И. А. Лебедев, М. Б. Шабаева

Линейные характеристики степенных функций

Санкт-Петербургский горный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *Обсуждаются вопросы актуализации программ повышения квалификации преподавателей. Рассматривается задача построения линейных характеристик степенных функций для определения соответствующих операторов в линейных пространствах.*

Ключевые слова: линейные функциональные уравнения; повышение квалификации преподавателей

Регулярное повышение профессиональной квалификации всегда было составной частью преподавательской деятельности. Продуманность и актуализация программ повышения квалификации особенно важны в настоящее время – в процессе цифровой трансформации образования наблюдается постоянный поиск новых форм и содержания образовательного процесса. В качестве перспективной многие исследователи рассматривают гибридную модель обучения, в которой предполагается сочетание нескольких образовательных технологий. Важно, чтобы программы повышения квалификации преподавателей математического цикла знакомили слушателей как с современными технологиями преподавания и обучения, так и с направлениями современной математики, нестандартными задачами традиционных разделов. Рассмотрим линейные функциональные уравнения для степенных функций.

Линейная однородная функция $f(x)=k\cdot x$ характеризуется свойством $k\cdot(x+y)=k\cdot x+k\cdot y$ и поэтому удовлетворяет линейному однородному функциональному уравнению (линейная характеристика линейной функции) [1]:

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{1}$$

которое положено в основу определения линейного оператора в линейных пространствах [2].

Квадратная однородная функция $f(x)=k\cdot x^2$ характеризуется свойством $k(x+y)^2+k(x-y)^2=2\left(k\cdot x^2+k\cdot y^2\right)$ и поэтому удовлетворяет линейному однородному функциональному уравнению (линейная характеристика квадратной функции)

$$f(x+y)+f(x-y)=2\big(f(x)+f(y)\big), \tag{2}$$

которое может быть положено в основу определения квадратного оператора в линейных пространствах.

Отметим, что в левой части равенств (1) и (2) столько слагаемых какова степень функции, а в правой части – всегда два слагаемых (сколько различных независимых аргументов) и коэффициент при них равен степени функции. Поэтому для кубической однородной функции $f(x)=k\cdot x^3$ характеристическое свойство ищем в таком же виде, но с неизвестными параметрами при втором аргументе. Для случая (1) такой параметр один и равен 1, а для случая (2) таких параметров два и они равны 1 и -1. Для кубической функции, соответственно, характеристическое свойство ищем в виде:

$$k\cdot(x+\lambda_1\cdot y)^3+k\cdot(x+\lambda_2\cdot y)^3+k\cdot(x+\lambda_3\cdot y)^3=3\left(k\cdot x^3+k\cdot y^3\right),$$

или

$$(x+\lambda_1\cdot y)^3+(x+\lambda_2\cdot y)^3+(x+\lambda_3\cdot y)^3=3\left(x^3+y^3\right),$$

где $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$.

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы все общие коэффициенты при слагаемых с $x^2\cdot y$ и $x\cdot y^2$ были равны нулю:

$$\begin{cases}3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=0,\\ 3\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)=0,\end{cases} \tag{3}$$

где, не ограничивая общности, можно считать $\lambda_1=1$. Следовательно, из системы (3) имеем

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = -1, \\ 1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 = 1, \\ \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = -1, \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1,$$

т.е. $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad 1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^2 + \lambda_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$$(\lambda_2 - 1) \cdot \left(\lambda_2^2 + \lambda_2 + 1\right) = \lambda_2^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^3 = 1.$$

Аналогично, $\lambda_3^3 = 1$, т.е. λ_1, λ_2 и λ_3 являются кубическими корнями из единицы:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Таким образом, кубическая однородная функция $f(x) = k \cdot x^3$ удовлетворяет линейному однородному функциональному уравнению (линейная характеристика кубической функции)

$$f(x+y) + f(x+\lambda_2 y) + f(x+\lambda_3 y) = 3\left(f(x) + f(y)\right),$$

которое может быть положено в основу определения кубического оператора в линейных пространствах.

Список литературы:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального исчисления, т.1. – М.: Наука, 1966.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, т.1. – М.: ИЛ, 1962.

I. A. Lebedev, M. B. Shabaeva

Linear characteristics of power functions

Saint Petersburg Mining University, Russia

Abstract. *The issues of updating teacher training programs are discussed. The problem of constructing linear characteristics of power functions for determining the corresponding operators in linear spaces is considered.*

Keywords: Operators of linear spaces; professional development of teachers