В. Л. Трегуб, Е. А. Шевченко

Наглядное представление решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Фурье

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *В докладе рассматриваются две краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Задачи имеют точное решение и решение в виде ряда Фурье. Дано наглядное представление понятия сходимости метода Фурье к точному решению при использовании нескольких слагаемых.*

Ключевые слова: краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения; метод Фурье; сходимость

В процессе работы современному инженеру приходится сталкиваться с математическими задачами, для которых нельзя представить решение в виде аналитической функции. Например, решение дифференциального уравнения удается получить в виде бесконечного ряда. Естественно, в практической работе приходится использовать приближенное решение – частичные суммы ряда. Целью настоящей работы является дать будущему инженеру наглядное представление таких понятий как приближенное решение, сходимость в норме, погрешность приближения и т.п.

В представленных видеороликах рассмотрены две краевые задачи.

Задача 1. Найти решение краевой задачи для ОДУ

$$\begin{cases} y'' + y = 7x - 6 \\ y(0) = 1 \\ y'(2) = -e^2 - 8e^{-2} + 7 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что точным решением данной задачи является функция $y(x) = -e^x + 8e^{-x} + 7x - 6$. Решение этой задачи можно построить методом Фурье [1]. Для этого нужно свести исходную задачу к задаче с однородными краевыми условиями. А именно: решение исходной задачи будем искать в виде $y(x) = u(x) + \alpha x + \beta$. Постоянные $\propto$ и β находим из условий, что функция $u(x)$ будет удовлетворять однородным краевым условиям $u(0) = 1, u'(2) = 0$. Получим, что $\alpha = -e^2 - 8e^{-2} + 7, \beta = 1$. Функция $u(x)$ должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} u'' + u = (e^2 x + 8e^{-2})x - 7 \\ u(0) = 0 \\ u'(2) = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что, решив эту задачу, найдем решение исходной задачи из равенства

$y(x) = u(x) + (-e^2 - 8e^{-2} + 7)x + 1$

Для построения функции u(x) составим задачу Штурма-Лиувилля для оператора $L(v) = -v'' + v$. Областью определения данного оператора является множество дважды дифференцируемых функций $v(x)$, заданных на отрезке [0;2] и удовлетворяющих условиям $v(0) = 0$, $v'(2) = 0$. Спектром оператора в данном случае является множество чисел $\lambda_k = 1 + \left(\frac{\pi(2k+1)}{4}\right)^2$, k = 0,1,2 .... Множество собственных функций $\left\{\sin(\frac{\pi(2k+1)}{4}x)\right\}$, k=0,1,2,…. Это множество функций образует полную ортогональную систему функций в пространстве $L_2(0;2)$. Далее ищем решение в виде ряда Фурье по собственным функциям. Получаем решение исходной задачи, которое представляется в виде:

$y(x) = -1{,}47174x + 1 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \phi_k(x)$. Коэффициенты $c_k = \frac{1}{\lambda_k}\left[-\frac{2k}{\pi(2k+1)} + (-1)^k\left(\frac{4}{\pi(k+1)}\right)^2\right] \times 8{,}4717$. В приложенном ролике [2] наглядно видно, как с увеличением количества взятых в ряде Фурье слагаемых, приближенное решение довольно быстро приближается к точному решению.

Задача 2. Во втором ролике [3] представлены результаты построения приближенного решения для следующей краевой задачи.

$$\begin{cases} y'' + y = 7x - 6 \\ y(0) = 1 \\ 2y'(2) + y(2) = -3e^2 - 8e^{-2} + 22. \end{cases}$$

Эта задача также имеет точное решение, но, в отличие от первой задачи, задача Штурма-Лиувилля для оператора $L(v) = -v'' + v$ с краевыми условиями $v(0) = 0$, $2v'(2) + v(2) = 0$ точно не решается. Получаем только приближенные собственные числа λ_k и собственные функции $\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k - 1} \cdot x)$.

Список литературы:

1. Меркулов А.Л., Трегуб В.Л., Червинская Н.М. Методы математической физики: учебное пособие. Спб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2016.

2. Краевая задача 1 методом Фурье: [Электронный ресурс]. URL: https://clck.ru/33tBrV (Дата обращения: 31.03.2023).

3. Краевая задача 2 методом Фурье: [Электронный ресурс]. URL: https://clck.ru/33tBqv (Дата обращения: 31.03.2023).

V. L. Tregub, E. A. Shevchenko

Application of video visualization tools in the study of thermal conductivity and vibrations in the course of methods of mathematical physics.

Saint Petersburg Electrotechnical University, Russia

Abstract. *The paper discusses two boundary value problems for an ordinary differential equation of the second order. The problems have an exact solution and a solution in the form of a Fourier series. A visual representation of the concept of convergence of the Fourier method to an exact solution is given when using several terms.*

Keywords: boundary value problem for an ordinary differential equation; Fourier method; convergence