителями (210 и 2310 соответственно).

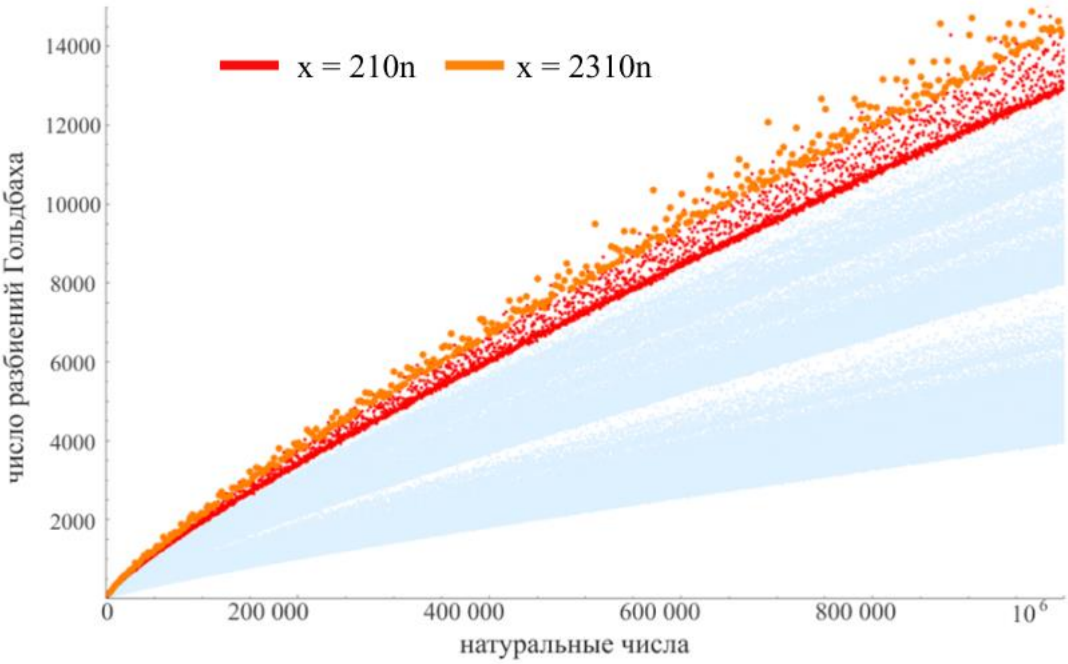

Рисунок 4 – Распределение высших точек графика

Здесь становится по-настоящему очевидно, как связано число уникальных простых множителей данного x с полученным числом пар разбиений Гольдбаха.

Таким образом, гипотеза Гольдбаха предполагает, что любое четное число больше двух может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. Эта гипотеза может быть полезна для криптографии, так как разложение чисел на простые множители может быть сложным и непредсказуемым. Кроме того, изучение количества разбиений Гольдбаха может быть полезно для создания новых криптографических алгоритмов и систем безопасности.

Список использованных источников:

1. Goldbach, C. (1742). Letter to Euler, dated June 7, 1742. In C. Goldbach, Gesammelte Werke (Vol. 3, pp. 41-44). Leipzig, Germany: Akademie Verlag, 1979.

2. Проблема Гольдбаха: определение, доказательства и решение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fb.ru/article/452284/problema-goldbaha-opredelenie-dokazatelstva-i-reshenie. – Дата доступа: 02.04.2023.