МЕТОДЫ ПЕРЕМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМА ШТРАССЕНА И ОБЫЧНОГО ПЕРЕМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Кулик М.И., Киселёв А.С.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Данная научная работа исследует различные способы перемножения матриц и сравнивает эффективность обычного метода и алгоритма Штрассена. Описаны основные принципы алгоритмов и их особенности. Проведены эксперименты на различных размерах матриц и проанализирована теоретическая сложность. Результаты показали, что алгоритм Штрассена может значительно ускорить процесс перемножения больших матриц, но может быть менее эффективен для небольших матриц. Разработана модифицированная версия алгоритма Штрассена на базе стандартного алгоритма Штрассена и обычного алгоритма перемножения матриц, которая работает эффективнее стандартного алгоритма Штрассена в среднем на 28%.

Алгоритм Штрассена [1] использует для перемножения матрицы размера $2^k * 2^k$, где $k \in N$. Однако любую матрицу можно привести к матрице $2^k * 2^k$, дополнив столбцы и строки матрицы незначащими нулями. Метод разбивает каждую из исходных матриц на четыре блока одинакового размера, вычисляет семь промежуточных матриц и рекурсивно умножает эти промежуточные матрицы для получения результата умножения исходных матриц.

Для сравнения двух алгоритмов перемножения введем термин «единица работы» (далее – ед.р.). Сложение и вычитание принимается за 1 ед.р., умножение же варьируется. В настоящей работе умножение принимается за 2.5 ед.р. Эта величина отражает сложность выполнения данного действия в компьютере. Также введем термин «база рекурсии». Это размер матрицы, до которого выполняется разбиение исходной матрицы на подматрицы.

Очевидно, что при перемножении двух матриц $n * n$ необходимо n^3 операций умножения и $n^2 * (n-1)$ операций сложения, следовательно для перемножения двух аналогичных матриц необходимо $3.5n^3 + n^2$ ед.р.

Определим зависимость количества операций сложения и умножения матриц для Алгоритма Штрассена от их размера:

$$g(k) = 7^k \quad (1),$$

где $g(k)$ – функция количества умножений, $k = \lceil \log_2 n \rceil$, n – размер матрицы.

Для сложений получим:

$$\begin{cases} f(k) = 18 * 4^{k-1} + 7 * f(k-1), & k > 0 \\ f(k) = 18, & k = 0 \end{cases} \quad (2),$$

где $f(k)$ – функция количества сложений, $\mathrm{k} = \lceil \log_2 \mathrm{n} \rceil$, n – размер матрицы.

На основании данных уравнений получим следующий график (рисунок 1):

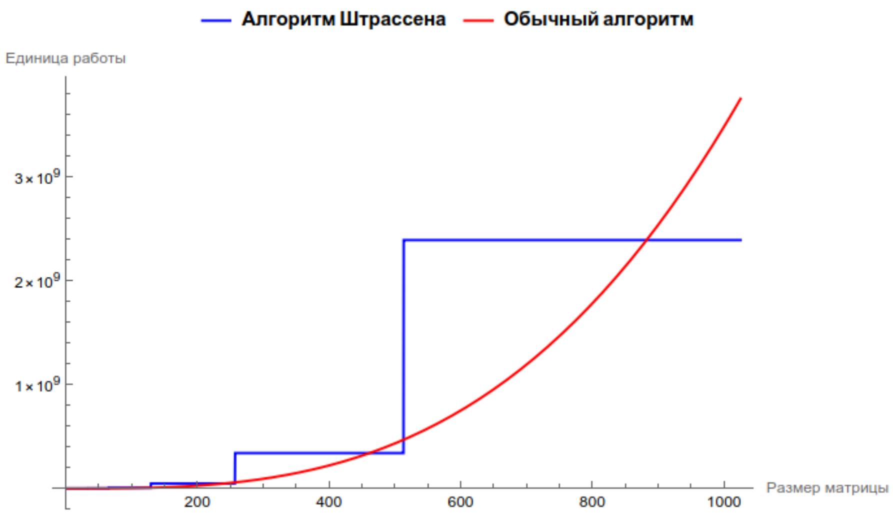

Рисунок 1 – Сравнение двух алгоритмов по количеству ед.р.

На практике были получены следующие результаты (рисунок 2):

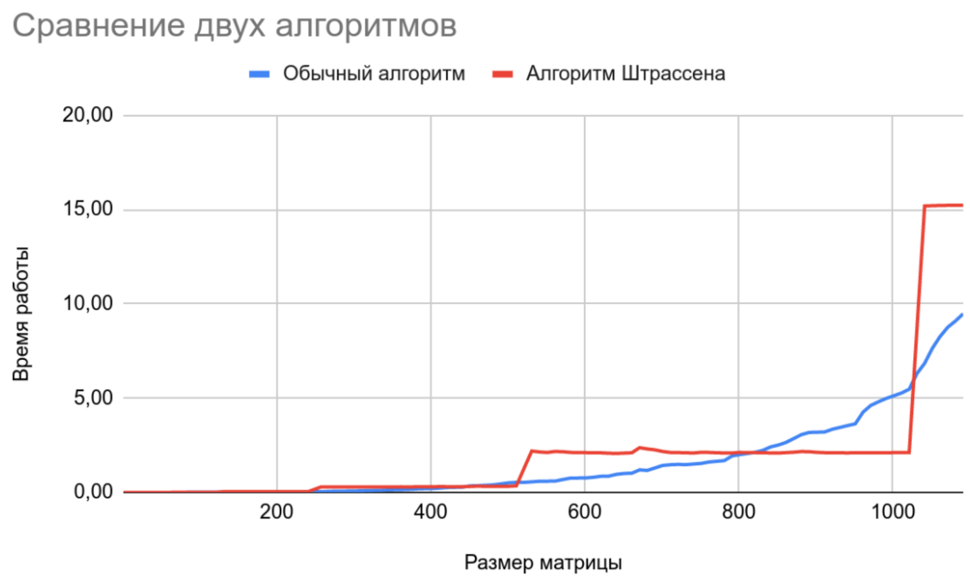

Рисунок 2 – Сравнение двух алгоритмов по количеству ед.р.

При разложении до матрицы размера $2^m * 2^m$ (где $m \in Z, m \geq 0$) (при смешении двух способов перемножения матриц), когда достигается размер матриц 2^m, в ход идет обычный алгоритм, поэтому будет верна данная система уравнений для расчета количества сложений:

$$\begin{cases} f(k) = 18 * 4^{k-1} + 7 * f(k-1), & k > m \\ f(k) = 2^{2m}(2^m - 1), & k \leq m \end{cases} \quad (3),$$

где $f(k)$ – функция количества сложений, $\mathrm{k} = \lceil \log_2 \mathrm{n} \rceil$, n – размер матрицы, m – база рекурсии.

Для расчета количества умножений при разложении до матрицы размера $2^m * 2^m$ получим систему:

$$\begin{cases} g(k) = 7^{k-m} * 2^{3m}, & k > m \\ g(k) = 2^{3m}, & k \leq m \end{cases} \quad (4),$$

где $g(k)$ – функция количества умножений, $\mathrm{k} = \lceil \log_2 \mathrm{n} \rceil$, n – размер матрицы, m – база рекурсии.

Аналитическая запись формулы:

$$f(k) = 6 * 4^k * \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{k-m} - 1\right) + 7^{k-m} * 4^m * (2^m - 1) \quad (5),$$

где $f(k)$ – функция количества сложений, $\mathrm{k} = \lceil \log_2 \mathrm{n} \rceil$, n – размер матрицы, m – база рекурсии.

На основе приведенных формул в программном средстве «Wolfram Mathematica» был построен график (рисунок 3) алгоритма Штрассена (для различных баз рекурсии (для $m = \overline{0,4}$)) и обычного алгоритма.

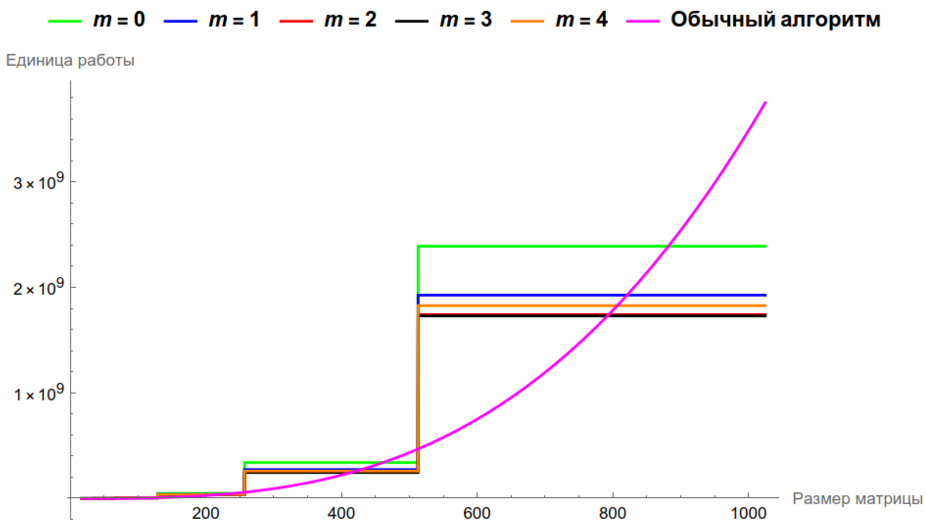

Рисунок 3 – Сравнение алгоритмов Штрассена с базами рекурсии 1, 2, 4, 8, 16

По формуле 5 вычислим количество ед.р. для алгоритма Штрассена и модифицированного алгоритма Штрассена для матриц размера $2^k * 2^k$, где $k = \overline{3, 10}$ и рассчитаем абсолютный и относительный выигрыш модифицированного алгоритма Штрассена относительно стандартного алгоритма Штрассена.

В результате были получены данные (таблица 1), согласно которым модифицированный алгоритм Штрассена оказывается эффективнее стандартного алгоритма Штрассена в среднем на 28%.

Таблица 1 – Превосходство модифицированного алгоритма над обычным алгоритмом Штрассена

Размер	Абсолютный выигрыш, ед. р.	Относительный выигрыш, %
8	803,5	31,74007505
16	5624,5	29,80262286
32	39372	28,79838497
64	275601	28,25398973
128	1929203,5	27,95213257
256	13504424,5	27,78254138
512	94530971,5	27,68655289
1024	661716800,5	27,63199953

С использованием разработанного нами программного средства мы проверили эти данные. В результате был получен следующий график (рисунок 4).

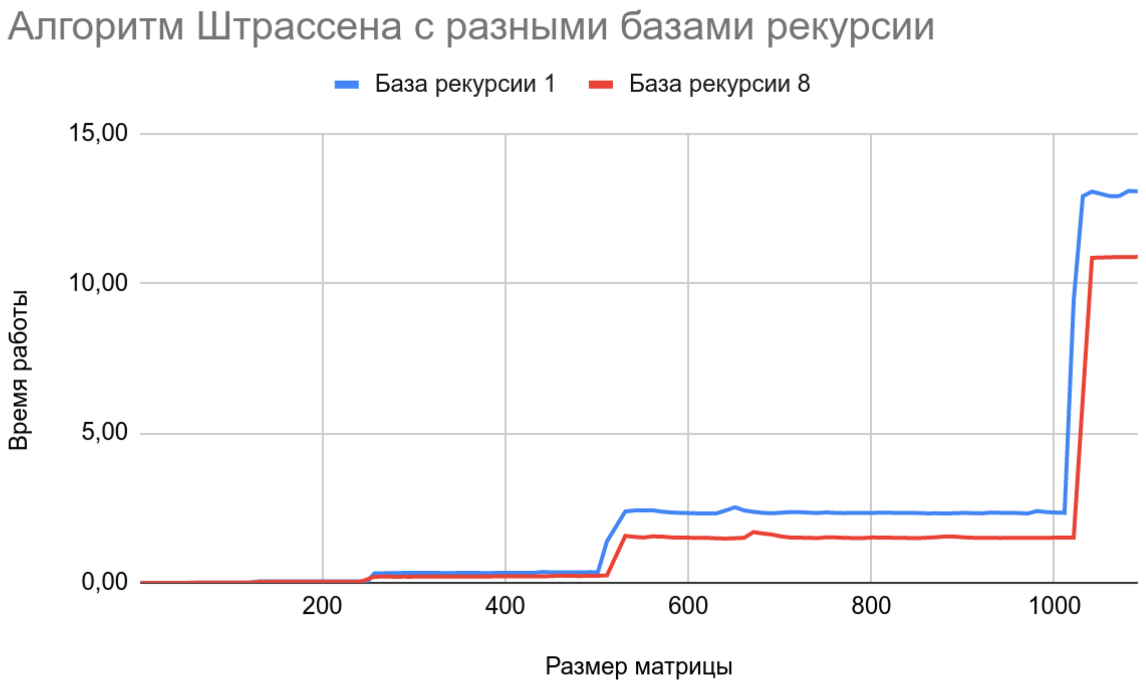

Рисунок 4 – Сравнение алгоритмов Штрассена с базами рекурсии 1 и 8

Таким образом, мы исследовали алгоритмы перемножения матриц и нашли способ их улучшения (модифицировали стандартный алгоритм Штрассена за счёт увеличения базы рекурсии с 1 до 8). Улучшенная версия алгоритма Штрассена работает эффективнее (в среднем на 28%) на всех размерах матриц. Наши исследования позволяют оптимизировать алгоритмы перемножения матриц и повысить их производительность на практике, в частности, в научной сфере, работе с графикой, машинном обучении.

Список использованных источников:

1. Strassen V. Gaussian Elimination is not Optimal / Numer. Math / F. Brezzi — Springer Science+Business Media, 1969. — Vol. 13, Iss. 4. – P. 354-356.