ИССЛЕДОВАНИЕ ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА: ОТ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ К СЛОЖНЫМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ

Убоженко М.А., Копыток М.Д.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Баркова Е.А. – канд. физ.-мат. наук

Гипотеза Коллатца - это интересная и загадочная математическая гипотеза, которая утверждает, что независимо от изначального числа, последовательность, полученная из него путем многократного применения определенных действий, всегда достигнет единицы. Эта статья рассказывает о разработке программы для анализа гипотезы Коллатца, а также о использовании данных, полученных от программы, для выявления возможных закономерностей в структуре последовательностей.

В данной работе представлено исследование гипотезы Коллатца, которая остается одной из наиболее загадочных проблем современной математики. Гипотеза Коллатца, также известная как проблема 3x+1, была предложена в 1937 году немецким математиком Лотаром Коллатцем. Она заключается в следующем: начиная с любого положительного целого числа n, можно построить последовательность чисел, умножая это число на 3 и добавляя 1, если число нечетное, или операцию деления на 2, если число четное. Гипотеза заключается в том, что для любого начального значения n, такая последовательность рано или поздно достигнет единицы.

$$cltz(n) = \begin{cases} 3n+1, & n \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \ (mod\ 2) \end{cases} \quad (1),$$

где n – любое натуральное число.

Целью данного исследования является создание программы для анализа гипотезы Коллатца на натуральных числах, позволяющей проводить численные эксперименты и проверять гипотезу для различных начальных значений n, а также отметить связь гипотезы с явлениями из реального мира. Разработанная программа базируется на методах длинной арифметики и позволяет проводить анализ последовательности чисел с представлением данных в различной форме. Результаты исследования могут быть полезными для понимания природы гипотезы Коллатца и ее связи с другими областями математики.

Программа позволяет:

- Находить цепочки числа в виде «прямого хода» гипотезы Коллатца
- Построить график для «чисел-градин»
- Шифровать и дешифровать
- Построить столбчатые диаграммы для анализа частоты попадания цифр в числе
- Находить обратные цепочки числа в виде «обратного хода» гипотезы Коллатца

Нахождение цепочки числа в виде «прямого хода» гипотезы Коллатца. Чтобы добиться большей наглядности и расширить диапазон вводимых чисел, были введены элементы длинной арифметики. Для того чтобы алгоритм поиска числа по гипотезе Коллатца работал на больших числах, не входящих в диапазон целочисленных переменных, предоставляемых языком Delphi, а если быть точнее, то выше числа 9223372036854775807, был реализован метод длинной арифметики. Метод заключается в том, что программа разбивает введенное пользователем число на массив из цифр этого числа, затем расчеты ведутся по порядку над каждой цифрой. Таким образом длинная арифметика может работать с числами, содержащими до 256 цифр. По состоянию на апрель 2021 года проверены все натуральные числа до 9 789 690 303 392 599 179 036 включительно [1], и каждое из них продемонстрировало соответствие гипотезе Коллатца. Данная программная реализация позволяет проверить числа до 10^{200}. Математиками было выяснено, что если другой цикл всё-таки и существует, то он состоит как минимум из 168 миллиардов чисел. Результат программы для большого числа приведен на рисунке 1:

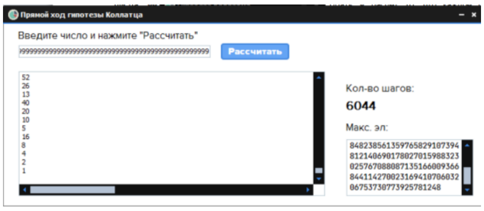

Рисунок 1 – Окно приложения для вывода всей цепочки чисел, количества шагов в ней, а также максимального числа, достигнутого в этой последовательности

Проанализировав гипотезу Коллатца, можно выделить несколько дополнительных гипотез:

- Первая: имеется равное количество чётных и нечётных чисел, так что в любой длинной последовательности вычислений чётные и нечётные N будут появляться одинаково часто. Нечётное N увеличивается втрое (чуть больше), а чётное уменьшается всего лишь вдвое. Следовательно, по мере роста числа итераций значение N будет бесконечно возрастать. За каждую итерацию N будет в среднем увеличиваться на (3N+1)/2. Для больших значений N это, в сущности, равно 3N/2.
- Вторая гипотеза основана на тезисе «Чем выше заберёшься, тем ниже скатишься». Справедливость этой мысли подкрепляется тем реальным фактом, что стоит в вычислениях получить точную степень двойки, как последовательность неудержимо скатится к 1. (При делении на 2 числа, представляющего собой 2 в любой степени, кроме самой двойки, постоянно будет получаться всё меньшее и меньшее чётное число.) Среди бесконечного счётного множества целых чисел существует бесконечно много степеней двойки, так что при достаточно долгом вычислении обязательно получится одна из них. В процессе вычислений можно получить сколь угодно большое число N, но крах его неизбежен.

Гистограмма чисел и как гипотеза Коллатца связана с населением стран. Введём такое понятие, как числа-градины. Числа-градины – распространённое название для совокупности рассмотренных последовательностей. Такое название возникло из-за того, что графики последовательностей похожи на траектории движения градин в атмосфере. Можно посмотреть на старший разряд чисел-градин. Например: Для 1 это будет 1. Для 2 это будет 1,2. Для 3 это будет 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. А затем составить гистограмму для этих чисел. По мере того, как мы получаем всё больше данных, соотношение высоты столбиков гистограммы становится всё более упорядоченным. С помощью программы было подсчитаны числа, не превосходящие 1 миллиарда, гистограмма для них изображена на рисунке 2. Чем цифра большем, тем реже она оказывается впереди. Девятка, например, менее чем в 5 процентах случаев. Такой расклад характерен не только для чисел из последовательности. Примеров много: это и население стран, стоимость компаний, числа Фибоначчи. - такое распределение известно как закон Бенфорда [2]. Сам закон утверждает, что в таблицах чисел, основанных на данных источников из реальной жизни, цифра 1 на первом месте встречается гораздо чаще, чем все остальные (приблизительно в 30 % случаях), а также вероятность того, что цифра будет стоять на первом месте в числе тем больше, чем меньше цифра.

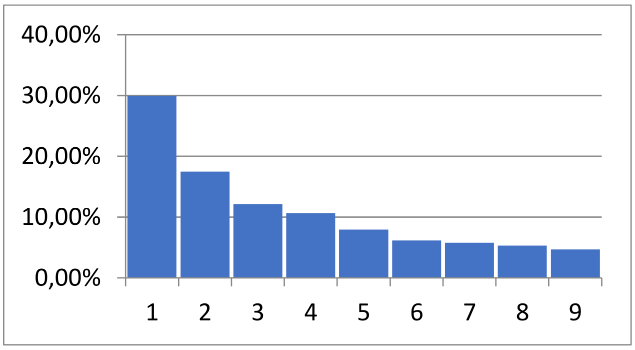

Рисунок 2 – Гистограмма частоты встречи той или иной цифры в числах последовательности в процентом соотношении

Графическое представление гипотезы Коллатца. Для дальнейших пояснений введем несколько новых понятий: Прямой ход – анализ гипотезы, при котором берётся какое-то число и анализируется его дальнейшее поведения до прихода в цикл 4-2-1. Обратный ход – представление гипотезы в обратном порядке, где например числу 10 предшествует либо число 20, которое поделится на 2, либо число 3, которое умножится на 3 и к результату прибавится единица. Отсюда следует вывод, что гипотеза Коллатца, представляет собой бесконечное бинарное дерево (или же ориентированный граф), которое с помощью нашей программы можно увидеть на рисунке 3.

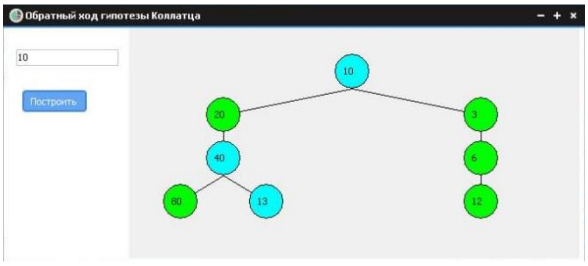

Рисунок 3 – Визуализация обратного хода гипотезы Коллатца для части дерева из последовательности по заданному числу

Проанализируем закономерности в поведении чисел-градин в прямом ходе гипотезы – все значения образуют циклы. Однако путь, который они проделывают, абсолютно случаен. Рассмотрим произвольный участок, например числа 27, изображённого на рисунке 4. В его колебаниях прослеживается сходство с рынком акций, и это не случайно – и то, и другое пример геометрического броуновского движения [3]. Но если в долгосрочной перспективе рынок акций растёт, то последовательность всегда приходит к единице. Формулы гипотезы Коллатца можно использовать для генерации случайных помех или кривых в программном обеспечении. Они просты в использовании, а результат их графиков случаен.

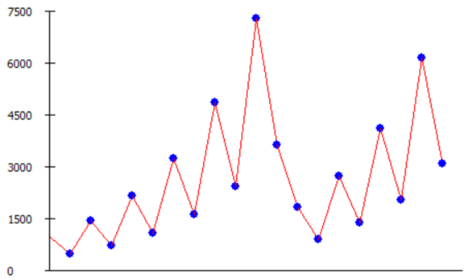

Рисунок 4 – Окно приложения с произвольным участком графика прямого хода гипотезы для числа 27.

Стоит отметить, что если что если кодировать ребро из графика прямого хода, построенное по формуле $N * 2$ как 0, а $\frac{N-1}{3}$ как 1, то можно переформулировать гипотезу для этого варианта – для любого числа существует и притом единственная цепочка действий, приводящая к этому числу. Используя это, можно зашифровать числа, а также расшифровывать число по его цепочкам. Для числа 12 шифр: 001010000, для 5: 10000. Нельзя найти закономерности в постановке единиц и нулей, как и поведение гипотезы – они случайны.

Список использованных источников:

1. Гипотеза_Коллатца [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипотеза_Коллатца – Дата доступа: 03.04.2023.

2. ЗАКОН БЕНФОРДА: СУЩНОСТЬ И ПРИМЕНЕНИЕ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=31987 – Дата доступа: 03.04.2023.

3. Геометрическое броуновское движение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://bstudy.net/730233/ekonomika/geometricheskoe_brounovskoe_dvizhenie – Дата доступа: 03.04.2023.