Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

С. А. Поттосина, А. Э. Алёхина

МАТЕМАТИКА РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

(с элементами технического анализа)

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники в качестве
учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования по направлению
специальности 1-40 01 02-02*

Минск БГУИР 2012

Библиотека БГУИР

УДК 519.1:336.76(075.8)
ББК 22.16+65.26я73
П64

Рецензенты:

доцент кафедры интеллектуальных информационных технологий
учреждения образования «Белорусский государственый университет
информатики и радиоэлектроники»,
кандидат технических наук М. Д. Степанова;

заместитель декана по научной работе факультета экономики и управления
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы,
кандидат физико-математических наук, доцент Н. В. Марковская;

профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики
Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук Г. А. Медведев

Библиотека БГУИР

Поттосина, С. А.

П64 Математика рынка ценных бумаг (с элементами технического анализа) : учеб.-метод. пособие / С. А. Поттосина, А. Э. Алёхина. – Минск : БГУИР, 2012. – 112 с. : ил.

ISBN 978-985-488-755-5.

Изложены математические основы оценки финансовых активов в детерминированном и стохастическом случаях, теория портфеля ценных бумаг, практические приложения теории расчета финансовых операций в условиях определенности, определение справедливой цены опционов. Отдельно рассматриваются широко применяемые методы технического анализа.

УДК 519.1:336.76(075.8)
ББК 22.16+65.26я73

ISBN 978-985-488-755-5

© Поттосина С. А., Алёхина А. Э., 2012
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2012

Содержание

Раздел 1. Финансовый рынок 5
1.1. Основные понятия финансового рынка 5
1.2. Основные виды первичных ценных бумаг (акции и облигации) 7
1.3. Основные участники рынка ценных бумаг 11
1.4. Основные типы производных ценных бумаг 12
Раздел 2. Динамика изменения цен ценных бумаг (дискретное время) 15
2.1. Общее описание 15
2.2. Биномиальная модель 16
2.3. Гауссовская модель 16
2.4. Модель скользящего среднего MA(q) 18
2.5. Авторегрессионная модель AR(p) 20
2.6. Модель авторегрессии – скользящего среднего ARMA(p, q) 23
Раздел 3. Динамика изменения цены ценных бумаг (непрерывное время) 25
3.1. Винеровский процесс 25
3.2. Диффузионные процессы 27
3.3. Модели изменения цены ценных бумаг. 29
3.4. Модели динамики цен семейства ценных бумаг 31
Раздел 4. Теория оптимального портфеля ценных бумаг 33
4.1. Портфель ценных бумаг и его характеристики 33
4.2. Эффективное множество 36
4.3. Структура эффективного множества 38
4.4. Оптимизационные модели портфеля ЦБ 42
4.5. Эффективное множество при наличии безрисковых ценных бумаг 44
4.6. Модификация портфеля ценных бумаг (модель Тобина) 46
4.7. Рыночная модель ценообразования для ценных бумаг. 49
4.8. Арбитражная теория ценообразования 53
Раздел 5. Расчет справедливой цены опциона 56
5.1. О стоимости опциона в момент исполнения 56
5.2. Формула Кокса – Росса – Рубинштейна (вывод методом обратной индукции) 58
5.3. Формула Блэка – Шоулса (вывод через самофинансируемый портфель) 64
5.4. Формула Блэка – Шоулса при наличии дивидендов. 68
5.5. Формула Мертона 70
Раздел 6. Практические приложения теории расчета финансовых операций в условиях определенности 74
6.1. Конвертация валюты и начисление процентов 74
6.2. Погашение задолженности частями 79
6.3. Переменная сумма счета и расчет процентов 81
6.4. Изменение условий контракта 83

Библиотека БГУИР

Раздел 7. Оценивание облигаций..83
7.1. Оценивание облигаций при детерминированной процентной ставке 83
7.2. Оценивание облигаций при стохастической процентной ставке 85
7.3. Решение уравнения для цены облигаций..88
Раздел 8. Элементы технического анализа..90
8.1. Классификация методов технического анализа 93
8.2. Классические фигуры ТА 96
8.3. Основные индикаторы технического анализа и методы фильтрации 103
8.4. О других технических параметрах поведения рынка 109
Литература...113

Библиотека БГУИР

Раздел 1. Финансовый рынок

1.1. Основные понятия финансового рынка

Финансовый рынок – это рынок, на котором товарами служат деньги, банковские кредиты и ценные бумаги. К ценным бумагам относят облигации, акции, фьючерсы (обязательство продавца поставить к определенному сроку определенное количество товара в определенное место), **опционы** (право на покупку в будущем определенного количества товара по фиксированной цене).

В соответствие с видом товара финансовый рынок разделяют на денежный, кредитный и фондовый рынки. Последние два из них образуют рынок капитала.

Участниками финансового рынка являются банки, финансовые компании, страховые общества и другие финансово-страховые структуры, включая индивидуумов.

В нормально функционирующей рыночной экономике финансовый рынок обслуживает производственную систему, способствует продвижению продуктов производства, ставших товарами, к потребителям. Переход товара от одного владельца к другому сопровождается потоком денежных выплат. Эти выплаты осуществляются в бумажной форме при посредничестве банков. В условиях нынешнего кризиса производственной и финансовых систем, вызванного в том числе непомерными налогами, предприятия выстраивают длинные бартерные цепочки, тем самым, с одной стороны, уклоняясь от налогов, а с другой – сужая сферу действия финансовой системы.

Формы участия в финансовом рынке – покупка, продажа, владение и взятие взаймы, получение дивидендов и отчисление капитала на прямое потребление.

Актив – любая ценность, подлежащая покупке, продаже, обмену. **Финансовый рынок** – совокупность активов. Участники финансового рынка, помещающие свободные капиталы в те или иные активы, называются **инвесторами**. Совокупность принадлежащих инвестору активов называется **инвестиционным портфелем**. Искусство инвестора состоит в умении управлять портфелем – правильно и динамично формировать свой портфель инвестиций.

Финансовые операции. Простейший вид финансовой операции (сделки) – предоставление в долг некоторой суммы $S(0)$ с условием, что через время T будет возвращена сумма $S(T)$. В результате этой операции кредитор (заимодавец) получает прибыль $S(T) – S(0)$, а в расчете на единицу кредита

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}.$$

Библиотека БГУИР

Величина r_T (темп прироста в статическом смысле) называется **эффективностью операции** (с точки зрения кредитора). Иногда используют и такие названия, как процентная ставка, ставка процента, интерес, рост.

Другим показателем эффективности операции является **дисконт** – отношение прибыли к возвращенной сумме:

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}.$$

Указанные величины находятся в соотношениях

$$r_T = \frac{d_T}{1 - d_T},\ d_T = \frac{r_T}{1 + r_T},$$
$$S(T) = S(0)(1 + r_T)$$
$$S(0) = S(T)(1 - d_T).$$

Пусть r и d – интерес и дисконт за год. Расчет r_T и d_T можем осуществить по схеме **простых процентов:** $r_T = T \cdot r$ или по **схеме сложных процентов:** $1 + r_T = (1 + r)^T$.

Часто используется **дисконт-фактор** $V_T = \frac{1}{1 + r_T} = 1 - d_T$. При расчетах по сложным процентам за число лет *T*: $V_T = \frac{1}{(1 + r)^T} = (1 - d)^T = V^T$,

где *V* – годичный дисконт-фактор.

Эффективной ставкой называется годичная ставка сложных процентов, которая обеспечивает заданное соотношение между возвращаемой суммой $S(T)$ и кредитом $S(0)$:

$$(1 + r_{ef})^T = \left(\frac{S(T)}{S(0)}\right), \text{ следовательно, } r_{ef} = \left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{T}} - 1.$$

В более сложном случае финансовая операция рассматривается как **поток платежей**. Получение кредита может быть распределено по времени точно так же, как и выплаты по нему. Это же относится и к операциям с ценными бумагами.

Если рассматривать поток платежей с позиции одного из участников, то естественно считать все поступления положительными, а все – выплаты отрицательными. Результат такой распределенной операции может быть измерен путем приведения всех платежей (с учетом знака) к начальному моменту времени. Эта величина называется чистой приведенной величиной (net present value):

$$NPV = \sum_{k=1}^{N} S_k V_{t_k} = \sum_{k=1}^{N} S_k \frac{1}{(1 + r)^{t_k}},$$

Библиотека БГУИР

где $t_1, \ldots, t_N$ – моменты платежей $S_1, \ldots, S_N$;

V_{t_r} – дисконт-фактор в момент t_k;

$t_1 = 0$, т.е. момент первой выплаты принят за начало отсчёта.

Эффективная ставка операции обеспечивает минимальное из приемлемых значений *NPV* = 0, т.е. является корнем уравнения

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{(1+r_{ef})^{t_k}} = 0,\ t_1 = 0.$$

Если платежи совершаются ежедневно и много раз в день, удобно рассматривать накопленную сумму таких платежей *S*(*t*) как дирекцию непрерывного времени. Тогда можно говорить о мгновенной скорости роста:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta H - S(t))}{\Delta t}$$

и силе роста (силе интереса):

$$\delta = \frac{dS}{dt} \Big/ S(t) = \frac{d}{dt}\left[\ln S(t)\right].$$

Если $\delta(t)$ задано, то можно найти накопленную сумму, решив дифференциальное уравнение

$$S(T) = S(0)e^{\int_0^T \delta(t)dt}.$$

Заметим, что $1 + r_T = e^{\int_0^T \delta(t)dt}$. При $\delta = \text{const}$ и $1 + r_T = e^{\delta T}$ или $\delta = \frac{1}{T}\ln(1+r_T)$. Если рост r_T вычисляется по формулам сложных процентов с годовой ставкой *r*, то $\delta = \frac{1}{T}\ln(1+r)^T$ и $\delta = \ln(1+r)$. При малых значениях параметра *r*: $\delta = r$.

1.2. Основные виды первичных ценных бумаг (акции и облигации)

В странах с развитой рыночной экономикой кроме денег имеют большое хождение так называемые ценные бумаги.

Ценная бумага (security) – это законодательно признанное свидетельство права на получение ожидаемых в будущем доходов при конкретных условиях. Все ценные бумаги делятся на **первичные ценные бумаги** и **производные ценные бумаги** (derivative securities). Последние иногда называют **финансовыми деривативами**. Приведем краткую характеристику первичных ценных бумаг.

Библиотека БГУИР

Имеется большое разнообразие первичных ценных бумаг, но их можно разбить на три большие группы: коммерческие векселя, облигации и акции.

Коммерческий вексель (commercial paper) – это краткосрочное, не имеющее специального обеспечения обязательство крупной компании выплатить в определённый срок определённую сумму денег. Обычно вексель выдаётся, чтобы получить или заменить «живые деньги» и продаётся с дисконтом, который обычно уменьшается при приближении срока погашения (term of maturity). Впрочем, дисконт может и увеличиваться, если платёжеспособность компании, выдавшей вексель, вызывает сомнения. Передача векселя от одного лица к другому регулируется специальным законодательством, которое называется **вексельным правом** и имеет разные варианты в разных странах.

Облигации (bond) – это долговые ценные бумаги, выпускаемые государством или определенными фирмами с целью аккумулирования капитала, реструктуризации своих долгов и т.д. Они выпускаются на некоторый срок, а по его истечении – изымаются из обращения посредством погашения (выкупа). До погашения по облигациям могут производиться определённые выплаты по прилагаемым к облигации купонам (coupon). Характеристиками облигации являются: стоимость погашения (номинал), время погашения, выплаты до погашения (купоны). При выпуске ряда облигаций предусматривается и возможность раннего погашения. Тогда владельцу облигации выплачивается **премия** (premium) в определённых размерах. Доход на такие облигации выше, чем на обычные.

Как и у всякой ценной бумаги, у облигаций существует риск того, что компания, выпустившая облигацию, не выполнит своих обязательств и владелец облигации ничего по ней не получит. Общее правило здесь следующее: ***чем выше доходность облигации, тем больше связанный с ней риск,*** т.е. тем больше вероятность того, что организация, выпустившая их, откажется от выплат по ним (объявит дефолт (default)). В странах с развитой экономикой существует система рейтингов, позволяющая оценивать риск невыполнения обязательств по облигациям. Наименее рисковыми считаются облигации, выпускаемые государством, но и доходность по ним самая низкая. Поэтому при выпуске облигаций идёт борьба за их рейтинг. «Даже не пытайтесь выпустить долговые обязательства без рейтинга» – эта аксиома действует, например, в США, где все облигации имеют свой рейтинг. Облигации с наименьшим рейтингом называются там junk bonds – бросовые облигации, «макулатура». А наивысший рейтинг имеют облигации и векселя Казначейства США (Treasure bond, Treasure bill), потому что Казначейство США ещё ни разу в своей истории не отказывалось от выполнения своих обязательств.

Что касается России, то в ней никогда не было, нет и, по-видимому, ещё долго не будет облигаций и других ценных бумаг, не имеющих риска не выполнения обязательств (default-free bond).

Акции (stock, share) – это долевые ценные бумаги, выпускаемые с целью аккумулирования капитала для последующей деятельности компании.

Акции бывают обыкновенные и привилегированные.

Обыкновенная акция (common stock) предоставляет право на совладение корпорацией. Владелец акции получает право в соответствии с уставом (charter) компании участвовать в годовом собрании акционеров; в голосовании при выборе совета директоров компании и по другим вопросам, выносимым на годовое собрание акционеров, в частности, по вопросам о размере дивидендов. Возможны различные системы голосования; чаще всего применяются две – кумулятивная система голосования (cumulative voting system) и мажоритарная система голосования (majority voting system), но общим для них правилом является то, что число голосов пропорционально числу акций, которые имеет их владелец.

Владелец акций несёт ограниченную ответственность (limited liability) за дела корпорации. Это означает, что держателя обыкновенных акций нельзя вынудить нести ответственность за долги корпорации. В случае банкротства теоретически держатель обыкновенной акции становится обладателем тех ценностей, которые останутся после того, как претензии всех остальных истцов будут удовлетворены. Однако на практике суды часто игнорируют это положение.

Владелец акции имеет право на **дивиденды** (dividends), т.е. на часть дохода компании. Как правило, вопрос о размере дивидендов и сроках их выплат должен решаться на годовом собрании акционеров.

Привилегированные акции (preferred stock) характеризуются тем, что их владелец не имеет права голоса при решении вопросов, касающихся деятельности компании. Однако при начислении дивидендов привилегированные акции имеют преимущество перед обыкновенными: по ним должны производиться выплаты установленного размера до того, как будут перечислены дивиденды держателям обычных акций. Выплата дивидендов по привилегированным акциям обычно является обязательной. Если же такие дивиденды не выплачиваются, то, как правило, владельцы привилегированных акций получают право голоса и могут принять участие в годовом собрании акционеров на равных правах с держателями обычных акций.

Основными характеристиками ценной бумаги являются её цена и доходность. Прежде чем конкретизировать эти понятия, напомним одну из аксиом рыночной экономики: ***деньги в разное время – это разные деньги***.

Практически во всех странах с рыночной экономикой и бумажными деньгами имеется инфляция, что приводит к росту стоимости товаров и обесцениванию денег. В качестве величины этого обесценивания чаще всего используют так называемый **индекс потребительских цен**, который обычно определяется по стоимости так называемой **потребительской корзины**. И хотя набор товаров, входящих в эту корзину, у различных организаций различен, результаты обычно близки и выражаются в виде уровня инфляции за какой-то период.

Пусть S_0 – какая-то сумма денег в момент времени $t=0$ и S_T – сумма денег в момент времени $t=T$. Эти суммы эквивалентны по покупательной способности, если имеет место соотношение

$$S_0 = \frac{S_T}{1+k_T},$$

где k_T – уровень инфляции за период $[0,\ T]$.

Эта формула позволяет приводить суммы денег, полученные в различные моменты времени, к одному и тому же моменту времени, например, к моменту $t = 0$.

В дальнейшем мы всюду будем подразумевать, что все денежные величины приведены к моменту времени $t = 0$, т.е. сравнимы между собой.

Пусть теперь мы приобрели какие-то ценные бумаги в момент времени $t = 0$, потратив на это S_0 денег. Предположим, что эти ценные бумаги приобретаются на некоторый период T, называемый периодом владения. В конце этого периода они предъявляются к погашению или продаются, так что вырученная сумма денег составляет S_T. Кроме того, за период владения по этим ценным бумагам владелец получает дивиденды в размере D_T. Тогда **доходность** этих ценных бумаг к моменту погашения составит величину $S_T + D_T - S_0$.

Основной величиной, характеризующей ценные бумаги, является **ставка доходности,** определяемая как

$$r_T = \frac{S_T + D_T - S_0}{S_0}.$$

Ставка доходности обычно выражается в процентах.

Практически никогда нельзя предсказать, какова будет цена ценной бумаги в момент времени T, и какие дивиденды по ним будут получены. Поэтому в общем случае ставка доходности является случайной величиной и предсказать её значение, особенно если период владения T велик, невозможно.

О финансовом риске. Выше были рассмотрены некоторые финансовые операции и показатели их эффективности, причём последние рассматривались как детерминированные величины. На самом деле большинство финансовых операций – рискованные, в том смысле, что их эффективность не детерминирована, т.е. не полностью известна на момент заключения сделки. Особенно это относится к операциям покупки и продажи ценных бумаг, прежде всего акций.

Степень неопределённости, рискованности финансовых операций можно измерить, если принять гипотезу, что **эффективность каждой из них R является случайной величиной**, а наблюдаемые в действительности её значения r – лишь отдельные реализации этой случайной эффективности.

Под **риском** понимается вероятность любого нежелательного для инвестора события, например, разорения. В какой-то степени риск может характеризовать дисперсия (вариация) эффективности. Чем меньше дисперсия, тем меньше неопределённость.

Итак, эффективность R – случайная величина, $M[R] = m$ – ожидаемое (среднее) значение эффективности, $D[R] = V = \sigma^2 = M[(R-m)^2]$ – вариация или дисперсия эффективности.

Библиотека БГУИР

Из двух альтернативных финансовых операций R_1, R_2 с $M[R_i]=m_i$, $D[R_i]=\sigma_i^2$, i = 1, 2, $m_1 < m_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, инвестор, склонный к риску, выберет вторую, поскольку в среднем она более эффективна $(m_2 > m_1)$, в то время как более осторожный инвестор выберет первую, поскольку она менее рискованна, хотя и менее эффективна.

1.3. Основные участники рынка ценных бумаг

После того как некоторая организация (фирма, корпорация, правительство города, области, страны) выпустит определенные ценные бумаги (облигации, акции), они поступают сначала на так называемый первичный рынок, т.е. распространяются среди определённого круга лиц и организаций. Спустя некоторое время эти ценные бумаги поступают на вторичный рынок – в цивилизованных странах ведущую роль в нем играют фондовые биржи. Именно на них в основном и совершаются операции по купле и продаже ценных бумаг. Основную роль на биржах играют так называемые брокеры, трейдеры и дилеры.

Брокер (broker) – это посредник, агент инвестора, действующий по его поручению и от его имени, выполняющий операции по купле-продаже ценных бумаг на условиях, указанных инвестором. Эти условия очень разнообразны: рыночные заявки, заявки с ограничением цены, стоп-заявки, стоп-заявки с ограничением цены, продажа без покрытия (short sale), заявка типа «выполни или убей» (fill-or-kill order) и т.д. За свои услуги брокеры получают вознаграждение в форме комиссионных, поэтому они заинтересованы в том, чтобы сделок было как можно больше и у них был бы как можно больший объём.

Брокеры обычно работают в составе брокерских фирм. Это крупные фирмы с множеством филиалов и отделений, которые посредством электронной почты общаются со своим главным офисом, а через него – с фондовой биржей.

В таких фирмах лица, обслуживающие индивидуальных инвесторов, называются администраторами по счетам, обслуживающие фирмы – администраторами по заявкам.

Трейдер (trader) осуществляет операции купли-продажи ценных бумаг только за свой счёт. Ему запрещено выполнять распоряжения клиентов. Свою прибыль трейдеры получают, используя колебания цен на рынке по принципу «купить дешевле, а продать дороже». Естественно, их деятельность связана с достаточно большим финансовым риском.

Дилер (dealer) совмещает функции крупного трейдера и брокера для брокеров. Он осуществляет операции по определённым группам ценных бумаг, работая с большими пакетами акций и действуя тут как трейдер. Кроме того, когда текущий курс ценных бумаг не позволяет какому-то брокеру немедленно выполнить поручение клиента, то он передаёт его дилеру, который потом по мере возможности будет пытаться его выполнить. В этом смысле дилер – это

Библиотека БГУИР

брокер для брокеров. Обычно дилеры – это представители крупных инвестиционных компаний или фондов, имеющие большие запасы различных ценных бумаг.

Обычно на бирже по какой-то ценной бумаге фигурирует две цены: цена покупателя (bid price), т.е. та цена, по которой покупатель согласен купить эту бумагу, и цена продавца (ask price), т.е. та цена, по которой продавец согласен её продать. Обычно цена ask выше цены bid и эта разница в ценах продавца и покупателя носит название **спреда** (bid-ask spread). Чаще всего сама сделка происходит по полусумме цен bid и ask, хотя, конечно, возможны и другие варианты – это уже зависит от того, как брокеры договорятся между собой.

Существует специальная терминология относительно тех участников рынка, кто ведёт активные операции по купле-продаже ценных бумаг, играя на повышение или понижение.

Бык (bull) – это дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий, что цены повысятся. Так как с увеличением спроса на товар его цена должна расти, то «бык», создавая видимость увеличения спроса, покупает акции даже за свой счет. Он надеется после повышения цен» продать акции и получить прибыль.

Медведь (bear) – дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий падения цен. Так как с увеличением предложения товара цены на него падают, то «медведь» продаёт ценные бумаги, в том числе даже те, которых у него на данный момент нет (short sale). Он надеется после понижения цен купить эти недостающие бумаги по низким ценам и тем самым «закрыть» свою «короткую позицию», т.е. рассчитаться с долгами и образовавшуюся в результате разницы цен прибыль оставить себе.

На российском рынке кроме названий этих животных, имеются ещё «свиньи» и «овцы». «Свиньи» ведут очень активные операции по купле и продаже ценных бумаг, пытаясь заработать даже на небольших колебаниях курса в течение одной биржевой сессии. «Овцы» долго присматриваются к рынку и совершают операции по купле-продаже ценных бумаг.

1.4. Основные типы производных ценных бумаг

В странах с развитой рыночной экономикой кроме собственно ценных бумаг (акций, облигаций и т.д.) очень распространены ещё и **производные ценные бумаги**, называемые в России иногда **финансовыми деривативами** или просто **деривативами**.

Сразу заметим, что с этими бумагами имеют дело два типа участников рынка: во-первых, это **хеджеры**, т.е. люди, стремящиеся уменьшить, «схеджировать» риск от финансовых операций; во-вторых, это **спекулянты**, стремящиеся нажиться на колебаниях цен.

Разберём теперь основные типы деривативов.

1. Форвардные контракты (от английского forward – «вперёд»).

Библиотека БГУИР

Форвардный контракт – это договор между покупателем и продавцом, по которому:

– продавец **обязуется** в некоторый момент времени T в будущем предоставить покупателю определённое количество товара определённого качества по заранее оговоренной (форвардной) цене;

– покупатель обязуется купить этот товар по этой заранее оговоренной цене.

Таким образом, схема форвардного контракта имеет следующий вид:

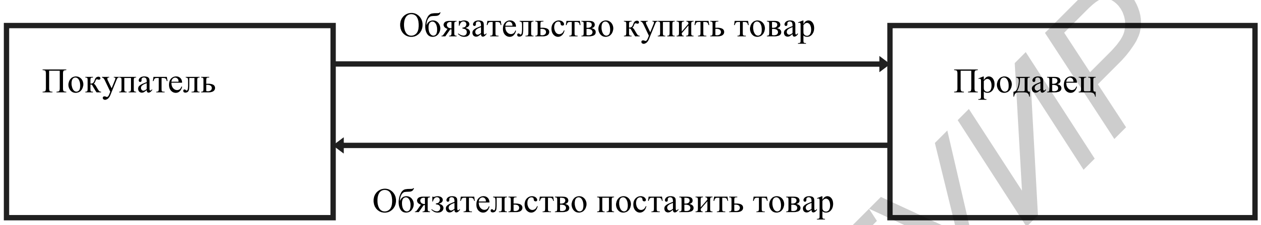


Рис. 1.1. Схема форвардного контракта

Обычно покупатель платит некоторую сумму P в момент заключения контракта (аванс) и оставшуюся часть суммы K – в момент поставки товара покупателем, хотя возможны и другие варианты. Разумеется, в договоре обычно предусматриваются санкции за невыполнение условий контракта.

2. Фьючерсы (от английского слова future – будущее). Главным отличием фьючерса от форвардного контракта является то, что между покупателем и продавцом **появляется посредник – биржа**, которая берёт на себя все обязательства по исполнению контракта. Схеме фьючерса принимает вид:

Рис. 1.2. Схема фьючерса

Появление такого солидного посредника, как биржа, резко уменьшает риск невыполнения фьючерсного контракта, хотя минимальная степень риска всё-таки остаётся. Из-за наличия посредника в лице биржи фьючерсы приобретают некоторые дополнительные черты:

а) фьючерсы **стандартизированы** по количеству товара, по его характеристикам, по срокам поставки и т.д. Это конкретизирует отношения между покупателем и продавцом;

б) при фьючерсах покупатель и продавец не встречаются и даже вообще не знают друг друга, т.к. они имеют дело с биржей;

Библиотека БГУИР

в) чтобы уменьшить риск невыполнения контракта, биржа берёт и с покупателя, и с продавца некоторую сумму денег в залог, которая называется **маржей** (margin). Обычно эта маржа составляет от 5 до 15 % от суммы контракта. При выполнении контракта маржа возвращается, при невыполнении – идёт на счёт биржи;

г) чтобы ещё больше уменьшить риск невыполнения контракта, в США происходит постоянный перерасчёт (клиринг) маржи, производимый специальной клиринговой палатой. Схема этого перерасчёта достаточно сложна, но основная идея такова: и покупатель, и продавец имеют на бирже специальные фьючерсные счета, на которых должна быть определённая сумма денег. Если цена на товар возрастает, так что продавцу может не захотеться его продать, то с его счёта снимается дополнительная маржа, которая идёт на счёт покупателя. Если наоборот, цена на товар падает, то, чтобы отбить у покупателя желание нарушить контракт, с его счёта снимается дополнительная маржа, которая идёт на счёт продавца. И этот перерасчёт маржи постоянно следует за колебаниями цены. Разумеется, в момент исполнения контракта маржа возвращается.

3. Опционы (от английского option – выбор).

Главным отличием опциона от фьючерса является то, что **фьючерс обязателен к исполнению,** а покупатель опциона покупает **право, но не обязанность** совершить некоторую финансовую операцию. Обязанность сохраняется лишь за продавцом опциона.

Покупатель опциона по-английски называется holder, а продавец – writer, сама же процедура продажи опциона – writing. Если продавец опциона действительно имеет акции, о которых идёт речь, то говорят, что опцион-колл покрытый (covered call writing); если же продавец опциона не имеет акций, то говорят, что опцион-колл непокрытый (naked call writing). В этом случае продавец опциона обязан внести на биржу маржу (залог исполнения контракта).

Опцион-пут (put option или просто put) отличается от опциона-колл тем, что покупатель приобретает **право продать** определённое количество акций определённой компании продавцу опциона по определённой цене в определённую дату.

Опцион **американского типа** (American version) отличается от европейского опциона тем, что он может быть предъявлен к исполнению **в любой момент** до даты истечения срока (опционы европейского типа могут быть предъявлены к исполнению **только** в дату истечения срока).

Библиотека БГУИР

Раздел 2. Динамика изменения цены ценных бумаг (дискретное время)

2.1. Общее описание

Будем считать, что время меняется дискретно – $0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ 3\Delta t,\ 4\Delta t,\ldots$. Шаг дискретизации этого времени Δt зависит от рассматриваемой ситуации – минута, час, день, неделя, год и т.д. Мы будем условно считать, что $\Delta t = 1$.

Пусть имеется некоторая безрисковая ценная бумага ***B***. Её цену в момент времени $(n-1)\Delta t$ мы будем обозначать B_{n-1}. Тогда считается, что её цена в момент времени $n \cdot \Delta t$ будет равна

$$B_n = (1+r_n)B_{n-1,} r_n > -1. \tag{2.1}$$

Если B_0 – цена в момент времени 0, то

$$B_n = B_0 \prod_{i=1}^{n}(1+r_i), r_i > -1. \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы будем считать, что $\forall i, r_i = r$, так что

$$B_n = (1+r)^n B_{0,} r > -1. \tag{2.3}$$

Здесь r – ставка доходности по этой ценной бумаге, которая считается известной и служит в дальнейшем некоторым эталоном для сравнения всех комбинаций ценных бумаг.

Пусть теперь ***S*** – некоторая рисковая ценная бумага (акция, рисковая облигация и т.д.) Рынок, состоящий из безрисковых ***B*** и рисковых ***S*** ценных бумаг, называется **(*B, S*)** рынком.

Если S_{n-1} есть цена рисковой ценной бумаги в некоторый момент времени $(n-1)\Delta t$, то её цену в момент времени $n \cdot \Delta t$ будем представлять в виде

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}, \tag{2.4}$$

где $\rho_n > -1$.

По смыслу

$$\rho_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}, \Delta S_n = S_n - S_{n-1} \tag{2.5}$$

есть относительное изменение цены рисковой ценной бумаги. В отличие от безрисковой ценной бумаги, величина ρ_n является **случайной,** а совокупность величин $\rho_1,\ \rho_2,\ldots\rho_n,\ldots$ образует **случайный процесс**. Описать модель изменения цены бумаги ***S*** – значит описать с вероятностных позиций случайный процесс $\{\rho_i,\ i = \overline{1,\infty}\}$.

Заметим, что в выражении (2.4) имеем

$$S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1+\rho_i\right). \tag{2.6}$$

Библиотека БГУИР

Комбинация $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\rho_i\right)$ называется **стохастической экспонентой.**

Часто удобнее рассматривать не величины ρ_n, а величины

$$h_n = \ln(1+\rho_n),\ 1+\rho_n = e^{h_n}. \tag{2.7}$$

Тогда

$$S_n = S_{n-1}e^{h_n},\ S_n = S_0 e^{h_1+h_2+\ldots+h_n}. \tag{2.8}$$

Величины $\{h_1, h_2, \ldots h_n\}$ также образуют случайный процесс, модели которого часто проще, чем модели процесса ρ_n.

В дальнейшем при описании конкретных моделей процессов h_n и ρ_n основой для их построения будет процесс $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, в котором величины ε_i считаются независимыми случайными величинами, распределёнными по нормальному закону с $M\{\varepsilon_n\}=0$ и $D\{\varepsilon_n\}=1$, т.е. $p(\varepsilon_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_n^2}{2}\right)$. Такие величины будут в дальнейшем называться стандартными нормальными случайными величинами и обозначаться так: $\varepsilon_n \sim N(0,1)$.

2.2. Биномиальная модель

В этой модели величины ρ_n являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, которые могут принимать всего лишь два значения – a и b, причем выполнено условие

$$-1 < a < r < b \tag{2.9}$$

с вероятностями

$$P\{\rho_n = b\} = p,\ P\{\rho_n = b\} = 1-p = q. \tag{2.10}$$

Эта модель не имеет какой-либо практической ценности и применяется лишь в теоретических исследованиях как наиболее простая модель.

2.3. Гауссовская модель

Описание модели. В гауссовской модели величины h_n считаются представленными в виде

$$h_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n, \tag{2.11}$$

где μ_n и σ_n – некоторые **неслучайные** функции от времени n.

Это означает, что h_n в этом случае являются независимыми нормальными случайными величинами с $M\{h_n\}=\mu_n$ и $D\{h_n\}=\sigma_n^2$, так что

$$p(h_n) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(h_n-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\right). \tag{2.12}$$

Библиотека БГУИР

Выведем плотность вероятностей величин $z_n = 1 + \rho_n$. Так как согласно (2.7), $z_n = 1 + \rho_n = \exp(h_n)$, то и $\frac{dh_n}{dz_n} = \frac{1}{z_n}$. Согласно формулам теории вероятностей, в этом случае

$$p(z_n) = \frac{1}{\sigma_n z_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln z_n - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2} \right), \quad z_n > 0, \tag{2.13}$$

т. е. z_n имеет логарифмически нормальное распределение.

Наиболее важными частными случаями этой модели являются:

а) $\forall n \ \mu_n = \mu$; $\sigma_n = \sigma$, т.е. μ_n и σ_n не зависят от n. Тогда

$$p(h_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(h_n - \mu)^2}{2\sigma^2} \right), \qquad p(z_n) = \frac{1}{\sigma z_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln z_n - \mu)^2}{2\sigma^2} \right);$$

б) $\sigma_n^2 = \sigma^2 = \text{const}$, $\mu_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k$, т. е. μ_n – полином от n степени k. Так как аппроксимация цен на больших временных интервалах практически невозможна, то обычно ограничиваются полиномами первой или второй степени.

Оценка параметров. При практическом использовании этих моделей необходимо уметь оценивать их параметры.

Пусть имеется выборка $\{h_i,\ i \in T\}$, где T – некоторое подмножество множества $\{1,\ 2,\ 3, \ldots, N\}$. Необходимость введения множества T связана с тем, что некоторые измерения могут быть пропущены. Через N_T в дальнейшем будет обозначать число элементов в множестве T.

Тогда в модели «а» стандартные оценки $\hat{\mu},\ \hat{\sigma}^2$ параметров $\mu,\ \sigma^2$ имеют вид

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i \in T} h_i, \ \ \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{N_T - 1} \sum_{i \in T} (h_i - \hat{h}_i)^2 \ .$$

В модели «б» для оценки параметров a_s стандартно используют метод наименьших квадратов, а поиск осуществляют из условия

$$R = \sum_{i \in T} \left(h_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 i - \hat{a}_2 i^2 - \ldots - \hat{a}_k i^k \right)^2 \Rightarrow \min_{\{\hat{a}_s\}} .$$

Это приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{i \in T} \left(h_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 i - \hat{a}_2 i^2 - \ldots - \hat{a}_k i^k \right) i^s, s = \overline{0,k}.$$

Оценка s^2 параметра $\hat{\sigma}^2$ имеет вид

$$s^2 = \frac{1}{N_T - (k+1)} \sum_{i \in T} \left(h_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 i - \hat{a}_2 i^2 - \ldots - \hat{a}_k i^k \right)^2.$$

Библиотека БГУИР

2.4. Модель скользящего среднего MA(q)

Описание модели. Пусть опять имеется «базисная» последовательность $\{\varepsilon_n\}$ независимых стандартных нормальных случайных величин $N(0,1)$.

В модели скользящего среднего (Moving Average model) MA(q), описывающей эволюцию последовательности $\{h_n\}$, предлагается следующий способ формирования значений h_n по базисной последовательности $\{\varepsilon_n\}$:

$$h_n = \mu + b_0\varepsilon_n + \left(b_1\varepsilon_{n-1} + b_2\varepsilon_{n-2} + \ldots + b_q\varepsilon_{n-q}\right),$$

где q – параметр, определяющий порядок зависимости от его предыдущего значения;

ε_n играет роль величины, «обновляющей» информацию, содержащейся в величинах $\{\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \ldots, \varepsilon_{n-q}\}$.

Рассмотрим вероятностные характеристики величин h_n. Так как $\{\varepsilon_n\}$ есть нормальные случайные величины, то h_n есть нормальный случайный **процесс**. Легко получить следующее соотношение:

$$M\{h_n\} = \mu; \;\; D\{h_n\} = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_q^2.$$

Однако теперь сами значения h_n будут коррелированы. Найдём $R_k = \mathrm{cov}(h_n,\; h_{n+k}) = M\{(h_n - \mu)(h_{n+k} - \mu)\}$. Так как процесс h_n является стационарным, то эти ковариации не зависят от n.

Имеем

$$\begin{aligned}
&h_n - \mu = b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1} + b_2\varepsilon_{n-2} + \ldots + b_q\varepsilon_{n-q},\\
&h_{n+1} - \mu = b_0\varepsilon_{n+1} + b_1\varepsilon_n + b_2\varepsilon_{n-1} + \ldots + b_q\varepsilon_{n-q+1},\\
&h_{n+2} - \mu = b_0\varepsilon_{n+2} + b_1\varepsilon_{n+1} + b_2\varepsilon_n + \ldots + b_q\varepsilon_{n-q+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h_{n+q} - \mu = b_0\varepsilon_{n+q} + b_1\varepsilon_{n+q-1} + b_2\varepsilon_{n+q-2} + \ldots + b_q\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Заметим, что корреляция этих величин возникает из-за того, что в выражениях для h_n и h_{n+k} есть слагаемые с одинаковыми индексами у ε. Так, в выражениях для $h_n - \mu$ и $h_{n+1} - \mu$ эти коррелированные части имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\text{для } h_n - \mu: && b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + b_{q-1}\varepsilon_{n-q+1};\\
&\text{для } h_{n+1} - \mu: && b_1\varepsilon_n + b_2\varepsilon_{n-1} + \ldots + b_q\varepsilon_{n-q+1}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$R_1 = \mathrm{cov}(h_n, h_{n+1}) = b_0b_1 + b_1b_2 + b_2b_3 + \ldots + b_{q-1}b_q.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&\text{для } h_n - \mu: && b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + b_{q-2}\varepsilon_{n-q+2};\\
&\text{для } h_{n+2} - \mu: && b_2\varepsilon_n + b_3\varepsilon_{n-1} + \ldots + b_q\varepsilon_{n-q+2},
\end{aligned}$$

и поэтому

Библиотека БГУИР

$$R_2 = \mathrm{cov}(h_n, h_{n+2}) = b_0 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_4 + \ldots + b_{q-2} b_q .$$

В общем виде легко получаем, что

$$R_k = \mathrm{cov}(h_n, h_{n+k}) = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{q-k} b_s b_{s+k}, \text{ если } k \le q, \\ 0, \text{ если } k > q. \end{cases}$$

Отсюда для коэффициентов корреляции

$$\mathrm{corr}(h_n,\ h_{n+k}) = \frac{\mathrm{cov}(h_n, h_{n+k})}{\sqrt{D\{h_n\} D\{h_{n+k}\}}}$$

имеем

$$\mathrm{corr}(h_n,\ h_{n+k}) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{s}^{q-k} b_s b_{s+k}}{\sum\limits_{s=0}^{q} b_s^2}, \text{ если } k \le q, \\ 0, \text{ если } k > q. \end{cases}$$

Оценка параметров модели. Предположим, что порядок модели q нам известен. Пусть имеется выборка $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_N$ объёмом N. Тогда оценка $\hat{\mu}$ параметра μ ищется по формуле

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} h_i .$$

Для оценки параметров b_i построим сначала оценки $\hat{R}_k$ ковариаций R_k:

$$\hat{R}_k = \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=1}^{N-k} (h_i - \hat{\mu})(h_{i+k} - \hat{\mu}), k = \overline{0, q}.$$

Теперь оценки $\hat{b}_s$ параметров b_s можно искать из решения системы уравнений

$$\begin{cases} \hat{R}_0 = \hat{b}_0^2 + \hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2 + \ldots + \hat{b}_q^2, \\ \hat{R}_1 = \hat{b}_0 \hat{b}_1 + \hat{b}_1 \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \hat{b}_3 + \ldots + \hat{b}_{q-1} \hat{b}_q, \\ \hat{R}_2 = \hat{b}_0 \hat{b}_2 + \hat{b}_1 \hat{b}_3 + \hat{b}_2 \hat{b}_4 + \ldots + \hat{b}_{q-2} \hat{b}_q, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{R}_q = \hat{b}_0 \hat{b}_q. \end{cases} \tag{2.14}$$

К сожалению, решение этой системы неоднозначно: установить, какая комбинация параметров соответствует реальности, без дополнительной информации невозможно.

Рассмотрим, например, случай $q = 1$. Тогда система (2.14) имеет вид

Библиотека БГУИР

$$\begin{cases} \hat{R}_0 = \hat{b}_0^2 + \hat{b}_1^2, \\ \hat{R}_1 = \hat{b}_0 \hat{b}_1. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы можно найти $\hat{b}_1$ через $\hat{b}_0$:

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{R}_1}{\hat{b}_0},$$

и после подстановки в первое уравнение получим биквадратное уравнение относительно $\hat{b}_0$:

$$\hat{b}_0^4 - \hat{b}_0^2 \hat{R}_0 + \hat{R}_1^2 = 0 .$$

Оба корня этого уравнения

$$\hat{b}_0^2 = \frac{\hat{R}_0 \pm \sqrt{\hat{R}_0^2 - 4\hat{R}_1^2}}{2}$$

вещественны и положительны. Знак b_0 значения не имеет. В результате получаем два значения $\hat{b}_0$, которым соответствуют два значения $\hat{b}_1$. Решить же, какая из двух получившихся комбинаций соответствует реальности, без дополнительной информации невозможно.

2.5. Авторегрессионная модель AR(p)

Описание модели. Говорят, что последовательность $\{h_n\}$ подчиняется авторегрессионной модели (AutoRegressive model) AR(p) порядка p, если эволюция h_n описывается следующим уравнением в конечных разностях порядка p:

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_p h_{n-p} + \sigma \cdot \varepsilon_n . \tag{2.15}$$

Введём величину

$$\mu = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p} = \frac{a_0}{1 - \sum\limits_{s=0}^{p} a_s}$$

и перейдём к величинам $\Delta h_n = h_n - \mu$. Подставляя в (2.15) $h_n = \Delta h_n + \mu$, легко получить, что Δh_n подчиняется уравнению

$$\Delta h_n = a_1 \cdot \Delta h_{n-1} + a_2 \cdot \Delta h_{n-2} + \ldots + a_p \cdot \Delta h_{n-p} + \sigma \cdot \varepsilon_n , \tag{2.16}$$

т. е. в уравнении для Δh_n исчезло слагаемое a_0. В дальнейшем для Δh_n мы будем в основном иметь дело с уравнением (2.16).

Сначала рассмотрим подробно случай $p = 1$, когда

$$\Delta h_n = a_1 \cdot \Delta h_{n-1} + \sigma \cdot \varepsilon_n .$$

Будем считать, что $|a_1| < 1$. Тогда имеем

Библиотека БГУИР

$$
\begin{aligned}
\Delta h_n &= \sigma\varepsilon_n + a_1\Delta h_{n-1} = \\
&= \sigma\varepsilon_n + a_1\sigma\varepsilon_{n-1} + a_1^2\Delta h_{n-2} = \\
&= \sigma\varepsilon_n + a_1\sigma\varepsilon_{n-1} + a_1^2\varepsilon_{n-2} + a_1^3\Delta h_{n-3} = \ldots = \\
&= \sigma\cdot\sum_{s=0}^{\infty} a_1^s\varepsilon_{n-s}
\end{aligned}
$$

и в силу того, что $|a_1|<1$, ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_1^s\varepsilon_{n-s}$ сходится в среднеквадратичном смысле.

Итак, в этом случае

$$\Delta h_n = \sigma\cdot\sum_{s=0}^{\infty} a_1^s\varepsilon_{n-s}.$$

Отсюда следует, что $M\{\Delta h_n\}=0$, $D\{\Delta h_n\}=\sigma^2/(1-a_1^2)$, так что

$$M\{h_n\}=\mu=\frac{a_0}{1-a_1},\ D\{h\}=\frac{\sigma^2}{1-a_1^2}.$$

Найдём также ковариации и коэффициенты корреляции для величин h_n. Имеем:

$$\Delta h_n = \sigma\cdot\sum_{s=0}^{\infty} a_1^s\varepsilon_{n-s},\quad \Delta h_{n+k} = \sigma\cdot\sum_{l=0}^{\infty} a_1^l\varepsilon_{n+k-l},$$

и поэтому

$$\operatorname{cov}(h_n,h_{n+k}) = M\{\Delta h_n\cdot\Delta h_{n+k}\} = \sigma^2\cdot\sum_{s,l=0}^{\infty} a_1^s a_1^l M\{\varepsilon_{n-s}\varepsilon_{n+k-l}\}.$$

Но в силу некоррелированности ε_i $M\{\varepsilon_{n-s}\varepsilon_{n+k-l}\}$ отлично от нуля (и равно 1) лишь тогда, когда $n-s=n+k-l$, т.е. тогда, когда $l=s+k$. Поэтому

$$\operatorname{cov}(h_n,h_{n+k}) = \sigma^2\cdot\sum_{s,l=0}^{\infty} a_1^s a_1^{s+k} = \sigma^2\cdot a_1^k\sum_{s=0}^{\infty} a_1^{2s} = \frac{\sigma^2\cdot a_1^k}{1-a_1^2},$$

что и даёт явное выражение для ковариации этих величин. Отсюда $\operatorname{corr}(h_n,h_{n+k})=a_1^k$.

Заметим, что h_n является нормальным случайным процессом в силу нормальности величин ε_n. Вследствие этого соотношение (2.16) принимает вид

$$\Delta h_n = \sigma\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{p} A_k\lambda_k^s\right)\varepsilon_{n-s}. \tag{2.17}$$

Оценка параметров. Для оценки параметров $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_p$ модели (2.15) обычно применяют метод наименьших квадратов, когда оценки $\hat{a}_i$ параметров a_i ищутся из условия

$$R=\sum_{i=p+1}^{N}\left(h_i-\hat{a}_0-\hat{a}_1h_{i-1}-\hat{a}_2h_{i-2}-\ldots-\hat{a}_ph_{i-p}\right)^2\Rightarrow\min_{\{\hat{a}_i\}}\ .$$

Приравнивая к нулю производные $\partial R/\partial\hat{a}_i$, $i=\overline{0,p}$, получим следующую систему линейных уравнений для оценок $\hat{a}_i$ параметров a_i:

$$\begin{cases}
\hat{a}_0(n-p) \quad + \ \hat{a}_1\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-1}+\ldots+\ \hat{a}_p\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-p}=\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_i,\\
\hat{a}_0\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-1} \quad + \ \hat{a}_1\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-1}^2+\ldots+\ \hat{a}_p\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-p}h_{i-1}=\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_ih_{i-1},\\
\hat{a}_0\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-2} \quad + \ \hat{a}_1\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-1}h_{i-2}+\ldots+\ \hat{a}_p\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-p}h_{i-2}=\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_ih_{i-2},\\
\ldots \qquad\qquad \ldots\\
\hat{a}_0\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-p} \quad + \ \hat{a}_1\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-1}h_{i-p}+\ldots+\ \hat{a}_p\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_{i-p}^2=\sum\limits_{i=p+1}^{N}h_ih_{i-p},
\end{cases} \tag{2.18}$$

решив которую, найдём все интересующие нас оценки.

Оценка s^2 величины σ^2 имеет вид

$$s^2=\frac{1}{N-(2p+1)}\sum_{i=p+1}^{N}\left(h_i-\hat{a}_0-\hat{a}_1h_{i-1}-\hat{a}_2h_{i-2}-\ldots-\hat{a}_ph_{i-p}\right)^2\ . \tag{2.19}$$

В этой формуле вместо $\hat{a}_i$ должны быть подставлены значения этих величин, полученные из решения системы (2.18).

В простейшем случае $p=1$ система (2.18) принимает вид

$$\begin{cases}
\hat{a}_0(N-1) \ + \ \hat{a}_1\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1} \ =\sum\limits_{i=2}^{N}h_i,\\
\hat{a}_0\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1} \ + \ \hat{a}_1\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}^2 \ =\sum\limits_{i=2}^{N}h_ih_{i-1},
\end{cases}$$

откуда

$$\hat{a}_0=\frac{\sum\limits_{i=2}^{N}h_i\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}^2-\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}\sum\limits_{i=2}^{N}h_ih_{i-1}}{(N-1)\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}^2-\left(\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}\right)^2},\qquad \hat{a}_1=\frac{(N-1)\sum\limits_{i=2}^{N}h_ih_{i-1}-\sum\limits_{i=2}^{N}h_i\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}}{(N-1)\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}^2-\left(\sum\limits_{i=2}^{N}h_{i-1}\right)^2},$$

$$s^2=\frac{1}{N-3}\sum_{i=2}^{N}\left(h_i-\hat{a}_0-\hat{a}_1h_{i-1}\right)^2\ .$$

Библиотека БГУИР

2.6. Модель авторегрессии – скользящего среднего ARMA(*p, q*)

Описание модели. Объединением моделей MA(q) и AR(p) является модель ARMA(p, q), в которой величины h_n определяются уравнением

$$h_n - a_0 - a_1 h_{n-1} - a_2 h_{n-2} - \ldots - a_p h_{n-p} = b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + b_q \varepsilon_{n-q},$$

и которая носит название модели авторегрессии–скользящего среднего (Auto-Regression-Moving Average model).

Переходя к величинам

$$\Delta h_n = h_n - \mu, \;\; \mu = \frac{a_0}{1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_p)},$$

получим, что Δh_n удовлетворяет уравнению

$$\Delta h_n - a_1 \Delta h_{n-1} - a_2 \Delta h_{n-2} - \ldots - a_p \Delta h_{n-p} = b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + b_q \varepsilon_{n-q}.$$

Описание свойств этой модели вновь связано со свойствами корней характеристического уравнения

$$\lambda^p - a_1 \lambda^{p-1} - a_2 \lambda^{p-2} - \ldots - a_p = 0.$$

Пусть снова все λ_i различны и $\forall i, \; |\lambda_i| < 1$. По аналогии с (2.17) выражение для Δh_n может быть записано в виде

$$\Delta h_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} A_k \lambda_k^s \right) \left(b_0 \varepsilon_{n-s} + b_1 \varepsilon_{n-s-1} + \ldots + b_q \varepsilon_{n-s-q} \right). \quad (2.20)$$

Обычно эту сумму перегруппировывают, выделяя отдельно слагаемые с ε_n, ε_{n-1}, … , ε_{n-q+1}, которые имеют различный вид. Все оставшиеся слагаемые, начиная с ε_{n-q}, однотипны.

Рассмотрим простейший частный случай – модель ARMA(1, 1), когда Δh_n удовлетворяет уравнению

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1}.$$

В этом случае $\mu = a_0 / (1 - a_1)$ и для Δh_n имеем

$$\Delta h_n = a_1 \Delta h_{n-1} + b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda - a_1 = 0$ имеет корень $\lambda = a_1$. Если $|a_i| < 1$, то

$$\Delta h_n = \sum_{s=0}^{\infty} a_1^s \left(b_0 \varepsilon_{n-s} + b_1 \varepsilon_{n-s-1} \right).$$

Представим первую сумму так:

$$b_0 \sum_{s=0}^{\infty} a_1^s \varepsilon_{n-s} = b_0 \varepsilon_n + b_0 \sum_{s=1}^{\infty} a_1^s \varepsilon_{n-s} = b_0 \varepsilon_n + b_0 a_1 \sum_{s=1}^{\infty} a_1^{s-1} \varepsilon_{n-s},$$

а вторую сумму – так:

$$b_1 \sum_{s=0}^{\infty} a_1^s \varepsilon_{n-(s+1)} = b_1 \sum_{t=0}^{\infty} a_1^{t-1} \varepsilon_{n-t}$$

Библиотека БГУИР

(произведена замена переменной $t = s+1,\ \ s = t-1$). Тогда имеем

$$\Delta h_n = b_0\varepsilon_n + (a_1 b_0 + b_1)\sum_{s=1}^{\infty} a_1^{s-1}\varepsilon_{n-s}\,,$$

$$h_n = \frac{a_0}{1-a_1} + b_0\varepsilon_n + (a_1 b_0 + b_1)\sum_{s=1}^{\infty} a_1^{s-1}\varepsilon_{n-s}\,.$$

Теперь можно найти все вероятностные характеристики процесса h_n. В частности,

$$M\{h_n\} = \frac{a_0}{1-a_1},$$

$$D\{h_n\} = b_0^2 + (a_1 b_0 + b_1)^2 \sum_{s=1}^{\infty} a_1^{2(s-1)} = b_0^2 + \frac{(a_1 b_0 + b_1)^2}{1-a_1^2} = \frac{b_0^2 + 2a_1 b_0 b_1 + b_1^2}{1-a_1^2}.$$

Далее имеем

$$\Delta h_n = b_0\varepsilon_n + (a_1 b_0 + b_1)(\varepsilon_{n-1} + a_1\varepsilon_{n-2} + a_1^2\varepsilon_{n-3} + \ldots),$$

$$\Delta h_{n+1} = b_0\varepsilon_{n+1} + (a_1 b_0 + b_1)(\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + a_1^2\varepsilon_{n-2} + \ldots)\,.$$

Корреляция между Δh_n и Δh_{n+1} возникает из-за наличия ε с одинаковыми индексами. Поэтому

$$\mathrm{cov}(h_n, h_{n+1}) = b_0(a_1 b_0 + b_1) + (a_1 b_0 + b_1)^2 (a_1 + a_1^3 + a_1^5 + \ldots) =$$

$$= b_0 b_1 + a_1\left[b_0^2 + \frac{(a_1 b_0 + b_1)^2}{1-a_1^2} \right] = \frac{(a_1 b_0 + b_1)(b_0 + a_1 b_1)}{1-a_1^2}\,.$$

При $k \geq 2$ все остальные Δh_{n+k} имеют однотипный вид

$$\begin{aligned}\Delta h_{n+k} &= \ \ldots + (a_1 b_0 + b_1)(a_1^{k-1}\varepsilon_n + a_1^k\varepsilon_{n-1} + a_1^{k+1}\varepsilon_{n-2} + \ldots) = \\ &= \ \cdots + a_1^{k-1}(a_1 b_0 + b_1)(\varepsilon_n + a_1\,\varepsilon_{n-1} + a_1^2\varepsilon_{n-2} + \ldots)\end{aligned}$$

и поэтому

$$\mathrm{cov}(h_n, h_{n+k}) = a_1^{k-1}\cdot \mathrm{cov}(h_n, h_{n+1}) = a_1^{k-1}\frac{(a_1 b_0 + b_1)(b_0 + a_1 b_1)}{1-a_1^2}\,.$$

Заметим, что эта формула верна и для $k = 1$. Соответственно,

$$\mathrm{corr}(h_n, h_{n+k}) = a_1^{k-1}\cdot \frac{(a_1 b_0 + b_1)(b_0 + a_1 b_1)}{b_0^2 + 2a_1 b_0 b_1 + b_1^2}\,.$$

Аналогично рассматриваются и другие модели ARMA(*p*, *q*).

Вопрос об оценке параметров модели ARMA здесь рассматриваться не будет.

Библиотека БГУИР

Раздел 3. Динамика изменения цены ценных бумаг (непрерывное время)

3.1. Винеровский процесс

При построении моделей динамики цены ценных бумаг в дискретном времени основой была последовательность $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин. В непрерывном времени аналогичную роль играет так называемый винеровский случайный процесс w_t.

В общем случае случайным процессом $x(t,\omega)$ называется измеримая функция двух аргументов – времени t и элемента ω вероятностного пространства. В дальнейшем аргумент ω мы, как правило, будем опускать, а зависимость от времени t обозначать так: $x(t)$ или так: x_t. За винеровским процессом закрепим обозначение $w(t)$ или w_t.

Винеровским процессом w_t называется случайный процесс, обладающий следующими свойствами.

1. Приращения винеровского процесса $w_t - w_s$ и $w_{t'} - w_{s'}$ являются **независимыми**, если временные интервалы $[s,\ t]$ и $[s',\ t']$ не пересекаются. Говорят, что винеровский случайный процесс – это процесс с независимыми приращениями.
2. $w_t - w_s$ распределена по нормальному закону.
3. $M\{w_t - w_s\} = 0$.
4. $M\{(w_t - w_s)^2\} = |t - s|$.

В реальной жизни винеровских процессов не бывает, они являются лишь хорошей математической моделью некоторых реальных процессов, например, процесса броуновского движения. Откуда же берутся винеровские процессы?

Пусть $t > s$. Разобьём интервал $t - s$ на n участков длиной Δ, так что $\Delta = (t-s)/n$ или $n = (t-s)/\Delta$. Рассмотрим теперь **случайное блуждание** по решетке, изображенной на рис. 3.1.

Разобьём ось w_t на отрезки длиной Δ^α, где значение параметра α будет уточнено ниже. Будем считать, что если в какой-то момент времени $s + i \cdot \Delta$ точка находится в некотором узле этой решётки, то спустя время Δ она с вероятностью $p = 0{,}5$ перейдёт в узел, находящийся выше, т. е. её координата получит приращение $+\Delta^\alpha$, и с вероятностью $q = 0{,}5$ перейдёт в узел, находящийся ниже, т.е. её координата получит приращение $-\Delta^\alpha$.

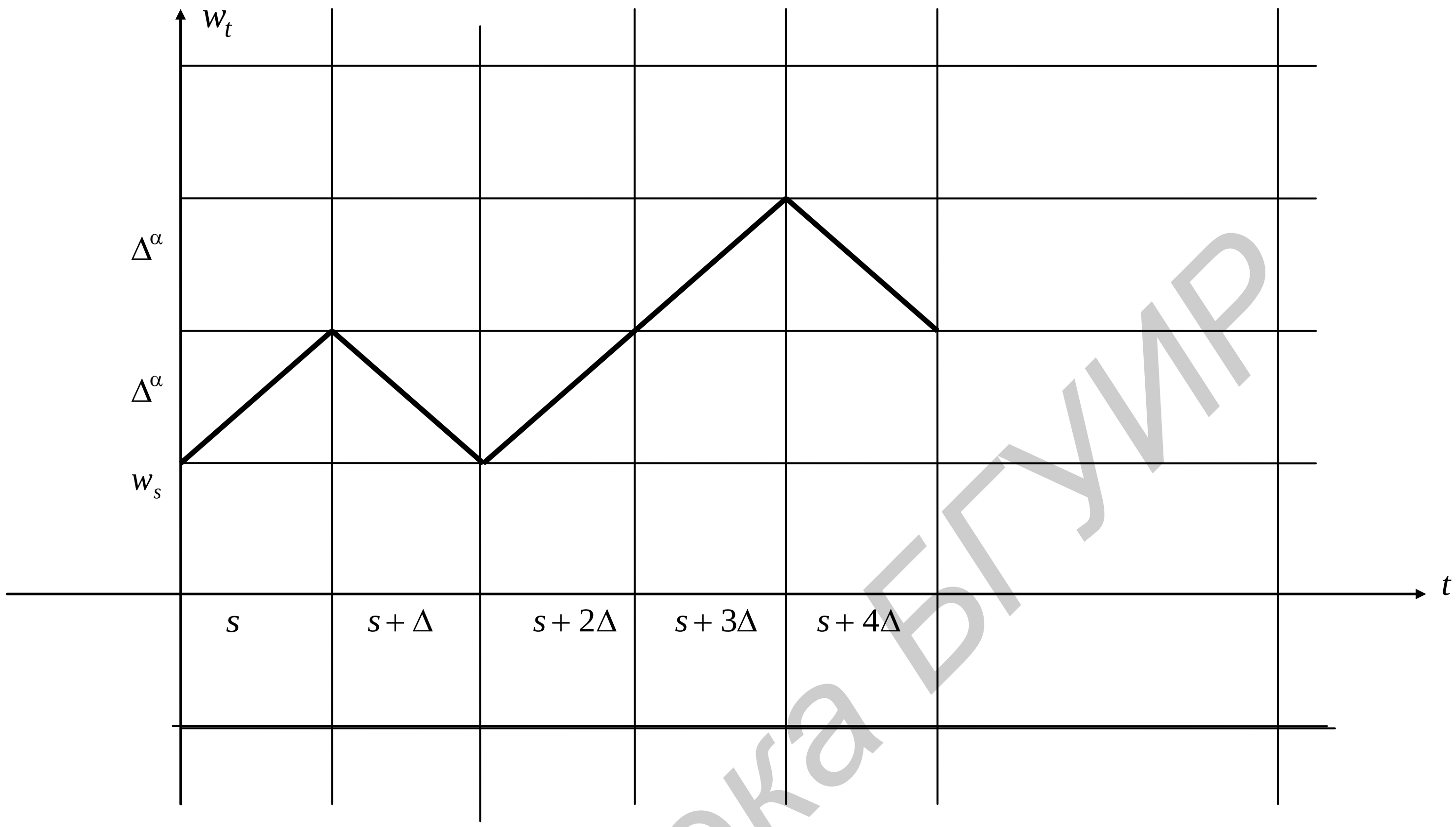


Рис. 3.1. Реализация процесса случайного блуждания

Обозначим через x_i это приращение координаты. Тогда

$$x_t = \begin{cases} +\Delta^\alpha, \text{ с вероятностью } p = 0{,}5, \\ -\Delta^\alpha, \text{ с вероятностью } q = 0{,}5. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$M\{x_i\} = (+\Delta^\alpha)\cdot\frac{1}{2} + (-\Delta^\alpha)\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

$$M\{x_i^2\} = D\{x_i\} = \Delta^{2\alpha}\cdot\frac{1}{2} + \Delta^{2\alpha}\cdot\frac{1}{2} = \Delta^{2\alpha}.$$

Тогда в момент времени $t = s + n\Delta$ будем иметь

$$w_t = w_s + \sum_{i=0}^{n-1} x_i,$$

и очевидно, что приращение $w_t - w_s = \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ не зависит от того, что происходило с точкой до момента времени s.

Подсчитаем характеристики разности $w_t - w_s$. Имеем

$$M\left\{w_t - w_s\right\} = \sum_{i=0}^{n-1} M\{x_i\} = 0,$$

$$M\left\{\left(w_t - w_s\right)^2\right\} = D\left\{w_t - w_s\right\} = \sum_{i=1}^{n-1} D\{x_i\} = n \cdot \Delta^{2\alpha} = \frac{t-s}{\Delta} \cdot \Delta^{2\alpha}.$$

Рассмотрим теперь предельный переход при $\Delta \to 0$. Тогда, если $2\alpha < 1$, то $D\{w_t - w_s\} \to \infty$ и получающийся процесс представляет только теоретический интерес. Если $2\alpha > 1$, то $D\{w_t - w_s\} \to 0$ и процесс становится детерминированным.

Единственный интересный случай – это случай $2\alpha = 1$, когда скачки $x_i = \pm\sqrt{\Delta}$. Тогда $M\{(w_t - w_s)^2\} = D\{w_t - w_s\} = t - s$. В силу центральной предельной теоремы при $\Delta \to 0$ величины $w_t - w_s$ являются нормальными. Таким образом, в этом случае при $\Delta \to 0$ наш процесс случайных блужданий переходит в винеровский случайный процесс.

Таким образом, винеровский случайный процесс – это предельный случай некоторых процессов типа случайного блуждания (кроме описанного выше примера можно указать и другие модели, дающие в пределе винеровский случайный процесс).

3.2. Диффузионные процессы

Винеровский процесс является основой для построения так называемых диффузионных процессов. Ниже даётся нестрогое изложение свойств этих процессов.

Разобьём всю ось времени на отрезки длиной Δ, и пусть x_t – некоторый случайный процесс. Обозначим $x_{t+\Delta} - x_t = \Delta x_t$ и $w_{t+\Delta} - w_t = \Delta w_t$. Рассмотрим процесс x_t, определяемый следующим рекуррентным соотношением:

$$x_{t+\Delta} = x_t + a(t, x_t) \cdot \Delta + b(t, x_t) \cdot \Delta w_t,$$

или

$$\Delta x_t = a(t, x_t) \cdot \Delta + b(t, x_t) \cdot \Delta w_t. \qquad (3.1)$$

Перейдём теперь к пределу $\Delta \to 0$. Тогда уравнение (3.1) перейдёт в уравнение

$$dx_t = a(t, x_t) \cdot dt + b(t, x_t) \cdot dw_t, \qquad (3.2)$$

называемое стохастическим дифференциальным уравнением. Правда, пока неясно, что понимать под dw_t – ведь винеровский случайный процесс не дифференцируем ни в одной точке t.

Далее имеем

$$M\{\Delta x_t\} = a(t, x_t) \cdot \Delta + b(t, x_t) \cdot M\{\Delta w_t\} = a(t, x_t) \cdot \Delta,$$

откуда

$$a(t,x_t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{M\left\{x_{t+\Delta}-x_t\right\}}{\Delta}.$$

Эта функция называется **коэффициентом сноса** (drift) процесса x_t.

Далее,

$$M\left\{\Delta x_t^2\right\}=a^2(t,x_t)\Delta^2+2a(t,x_t)b(t,x_t)\Delta\cdot M\{\Delta w_t\}+$$
$$+b^2(t,x_t)\cdot M\{\Delta w_t^2\}=a^2(t,x_t)\cdot\Delta^2+b^2(t,x_t)\cdot\Delta,$$

откуда

$$b^2(t,x_t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{M\{(x_{t+\Delta}-x_t)^2\}}{\Delta}.$$

Функция $b(t,x_t)$ в теории случайных процессов называется **коэффициентом диффузии** процесса x_t, а сам процесс называется **диффузионным процессом.** В финансовой математике функцию $b(t,x_t)$ принято называть **волатильностью** процесса x_t.

Формулы Ито

Пусть x_t – диффузионный случайный процесс с коэффициентом сноса $a(t,x_t)$ и волатильностью $b(t,x_t)$.

Пусть далее $f(t,x)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}$.

Рассмотрим теперь процесс

$$y_t=f(t,x_t). \tag{3.3}$$

Как установлено Киёси Ито, процесс y_t также является диффузионным случайным процессом, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy_t=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+a(t,x_t)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{b^2(t,x_t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]dt+\frac{\partial f}{\partial x}b(t,x_t)dw_t, \tag{3.4}$$

т. е. его коэффициенты сноса и волатильности равны

$$A(t,y_t)=\frac{\partial f}{\partial t}+a(t,x_t)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{b^2(t,x_t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{3.5}$$

Теперь нужно только, пользуясь формулой (3.3), выразить x_t через y_t и подставить его в получившееся выражение вместо x_t. Эти формулы и носят название формул Ито.

Библиотека БГУИР

3.3. Модели изменения цены ценных бумаг

Для описания динамики цены S_t рисковой ценной бумаги в непрерывном времени в основном используют две модели с некоторыми модификациями.

Напомним, что в дискретном времени цены записывались в виде
$$B_n = (1 + r_n) B_{n-1} \tag{3.6}$$
для безрисковой ценной бумаги и
$$S_n = (1 + \rho_n) S_{n-1} \text{ или } \Delta S_n = \rho_n S_{n-1}$$
для рисковой ценной бумаги, и речь шла о свойствах величин r_n и ρ_n или r_n и $h_n = \ln \rho_n$.

Для безрискового актива обобщение формулы (3.6) очевидно. Считая интервал времени равным Δt, получим
$$B(t + \Delta t) = \left(1 + r(t)\Delta t\right) B(t),$$

откуда, после перехода $\Delta t \to 0$,
$$dB(t) = r(t) B(t) dt.$$
Решение имеет вид
$$B_t = B_0 \cdot \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$
В случае, когда r от времени не зависит, получаем соотношения
$$dB_t = rB_t dt, \qquad B_t = B_0 \,\mathrm{e}^{rt},$$
которые и будут использоваться в дальнейшем.

Перейдём теперь к моделям для S_t. В дискретном времени было
$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \rho_n, \tag{3.7}$$
где ρ_n – случайная функция от n.

Модель Самуэльсона

В этой модели уравнение (3.7) переписывают в виде
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dw_t, \tag{3.8}$$
где w_t – винеровский случайный процесс, т. е. берут ρ_t в виде $\mu \cdot dt + \sigma \cdot dw_t$.

Величину μ называют трендом, а σ – волатильностью.

Уравнение (3.8) можно записать и в другом виде:
$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dw_t\right). \tag{3.9}$$
Тогда его называют моделью геометрического броуновского движения. Отсюда очевидно, что S_t – диффузионный случайный процесс, где $a(t, S_t) = \mu S_t$ и $b(t, S_t) = \sigma S_t$. Начальное условие для решения (3.9) следует брать в виде: при $t = 0 \quad S(0) = S_0$.

Библиотека БГУИР

Перейдём от функции S_t к функции H_t по формуле

$$S_t = S_0\,\mathrm{e}^{H_t}, \text{ или } H_t = \ln S_t - \ln S_0.$$

Ясно, что $H_0 = 0$. Для применения формулы Ито выпишем все необходимые функции.

$$a(t,S) = \mu S,\ \ b(t,S) = \sigma S,$$

$$f(t,S) = \ln S - \ln S_0,\ \ \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S},\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2},$$

и поэтому для функции H_t имеем

$$A(t,H_t) = \frac{1}{S}\cdot\mu S - \frac{1}{2S^2}\cdot\sigma^2 S^2 = \mu - \frac{\sigma^2}{2},$$

$$B(t,H_t) = \frac{1}{S}\cdot\sigma S = \sigma,$$

так что уравнение для H_t имеет вид

$$dH_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw_t.$$

Отсюда очевидно, что (считая $w_0 = 0$)

$$H_t = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)ds - \sigma\int_0^t dw_s = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w_t,$$

так что S_t может быть записана в виде

$$S_t = S_0\cdot\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\cdot w_t\right).$$

Отметим, что в силу нормальности w_t цена S_t имеет логарифмически нормальное распределение.

Обобщения модели Самуэльсона незначительны. Они имеют вид

$$dS_t = S_t\left(\mu(t)dt + \sigma(t)dw_t\right),$$

$$dS_t = S_t\left(\mu(t)dt + \sigma(t,S_t)dw_t\right),$$

где и $\mu(t)$, $\sigma(t)$, и $\sigma(t,S_t)$ – известные функции.

Модель Мертона

В этой модели S_t также представляется в виде $S_t = S_0\,\mathrm{e}^{H_t}$, но процесс H_t имеет траектории, изображенные на рис. 3.2. Эти траектории состоят из кусков прямых, параллельных оси времени t и прерывающихся скачками.

Пусть $t_1,\ t_2,\ t_3,\ldots$ есть моменты скачков и $x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$ есть величины скачков процесса H_t в эти моменты времени. В модели Мертона предполагается, что:

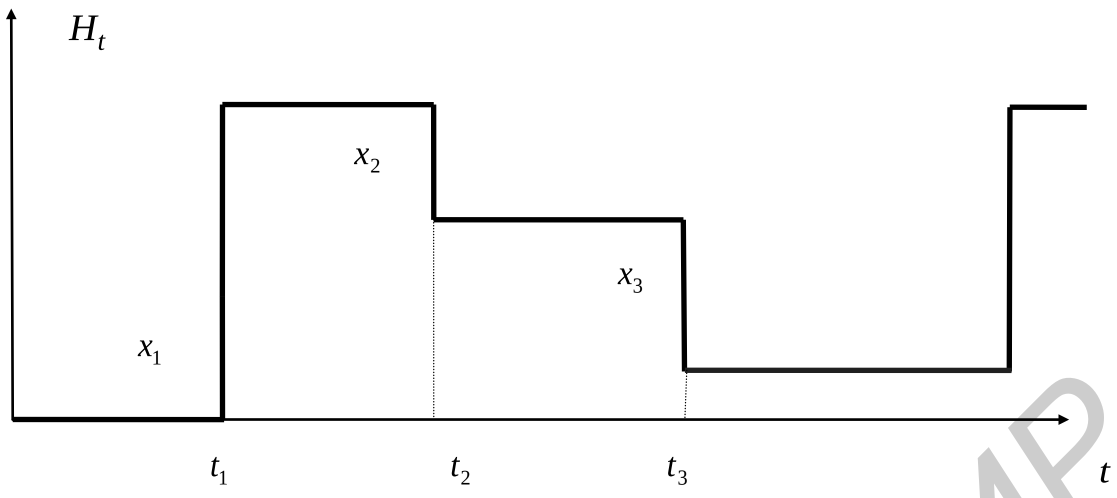


Рис. 3.2. Реализация процесса в модели Мертона

1) моменты скачков образуют пуассоновский поток событий интенсивностью λ;
2) величины скачков процесса H_t являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с плотностью вероятностей $p(x)$.

Возможны и усложнения этой модели, когда плотность вероятностей $p(x)$ величины скачка зависит от значения процесса H_t непосредственно **перед** скачком. В общем случае процесс H_t рассматривается как сугубо разрывный марковский процесс и описывается соответствующим образом.

Можно объединить модели Самуэльсона и Мертона в одну и считать, что

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + w_t + H_t\right),$$

где w_t – винеровский процесс,

H_t – процесс, описанный выше.

По-видимому, в настоящее время эта объединенная модель – наиболее сложная модель динамики цены ценной бумаги при непрерывном времени.

3.4. Модели динамики цен семейства ценных бумаг

Конечно, на реальном рынке фигурирует не одна ценная бумага – в странах с развитой рыночной экономикой их очень много, и процессы изменения их цен связаны друг с другом, в этом случае говорят о семействе ценных бумаг.

Для описания процесса изменения цен семейства ценных бумаг чаще всего используют так называемые **факторные модели** (factor models).

Простейшей является однофакторная модель, часто называемая также **рыночной моделью** (market model). В ней предполагается, что состояние всего рынка ценных бумаг можно охарактеризовать одной величиной, называемой **индексом рынка**.

Одним из наиболее широко известных индексов рынка является Standard & Poor's Stock Price Index, коротко обозначаемый как S&P500. Он представляет собой средневзвешенную величину курсов акций пятисот наиболее крупных компаний. Другим индексом, который превосходит S&P500 в том смысле, что он охатывает большее число акций, является NYSE Composite Index (NYSE – New York Stock Exchange). Для его вычисления используются курсы акций компаний, зарегистрированных на NYSE. Наиболее часто цитируемым в печати является так называемый индекс Доу–Джонса. Надо только иметь в виду, что есть несколько индексов Доу–Джонса. Индекс, который чаще других упоминается в печати, – это так называемый DJIA (Dow Jones Industrial Average), основанный на курсах акций тридцати крупнейших компаний и корпораций и обеспечивающий беспристрастную оценку ситуации на рынке акций. Кроме этого индекса имеются также Dow Jones Transportation Average, Dow Jones Utility Average и др.

Отметим также NASDAQ Composite Index (MASDAQ – National Association of Securities Dealers Automated Quotations), AMEX Market Value Index. Имеются и другие индексы рынка, которые дают аналогичные результаты.

Пусть r_t – индекс рынка в момент времени t. Далее, пусть S_i – цена i-й ценной бумаги в этот же момент времени. Тогда модель имеет вид

$$S_i = \alpha_i + \beta_i r_t + \varepsilon_i,$$

где α_i и β_i – некоторые коэффициенты, специфичные для i-й ценной бумаги. Коэффициент β_i иногда называют **чувствительностью** (sensitivity) ценной бумаги к рыночному индексу r_t.

Что касается величин ε_i, то они считаются независимыми случайными величинами с $M\{\varepsilon_i\} = 0$ и $D\{\varepsilon_i\} = \sigma_i^2$. Именно величины ε_i определяют индивидуальные колебания цены каждой ценной бумаги.

Выведем простые формулы, которые будут использоваться в дальнейшем. Пусть $\bar{r} = M\{r\}$ и $\sigma_r^2 = D\{r\}$. Тогда

$$M\{S_t\} = \alpha_i + \beta_i \bar{r},$$

$$D\{S_t\} = \beta_i^2 \sigma_r^2 + \sigma_i^2.$$

Если имеются две ценные бумаги i и j, то

$$\operatorname{cov}(S_i, S_j) = \beta_i \beta_j \sigma_r^2,$$

т. к. величины ε_i и ε_j независимы.

Сам индекс рыночной активности, конечно, меняется со временем. Для описания его эволюции также чаще всего используют модели диффузионных случайных процессов. Перечислим наиболее употребительные модели эволюции r_t.

Библиотека БГУИР

Модель Дотхана

$$dr_t = r_t(\mu dt + \sigma dw_t).$$

Модели Кокса, Ингерсола и Росса

$$dr_t = \beta r_t^{3/2} dw_t,$$

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dw_t.$$

Модель Хо и Ли

$$dr_t = \alpha(t)dt + \sigma dw_t.$$

Модели Халла и Уайта

$$dr_t - (\alpha(t) - \beta(t)r_t)dt + \sigma(t)dw_t,$$

$$dr_t - (\alpha(t) - \beta(t)r_t)dt + \sigma(t)\sqrt{r_t}\, dw_t.$$

Модель Блэка и Карасинского

$$dr_t = r_t(\alpha(t) - \beta(t)\ln r_t)dt + \sigma(t)r_t dw_t.$$

Часто одного фактора для прогнозирования оказывается недостаточно, и тогда вводят дополнительные факторы, например, ВВП (валовый внутренний продукт), уровень инфляции, цены на нефть и др. Тогда модель принимает вид

$$S_i = \alpha_i + \beta_{i1}r_1 + \beta_{i2}r_2 + \ldots + \beta_{ik}r_k + \varepsilon_i,$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_k$ – факторы.

Раздел 4. Теория оптимального портфеля ценных бумаг

4.1. Портфель ценных бумаг и его характеристики

С целью получения дохода многие организации (банки, инвестиционные фонды) и отдельные физические лица покупают всевозможные ценные бумаги – акции, облигации либо делают денежный вклад в банк, рассчитывая получить проценты по вкладу и разбогатеть.

Истина «не кладите все яйца в одну корзину» если ещё не стала, то скоро станет аксиомой. Поэтому с целью гарантировать себе определенный доход, люди покупают не одну ценную бумагу, а их набор, рассчитывая на то, что если по какой-то бумаге они ничего не получат, то получат по другим. Такое разнообразие в наборе бумаг называется **диверсификацией** (diversification), а сам набор ценных бумаг носит название **инвестиционного портфеля** (portfolio). Весь вопрос состоит в том, какие ценные бумаги и в каком количестве покупать при формировании такого портфеля.

Введём необходимые для дальнейшего рассмотрения величи́ны. Деньги вкладываются на определённый промежуток времени, который называется **периодом владения** (holding period).

Пусть мы имеем какую-то ценную бумагу i стоимостью S_i. В конце периода владения она будет стоить S_i', кроме того, в течение периода владения мы получим по ней некоторый дополнительный доход P_i (дивиденды, купонные платежи, проценты по вкладу и т.д.). Как уже говорилось выше, величина

Библиотека БГУИР

$$r_i = \frac{S_i' + P_i - S_i}{S_i}$$

называется **доходностью** (rate of return, или просто return) этой ценной бумаги.

Вообще говоря, доходность ценной бумаги − случайная величина. Её математическое ожидание $M\{r_i\}$ в дальнейшем будем обозначать как μ_i, а дисперсию – как c_{ii} (т.е. $c_{ii} = D\{r_i\}$). Если ценных бумаг всего n, то кроме μ_i, c_{ii}, $i = \overline{1,n}$ в дальнейшем нам понадобятся ещё ковариации величин r_i, т. е. величины

$$c_{ij} = \operatorname{cov}(r_i, r_j) = M\{(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)\}.$$

Величины μ_i и c_{ii} могут быть оценены по данным, касающимся этих ценных бумаг за предыдущие периоды. Всего этих величин $n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$, т. к. всего n величин μ_i и $n(n+1)/2$ величин c_{ij} (в силу симметрии, $c_{ij} = c_{ji}$). При больших n требуется знание очень большого массива данных (так, при $n = 100$ $n(n+3)/2 = 515$). Поэтому при расчете величин c_{ij} часто пользуются рыночной моделью, в которой считается, что

$$r_i = \alpha_i + \beta_i \cdot r + \varepsilon_i,$$

где r – индекс рынка,

α_i и β_i – константы, характеризующие i-ю ценную бумагу,

ε_i – независимые случайные величины. Тогда

$$\begin{gathered} \mu_i = M\{r_i\} = \alpha_i + \beta_i \cdot \mu, \\ c_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_r^2, \; i \neq j, \\ c_{ij} = \beta_i^2 \sigma_r^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \end{gathered} \qquad (4.1)$$

где $\mu = M\{r\}$,

$\sigma_r^2 = D\{r\}$,

$\sigma_{\varepsilon i}^2 = D\{\varepsilon_i\}$ – дисперсии величин ε_i.

В этом случае для расчета всех необходимых величин надо знать n величин α_i, n величин β_i, n величин $\sigma_{\varepsilon i}^2$, а также μ и σ_r^2. Всего получается $3n + 2$ величин, что, безусловно, гораздо меньше, чем $n(n+3)/2$ при больших n.

Перейдём теперь к портфелю ценных бумаг. Пусть куплено ценных бумаг на сумму W_0. В конце периода владения они будут стоить W_1 и, кроме того, за период владения по ним получен доход P. Основной характеристикой портфеля является его доходность, определяемая как

$$r_p = \frac{W_1 + P - W_0}{W_0}.$$

Библиотека БГУИР

Выведем выражение для r_p. Пусть мы купили n_i ценных бумаг номер i по цене S_i за одну бумагу. Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} n_i S_i = W_0, \tag{4.2}$$

т.к. мы потратили капитал W_0. Введём величины $x_i = n_i S_i / W_0$. Их смысл – доля капитала W_0, потраченная на приобретение ценной бумаги i-го типа. Тогда очевидно, что $x_i \ge 0 \ \ \forall i = \overline{1,n}$, и из (4.2) получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Далее,

$$W_1 + P = \sum_{i=1}^{n} \left(S_i' + P_i\right) n_i,$$

и поэтому

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(S_i' + P_i\right) n_i - \sum_{i=1}^{n} S_i n_i}{W_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i' + P_i - S_i}{S_i} \cdot \frac{n_i S_i}{W_0}.$$

Но $\left(S_i' + P_i - S_i\right) / S_i$ есть не что иное, как доходность r_i ценной бумаги i-го типа. Поэтому

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i.$$

Так как r_i – случайные величины, то и доходность портфеля r_p – случайная величина. Имеем

$$M\{r_p\} = E_p = \sum_{i=1}^{n} M\{r_i\} x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i,$$

$$D\{r_p\} = V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(r_i r_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j.$$

В дальнейшем $\sqrt{V_p}$ будем обозначать как σ_p.

Итак, основные формулы для инвестиционного портфеля имеют вид

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i,$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \ \ \sigma_p = \sqrt{V_p}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ \ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,n}.$$

Библиотека БГУИР

В случае рыночной модели ценных бумаг можно получить другие выражения для средней доходности E_p и дисперсии доходности V_p портфеля. Используя (4.1), получим

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i,$$

$$V_p = \sigma_p^2 = \sigma_r^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2.$$

Первое слагаемое в V_p носит название рыночной компоненты дисперсии, второе – собственной дисперсии портфеля.

4.2. Эффективное множество

Основой всей дальнейшей теории является предположение о том, что функция полезности инвестора U зависит лишь от E_p и σ_p, т.е. $U = U(E_p,\ \sigma_p)$, причем

$$\frac{\partial U}{\partial E_p} > 0,\ \frac{\partial U}{\partial \sigma_p} < 0.$$

Эти требования достаточно очевидны – большинство людей стремятся получить больший доход и при этом избежать риска. Впрочем, последнее не всегда верно – есть группа азартных людей, для которых $\partial U / \partial \sigma_p > 0$ – чем рискованней, тем лучше. Но мнение этой группы мы в дальнейшем принимать во внимание не будем.

Рассмотрим теперь на плоскости (E_p, σ_p) (заметим, что иногда мы будем рассматривать плоскость $(E_p,\ V_p)$) кривую $U(E_p, \sigma_p) = U_0 = \text{const}$. Эта кривая носит название **кривой безразличия** (indifference curve). Обычный вид таких кривых изображен на рис. 4.1, 4.2. При увеличении U_0 они сдвигаются вправо и никогда не пересекаются.

Библиотека БГУИР

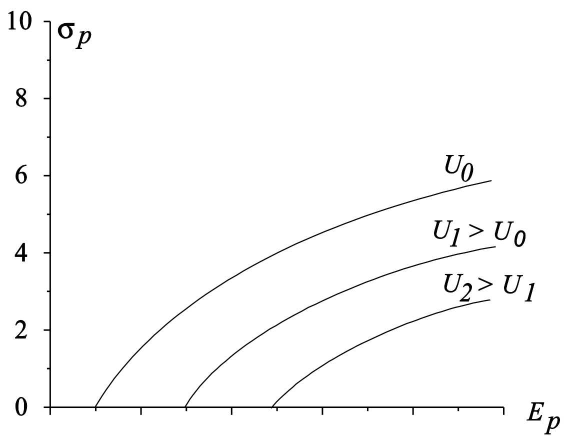


Рис. 4.1. Вид кривых безразличия для инвесторов с высокой степенью избегания риска (с низкой толерантностью)

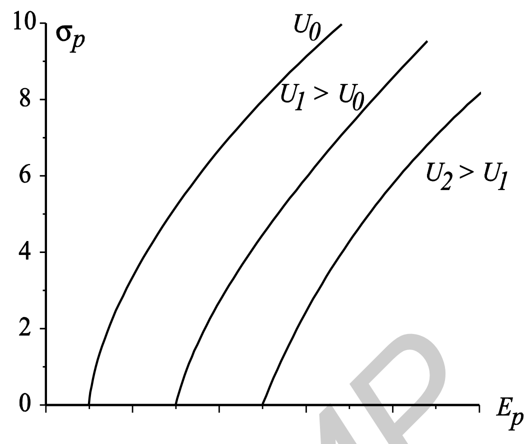


Рис. 4.2. Вид кривых безразличия для инвесторов с низкой степенью избегания риска (с высокой толерантностью)

В качестве достаточно правдоподобной функции полезности часто используют функцию полезности вида

$$U(E_p, \sigma_p) = E_p - \frac{\sigma_p^2}{\tau},$$

когда кривая безразличия имеет вид

$$E_p = U_0 + \frac{\sigma_p^2}{\tau}.$$

Это – парабола с ветвями, направленными вдоль оси τ. Сам параметр τ называется **толерантностью** (tolerance) инвестора к риску. (Заметим, что в общем случае толерантностью называется величина $-\left(\partial U/\partial E_p\right)\Big/\left(\partial U/\partial(\sigma_p^2)\right)$; она является функцией от E_p и σ_p. Приведенная выше функция полезности – это функция с постоянной толерантностью.)

Теперь можно более точно сформулировать задачу определения оптимального портфеля. Рассмотрим область в n-мерном пространстве

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Каждой точке этой области формулы

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i,$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

Библиотека БГУИР

ставят в соответствие точку на плоскости (E_p, σ_p). Все эти точки образуют некоторую область на данной плоскости (см. рис. 4.3).

Рассмотрим некоторую точку из этой области. Очевидно, что неазартный человек предпочтёт ей точку, которая при той же средней доходности имеет меньшую величину σ_p. Также очевидно, что при одинаковой величине σ_p он предпочтёт точку с бо́льшим значением E_p.

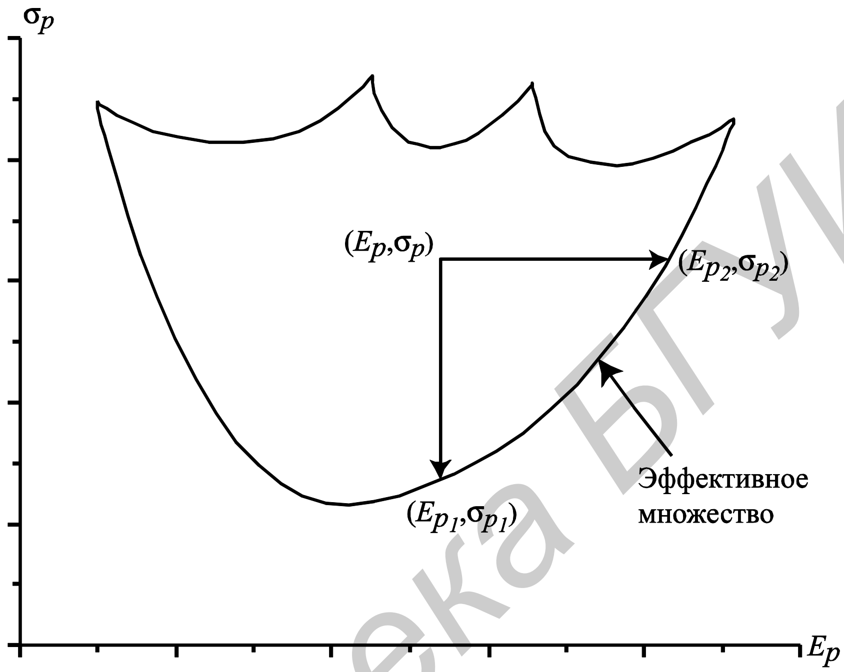


Рис. 4.3. Эффективное множество

Из рис. 4.3 ясно, что точки, для которых нельзя найти более предпочтительных точек, расположены на нижней правой границе (lower right-hand boundary) этой области. Эта нижняя правая (юго-восточная) граница называется **эффективным множеством** (efficient set), а соответствующие ей портфели – **эффективными портфелями** (efficient portfolios). При заданной функции полезности оптимальный портфель будет выбираться из точек этой области. Основное свойство эффективного множества заключается в том, что **эффективное множество – это выпуклая вниз кривая.**

4.3. Структура эффективного множества

Чтобы понять структуру эффективного множества, рассмотрим простейший частный случай $n = 3$. В этом случае

$$E_p = \sum_{i=1}^{3} \mu_i x_i,$$

Библиотека БГУИР

$$V = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_i x_j ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1, \; x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; x_3 \ge 0.$$

Из последнего соотношения выразим x_3:

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

и подставим в выражения для E и V:

$$E = \mu_3 + x_1(\mu_1 - \mu_2) + x_2(\mu_2 - \mu_3), \tag{4.4}$$

$$V = x_1^2(c_{11} - 2c_{13} + c_{33}) + x_2^2(c_{22} - 2c_{23} + c_{33}) +$$
$$+2x_1x_2(c_{12} - c_{13} - c_{23} + c_{33}) + 2x_1(c_{13} - c_{33}) + 2x_2(c_{23} - c_{33}) + c_{33}.$$

Перенесем рассмотрение на плоскость (x_1, x_2). В этом случае неравенства $x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 = 1 - x_1 - x_2 \ge 0$ вырезают на плоскости (x_1, x_2) треугольную область с границами (рис. 4.4).

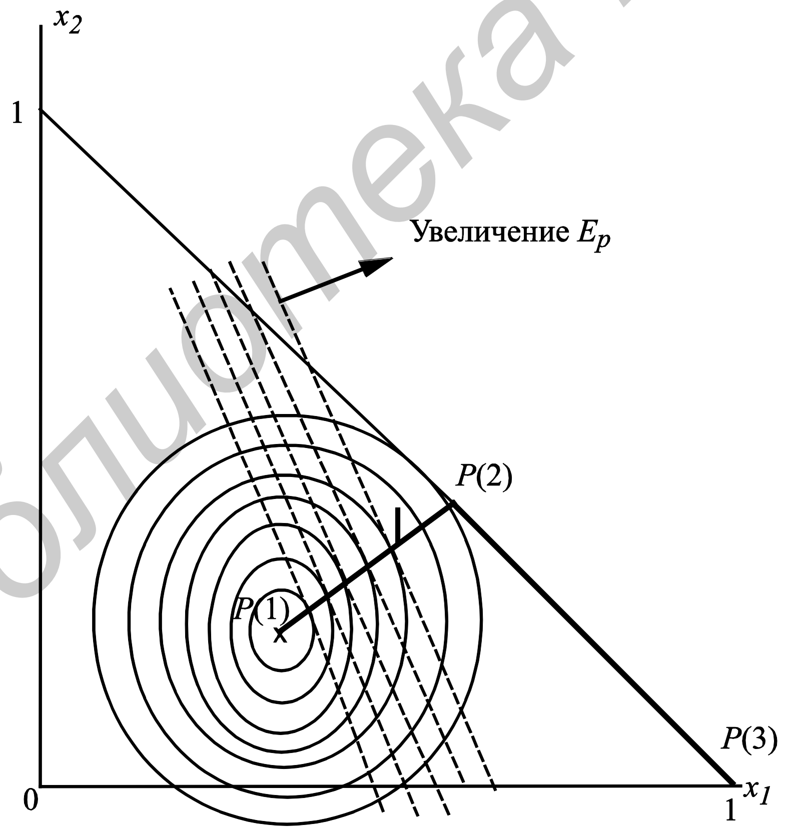


Рис. 4.4. Структура эффективного множества при n = 3 (глобальный минимум внутри допустимой области)

Если мы зафиксируем E, то условие

$$E = \mu_3 + x_1(\mu_1 - \mu_2) + x_2(\mu_2 - \mu_3)$$

даст нам некоторую прямую на плоскости $(x_1,\ x_2)$, которая двигается параллельно самой себе с увеличением E. Направление этого движения зависит от μ_1, μ_2 и μ_3.

Условие $V = \text{const}$ в силу положительной определённости матрицы **C** представляет собой эллипс. С изменением V получаем систему концентрических эллипсов с центром в точке $(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})$, в которой V достигает своего глобального минимума. Эта точка может лежать как внутри допустимой области (как на рис. 4.4), так и вне её (как на рис. 4.5). В первом случае точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 1 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)})$ есть эффективный портфель, во втором – нет.

Тогда эффективное множество получается из условия $V \Rightarrow \min$ при этом фиксированном E.

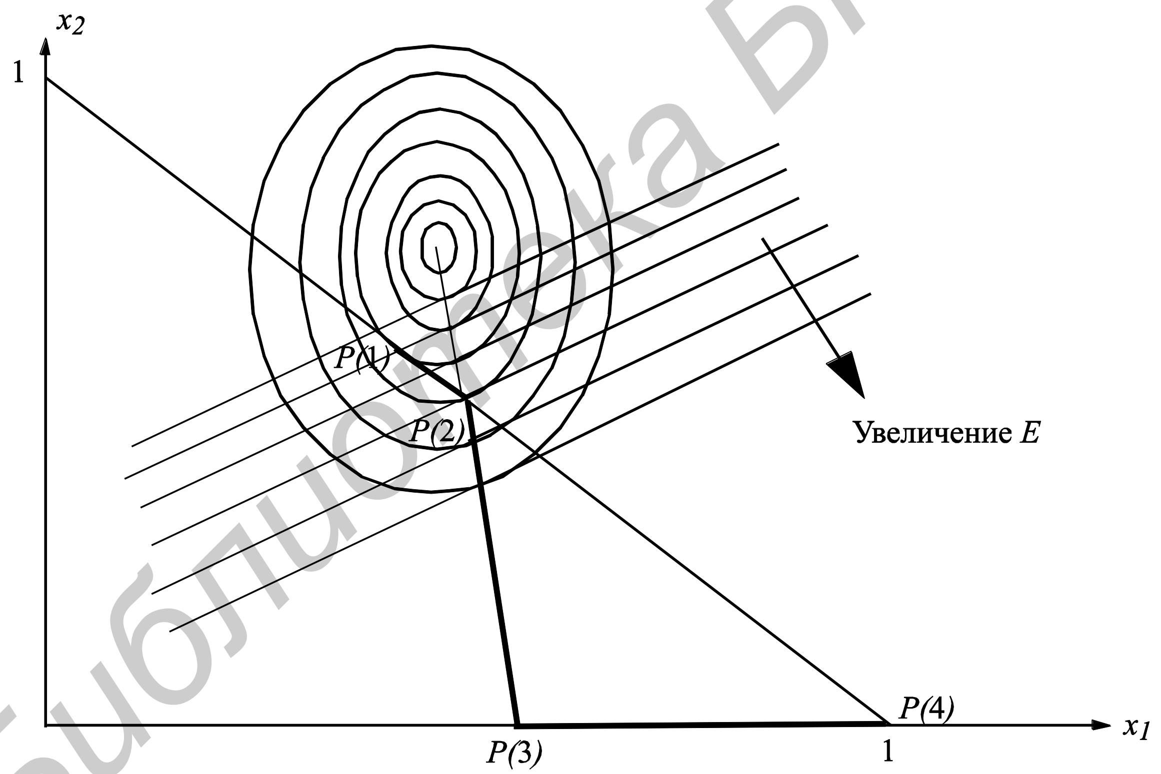


Рис. 4.5. Структура эффективного множества при n = 3 (глобальный минимум дисперсии вне допустимой области)

Начнём построение с точки глобального минимума дисперсии V. Саму эту точку $(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ 1 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)})$ назовём **первым угловым портфелем** $P(1)$ (corner portfolio). Значение E, соответствующее прямой (4.5), проходящей через эту точку, будет минимальной средней доходностью всех эффективных портфелей.

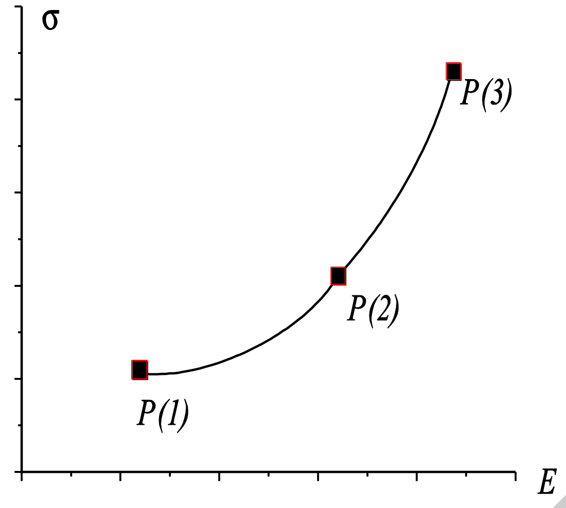


Рис. 4.6. Линия угловых портфелей

Начнём теперь увеличивать E. Легко догадаться, что тогда при фиксированном E минимальное значение V будет достигаться на том эллипсе, который **касается** прямой (4.4). При увеличении E изменяется и точка касания, но в силу концентричности всех эллипсов все они лежат на некоторой **прямой *l*,** которая называется **критической линией** (critical line). Движение по этой линии закончится, когда она пересечет границу области, т. е. прямую $x_1 + x_2 = 1$. Точка пересечения критической линии с границей области даст нам **второй** угловой портфель $P(2)$.

Заметим, что все портфели, лежащие на критической линии между первым и вторым угловыми портфелями, есть выпуклая комбинация этих портфелей. Поэтому соответствующая часть эффективного множества есть гипербола, соединяющая точки (E_p, σ_p) для первого и второго угловых портфелей (см. рис. 4.6).

Легко видеть, что при дальнейшем увеличении E мы будем двигаться по границе области $x_1 + x_2 = 1$, пока не придём в точку $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 0$. Это будет третий угловой портфель $P(3)$, которому соответствуют не только максимальное значение доходности E, но и максимальное значение дисперсии доходности σ^2. Аналогично все эффективные портфели, лежащие между $P(2)$ и $P(3)$, есть их выпуклая комбинация, и поэтому часть эффективного множества между $P(2)$ и $P(3)$ есть часть гиперболы.

Таким образом, в данном случае эффективное множество состоит из двух отрезков гипербол, соединяющих точки, соответствующие угловым портфелям $P(1)$, $P(2)$ и $P(3)$.

Библиотека БГУИР

На рис. 4.5 приведена ситуация, когда точка глобального минимума дисперсии V лежит **вне** допустимого множества. Самостоятельно определите, как строятся эффективные портфели в этом случае. Заметим, что теперь будет уже 4 угловых портфеля – $P(1), P(2), P(3)$ и $P(4)$ – и эффективное множество будет состоять из трёх частей гипербол, соединяющих точки, соответствующие этим угловым портфелям.

Оказывается, что и в общем случае эффективное множество имеет такую же структуру: имеется набор портфелей, называемых угловыми, и всё эффективное множество состоит из отрезков гипербол, соединяющих точки, соответствующие этим угловым портфелям.

Таким образом, для построения эффективного множества необходимо научиться находить угловые портфели, что в условиях современной вычислительной техники не представляет значительных трудностей.

4.4. Оптимизационные модели портфеля ЦБ

Оптимизация портфеля ценных бумаг сводится к задаче нелинейного программирования вида (4.5), в которой отыскивается оптимальная структура $0 \le x_i \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ инвестиционного портфеля.

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \; c_{ij} = \operatorname{cov}(r_i, r_j), \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = E_p. \end{cases} \tag{4.5}$$

где E_p – выбранное инвестором значение средней эффективности портфеля.

Сделаем одно замечание. Если $x_j^* > 0$, то рекомендуется вложить долю x_j^* наличного капитала в ценную бумагу *j*. Если $x_j^* < 0$, то рекомендуется взять в долг ценные бумаги этого вида в количестве x_j^*, т.е. участвовать в операции типа *Short sale*. Если последняя операция невозможна, приходится вводить дополнительное требование: x_j^* не должно быть отрицательным. В этом случае при появлении в решении отрицательных $x_j^* < 0$ необходимо исключить из портфеля соответствующие бумаги и решить задачу заново.

Библиотека БГУИР

Ниже приведено решение оптимизационной задачи Марковица (4.5) методом множителей Лагранжа в матричном виде. Структура оптимального портфеля имеет вид

$$x^* = \frac{[(\mu^T c^{-1}\mu) - E_p(e^T c^{-1}\mu)]c^{-1}e + [E_p(e^T c^{-1}e) - (\mu^T c^{-1}e)]c^{-1}\mu}{(e^T c^{-1}e)(\mu^T c^{-1}\mu) - (\mu^T c^{-1}e)^2}.$$

Здесь $c = (c_{ij})$ – квадратная матрица $n \times n$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ – вектор ожидаемых доходностей, $e = (1, \ldots 1)$ – единичный вектор.

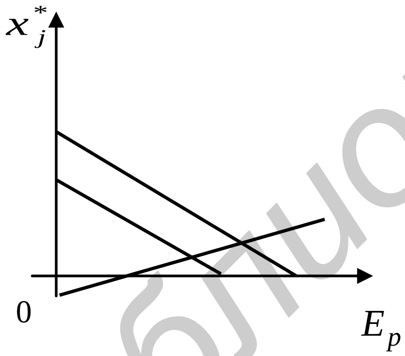
Минимальная дисперсия (риск), соответствующая оптимальной структуре, определяется формулой

$$(\sigma_p^*)^2 = (x^*)^T V x^* = \frac{E_p^2(e^T c^{-1}e) - 2E_p(\mu^T c^{-1}e) + (\mu^T c^{-1}\mu)}{(e^T c^{-1}e)(\mu^T c^{-1}\mu) - (\mu^T c^{-1}e)^2}.$$

Очевидно, что решение, полученное без требования неотрицательности структуры, может содержать отрицательные элементы.

Дадим качественное описание особенностей оптимального портфеля Марковица.

1. С увеличением требуемой ожидаемой эффективности μ_p вклады в каждую ценную бумагу уменьшаются линейно (рис. 4.7, а), если возможен short sale, или кусочно-линейно (рис. 4.7, б), если такие операции запрещены. Некоторые вклады растут (это относится к более эффективным, но и более рискованным ЦБ), некоторые уменьшаются (менее эффективны и менее рисковые бумаги).



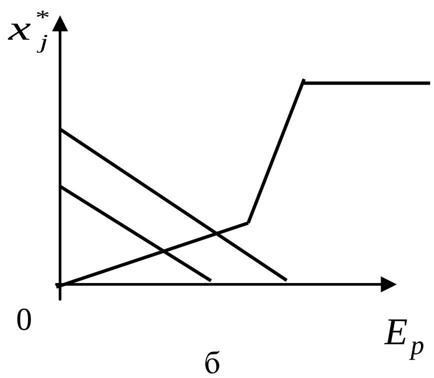


Рис. 4.7. Качественные особенности портфелей:
а – возможен short sale; б – запрещен short sale

2. Мера риска оптимального портфеля возрастает с ростом требуемой ожидаемой эффективности. При наличии капитала, взятого в долг, можно сформировать портфель с любой ожидаемой эффективностью, но при этом и риск неограниченно растет. Если взятие в долг невозможно, то предельная ожидаемая эффективность портфеля совпадает с эффективностью той ценной бумаги, эффективность которой наибольшая (в неё вкладываем весь наличный капитал).

Если же имеем несколько видов таких бумаг, то капитал распределён между ними (рис. 4.8).

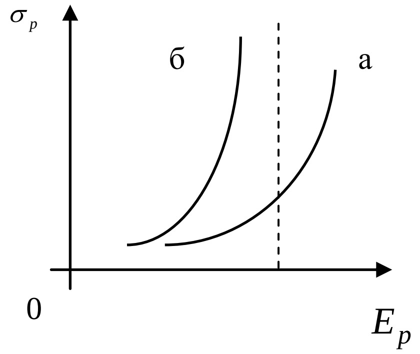


Рис. 4.8. Зависимость риска портфеля от эффективности:
а – возможен short sale; б – запрещен short sale

Наклон кривой, отображающей зависимость риска от эффективности, постепенно возрастает (выпуклая вниз кривая) (см. рис. 4.8). Естественно, что при упрощении правил можно добиться лучших результатов. Действительно, на рис. 4.8 кривая риска а) расположена ниже кривой риска б).

3. Решение задачи по поиску оптимального портфеля резко упрощается и приобретает новые особенности, если учесть простой факт: кроме рисковых бумаг на рынке имеются и безрисковые, например, государственные обязательства с фиксированным доходом.

4.5. Эффективное множество при наличии безрисковых ценных бумаг

До сих пор мы считали, что доходность r_i всех ценных бумаг является случайной величиной, чья дисперсия $D\{r_i\} = c_{ii} > 0$. Теперь допустим, что есть безрисковая ценная бумага (riskfree asset), доходность которой равна r и является постоянной, следовательно её дисперсия $D\{r\} = 0$. Таким безрисковым активом может быть, например, вклад денег в очень надёжный банк под процент r.

Наличие такой безрисковой ценной бумаги изменяет вид эффективного множества. Действительно, пусть мы имеем некоторый портфель P со средней доходностью E_p и дисперсией доходности σ_p^2. Разделим капитал, который мы собираемся вложить в ценные бумаги, на две части. Долю α этого капитала вложим в безрисковый актив, а оставшуюся долю капитала, равную $1-\alpha$, вложим в портфель P. Тем самым сформируется новый портфель $\tilde{P}$ с доходностью

$$R = \alpha r + (1-\alpha) r_p,$$

где r_p – (случайная) доходность портфеля P.

Тогда портфель $\tilde{P}$ имеет характеристики

$$E = M\{R\} = \alpha r + (1-\alpha)E_p,$$
$$V = D\{R\} = (1-\alpha)^2 D\{r_p\} = (1-\alpha)^2 \sigma_p^2,$$
$$\sigma = \sqrt{V} = (1-\alpha)\sigma_p.$$

Таким образом, на плоскости (E, σ) все портфели $\tilde{P}$ отображаются во множество

$$E = \alpha r + (1-\alpha)E_p,$$
$$\sigma = (1-\alpha)\sigma_p, \ \ 0 \le \alpha \le 1,$$

которое есть отрезок прямой, соединяющий точку с координатами $(r, 0)$ (при $\alpha = 1$) с точкой (E_p, σ_p) (при $\alpha = 0$), см. рис. 4.8.

Будем теперь перебирать все точки (E_p, σ_p), принадлежащие области, которую занимают портфели, содержашие лишь рисковые ценные бумаги. Тогда из рис. 4.9 ясно, что из эффективного множества исчезнет отрезок $(P_{\min}, P_T)$ (см. рис. 4.9), а к эффективному множеству добавится отрезок прямой, которая проходит через точку $(r, 0)$ и **касается** эффективного множества. Новое эффективное множество состоит, таким образом, из отрезка прямой и оставшейся части эффективного множества $(P_T, P_{\max})$. Портфель P_T, соответствующий точке касания, называется касательным портфелем.

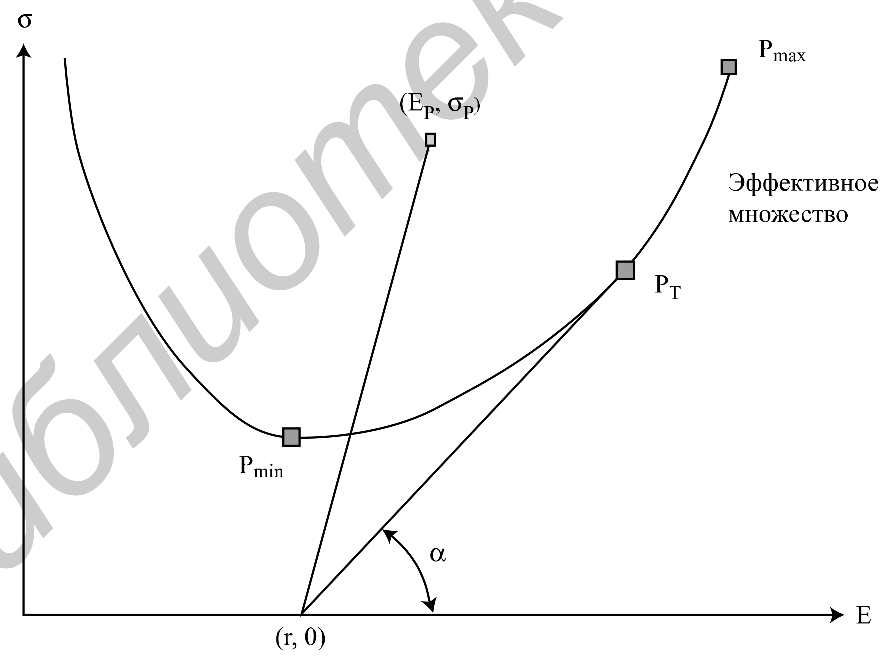


Рис. 4.9. Эффективное множество портфелей

4.6. Модификация портфеля ценных бумаг (модель Тобина)

Итак, определим, как должен инвестор скомбинировать рисковую и безрисковые части портфеля, чтобы минимизировать дисперсию портфеля при выбранной или средней эффективности портфеля μ_p.

Пусть r_0, x_0 – соответственно эффективность и доля безрисковой части портфеля, при этом естественно предполагается, что $r_0 > \mu$. Пусть также $\mu_0 = r_0$ – эффективность безрискового вклада, μ_r – ожидаемая эффективность портфеля рисковых ЦБ ($\mu_r > \mu_0$).

Тогда в строгой постановке получаем следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad c_{ij} = \operatorname{cov}(r_i, r_j),$$

$$\sum^{n} x_i + x_0 = 1,$$

$$\sum \mu_i x_i + r_0 x_0 = E_p,$$

или в матричном виде:

$$cx \to \min,$$

$$e^T x + x_0 = 1,$$

$$\mu^T x + r_0 x_0 = E_p.$$

Пусть известна вариация V_r эффективности рискового портфеля.

Тогда $R_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) R_r$ – эффективность комбинированного вклада,

$$\mu_p = x_0 r_0 + (1 - x_0)\mu_r = \mu_r + x_0 (r_0 - \mu_r),$$

$$V_p = (1 - x_0)^2 V_r,$$

$$\sigma_p = (1 - x_0)\sigma_r \; E_p - r_0 = \frac{\mu_r - r_0}{\sigma_r}\sigma_p.$$

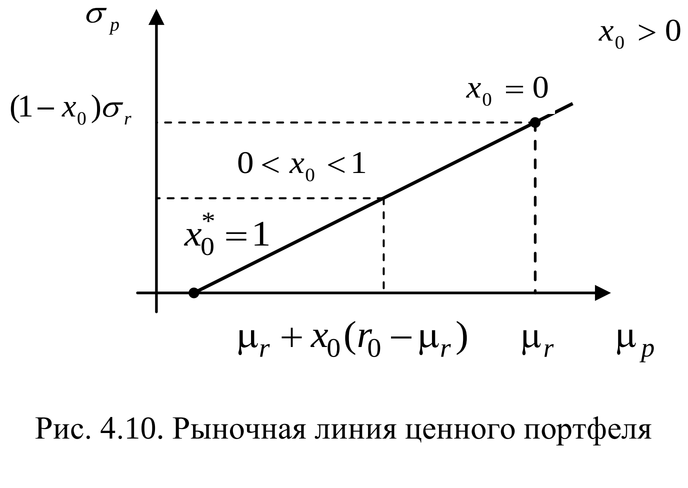


Рис. 4.10. Рыночная линия ценного портфеля

Если весь капитал инвестора составляют безрисковые ЦБ $(x_0 = 1)$ (рис. 4.10), то $E_p = r_0$, а риск равен 0. Если весь наличный капитал внесён в рисковые ЦБ, то $E_p = \mu_r$, $СКО = \sigma_r : (x_0 = 0)$. Любому промежуточному риску $0 < x_0 < 1$ соответствует одна из точек на отрезке прямой. Если возможно брать безрисковые ЦБ в долг $(x_0 < 0)$, то достижимая и любая эффективность сопровождается соответственно растущим риском.

Рассматриваемая задача получила название задачи Тобина и решается она аналогично задаче Марковица методом множителей Лагранжа $(\mu_0 = r_0)$ и её решение имеет вид

$$x_0 = \frac{[(\mu^T c^{-1}\mu) - r_0(\mu^T c^{-1} e)] - E_p[(e^T c^{-1}\mu) - r_0(e^T c^{-1} e)]}{[(\mu^T c^{-1}\mu) - r_o(\mu^T c^{-1} e)] - r_o[(e^T c^{-1}\mu) - r_o(e^T c^{-1} e)]},$$

$$x^* = \frac{(E_p - r_0)c^{-1}(\mu - r_0 e)}{(\mu - r_0 e)^T c^{-1}(\mu - r_0 e)}.$$

Дисперсия портфеля оптимальной структуры определяется формулой

$$(\sigma_p^*)^2 = (x)^{*T} c^{-1} x^* = \frac{(E_p - r_0)^2}{(\mu - r_0 e)^T v^{-1}(\mu - r_0 e)}.$$

В случае некоррелированности эффективностей матрица ковариации V диагональная, обратная ей матрица V^{-1} также диагональная. Поэтому формулы для элементов структуры оптимального портфеля и для его дисперсии имеют вид

$$x_0^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\mu_i - E_p)(\mu_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\mu_i - r_0)^2}{\sigma_i^2}},$$

$$x_i^* = \frac{(\mu_p - r_0)(\mu_i - r_0)}{\sigma_i^2 \sum_{l=1}^{n} \frac{(\mu_l - r_0)^2}{\sigma_l^2}}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sigma_p^* = \frac{E_p - r_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\mu_i - r_0)}{\sigma_i^2}}}.$$

Как видно из этих формул, безрисковая часть будет входить в портфель, т.е. $x_0^* > 0$, если

Библиотека БГУИР

$$E_p < \frac{\sum \frac{\mu_i(\mu_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{l=1}^{n} \frac{(\mu_l - r_0)^2}{\sigma_i^2}} = \overline{E_p}(r_0)\,.$$

При $E_p = \overline{E_p}$ в портфеле будет в наличии только рисковая часть ($x_0^* = 0$). При $E_p = r_0$ в портфеле будет присутствовать только безрисковая часть, т.е. $x_0^* = 1, \sigma_p^* = 0$.

Интересен вывод, сделанный Тобином: если есть возможность не только выбирать не только между заданным рисковым портфелем и безрисковой ЦБ, но и выбирать структуру рискового портфеля, то оптимальной окажется только одна структура, не зависимая от склонности инвестора к риску.

На рис. 4.11 приведена диаграмма, иллюстрирующая этот вывод.

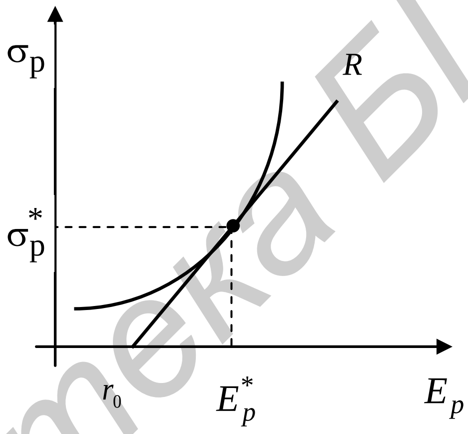


Рис. 4.11. Иллюстрация тезиса Тобина

Пусть сначала сделан наилучший выбор только среди всех рисковых ЦБ. В зависимости от склонности к риску инвестор выберет одну из точек на кривой *R*. После этого возникает возможность вклада и в рисковые, и в безрисковые ЦБ. Проведя касательную к кривой *R* из точки $E_p = r_0$, $\sigma_p = 0$, найдём точку с координатами E_p^*, σ_p^*, дающую характеристики оптимального рискового портфеля.

Превышение средней эффективностью ценной бумаги эффективности безрискового вклада называется **премией за риск**: $\mu_e - r_0$.

Имеет место следующий факт: премия за риск конкретной ценной бумаги, включённой в портфель, пропорциональна премии за риск портфеля в целом:

$$\mu_l - r_0 = \beta_e^*(E_p - r_0),\ \ l = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\beta_l^* = \frac{\operatorname{cov}(r_l, r_p^*)}{(\sigma_p^*)^2},$$

где β_e^* – бета-вклады ценной бумаги в оптимальный портфель, т.е отношение ковариации эффективности ценной бумаги и портфеля к вариации портфеля. Чем больше бета данной ЦБ, тем выше доля общего риска, связанная с вложением именно в эту ценную бумагу. Вместе с тем чем больше бета, тем выше и премия за риск.

4.7. Рыночная модель ценообразования для ценных бумаг

Ранее в работе предполагалось, что инвестор может распоряжаться только своим собственным капиталом. Теперь предположим, что для формирования портфеля ценных бумаг он может брать в банке кредит под процентную ставку r_1. В общем случае r_1 больше доходности по безрисковым ценным бумагам r, и эту разницу $r_1 - r$ называют **спрэдом** процентной ставки.

Если теперь, как и в предыдущем разделе, через α обозначить долю портфеля, состоящего из безрисковых ценных бумаг, то взятие кредита в банке будет соответствовать тому, что $\alpha < 0$. Рассуждая, как и выше, получим, что ставке r_1 соответствует ещё один касательный портфель P_{T_1} и к эффективному множеству добавится ещё одна полупрямая, проходящая через этот портфель (рис. 4.12, а). От прежнего эффективного множества останется только отрезок линии между касательными портфелями P_T и P_{T_1}.

Рассмотрим случай, когда $r_1 = r$ (рис. 4.12,б); хотя в жизни этого не бывает, но для теории эта ситуация представляет особый интерес.

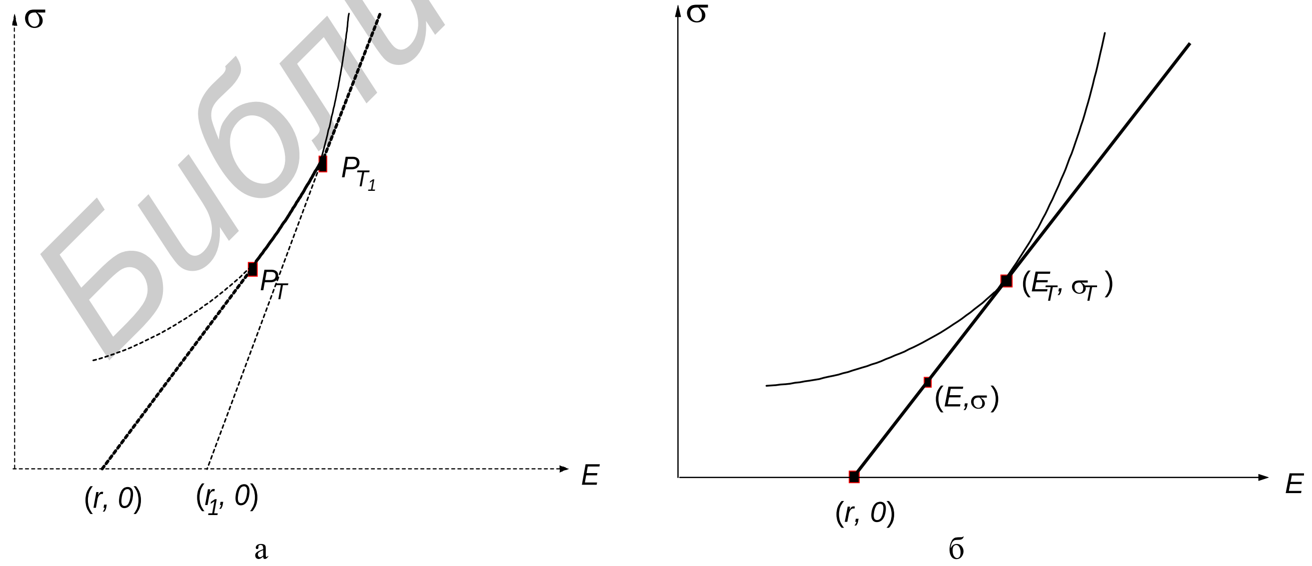


Рис. 4.12. Эффективное множество портфелей при наличии безрисковых бумаг: а – $r_1 \neq r$; б – $r_1 = r$

Библиотека БГУИР

Тогда имеется всего лишь один касательный портфель со средней доходностью E_T и дисперсией доходности σ_T^2. Всё эффективное множество превращается в прямую, проходящую через точки $(r,0)$ и (E_T,σ_T). Любой оптимальный портфель имеет следующую структуру: доля α вкладывается в безрисковые ценные бумаги, причем, если $0 \le \alpha \le 1$, то это соответствует действительному вложению капитала, а если $\alpha < 0$, то это соответствует взятию кредита в банке под процент r для формирования портфеля. Доля капитала, равная $1-\alpha$, вкладывается в касательный портфель.

Тогда доходность E и дисперсия доходности σ^2 этого портфеля имеют вид

$$E = \alpha r + (1-\alpha)E_T,$$
$$\sigma = (1-\alpha)\sigma_T.$$

Исключая отсюда α, получим уравнение, связывающее E и σ для любого оптимального портфеля,

$$\frac{E-r}{\sigma} = \frac{E_T - r}{\sigma_T},$$

или

$$E = r + \frac{\sigma}{\sigma_T}\cdot\left(E_T - r\right).$$

Эта прямая носит название **рыночной линии** (Capital Market Line, CML).

Обратите внимание на особую роль касательного портфеля в этой модели: рисковая часть **любого** оптимального портфеля ценных бумаг состоит именно из этого портфеля.

Именно однозначность рисковой части портфеля ценных бумаг даёт возможность понять механизм установления цен на ценные бумаги и даже вывести некоторые соотношения. Изложим основы этой рыночной модели ценообразования (Capital Asset Pricing Model, CAPM).

Основой этой теории являются следующие предположения.

1. Инвесторы производят оценку портфелей, основываясь на ожидаемых доходностях и их дисперсиях за период владения.

2. Активы бесконечно делимы. При желании инвестор может купить часть акции.

3. Существует безрисковая процентная ставка, в которой отсутствует спрэд и которая одинакова для всех инвесторов.

4. Налоги и операционные издержки несущественны.

5. Инвесторы однородны, т.е. все они владеют одной и той же информацией и одинаково оценивают ожидаемые средние доходности и ковариации доходностей ценных бумаг.

А теперь перескажем основные идеи этой модели. Первая идея состоит в том, что в положении равновесия финансового рынка в касательный портфель входят **все** ценные бумаги (естественно, что в разных долях). Пусть какая-то

Библиотека БГУИР

ценная бумага не входит в касательный портфель. Все инвесторы имеют одинаковую информацию, знают состав касательного портфеля, все они знают, что рисковая часть их портфеля – это доля касательного портфеля. Зачем инвесторам покупать ценную бумагу, которая в этот портфель не входит? Но раз бумагу никто не покупает, то цена на неё должна падать. А с падением цены растёт доходность этой бумаги, ведь какие-то дивиденды по ней выплачиваются, иначе – какая же это ценная бумага. Когда цена бумаги станет настолько малой, что её доходность достигнет приемлемого уровня, эту бумагу начнут покупать, и она войдёт в состав касательного портфеля.

Поэтому в процессе установления равновесия ценные бумаги как бы притягиваются к рыночной линии вообще и к касательному портфелю в частности. Да и всё эффективное множество тоже притягивается к рыночной линии.

Рассмотрим теперь некоторую ценную бумагу номер i с доходностью r_i, которая, естественно, есть случайная величина. Доходность касательного портфеля обозначим как r_T. Далее введём обозначения

$$M\{r_i\} = \mu_i, \quad D\{r_i\} = \sigma_i^2,$$
$$M\{r_T\} = E_T, \quad D\{r_T\} = \sigma_T^2,$$
$$\operatorname{cov}(r_i, r_T) = \sigma_{iT}.$$

Предположим, что мы составили портфель следующим образом: долю α своего капитала вложили в ценную бумагу номер i и оставшуюся долю $1-\alpha$ капитала – в касательный портфель. Тогда доходность такого портфеля будет равна $r = \alpha r_i + (1-\alpha) r_T$. Её характеристики:

$$M\{r\} = E_p = \alpha\mu_i + (1-\alpha)E_T,$$
$$D\{r\} = \sigma_p^2 = \alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iT} + (1-\alpha)^2\sigma_T^2, \tag{4.6}$$
$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iT} + (1-\alpha)^2\sigma_T^2},$$

При $\alpha = 1$ наш портфель состоит только из бумаги номер i; при $\alpha = 0$ он совпадает с касательным портфелем. Когда α убывает от 1 до 0 (можно продолжить это уменьшение и брать $\alpha < 0$), то точка с координатами (E_p, σ_p) описывает на плоскости (E, σ) некоторую кривую. Ранее мы показали, что эта кривая – гипербола, т. е. непрерывная кривая.

Вторая идея заключается в том, что эта гипербола должна **касаться** рыночной линии в точке $(E_T,\ \sigma_T)$. Действительно, если бы она её пересекла (рис. 4.13), то наше эффективное множество продолжилось бы левее и ниже рыночной линии, что невозможно по её определению как линии, касающейся эффективного множества. Угловой точки тоже не может быть – гипербола есть непрерывная кривая.

Библиотека БГУИР

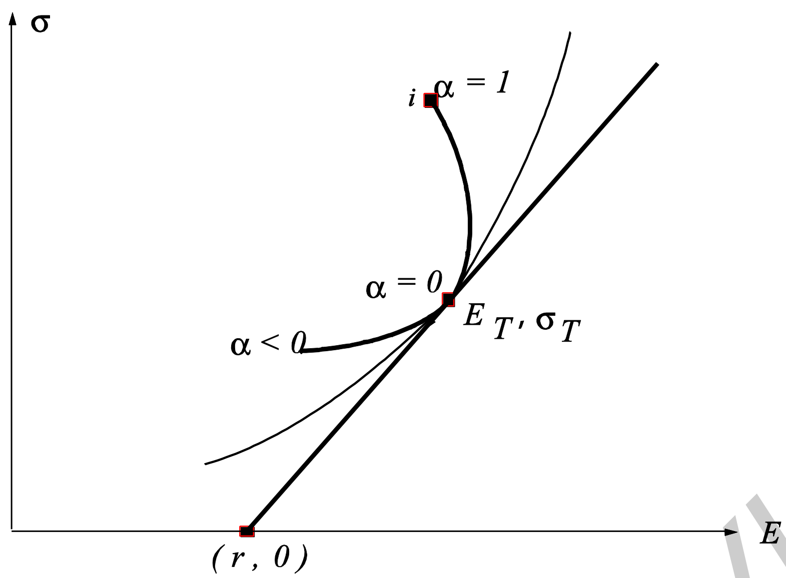


Рис. 4.13. Касание гиперболой рыночной линии

Именно это **касание** нашей гиперболы и рыночной линии в точке (E_T, σ_T) и позволяет установить связь между μ_i и σ_i для всех ценных бумаг при равновесии финансового рынка.

Действительно, имеем

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = \mu_i - E_T,$$

$$\frac{d\sigma_p}{d\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 + (1-2\alpha)\sigma_{iT} - (1-\alpha)\sigma_T^2}{\sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iT} + (1-\alpha)^2\sigma_T^2}}.$$

В точке $\alpha = 0$ (именно при $\alpha = 0$ точка $\left(E_p, \sigma_p\right)$ касается рыночной линии)

$$\left.\frac{dE_p}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \mu_i - E_T, \quad \left.\frac{d\sigma_p}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T},$$

так что в точке касания

$$\frac{dE_p}{d\sigma_p} = \frac{\sigma_T(\mu_i - E_T)}{\sigma_{iT} - \sigma_T^2}.$$

С другой стороны, рыночная линия имеет уравнение

$$E = r + \frac{\sigma}{\sigma_T}(E_T - r\}),$$

так что для неё

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{E_T - r}{\sigma_T}.$$

Раз эти кривые касаются друг друга, то для точки касания должно выполняться соотношение

$$\frac{dE_p}{d\sigma_p} = \frac{dE}{d\sigma},$$

т. е.

$$\frac{(\mu_i - E_T)\sigma_T}{\sigma_{iT} - \sigma_T^2} = \frac{E_T - r}{\sigma_T},$$

откуда

$$\mu_i - E_T = \frac{\sigma_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T^2}(E_T - r) = \frac{\sigma_{iT}}{\sigma_T^2}(E_T - r) - E_T + r .$$

Таким образом, для любой ценной бумаги имеет место соотношение

$$\mu_i = r + \frac{\sigma_{iT}}{\sigma_T^2}(E_T - r), \qquad (4.7)$$

которое носит название **рыночной линии ценной бумаги** (Security Market Line, SML). Величину σ_{iT} / σ_T^2 обычно обозначают β_i (и называют соответственно «бета ценной бумаги») и записывают в виде

$$\mu_i = r + \beta_i (E_T - r). \qquad (4.8)$$

4.8 Арбитражная теория ценообразования

Кроме рыночной модели ценообразования есть ещё одна модель, получившая название **арбитражной модели. Арбитраж –** это получение безрисковой прибыли путем использования разных цен на одинаковую продукцию или ценные бумаги**.** Это широко распространённая тактика, состоящая из продажи ценной бумаги по более высокой цене и одновременной покупки такой же бумаги по низкой цене. Ясно, что эти две операции производятся **на разных** биржах.

Понятно, что если возникает арбитражная схема, то немедленно найдутся желающие её использовать и получить безрисковую прибыль. К чему это приведёт? Тоже очевидно – цены выровняются и арбитражная возможность исчезнет. Отсюда аксиома: **в равновесном состоянии рынка арбитражных возможностей не должно быть!**

Сущность арбитража – в различных ценах на одну и ту же ценную бумагу. Однако «почти арбитражные» возможности появляются и при формировании портфеля ценных бумаг. Они состоят в получении прибыли при достаточно малом риске и проявляются в виде так называемых **арбитражных портфелей** .

Пусть имеется n ценных бумаг, доходность которых определяется однофакторной моделью вида

$$r_i = \alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i,$$

где I – рыночный фактор,

ε_i – случайная составляющая,

α_i и β_i – коэффициенты.

Библиотека БГУИР

Можно считать, что $M\{I\}=0$ (если $M\{I\}=I_0 \neq 0$, то слагаемое $\beta_i I_0$ можно включить в α_i), $D\{i\}=\sigma_I^2$, $M\{\varepsilon_i\}=0$, $D\{\varepsilon_i\}=\sigma_{\varepsilon i}^2$.

Сформируем портфель ценных бумаг $(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Обратите внимание – $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ равна 0, а не 1. Что это значит? Это значит, что мы не тратим свой капитал. Если $x_i < 0$, то мы осуществляем продажу i-й ценной бумаги «без покрытия» (short sale) и на вырученные деньги покупаем ту бумагу j, для которой $x_j > 0$. А в сумме – 0, мы ничего не потратили.

Каковы же характеристики данного портфеля? Имеем

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + I \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i,$$

так что

$$E_p = M\{r_p\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

$$\sigma_p^2 = D\{r_p\} = \sigma_I^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2.$$

В формуле для σ_p^2 два слагаемых – это рыночный риск (первое слагаемое) и собственный риск портфеля (второе слагаемое). Один из принципов арбитража – уменьшение риска. Обычно самым большим является рыночный риск. Стремление избежать рыночного риска приводит к условию

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = 0,$$

когда $\sigma_p^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2$.

Итак, арбитражный портфель характеризуется условиями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = 0.$$

Его характеристики

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \ \ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2.$$

Библиотека БГУИР

Ещё раз отметим, что σ_p^2 обычно мало, а вот доходность можно получить – это $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Но тогда все бы формировали такие портфели и получали деньги из воздуха. Почему же этого не происходит?

Ответ таков: срабатывает принцип «в состоянии равновесия рынка не может быть арбитражных схем». Поэтому доходность ценных бумаг должна измениться, вследствие изменения цен на них таким образом, чтобы из условий

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = 0$$

следовало условие $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ =0, т.е. арбитражный портфель не должен приносить прибыли!

Что отсюда следует? Составим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Условие $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ =0 будет следствием условий $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = 0$ только тогда, когда третья строка матрицы есть линейная комбинация первых двух строк. То есть в состоянии рыночного равновесия должно выполняться условие

$$\forall i = \overline{1,n} \quad \alpha_i = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_i,$$

т. е.

$$r_i = \lambda_0 + (\lambda_1 + I)\beta_i + \varepsilon_i,$$
$$\mu_i = M\{r_i\} = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_i.$$

Проинтерпретируем коэффициенты этого соотношения. Если $\beta_i = 0$, то $\mu_i = \lambda_0$. Актив, не реагирующий на рыночный индекс, является безрисковым активом. Поэтому $\lambda_0 = r$.

Для интерпретации второго слагаемого рассмотрим бумагу, имеющую единичную чувствительность к рыночному фактору, т.е. $\beta_i = 1$ (стандартный актив). Обозначим среднюю доходность такой стандартной бумаги через E_T. Тогда

$$E_T = \lambda_0 + \lambda_1 = r + \lambda_1,$$

т.е. $\lambda_1 = E_T - r$ и окончательно

$$\mu_i = r + \beta_i (E_T - r). \tag{4.9}$$

По форме выражение (4.9) совпадает с (4.8), хотя интерпретация E_T и β_i совсем другая.

В заключение отметим, что, сформировав портфель ценных бумаг, инвестор не должен сидеть сложа руки. Портфелем надо управлять, т.е. время от времени перестраивать его, продавая какие-то ценные бумаги и покупая вместо них другие. Когда это делать и в каких количествах – в этом и состоит проблема управления портфелем. Она представляет собой часть другой, гораздо более общей проблемы – проблемы управления активами и пассивами (Asset-Liability Management). Кроме того, возникает проблема хеджирования. Хеджирование – это способы уменьшения риска финансовых операций вообще и портфеля ценных бумаг в частности. Эти способы разнообразны, хотя и не всегда формализуемы.

Раздел 5. Расчет справедливой цены опциона

5.1. О стоимости опциона в момент исполнения

Существует большое разнообразие опционов (в том числе и «русский опцион»). Мы разберём основные понятия на примере так называемого **европейского опциона** (European version).

Опцион-колл (call option, или просто call) даёт покупателю **право** (**но не обязанность!**) **купить** определённое число акций определённой компании у продавца опциона по определённой цене в определённую дату в будущем.

Эта дата, в которую право на покупку может быть реализовано, называется **датой истечения** срока опциона (expiration date). После этой даты право на покупку утрачивается.

Цена, по которой покупатель имеет право купить акции, называется **ценой исполнения** (exercise price, strike price).

Разумеется, за приобретение права купить акции приходится платить, и эта плата за приобретение опциона называется **ценой опциона,** или **премией** (premium).

Покупатель опциона по-английски называется holder, а продавец опциона – почему-то writer, сама процедура продажи опциона – writing. Если продавец опциона действительно имеет акции, о которых идёт речь, то говорят, что опцион-колл покрытый (covered call writing); если же продавец опциона не имеет акций, то говорят, что опцион-колл непокрытый (naked call writing). В этом случае продавец опциона обязан внести на биржу маржу (залог исполнения контракта).

Опцион-пут (put option, или просто put) отличается от опциона-колл тем, что покупатель приобретает **право продать** определённое количество акций определённой компании продавцу опциона по определённой цене в определённую дату.

Библиотека БГУИР

Опцион **американского типа** (American version) отличается от европейского опциона тем, что он может быть предъявлен к исполнению **в любой момент** до даты истечения срока (опционы европейского типа могут быть предъявлены к исполнению **только** в дату истечения срока). Другие виды опционов рассматривать не будем.

Введём теперь необходимые для дальнейшей работы обозначения и поясним сказанное выше графиками.

Стандартно будем считать, что опцион европейского типа продаётся в момент времени 0 и может быть предъявлен к исполнению в момент времени T. Однако он может быть перепродан спекулянтом в любой момент времени t, $0 \le t \le T$. Обозначим цену продажи опциона в момент времени t через $V(S,t)$, где S – это цена акций, о которых идёт речь в опционе, в тот же момент времени t. Если надо будет уточнить, о каком опционе идёт речь, то цену опциона-колл будем обозначать как $C(S,t)$, цену опциона-пут – как $P(S,t)$ и цену фьючерса – как $F(S,t)$. Иногда будет выгодней считать, что время идет в обратном направлении и дата истечения срока есть 0, а момент продажи есть T. Тогда функцию $V(S,\ T-t)$ будем обозначать как $\tilde{V}(S,t)$ (т.е. $\tilde{V}(S,t)=V(S,\ T-t)$). Указание, к какому моменту времени относится цена S ценной бумаги, будет сделано в виде индекса, например S_T.

Цену исполнения опциона будем обозначать через K.

Рассмотрим стоимость опциона непосредственно перед моментом исполнения, т. е. рассмотрим, чему равно $V(S,\ T) = V_T(S)$.

Рассмотрим, например, опцион-колл. Ясно, что если цена акций S меньше цены исполнения, то никто такой опцион покупать не будет и его стоимость перед моментом истечения срока будет равна 0. Если же $S > K$, то его можно продать перед моментом истечения за цену $S-K$. Таким образом, стоимость опциона-колл непосредственно перед моментом истечения равна

$$C(S,\ T) = \max(S-K,\ 0) = (S-K).$$

Аналогично стоимость опциона-пут непосредственно перед моментом истечения срока равна

$$P(S,T) = \max(K-S,0) = (K-S),$$

т.к. при $S > K$ никто не будет покупать право на продажу акций по цене K. Если же $S < K$, то за такое право надо заплатить $K-S$.

Сказанное выше можно проиллюстрировать рис. 5.1.

Библиотека БГУИР

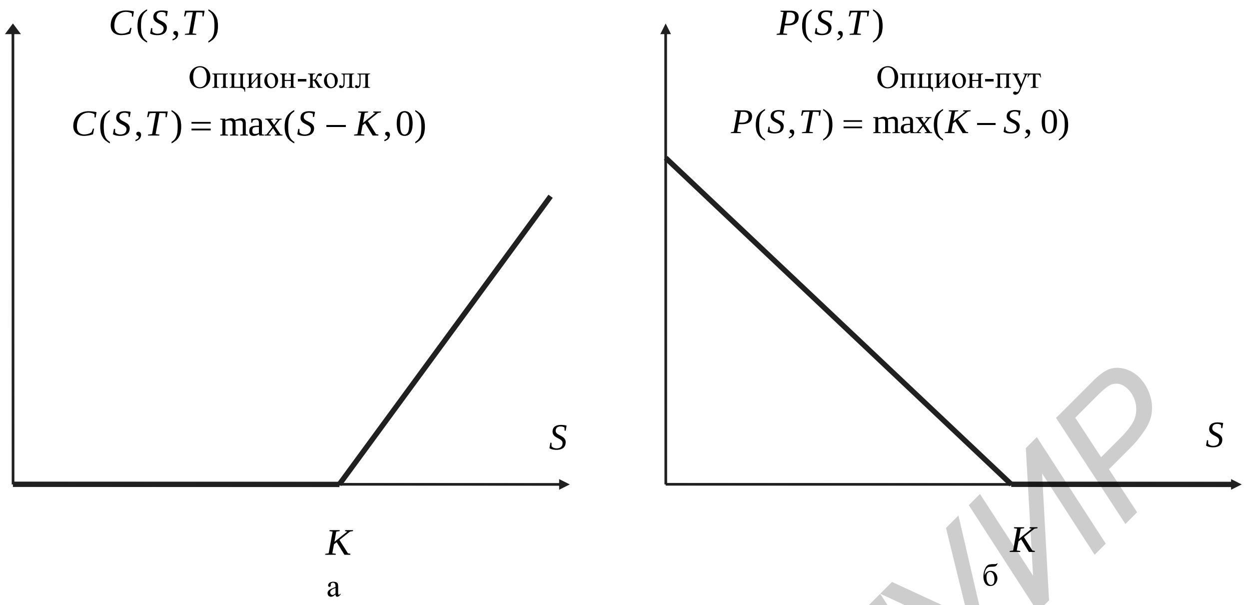


Рис. 5.1. Стоимость опционов в момент исполнения:
а – опциона-колл; б – опциона-пут

Заметим, что стоимости $C(S,T)$ и $P(S,T)$ связаны соотношением

$$C(S,T) - P(S,T) = S - K\ .$$

Отметим, что идея расчета стоимости опционов, которая лежит в основе теории оценивания «справедливой» цены опционов европейского типа и по которой можно находить цену и других видов опционов, основывается на трех принципах:

– построение хеджирующего портфеля ценных бумаг, который повторяет траекторию цены опциона;

– принцип самофинансирования при перестройке хеджирующего портфеля;

– принцип безарбитражности рынка в состоянии равновесия.

5.2. Формула Кокса – Росса – Рубинштейна (вывод методом обратной индукции)

Рассмотрим теперь математическую реализацию этой идеи в рамках так называемой биномиальной модели.

Пусть вся ось разбита на интервалы одинаковой длины. Направим время в обратную сторону, т.е. будем считать, что дата исполнения опциона равна 0, а сам опцион продаётся в момент времени N, и будем рассматривать последовательно N равный 1, 2, 3 и т.д. Именно в этом движении по оси времени назад и заключается метод обратной индукции.

Будем считать, что существует безрисковый актив с процентной ставкой r стоимостью B, так что B в начале временного интервала превращается в $(1+r)\ B$ в конце интервала.

Библиотека БГУИР

Пусть имеется рисковый актив стоимостью S. Будем считать, что в конце одного интервала его стоимость может принимать одно из двух значений: или $(1+u)S$, или $(1+d)S$, причем имеет место соотношение

$$-1 < d < r < u.$$

Всё сказанное выше можно проиллюстрировать рис. 5.2.

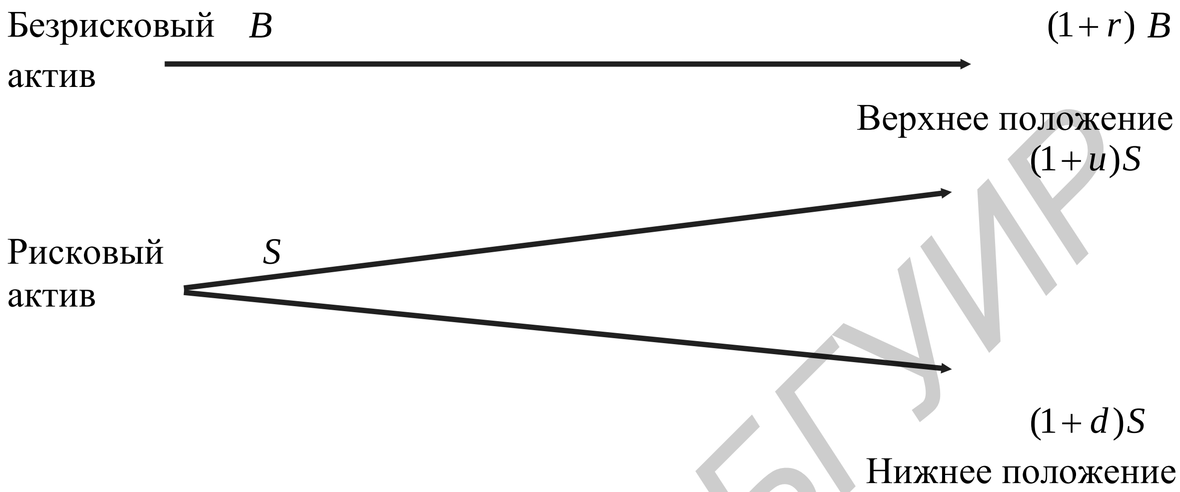


Рис. 5.2. Схема изменения цен активов за один период

Пусть цена исполнения опциона в конце интервала есть $\tilde{V}(S,0)$, так что в верхнем положении он стоит $\tilde{V}((1+u)S,0)$, а в нижнем – $\tilde{V}((1+d)S,0)$. Определим цену опциона в начале периода, считая все активы безгранично делимыми.

Для этого рассмотрим хеджирующий портфель, эквивалентный нашему опциону, состоящий из N_s рисковых ценных бумаг (каждая стоимостью в начале периода S) и N_b безрисковых ценных бумаг (каждая стоимостью в начале периода B). Тогда аналогично предыдущему разделу должны быть выполнены соотношения

$$(1+u)S \cdot N_s + (1+r)B \cdot N_b = \tilde{V}((1+u)S,0),$$
$$(1+d)S \cdot N_s + (1+r)B \cdot N_b = \tilde{V}((1+d)S,0),$$

т.е. портфель должен полностью «повторять» наш опцион.

Решение этой системы имеет вид

$$N_s = \frac{\tilde{V}((1+u)S,0) - \tilde{V}((1+d)S,0)}{S(u-d)},$$

$$N_s = \frac{(1+u)\tilde{V}((1+d)S,0) - (1+d)\tilde{V}((1+u)S,0)}{(1+r)B(u-d)}.$$

Следовательно, стоимость формирования этого портфеля, определяющая стоимость опциона в начале периода, равна (после преобразований)

$$\tilde{V}(S,1) = S \cdot N_s + B \cdot N_b =$$

Библиотека БГУИР

$$= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{V}((1+u)S,0)\cdot\frac{r-d}{u-d} + \tilde{V}((1+d)S,0)\cdot\frac{u-r}{u-d}\right].$$

Обозначим

$$\frac{r-d}{u-d} = p.$$

Тогда окончательно

$$\tilde{V}(S,1) = \frac{1}{1+r}\Big(p\cdot\tilde{V}((1+u)S,0) + (1-p)\cdot\tilde{V}((1+d)S,0)\Big). \qquad (5.1)$$

Итак, мы рассмотрели определение цены опциона на **одном** временном интервале. Что же изменится, если таких интервалов будет два?

Схема изменения цены безрискового актива и рисковой ценной бумаги приведена на рис. 5.3.

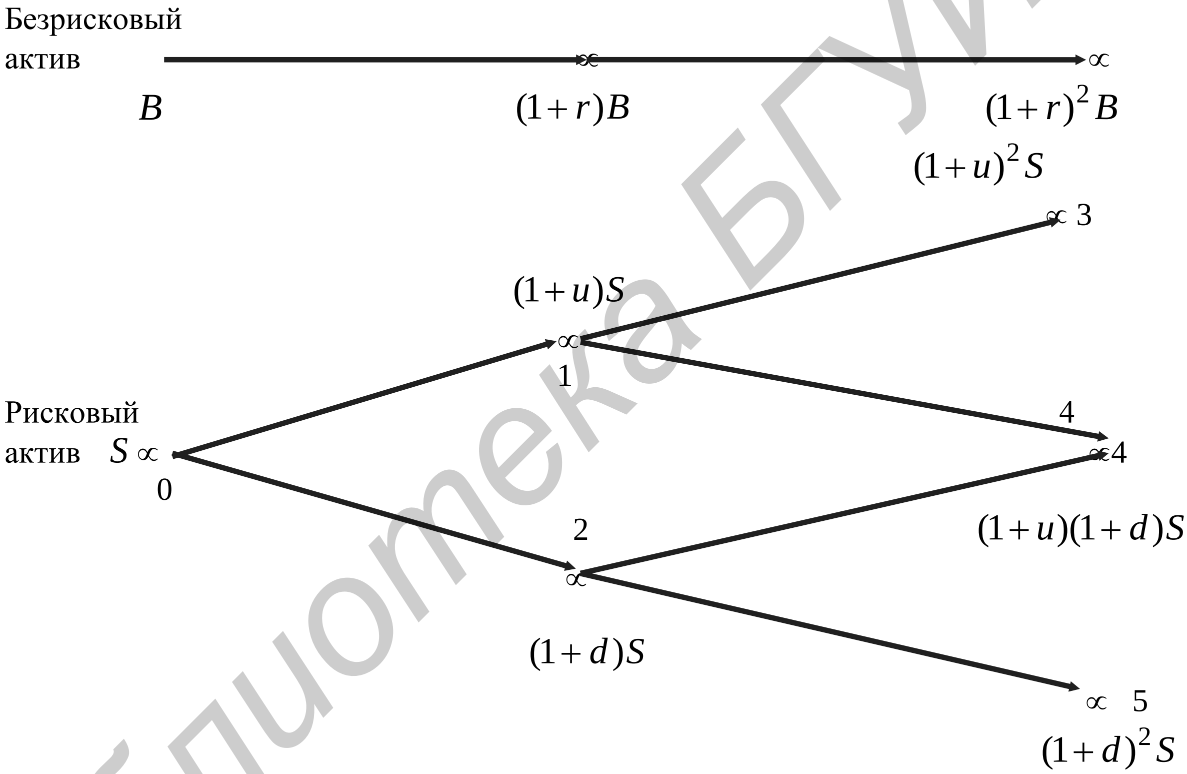


Рис. 5.3. Схема изменения цен активов за два периода

Разберёмся теперь со стоимостью опциона. Непосредственно перед моментом исполнения в узлах (3, 4, 5) стоимость опциона есть $\tilde{V}(S,0)$.

В узлах (1, 2) стоимость опциона есть $\tilde{V}(S,1)$, ведь он отстоит от слоя (3, 4, 5) на **один** интервал.

А чему равна стоимость опциона в узле 0, который отстоит от слоя (3, 4, 5) на **два** интервала? Легко видеть, что слой 0 отстоит от слоя (1, 2) на **один** интервал, где стоимость опциона равна $\tilde{V}(S,1)$. Поэтому $\tilde{V}(S,2)$ должна быть связана с $\tilde{V}(S,1)$ тем же соотношением, что и $\tilde{V}(S,1)$ и $\tilde{V}(S,0)$, т.е.

$$\tilde{V}(S,2)=\frac{1}{1+r}\Big(p\cdot\tilde{V}((1+u)S,1)+(1-p)\cdot\tilde{V}((1+d)S,1)\Big). \qquad (5.2)$$

Подставляя сюда выражение для $\tilde{V}(S,1)$, получим, после некоторых преобразований

$$\tilde{V}(S,2)=\frac{1}{(1+r)^2}\Big[p^2\tilde{V}(S(1+u)^2,0)+2p(1-p)\tilde{V}(S(1+u)(1+d),0)+$$

$$+(1-p)^2\tilde{V}(S(1+d)^2,0)\Big]. \qquad (5.3)$$

Легко догадаться, что это соотношение должно сохраниться и на случай N временных интервалов, и здесь должно быть верным следующее рекуррентное соотношение:

$$\tilde{V}(S,N)=\frac{1}{1+r}\Big(p\cdot\tilde{V}((1+u)S,N-1)+(1-p)\cdot\tilde{V}((1+d)S,N-1)\Big). \qquad (5.4)$$

Формула (5.3) подсказывает также и явный вид $\tilde{V}(S,N)$:

$$\tilde{V}(S,N)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=0}^{N}C_N^k p^k(1-p)^{N-k}\tilde{V}((1+u)^k(1+d)^{N-k}S,0). \qquad (5.5)$$

Подстановкой (5.5) в (5.4) проверим и убедимся, что это действительно решение системы (5.4). Пусть это решение верно для $\tilde{V}(S,N-1)$:

$$\tilde{V}(S,N-1)=\frac{1}{(1+r)^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}C_{N-1}^k p^k(1-p)^{N-1-k}\tilde{V}((1+u)^k(1+d)^{N-1-k}S,0).$$

Подставляя это выражение в правую часть (5.4), получим

$$\tilde{V}(S,N)=\frac{1}{(1+r)\cdot(1+r)^{N-1}}\Bigg[p\cdot\sum_{k=0}^{N-1}C_{N-1}^k p^k(1-p)^{N-1-k}\tilde{V}((1+u)^{k+1}(1+d)^{N-1-k}S,0)+$$

$$+(1-p)\cdot\sum_{k=0}^{N-1}C_{N-1}^k p^k(1-p)^{N-1-k}\tilde{V}((1+u)^k(1+d)^{N-k}S,0)\Bigg].$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках. В первой сумме делаем замену переменных $k+1=l$, во второй – $k=l$. Тогда получим

$$[\ldots]=\sum_{l=1}^{N}C_{N-1}^{l-1}p^l(1-p)^{N-l}\tilde{V}((1+u)^l(1+d)^{N-l}S,0)+$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1}C_{N-1}^{l}p^l(1-p)^{N-l}\tilde{V}((1+u)^l(1+d)^{N-l}S,0).$$

В первой сумме при $l=N$ $C_{N-1}^{l-1}=C_{N-1}^{N-1}=C_N^N$, во второй сумме при $l=0$ $C_{N-1}^{l}=C_{N-1}^{0}=C_N^0$. Во всех остальных слагаемых сработает соотношение $C_{N-1}^{l-1}+C_{N-1}^{l}=C_N^l$, следовательно,

$$[\ldots]=\sum_{l=0}^{N-1}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}\tilde{V}((1+u)^l(1+d)^{N-l}S,0),$$

Библиотека БГУИР

так что получится

$$\tilde{V}(S,N)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{l=0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}\tilde{V}((1+u)^l(1+d)^{N-l}S,0).$$

Таким образом мы по индукции доказали, что формула (5.5) верна.

Переходя к функции $V(S,k)=\tilde{V}(S,N-k)$, т.е. возвращаясь к нормальному течению времени, когда опцион продаётся в момент времени 0 и предъявляется к исполнению в момент N, получим

$$V(S,0)=V_0(S)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{l=0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}V((1+u)^l(1+d)^{N-l}S,N). \quad (5.6)$$

Формула (5.6) носит название формулы Кокса – Росса – Рубинштейна. Заметим, что при её выводе мы шли от конца временных интервалов к их началу, от последнего интервала к первому. Этот приём носит название метода обратной индукции.

Теперь легко рассчитываются и стоимости конкретных опционов.

Опцион-колл

В этом случае $V(S,N)=\max(S-K,0)$, и поэтому справедливая цена опциона-колл за N интервалов до даты истечения равна

$$C_0(S)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{l=0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}\max((1+u)^l(1+d)^{N-l}S-K,0). \quad (5.7)$$

Приведём её к стандартному виду. Пусть

$$k_0=\min\left\{k:S(1+u)^k(1+d)^{N-k}>K\right\}.$$

Если $k_0\le N$, то

$$C_0(S)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{l=k_0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}((1+u)^l(1+d)^{N-l}S-K). \quad (5.8)$$

Формулу можно немного упростить, но это непринципиально.

Опцион-пут

В этом случае $V(S,N)=\max(K-S,0)$ и поэтому справедливая цена опциона-пут равна

$$P_0(S)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{l=0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}\max(K-(1+u)^l(1+d)^{N-l}S,0). \quad (5.9)$$

Рассматривая то же значение k_0, что и для случая опциона-колл, получим

$$P_0(S)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{l=0}^{k_0-1}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}(K-(1+u)^l(1+d)^{N-l}S). \quad (5.10)$$

Фьючерсные и форвардные контракты

В отличие от опционов фьючерсные и форвардные контракты **обязательны** к исполнению и в них осуществляется только покупка. Поэтому для них $V(S,N)=S-K$. Поэтому, если K есть та сумма, которая выплачивается в

Библиотека БГУИР

момент получения товара от продавца, то в качестве аванса должна выплачиваться сумма $F_0(S)$, равная

$$F_0(S)=\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{l=0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}((1+u)^l(1+d)^{N-l}S-K). \qquad (5.11)$$

Но

$$\sum_{l=0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}=(p+(1-p))^N=1,$$

$$\sum_{l=0}^{N}C_N^l p^l(1-p)^{N-l}(1+u)^l(1+d)^{N-l}=\left[p(1+u)+(1-p)(1+d)\right]^N.$$

С другой стороны, $p=(r-d)/(u-d)$. Поэтому

$$p(1+u)+(1-p)(1+d)=\frac{1}{u-d}\left[(r-d)(1+u)+(u-r)(1+d)\right]=1+r.$$

Следовательно, имеем

$$F_0(S)=S-\frac{K}{(1+r)^N}, \qquad (5.12)$$

что и даёт соотношение между авансом $F_0(S)$, окончательным платежом K и стоимостью товара S в момент заключения фьючерсного или форвардного контракта

$$F_0(S)+\frac{K}{(1+r)^N}=S. \qquad (5.13)$$

Отметим одно интересное соотношение между ценами опционов и фьючерсов. Сравнивая их цены в момент исполнения

$$C(S,N)=\max(S-K,0),$$

$$P(S,N)=\max(K-S,0),$$

$$F(S,N)=S-K,$$

видим, что между ними существует соотношение

$$C(S,N)-P(S,N)=F(S,N).$$

Поэтому, согласно формуле Кокса – Росса – Рубинштейна, это же соотношение должно сохраниться и в момент их продажи, т.е.

$$C_0(S)-P_0(S)=F_0(S)=S-\frac{K}{(1+r)^N}. \qquad (5.14)$$

Это формула называется **соотношением паритета** между стоимостями опциона-колл и опциона-пут. Её можно получить и без всякой математики.

Действительно, в чем отличие фьючерса от опциона? Фьючерс обязателен к исполнению обеими сторонами, а опцион обязателен к исполнению только продавцом, покупатель имеет право выбора (option). Теперь представьте, что вы купили опцион-колл и продали опцион-пут на одну и ту же акцию с одинаковой датой и ценой исполнения. Что произойдёт в эту дату? Если «победит» опцион-колл, то вы купите эту акцию, вам это выгодно. Если «победит» опцион-пут, то вам придётся купить эту акцию, выполняя свои обязательства перед покупателем. Таким образом, вам в любом случае придётся купить эту акцию, а это и есть фьючерс. Итак,

опцион-колл – опцион-пут = фьючерс,

откуда и следует соотношение паритета.

5.3. Формула Блэка – Шоулса (вывод через самофинансируемый портфель)

При расчете стоимости опционов наибольшей популярностью пользуется формула Блэка – Шоулса. Выведем ее методом самофинансируемого портфеля.

Пусть время течёт непрерывно, опцион продаётся в момент времени $t=0$ и его дата исполнения есть $t=T$.

Для вывода формулы Блэка – Шоулса будем считать, что опцион может быть продан в любой момент времени $t,\ 0\le t\le T$. Обозначим через B_t и S_t цены безрискового и рискового актива в момент времени t соответственно, и через $V(S_t,t)$ – цену опциона в этот момент времени.

Пусть в момент времени t мы имеем портфель $(\beta_t,\ \gamma_t)$, состоящий из β_t безрисковых бумаг и γ_t рисковых бумаг. Стоимость этого портфеля

$$\Pi_t=\beta_t B_t+\gamma_t S_t. \tag{5.15}$$

Легко видеть, что условие самофинансирования портфеля

$$\Delta\beta_t\cdot B_{t+1}+\Delta\gamma_t\cdot S_{t+1}=0$$

следует в непрерывном случае записать в виде

$$B_t\cdot d\beta_t+S_t\cdot d\gamma_t=0, \tag{5.16}$$

т.к. $S_{t+dt}=S_t+dS_t$, а произведение двух дифференциалов есть бесконечно малая величина более высокого порядка.

Для самофинансируемого портфеля

$$d\Pi_t=d\beta_t\cdot B_t+\beta_t\cdot dB_t+d\gamma_t\cdot S_t+\gamma_t\cdot dS_t$$

условие самофинансирования даёт

$$d\Pi_t=\beta_t\cdot dB_t+\gamma_t\cdot dS_t. \tag{5.17}$$

Построим самофинансируемый портфель, который на всей траектории повторял бы стоимость опциона, т.е. $\forall t\in[0,T]$ было бы справедливо равенство

$$\Pi_t=V(S,\ t).$$

Распишем подробнее это условие. Во-первых, имеем

$$\forall t\ \beta_t\cdot B_t+\gamma_t\cdot S_t=V(S_t,\ t). \tag{5.18}$$

Далее, из условия $d\Pi_t=dV(S_t,\ t)$ получим

$$\beta_t\cdot dB_t+\gamma_t\cdot dS_t=dV(S_t,\ t). \tag{5.19}$$

Но

$$dB_t=rB_t dt,$$
$$dS_t=S_t(\mu dt+\sigma dw_t).$$

Используя формулу Ито, получим

$$dV(S_t,t)=\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial S_t}\cdot\mu S_t+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]dt+\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dw_t.$$

Подставляя всё это в (5.19), получим

$$\beta_t\cdot rB_t dt+\gamma_t\mu S_t dt+\gamma_t\sigma S_t dw_t=$$

$$=\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial S_t}\cdot\mu S_t+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]dt+\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dw_t.$$

В каждой части этого равенства стоят слагаемые, содержащие dt (они определяют безрисковую часть), и слагаемые, содержащие dw_t (они определяют рисковую часть). Чтобы портфель полностью повторял опцион, надо чтобы коэффициенты при dt и при dw_t слева и справа были одинаковы, т. е.

$$\beta_t\cdot rB_t+\gamma_t\mu S_t=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial S_t}\cdot\mu S_t+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2},$$

$$\gamma_t\sigma S_t=\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}.$$

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{gathered}\beta_t B_t+\gamma_t S_t=V(S_t,\ t),\\ \beta_t\cdot rB_t+\gamma_t\mu S_t=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial S_t}\cdot\mu S_t+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2},\\ \gamma_t\sigma S_t=\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}.\end{gathered}\tag{5.20}$$

Из последнего уравнения этой системы получим

$$\gamma_t=\frac{\partial V}{\partial S_t},\tag{5.21}$$

что поможет определить рисковую часть хеджирующего портфеля.

Подставляя (5.21) во второе уравнение (5.20), получим

$$\beta_t=\frac{1}{rB_t}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right],\tag{5.22}$$

что определяет безрисковую часть хеджирующего портфеля.

Наконец, подставляя эти выражения в первое уравнение системы (5.20)

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]+S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}=V(S,\ t)$$

и отбрасывая для краткости индекс t у S_t, получим окончательно следующее уравнение для $V(S,t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV(S,\ t)=0.\tag{5.23}$$

Библиотека БГУИР

Ф. Блэк и М. Шоулс назвали это уравнение фундаментальным; сейчас его называют уравнением Блэка – Шоулса.

Уравнение (5.23) является уравнением в частных производных второго порядка параболического типа. Для его однозначного решения надо задать так называемые граничные и начальные условия.

Что касается граничного условия, то оно очевидно – им является цена опциона в момент исполнения $V(S,\ T)$, которая считается заданной.

Сложнее обстоит дело с начальными условиями. Вместо них выдвигают следующее естественное требование: если $V(S,\ T)\equiv 0$, то и в любой момент времени t должно быть верно, что $V(S,\ t)=0$. Это условие однозначно определяет решение уравнения (5.23):

$$V(S,\ t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}V\left(S\cdot\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+x\sigma\sqrt{T-t}\right),\ T\right)dx. \qquad (5.24)$$

Формула (5.24) определяет стоимость опциона в любой момент времени t.

В частности, в момент продажи $t=0$ имеем

$$V(S,0)=V_0(S)=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}V\left(S\cdot\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+x\sigma\sqrt{T}\right),\ T\right)dx. \qquad (5.25)$$

Конкретизируем данную формулу для расчета опциона-колл, опциона-пут и фьючерса.

Опцион-колл

В этом случае $V(S,\ T)=\max(S-K,\ 0)$, так что

$$V\left(e^{T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)-x\sigma\sqrt{T}}S,\ T\right)=\max\left(e^{T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)-x\sigma\sqrt{T}}S-K,\ 0\right).$$

Найдём x_0 из условия

$$\mathrm{e}^{T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+x_0\sigma\sqrt{T}}S-K=0.$$

Логарифмируя, получим

$$x_0=-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S}{K}+T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right).$$

Теперь

$$C_0(S)=\mathrm{e}^{-rT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(\mathrm{e}^{T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+x\sigma\sqrt{T}}S-K\right)dx.$$

Вычислим входящие сюда интегралы через функцию Лапласа:

Библиотека БГУИР

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \Phi(-x_0) = \Phi\left(\frac{\ln(S/K) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Далее,

$$e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_0}^{\infty} \exp\left(rT - T\frac{\sigma^2}{2} + x\sigma\sqrt{T}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}\right) dx = \Phi\left(-x_0 + \sigma\sqrt{T}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(S/K) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Сводя всё вместе, получаем окончательно

$$C_0(S) = S \cdot \Phi\left(\frac{\ln(S/K) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S/K) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (5.26)$$

Фьючерс

Для фьючерса $V(S,T) = S - K$ и поэтому

$$F_0(S) = \mathrm{e}^{-rT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \left(\mathrm{e}^{T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + x\sigma\sqrt{T}} S - K\right) dx \ .$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1,$$

$$e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(rT - T\frac{\sigma^2}{2} + x\sigma\sqrt{T}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx =$$

Библиотека БГУИР

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2} \right) dx = 1,$$

то для цены фьючерса получаем

$$F_0(S) = S - \mathrm{e}^{-rT} K. \tag{5.27}$$

Опцион-пут

Можно, конечно, вывести формулу для цены опциона-пут аналогично тому, как была выведена формула для опциона-колл, но проще воспользоваться соотношением паритета

$$C_0(S) - P_0(S) = F_0(S),$$

откуда легко находится $P_0(S)$.

5.4. Формула Блэка – Шоулса при наличии дивидендов

Обобщим теперь формулу Блэка – Шоулса для того случая, когда по ценным бумагам выплачиваются дивиденды. Примем следующую модель их выплаты:

– дивиденды выплачиваются непрерывно во времени;

– размер дивидендов пропорционален стоимости ценной бумаги S_t.

Таким образом, если у нас в момент времени t имеется γ_t ценных бумаг каждая стоимостью S_t, то на промежутке времени $[t,\ t+dt]$ мы в качестве дивидендов получим сумму

$$dD = \delta \cdot \gamma_t S_t dt. \tag{5.28}$$

Константа δ определяет размер дивидендов.

Мы выведем формулу Блэка – Шоулса, по-другому формируя хеджирующий портфель ценных бумаг, чтобы понять разнообразие портфелей, которые рассматриваются в финансовой математике.

Сформируем портфель, состоящий из **опционов** на рисковые ценные бумаги, и самих **ценных бумаг**. Пусть в портфеле в момент времени t будет α_t опционов и γ_t рисковых ценных бумаг, т.е. портфель имеет состав (α_i, γ_i). Если $V(S_t, t)$ есть стоимость одного опциона, то стоимость такого портфеля равна

$$\Pi_t = \alpha_t V(S_t,\ t) + \gamma_t S_t.$$

Разберёмся теперь с условием самофинансирования. Ранее мы не получали никаких дивидендов, и поэтому не могли расходовать денег. В приложении к рассматриваемому портфелю это условие выглядело бы так:

$$d\alpha_t \cdot V(S_t,\ t) + d\gamma_t \cdot S_t = 0.$$

Пусть на интервале времени dt получили дополнительно деньги в количестве dD (5.28). Для теории интереснее будет вложить их в формирование портфеля. Тогда условие самофинансирования примет вид

Библиотека БГУИР

$$d\alpha_t \cdot V(S_t,t) + d\gamma_t \cdot S_t = dD = \delta\gamma_t S_t dt\,. \tag{5.29}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= d(\alpha_t \cdot V + \gamma_t \cdot S_t) = \alpha_t dV + d\alpha_t dV + \gamma_t dS_t + d\gamma_t S_t = \\ &= \alpha_t dV(S_t,t) + \gamma_t dS_t + \delta\gamma_t S_t dt. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Последнее слагаемое вполне естественно – стоимость портфеля возросла на сумму дивидендов.

А теперь приступим к выводу. Итак, имеем:

$$\Pi_t = \alpha_t V(S_t,\ t) + \gamma_t S_t\,,$$

$$d\Pi_t = \alpha_t dV(S_t,\ t) + \gamma_t dS_t + \delta\gamma_t S_t dt.$$

Используя формулу Ито и модель изменения цены S_t, получим

$$\begin{aligned} \Pi_t = \alpha_t &\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dw_t\right] + \\ &+ \gamma_t\left[\mu S_t dt + \sigma S_t dw_t + \delta\gamma_t S_t dt\right]. \end{aligned}$$

Поставим теперь перед собой задачу сформировать **безрисковый** портфель. Для этого надо подобрать α_t и γ_t так, чтобы в $d\Pi_t$ исчезла **рисковая часть**, связанная с непредсказуемым изменением цены. А это – слагаемые, содержащие dw_t. Поэтому подберём α_t и γ_t исходя из того условия, чтобы коэффициент при dw_t обратился в нуль, т.е.

$$\alpha_t \cdot \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \gamma_t \cdot \sigma S_t = 0\,.$$

Отсюда получаем

$$\gamma_t = -\alpha_t \frac{\partial V}{\partial S_t}. \tag{5.31}$$

При таком выборе γ_t имеем

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \alpha_t\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]dt - \alpha_t \frac{\partial V}{\partial S_t}\left[\mu S_t dt + \delta\gamma_t S_t dt\right] = \\ &= \alpha_t\left[\frac{\partial V}{\partial t} - \delta S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]dt. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Итак, безрисковый портфель получен. Но мы можем сформировать и другой безрисковый портфель **только на безрисковых ценных бумагах.** Для его стоимости $\tilde{\Pi}_t$ верно соотношение

$$d\tilde{\Pi}_t = r \cdot \tilde{\Pi}_t dt, \tag{5.33}$$

т.е. его доходность равна r.

Теперь у нас уже два безрисковых портфеля. Какое же соотношение между их доходностями? Из соображений безарбитражности можно утверждать, что **доходности всех безрисковых портфелей должны быть одинаковы.**

Библиотека БГУИР

Действительно, при наличии двух безрисковых портфелей разной доходности, **продавая** портфель с меньшей доходностью и **покупая** на эти деньги портфель с большей доходностью, мы получаем арбитражную возможность «качать деньги из воздуха».

Поэтому и для нашего портфеля, состоящего из опционов и рисковых ценных бумаг, должно быть выполнено условие

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = r\left(\alpha_t V + \gamma_t S_t\right)dt = r\alpha_t \left(V - S_t \frac{\partial V}{\partial S_t}\right)dt . \qquad (5.34)$$

Приравнивая между собой выражения (5.32) и (5.34), получим

$$\alpha_t \left[\frac{\partial V}{\partial t} - \delta S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right]dt = r\alpha_t \left(V - S_t \frac{\partial V}{\partial S_t}\right)dt.$$

Сокращая $\alpha_t dt$ и убирая индекс t у S_t, получим уравнение для стоимости опциона при наличии дивидендов

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + (r-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \qquad (5.35)$$

Его решением является функция

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} V\left(S \cdot \exp\left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)(T-t) + x\sigma\sqrt{T-t}\right)dx. \qquad (5.36)$$

5.5. Формула Мертона

Выведем еще одну формулу оценивания стоимости опциона в непрерывном времени для другой модели изменения цены ценной бумаги. В модели Мертона используется следующая модель изменения цены: пусть в момент времени t цена на рисковую бумагу была S_t. Тогда в момент времени $t + \Delta t$

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t\left(1 - \sigma \cdot \Delta t + o(\Delta t)\right), & \text{с вероятностью } 1 - q\Delta t + o(\Delta t), \\ S_t(1+u), & \text{с вероятностью } q\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

В результате траектория S_t в зависимости от времени t имеет вид, изображенный на рис. 5.4.

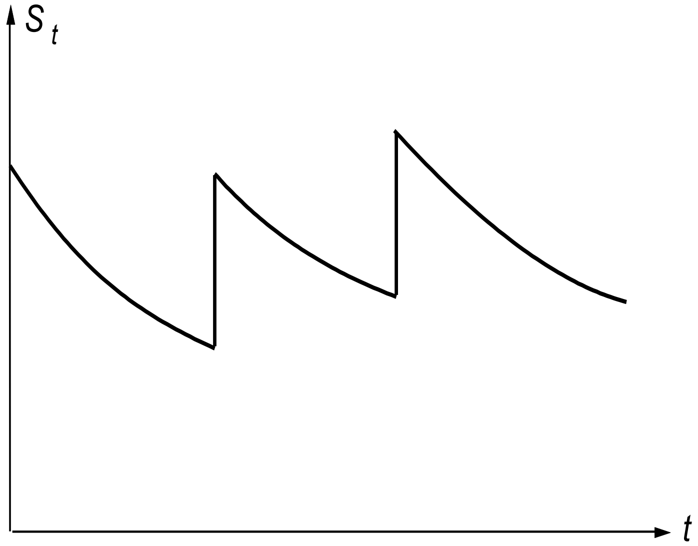


Рис. 5.4. Изменение цены финансового актива в модели Мертона

Параметр q определяет интенсивность скачков процесса S_t; впрочем, в формулу для цены опциона он не входит.

Мы получим формулу для цены опциона в этой модели предельным переходом из формулы Кокса – Росса – Рубинштейна. Для этого разобьём отрезок T на N отрезков длиной $\Delta = T/N$, так что $N = T/\Delta$. Для получения искомой формулы сделаем в формуле Кокса – Росса – Рубинштейна следующие замены:

$$r \Rightarrow r \cdot \Delta, \;\; d \Rightarrow -\sigma \cdot \Delta. \tag{5.37}$$

Параметр u останется неизменным.

Итак, имеем формулу Кокса – Росса – Рубинштейна:

$$V(S,0) = V_0(S) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{l=0}^{N} C_N^l p^l (1-p)^{N-l} V((1+u)^l (1+d)^{N-l} S, N).$$

Рассмотрим пределы её отдельных элементов при $\Delta \to 0$. Сомножитель $(1+r)^N$ перейдёт в $(1+r\Delta)^{T/\Delta}$, и мы получим

$$\lim_{\Delta \to 0} (1+r\Delta)^{T/\Delta} = \mathrm{e}^{rT}. \tag{5.38}$$

Далее, параметр $p = (r-d)/(u-d)$ перейдёт в

$$p = \frac{r\Delta + \sigma\Delta}{u + \sigma\Delta} = \frac{r+\sigma}{u}\Delta + o(\Delta) \tag{5.39}$$

и т.к. $N = T/\Delta$, то

$$C_N^l p^l (1-p)^{N-1} = \frac{N!}{l!(N-l)!} \left(\frac{r+\sigma}{u}\Delta\right)^l \left(1 - \frac{r+\sigma}{u}\Delta\right)^{N-l} =$$

$$= \frac{1}{l!} \left(\frac{r+\sigma}{u}\right)^l \cdot \frac{T}{\Delta} \cdot \left(\frac{T}{\Delta} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{T}{\Delta} - l + 1\right) \cdot \Delta^l \cdot \left(1 - \frac{r+\sigma}{u}\Delta\right)^{\frac{T}{\Delta} - l}.$$

Библиотека БГУИР

Легко видеть, что

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{T}{\Delta}\cdot\left(\frac{T}{\Delta}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{T}{\Delta}-l+1\right)\cdot\Delta^l=T^l,$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\left(1-\frac{r+\sigma}{u}\Delta\right)^{\frac{T}{\Delta}-l}=\exp\left(-\frac{r+\sigma}{u}T\right),$$

так что, обозначая $(r+\sigma)T/u$ через λ, получим

$$\lim_{\Delta\to 0}C_N^l\,p^l\left(1-p\right)^{N-1}=\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}. \quad (5.40)$$

Наконец, сомножитель $(1+d)^{N-l}$, который переходит в $\left(1-\sigma\Delta\right)^{T/\Delta-l}$, в пределе $\Delta\to 0$, равен $\exp(-\sigma T)$. Поэтому

$$V(S,0)=V_0(S)=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}\mathrm{e}^{-\lambda}V\left((1+u)^l\,\mathrm{e}^{-\sigma T}S,T\right). \quad (5.41)$$

Эта формула носит название формулы Мертона (Robert Merton).

Запишем частные случаи этой формулы.

Опцион-колл

В этом случае

$$C_0\left(S\right)=e^{-rT}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}\max\left[\left(1+u\right)^l e^{-\sigma T}S-K,0\right]. \quad (5.42)$$

Рассмотрим, при каких условиях

$$(1+u)^l\,\mathrm{e}^{-\sigma T}S-K>0.$$

Логарифмируя, получим

$$l>\frac{1}{\ln(1+u)}\left[\ln\frac{K}{S}+\sigma T\right].$$

Введём величину

$$k_0=\left]\frac{1}{\ln(1+u)}\left(\sigma T-\ln\frac{S}{K}\right)\right[+1,$$

где $]\ldots[$ означает целую часть. Тогда в (5.42) суммирование идёт по $l\ge k_0$, так что

$$C_0\left(S\right)=e^{-rT}\sum_{l=k_0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}\max\left[\left(1+u\right)^l e^{-\sigma T}S-K\right], \quad (5.43)$$

что и определяет стоимость опциона-колл.

Фьючерс

В этом случае

$$F_0\left(S\right)=e^{-rT}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}\max\left[\left(1+u\right)^l e^{-\sigma T}S-K\right].$$

Библиотека БГУИР

Имеем

$$e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}=1,$$

$$e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l(1+u)^l}{l!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-u)}=e^{\lambda u}.$$

Далее,

$$-rT+\lambda u-\sigma T=-rT+\frac{r+\sigma}{u}Tu-\sigma T=0,$$

и поэтому окончательно

$$F_0(S)=S-e^{-rT}K,$$

что совпадает с аналогичным результатом из формулы Блэка – Шоулса.

Стоимость **опциона-пут** можно найти из соотношения паритета.

Библиотека БГУИР

Раздел 6. Практические приложения теории расчета финансовых операций в условиях определенности

В [5] изложен теоретический материал по анализу и расчету финансовых операций в условиях определенности. Представлены следующие разделы: наращение и дисконтирование для простых и сложных процентов, расчет финансовой ренты при различных условиях контракта, метод дисконтированных платежей для расчета акций и облигаций, модели изменения дивидендов.

В данном пособии будут представлены некоторые практические приложения рассмотренной теории, которые показывают, как теоретические формулы применяются при решении реальных задач по расчету эффективности некоторых финансовых операций [6].

6.1. Конвертация валюты и начисление процентов

Рассмотрим совмещение конвертации (обмена) валюты и наращения **простых процентов.** После чего сравним результаты непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозите и после предварительного обмена на другую валюту.

Всего возможно 4 варианта наращения процентов.

1. Без конвертации. Валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение первоначальной суммы производится по валютной ставке путем прямого применения формулы простых процентов.

2. С конвертацией. Исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется в исходную валюту.

3. Без конвертации. Рублевая сумма размещается в виде рублевого депозита, на который начисляются проценты по рублевой ставке по формуле простых процентов.

4. С конвертацией. Рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту, которая инвестируется в валютный депозит. Проценты начисляются по валютной ставке. Наращенная сумма в конце операции конвертируется обратно в рубли.

Операции без конвертации не представляют сложности. В операции наращения с двойной конвертацией имеются два источника дохода: начисление процента и изменения курса, причем начисление процента является безусловным источником (ставка фиксирована, инфляцию пока не рассматриваем). Изменение же обменного курса может происходить как в ту, так и в другую сторону. При этом оно может быть как источником дополнительного дохода, так и приводить к потерям. Далее остановимся подробно на двух вариантах (2 и 4), предусматривающих двойную конвертацию.

Предварительно введем следующие обозначения:

P_v – сумма депозита в валюте,

P_r – сумма депозита в рублях,

Библиотека БГУИР

S_v – наращенная сумма в валюте,

S_r – наращенная сумма в рублях,

K_0 – курс обмена в начале операции (курс валюты, в рублях),

K_1 – курс обмена в конце операции,

n – срок депозита,

i – ставка наращения для рублевых сумм (в виде десятичной дроби),

j – ставка наращения для конкретной валюты.

ВАРИАНТ 2: *ВАЛЮТА* $\Rightarrow$ *РУБЛИ* $\Rightarrow$ *РУБЛИ* $\Rightarrow$ *ВАЛЮТА*

Операция состоит из трех этапов: обмена валюты на рубли, наращения рублевой суммы, обратное конвертирование рублевой суммы в исходную валюту. Наращенная сумма, получаемая в конце операции в валюте, составит

$$S_v = P_v K_0 (1+ni)\frac{1}{K_1}.$$

Как видим, три этапа операции нашли свое отражение в этой формуле в виде трех сомножителей.

Множители наращения с учетом двойной конвертации равен

$$m = \frac{K_0}{K_1}(1+ni) = \frac{1+ni}{\left(\dfrac{K_1}{K_0}\right)} = \frac{1+ni}{k},$$

где k – темп роста обменного курса за срок операции.

Мы видим, что множитель наращения m связан линейной зависимостью со ставкой i и обратной – с обменным курсом в конце операции K_1 (или с темпом роста обменного курса k) (рис. 6.1).

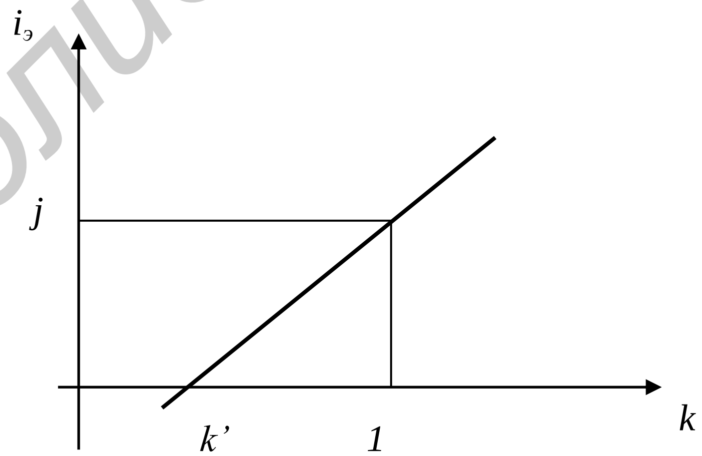


Рис. 6.1. Линейное изменение доходности операции

Библиотека БГУИР

Исследуем теоретически зависимость общей доходности операции с двойной конвертацией по схеме $ВАЛЮТА \Rightarrow РУБЛИ \Rightarrow РУБЛИ \Rightarrow ВАЛЮТА$ от соотношения конечного и начального курсов обмена k.

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции в целом, равна

$$i_{эф} = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Подставим в эту формулу записанное ранее выражение для S_v:

$$i_{эф} = \frac{\frac{K_0}{K_1}(1+ni) - 1}{n} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n}.$$

Таким образом, с увеличением k доходность $i_{эф}$ падает по гиперболе с асимптотой $-1/n$ (рис. 6.2).

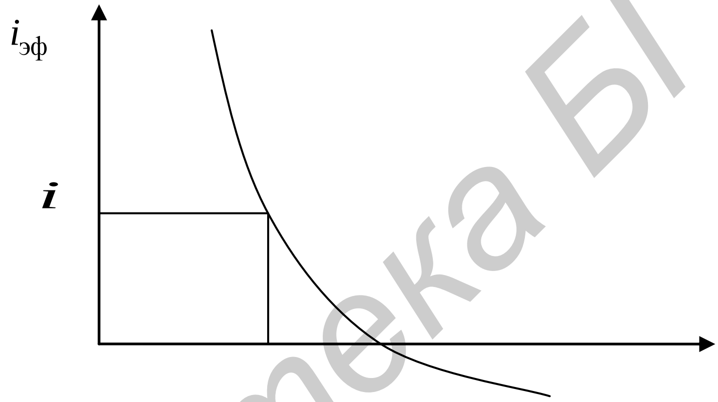


Рис. 6.2. Изменение доходности операции

Исследуем особые точки этой кривой. Отметим, что при $k=1$ доходность операции равна рублевой ставке, т. е. $i_{эф} = i$. При $k>1$ $i_{эф} < i,$ а при $k<1$ $i_{эф} > i$. На рис. 6.1 видно, что при некоторой критическом значении k, которое мы обозначим как k^*, доходность (эффективность) операции оказывается равной нулю. Из равенства $i_{эф} = 0$ находим, что $k^* = 1 + ni,$ что в свою очередь означает $K_1^* = K_0(1+ni)$.

ВЫВОД 1: Если ожидаемые величины k или K_1 превышают свои критические значения, то операция явно убыточна ($i_{эф} < 0$).

Теперь определим **максимально допустимое значение курса обмена в конце операции** K_1, при котором эффективность будет равна существующей ставке по депозитам в валюте, и применение двойной конвертации не дает никакой дополнительной выгоды. Для этого приравняем множители наращения для двух альтернативных операций

$$1 + nj = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni).$$

Из записанного равенства следует, что

$$\max K_1 = K_0 \frac{1 + ni}{1 + nj}$$

или

$$\max\ k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{1 + ni}{1 + nj}.$$

ВЫВОД 2: Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max\ K_1$.

ВАРИАНТ 4: *РУБЛИ* $\Rightarrow$ *ВАЛЮТА* $\Rightarrow$ *ВАЛЮТА* $\Rightarrow$ *РУБЛИ*

Рассмотрим теперь вариант с двойной конвертацией, когда имеется исходная сумма в рублях. В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя следующего выражения для наращенной суммы:

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1 + nj)K_1 = P_r(1 + nj)\frac{K_1}{K_0}.$$

Здесь также множитель наращения линейно зависит от ставки, но теперь – от валютной ставки процентов. От конечного курса обмена он также зависит линейно.

Проведем теоретический анализ эффективности этой операции с двойной конвертацией и определим критические точки.

Доходность операции в целом определяется по формуле

$$i_{\text{эф}} = \frac{S_r - P_r}{P_r n}.$$

Отсюда, подставив выражения для S_r, получаем

$$i_{\text{эф}} = \frac{\frac{K_1}{K_0}(1 + nj) - 1}{n} = \frac{k(1 + nj) - 1}{n}.$$

Зависимость показателя эффективности $i_{\text{эф}}$ и k линейная.

При $k = 1$ $\quad i_{\text{эф}} = j$,при $k > 1$ $\quad i_{\text{эф}} > j$, при $k < 1$ $\quad i_{\text{эф}} < j$.

Найдем теперь значение k^*, при котором $i_{\text{эф}} = 0$. Оно оказывается равным

$$k^* = \frac{1}{1 + nj} \quad \text{или} \quad K_1^* = \frac{K_0}{1 + nj}.$$

ВЫВОД 3: Если ожидаются величины k или K_1 меньше своих критических значений, то операция явно убыточна ($i_{\text{эф}} < 0$).

Библиотека БГУИР

Минимально допустимая величина k (темпа роста валютного курса за весь срок операции), обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства $i_{\text{эф}} = i$)

$$\frac{K_1}{K_0}(1+nj) = 1+ni\,,$$

откуда min $k = \dfrac{1+ni}{1+nj}$ или min $K_1 = K_0 \dfrac{1+ni}{1+nj}$.

ВЫВОД 4: Депозит рублевых сумм через конвертацию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше min K_1.

Теперь рассмотрим совмещение конвертации валюты и наращение **сложных процентов**. Ограничимся одним вариантом.

ВАРИАНТ 2: $ВАЛЮТА \Rightarrow РУБЛИ \Rightarrow РУБЛИ \Rightarrow ВАЛЮТА$

Три этапа операции записываются в одной формуле для наращения суммы

$$S_v = P_v K_0 (1+i)^n \frac{1}{K_1}\,,$$

где i – ставка сложных процентов.

Множитель наращения

$$m = (1+i)^n \frac{K_0}{K_1} = \frac{(1+i)^n}{k}\,,$$

где $k = \dfrac{K_1}{K_0}$ – темп роста валютного курса за период операции.

Определим доходность операции в целом в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$.

Из формулы наращения по сложным процентам

$$S = P(1+j)^n$$

следует, что

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{S_v}{P_v}} - 1.$$

Подставим в эту формулу значения S_v, получим

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{P_v (1+i)^n \dfrac{K_0}{K_1}}{P_v}} - 1 = \frac{1+i}{\sqrt[n]{k}} - 1.$$

Анализ показывает, что при $k=1$ $i_э = i$, при $k>1$ $i_э < i$, а при $k<1$ $i_э > i$. Критическое значение k, при котором эффективность операции равна нулю, т. е. $i_э = 0$, определяется как $k^* = (1+i)^n$, что означает равенство среднегодового темпа роста курса валюты годовому темпу наращения по рублевой ставке: $\sqrt[n]{k} = 1+i$.

ВЫВОД 5: Если ожидаемые величины k или K_1 больше своих критических значений, то рассматриваемая операция с двойной конверсией явно убыточна ($i_э = 0$).

Максимально допустимое значение k, при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке j, находится из равенства соответствующих множителей наращения

$$(1+j)^n = \frac{(1+i)^n}{k_{\max}},$$

откуда

$$k_{\max} = \left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n \text{ или } \max K_1 = K_0 \left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n.$$

ВЫВОД 6: Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

6.2. Погашение задолженности частями

Контур финансовой операции

Финансовая или кредитная операции предполагают сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности поясняет рис. 6.3.

Пусть ссуда в размере D_0 выдана на срок T. Предположим, что на протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся два промежуточных платежа R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности R_3, подводящий баланс операции.

На интервале времени t_1 задолженность возрастает до величины D_1. В момент времени t_1 долг уменьшается до величины $K_1 = D_1 - R_1$ и т.д. Заканчивается операция, когда кредитор получает остаток задолженности R_3. В этот момент задолженность полностью погашается.

Назовем график (рис. 6.3, б) *контуром финансовой операции*. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

Библиотека БГУИР

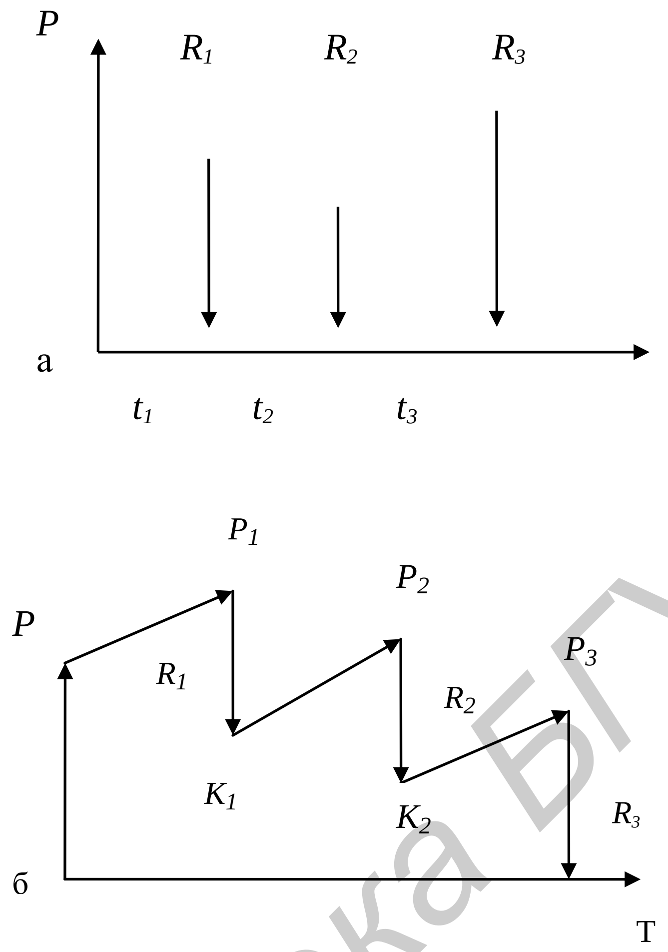


Рис. 6.3. Контур финансовой операции

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства. В этом случае существуют два метода расчета процентов и определения остатка задолженности. Первый называется **актуарным** и применяется в основном в операциях со сроком более года. Второй метод назван **правилом торговца**. Он обычно применяется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года.

Замечание. При начислении процентов, как правило, используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней временных периодов.

Актуарный метод

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не совершаются. Такое поступление приплюсовывается к следующему платежу.

Библиотека БГУИР

Для случая, показанного на рис. 6.3, б, получим следующие расчетные формулы определения остатка задолженности:

$$K_1 = D_0(1+t_1 i) - R_1; \quad K_2 = K_1(1+t_2 i) - R_2; \quad K_2(1+t_3 i) - R_3 = 0,$$

где t_1, t_2, t_3 – периоды времени, заданные в годах,

i – годовая процентная ставка.

Правило торговца

«Правило торговца» является другим подходом к расчету частичных платежей. Здесь возможны две ситуации.

1. Если срок ссуды не превышает года, сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей за счет начисленных на них до конца срока процентов.

2. В случае, когда срок ссуды превышает год, указанные выше расчеты производятся для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

При общем сроке ссуды $T \le 1$ алгоритм расчета можно записать следующим образом:

$$S = D - K = P(1+Ti) - \sum_{j=1}^{m} R_j(1+t_j i),$$

где S – остаток долга на конец срока,

D – наращенная сумма долга,

K – наращенная сумма платежей,

R_j – сумма частичного платежа,

t_j – интервал времени от момента платежа до конца срока,

m – число частичных (промежуточных) платежей.

6.3. Переменная сумма счета и расчет процентов

Рассмотрим ситуацию, когда в банке открыт сберегательный счет, и сумма счета в течение срока хранения изменяется: снимаются денежные средства, делаются дополнительные взносы. Тогда в банковской практике при расчете процентов часто используют методику расчета с вычислением так называемых *процентов чисел*. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляется процентное число C_j за прошедший период j, в течение которого сумма на счете оставалась неизменной, по формуле

$$C_j = \frac{P_j t_j}{100},$$

где t_j – длительность j-го периода, в днях.

Библиотека БГУИР

Для определения суммы процентов, начисленной за весь срок, все процентные числа складываются и их сумма делится на постоянный делитель D:

$$D = \frac{K}{i},$$

где K – временная база (число дней в году, т. е. 360, 365 или 366),

i – годовая ставка простых процентов (в %).

При закрытии счета владелец получит сумму, равную последнему значению суммы на счете плюс сумму процентов.

Пример

Пусть 20 февраля 2010 г. был открыт счет до востребования в размере $P_1 = 3000$ р., процентная ставка по вкладу равнялась $i = 20$ % годовых. Дополнительный взнос на счет составил $R_1 = 2000$ р. и был сделан 15 августа 2010 г. Снятие со счета в размере $R_2 = -4000$ р. зафиксировано 1 октября этого года, а 21 ноября 2010 г. счет был закрыт. Требуется определить сумму процентов и общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Решение

Расчет будем вести по схеме (360/360). Здесь имеются три периода, в течение которых сумма на счете оставалась неизменной: с 20 февраля по 15 августа ($P_1 = 3000,\quad t_1 = 10 + 5 \cdot 30 + 15 = 175$), с 15 августа по 1 октября ($P_2 = P_1 + R_1 = 3000 + 2000 = 5000,\quad t_2 = 15 + 30 + 1 = 46$), с 1 октября по 21 ноября ($P_3 = P_2 + R_2 = 5000 - 4000,\quad t_1 = 29 + 21 = 50$).

Найдем процентные числа

$$C_1 = \frac{P_1 \cdot t_1}{100} = \frac{3000 \cdot 175}{100} = 5250,$$

$$C_2 = \frac{P_2 \cdot t_2}{100} = \frac{5000 \cdot 46}{100} = 2300,$$

$$C_3 = \frac{P_3 \cdot t_3}{100} = \frac{1000 \cdot 50}{100} = 500.$$

Постоянный делитель

$$D = K / i = 360 / 20 = 18.$$

Сумма процентов равна

$$I = (C_1 + C_2 + C_3) / D = \frac{5250 + 2300 + 500}{18} = 447 \text{ р. } 22 \text{ к.}$$

Сумма, выплачиваемая при закрытии счета, равна

$$P_3 + I = 1000 + 447.22 = 1447 \text{ р. } 22 \text{ к.}$$

Покажем связь этой методики с формулой простых процентов, рассмотрев в алгебраическом виде представленный выше пример.

Сумму, выплачиваемую при закрытии счета, найдем следующим образом:

Библиотека БГУИР

$$P_3 + I = P_1 + R_1 + R_2 + \frac{P_1 t_1 + (P_1 + R_1) t_2 + (P_1 + R_1 + R_2) t_3}{100} \cdot \frac{i}{K} =$$

$$= P_1\left(1 + \frac{t_1 + t_2 + t_3}{K} \cdot \frac{i}{100}\right) + R_1\left(1 + \frac{t_2 + t_3}{K} \cdot \frac{i}{100}\right) + R_2\left(1 + \frac{t_3}{K} \cdot \frac{i}{100}\right).$$

Таким образом, из полученного выражения следует, что на каждую сумму, добавляемую или снимаемую со счета, начисляются проценты с момента совершения соответствующей операции до закрытия счета. Эта схема соответствует «правилу торговца», рассмотренному в разд. 6.2.

6.4. Изменение условий контракта

На практике часто возникает необходимость в изменении условий контракта: например, должник может попросить об отсрочке срока погашения долга или, напротив, изъявить желание погасить задолженность досрочно, в ряде случаев может возникнуть потребность объединить (консолидировать) несколько долговых обязательств в одно и т. д. Во всех этих случаях применяется принцип финансовой эквивалентности старых (заменяемых) и новых (заменяющих) обязательств. Для решения задач по изменению условий контракта разрабатывается так называемое *уравнение эквивалентности*, в котором сумма платежей по новому обязательству приводится к той же дате. Для краткосрочных контрактов применяются простые процентные ставки, а для средне- и долгосрочных – сложные ставки.

Раздел 7. Оценивание облигаций

7.1. Оценивание облигаций при детерминированной процентной ставке

Напомним, что облигации – это ценные бумаги, выпускаемые государством или компаниями с целью сбора «живых» денег. Они характеризуются следующими параметрами:

– датой погашения T, когда облигация должна быть предъявлена к погашению;

– номинальной стоимостью K, т.е. той суммой денег, которая выплачивается её владельцу в момент погашения;

– купонными платежами C_i, $i = \overline{1, n}$, которые выплачиваются её владельцу в фиксированные моменты времени. Если купонов нет, то такие облигации называются бескупонными.

Естественно, что облигации продаются со скидкой (дисконтом), так что покупатели облигаций рассчитывают на определённую прибыль в момент её погашения.

Библиотека БГУИР

Облигации не являются абсолютно надёжными ценными бумагами, т. к. всегда есть риск того, что организация, выпустившая облигации, откажется платить. Риск по облигациям с трудом поддаётся оценке. Поэтому ниже рассматриваются только абсолютно надёжные облигации. Их цена представляет собой верхнюю границу цены, которую стоит платить при покупке реальных облигаций.

Стоимость облигаций должна зависеть от процентной ставки $r(t)$, выплачиваемой очень надёжным банком по срочным вкладам на тот же срок, на который выпущена облигация, поскольку всегда есть альтернатива покупке облигации – просто положить деньги в банк и получить прибыль. Надёжный банк играет в таком случае роль безрискового актива.

В общем случае процентная ставка r меняется со временем, т. е. $r = r(t)$. Ниже рассматривается случай, когда зависимость $r(t)$ является детерминированной функцией времени, т. е. эта зависимость известна заранее. В этом случае очевидно, что прибыль от покупки облигации должна быть равна прибыли от вклада в банк. Это и позволяет найти цену абсолютно надёжной облигации.

Обозначим через $V(t)$ цену облигации в момент времени t. Тогда спустя время dt цена облигации изменится на величину

$$\frac{dV}{dt} \cdot dt . \qquad (7.1)$$

В течение этого периода владелец облигации получит по купонам платежи в сумме

$$C(t)dt . \qquad (7.2)$$

(Заметим, что если платежи производятся в дискретные моменты времени $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n$ в размере $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то функция $C(t)$ имеет вид

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \delta(t - t_i), \qquad (7.3)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака).

Таким образом, за время dt владелец облигации увеличит свой капитал на величину

$$\left(\frac{dV}{dt} + C(t) \right) dt .$$

С другой стороны, если бы владелец положил сумму $V(t)$ в банк, то он получил бы прибыль, равную

$$r(t)V(t)dt . \qquad (7.4)$$

Так как все безрисковые портфели должны иметь одинаковую доходность (иначе возникает арбитражная ситуация), то должно выполняться соотношение

$$\left(\frac{dV}{dt} + C(t) \right) dt = r(t)V(t)dt ,$$

Библиотека БГУИР

что позволяет прийти к дифференциальному уравнению для цены облигации $V(t)$:

$$\frac{dV}{dt} + C(t) = r(t)V(t), \tag{7.5}$$

которое должно решаться при граничном условии

$$V(T) = K. \tag{7.6}$$

Решение стандартно, поэтому сразу запишем результат:

$$V(t) = e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} \cdot \left(K + \int_t^T C(t') e^{\int_{t'}^T r(\tau)d\tau} dt' \right). \tag{7.7}$$

В частности, для бескупонных облигаций имеем

$$V(t) = K \cdot e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}. \tag{7.8}$$

Если $r(t)$ не зависит от времени, то

$$V(t) = K \cdot e^{-r(T-t)}. \tag{7.9}$$

Таким образом, формула (7.7) позволяет находить верхнюю границу для цены реальных облигаций.

7.2. Оценивание облигаций при стохастической процентной ставке

Основная часть теории оценивания облигаций посвящена нахождению цены абсолютно надёжных облигаций, когда процентная ставка $r(t)$ является случайным процессом, т.е. меняется со временем непредсказуемо, случайным образом. Здесь мы можем как выиграть, так и проиграть по сравнению с вкладом наших денег в надёжный банк, так что задача оценки цены облигации становится нетривиальной.

Ниже рассматривается ситуация, когда процентная ставка $r(t)$ является диффузионным случайным процессом, описываемым уравнением

$$dr = a(r,t)dt + b(r,t)dw_t, \tag{7.10}$$

где w_t – стандартный винеровский процесс.

В этом случае стоимость V облигации в момент времени t становится функцией ещё и процентной ставки r в этот момент времени, т. е. $V = V(r,\ t)$. Нашей задачей является вывод уравнения для $V(r,\ t)$.

Выведем это уравнение методом самофинансируемого портфеля. Однако в этом случае нет ценной бумаги, которая могла бы быть использована для хеджирования ситуации. Поэтому здесь для хеджирования можно использовать другую облигацию с другим сроком погашения.

Библиотека БГУИР

Итак, пусть есть две бескупонные облигации стоимостями $V_1(r,t)$ и $V_2(r,t)$ с двумя разными сроками погашения T_1 и T_2. Рассмотрим портфель облигаций, состоящий из β_1 облигаций первого типа и β_2 облигаций второго типа. Тогда стоимость $\Pi(t)$ этого портфеля в момент времени t равна

$$\Pi(t) = \beta_1(t) \cdot V_1(r,\ t) + \beta_2(t) \cdot V_2(r,\ t). \tag{7.11}$$

Требуется, чтобы этот портфель был самофинансируемым, т.е. чтобы выполнялось условие

$$d\beta_1(t) \cdot V_1(r,\ t) + d\beta_2(t) \cdot V_2(r,\ t) = 0. \tag{7.12}$$

Тогда

$$d\Pi(t) = \beta_1(t) \cdot dV_1(r,\ t) + \beta_2(t) \cdot dV_2(r,\ t). \tag{7.13}$$

Используя формулу Ито, получим

$$dV_i(r,\ t) = \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + a(r,\ t)\frac{\partial V_i}{\partial r} + \frac{b^2(r,t)}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2} \right] dt + b(r,\ t)\frac{\partial V_i}{\partial r} dw_t, \tag{7.14}$$

так что (опуская аргументы у $\beta_i(t)$ и $V_i(r,\ t)$), получим

$$\begin{aligned} d\Pi = &\left[\beta_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + a\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} \right) + \beta_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + a\frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right] dt + \\ &+ \left[\beta_1 \cdot b\frac{\partial V_1}{\partial r} + \beta_2 \cdot b\frac{\partial V_2}{\partial r} \right] dw_t. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Пусть самофинансируемый портфель будет безрисковым, т.е. не зависит от dw_t. Тогда должно иметь место соотношение

$$\beta_1 \cdot b\frac{\partial V_1}{\partial r} + \beta_2 \cdot b\frac{\partial V_2}{\partial r} = 0,$$

или

$$\beta_1 \cdot b\frac{\partial V_1}{\partial r} = -\beta_2 \cdot b\frac{\partial V_2}{\partial r}. \tag{7.16}$$

Но у всех безрисковых портфелей должна быть одинаковая доходность $r(t)$, т.е. для нашего портфеля должно выполняться условие

$$d\Pi = r(t)\Pi dt = r(t)\left(\beta_1 V_1 + \beta_2 V_2\right) dt, \tag{7.17}$$

т.е.

$$\beta_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + a\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} \right) + \beta_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + a\frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) = \beta_1 \cdot rV_1 + \beta_2 \cdot rV_2.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\beta_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + a\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1 \right) = -\beta_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + a\frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2 \right). \tag{7.18}$$

Разделив это равенство на (7.16), получим

Библиотека БГУИР

$$\frac{\dfrac{\partial V_1}{\partial t}+a\dfrac{\partial V_1}{\partial r}+\dfrac{b^2}{2}\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}-rV_1}{b\dfrac{\partial V_1}{\partial r}}=\frac{\dfrac{\partial V_2}{\partial t}+a\dfrac{\partial V_2}{\partial r}+\dfrac{b^2}{2}\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}-rV_2}{b\dfrac{\partial V_2}{\partial r}}. \tag{7.19}$$

Левая часть этого равенства зависит от $r,\ t$ и T_1, правая – от $r,\ t$ и T_2. Таким образом, левая часть зависит от T_1, а правая – от T_2, причем и T_1 и T_2 могут быть любыми. Единственный способ избежать возникающего противоречия заключается в том, чтобы считать, что это отношение зависит только от r и t, но не зависит ни от T_1, ни от T_2. Обозначая отношение (7.19) через $\lambda(r,t)$ и опуская индекс у $V(r,\ t)$, получим, что стоимость облигации $V(r,\ t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(a(r,\ t)-\lambda(r,\ t)b(r,\ t))\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{b^2(r,\ t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-rV=0 \tag{7.20}$$

с граничным условием $V(r,\ T)=K$.

В этом уравнении, определяющем стоимость облигации $V(r,\ t)$, кроме функций $a(r,\ t)$ и $b(r,\ t)$, определяющих процесс изменения процентной ставки, появилась ещё одна функция $\lambda(r,\ t)$, которая одинакова для всех облигаций. Эта функция характеризует рынок облигаций.

Дадим экономическую интерпретацию этой новой функции. Пусть имеется лишь одна облигация стоимостью $V(r,\ t)$. Тогда по формуле Ито

$$dV(r,\ t)=\left[\frac{\partial V}{\partial t}+a(r,\ t)\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{b^2(r,\ t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right]dt+b(r,\ t)\frac{\partial V}{\partial r}dw_t.$$

Но из уравнения (7.20) следует, что комбинация

$$\frac{\partial V}{\partial t}+a(r,\ t)\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{b^2(r,\ t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=rV(r,\ t)+\lambda(r,\ t)b(r,\ t)\frac{\partial V}{\partial r},$$

так что

$$dV=rVdt+\lambda b\frac{\partial V}{\partial r}dt+b\frac{\partial V}{\partial r}dw_t.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$dV-rVdt=b\frac{\partial V}{\partial r}(\lambda dt+dw_t). \tag{7.21}$$

Величина $rVdt$ была бы доходностью нашего капитала V, если бы мы положили её в банк. Поэтому разность $dV-rVdt$ есть превышение доходности облигации над доходностью банка.

Но доходность банка – безрисковая, а у нашей облигации в правой части есть слагаемое с dw_t, т.е. облигация несёт в себе некоторый риск. Разумеется, никто даром рисковать не станет: слагаемое с λdt даёт нам ту самую плату за риск в виде дополнительной доходности за нашу облигацию. Покупая облигацию и тем самым рискуя, мы можем рассчитывать на дополнительную доход-

Библиотека БГУИР

ность – она пропорциональна $\lambda(r,\ t)$. Поэтому функцию $\lambda(r,\ t)$ называют рыночной ценой риска (market price of risk).

Заметим в заключение, что если бы мы рассматривали облигации с купонными платежами, то уравнение (7.20) имело бы вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(a(r,\ t)-\lambda(r,\ t)b(r,\ t))\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{b^2(r,\ t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-rV+C(t)=0\,. \qquad (7.22)$$

7.3. Решение уравнения для цены облигаций

Чтобы решить уравнение для цены облигации $V(r,t)$, необходимо конкретизировать модель для процесса $r(t)$. Эти модели имеют более сложный характер, чем модели изменения цены ценных бумаг. Ниже рассматривается достаточно общая модель, в которой коэффициент диффузии $b(r,\ t)$ имеет вид

$$b(r,t)=\sqrt{\alpha(t)r-\beta(t)}\,, \qquad (7.23)$$

а коэффициент сноса $a(r,\ t)$ – вид

$$a(r,\ t)=-\gamma(t)r+\delta(t)+\lambda(r,\ t)\sqrt{\alpha(t)r-\beta(t)}\,. \qquad (7.24)$$

Предполагается, что все входящие сюда функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и $\delta(t)$ являются неотрицательными. Отметим также, что здесь $\delta(t)$ – это не дельта-функция Дирака, а некоторая обычная функция времени. Кроме того, в коэффициент сноса $a(r,\ t)$ входит и функция $\lambda(r,\ t)$, определяющая рыночную цену риска.

Эта модель исключает отрицательные значения r, если считать, что $\alpha(t)>0$. Так как перед функцией $\gamma(t)$ стоит знак «минус», то при малых r $a(r,\ t)>0$ и r возрастает со временем, а при больших r $a(r,\ t)<0$ и r убывает со временем. Таким образом, процесс $r(t)$ колеблется около некоторого среднего значения (так называемый mean reverting process).

При этих выражениях для $a(r,\ t)$ и $b(r,\ t)$ уравнение (7.20) для цены бескупонной облигации $V(r,\,t)$ принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(\delta(t)-r\gamma(t))\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{2}(\alpha(t)r-\beta(t))\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-rV=0\,. \qquad (7.25)$$

Будем искать его решение в виде

$$V(r,t)=K\cdot A(t)e^{-rB(t)}\,. \qquad (7.26)$$

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial t}=K\left(\frac{dA}{dt}-Ar\frac{dB}{dt}\right)e^{-rB(t)},$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-K\cdot A\cdot Be^{-rB(t)},$$

Библиотека БГУИР

$$\frac{\partial V}{\partial r}=K\cdot A^2\cdot Be^{-rB(t)}.$$

Подставляя эти выражения в (7.25), сокращая сомножитель $e^{-rB(t)}$ и разделив все на $A(t)$, получим

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}-r\frac{dB}{dt}+\frac{1}{2}(\alpha r-\beta)B^2-(\delta-\gamma r)B-r=0.$$

Чтобы это выражение было тождественно равно нулю, надо, чтобы были равны нулю сомножители при r^0 и r^1. Приходим к системе уравнений

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}=\frac{\beta(t)}{2}B^2+\delta(t)B, \tag{7.27}$$

$$\frac{dB}{dt}=\frac{\alpha(t)}{2}B^2+\gamma(t)B-1. \tag{7.28}$$

Для того чтобы удовлетворить начальному условию $V(r,\ T)=0$, надо потребовать, чтобы

$$A(T)=1,\quad B(T)=0. \tag{7.29}$$

Система дифференциальных уравнений (7.27), (7.28) вместе с начальными условиями (7.29) имеет единственное решение. Конкретизируя вид $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и $\delta(t)$, можно найти $A(t)$ и $B(t)$ и тем самым определить верхнюю границу для цены облигаций в любой момент времени t.

Рассмотрим решение этой системы для того частного случая, когда все α, β, γ и δ есть константы, не зависящие от времени (стационарное состояние рынка). Тогда система (7.27), (7.28) принимает вид

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}=\frac{\beta}{2}B^2+\delta B,\qquad \frac{dB}{dt}=\frac{\alpha}{2}B^2+\gamma B-1. \tag{7.30}$$

Начинать решение этой системы надо со второго уравнения, содержащего лишь B. Запишем его в виде

$$dt=\frac{2dB}{\alpha B^2+2\gamma B-2}. \tag{7.31}$$

Найдём корни уравнения $\alpha B^2+2\gamma B-2$ = 0. Они имеют вид

$$B_{1,2}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2+2\alpha}}{\alpha}=\frac{-\gamma\pm\psi_1}{\alpha},\qquad \psi_1=\sqrt{\gamma^2+2\alpha}, \tag{7.32}$$

так что правую часть (7.31) можно представить в виде

$$dt=\frac{2dB}{\alpha\left(B+\dfrac{\gamma+\psi_1}{\alpha}\right)\left(B+\dfrac{\gamma-\psi_1}{\alpha}\right)}=\frac{1}{\psi_1}\left[\frac{dB}{B+\dfrac{\gamma-\psi_1}{\alpha}}-\frac{dB}{B+\dfrac{\gamma+\psi_1}{\alpha}}\right].$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$t = C + \frac{1}{\psi_1}\left[\int \frac{dB}{B + \frac{\gamma - \psi_1}{\alpha}} - \int \frac{dB}{B + \frac{\gamma + \psi_1}{\alpha}}\right] = C + \frac{1}{\psi_1}\ln\frac{B + \frac{\gamma - \psi_1}{\alpha}}{B + \frac{\gamma + \psi_1}{\alpha}}.$$

Константа C находится из того условия, что при $t = T \quad B = 0$:

$$T = C + \frac{1}{\psi_1}\ln\frac{\gamma - \psi_1}{\gamma + \psi_1},$$

так что

$$\psi_1(T - t) = \ln\frac{\gamma - \psi_1}{\gamma + \psi_1} - \ln\frac{B + \frac{\gamma - \psi_1}{\alpha}}{B + \frac{\gamma + \psi_1}{\alpha}}.$$

Выражая отсюда B, получим

$$B(t) = \frac{2\left(e^{\psi_1(T-t)} - 1\right)}{(\gamma + \psi_1)\left(e^{\psi_1(T-t)} - 1\right) + 2\psi_1}. \tag{7.33}$$

Теперь, зная явный вид $B(t)$, можно найти и $A(t)$. С учетом граничного условия $A(T) = 1$ получаем

$$\ln A(t) = \int_t^T \left(\frac{\beta^2}{2}B^2(\tau) + \delta B(\tau)\right)d\tau. \tag{7.34}$$

Вычисляя соответствующие интегралы (они имеют достаточно громоздкий вид), можно получить

$$\frac{2}{\alpha}\ln A(t) = a\psi_2 \ln\left(a - B(t)\right) + \left(\psi_2 - \frac{\beta}{2}\right) b \ln\frac{B(t) + b}{b} + \frac{\beta}{2} bB(t) - a\psi_2 \ln a, \tag{7.35}$$

где $b = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2\alpha} + \gamma}{\alpha}, \quad a = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2\alpha} - \gamma}{\alpha}, \quad \psi_2 = \frac{\delta + a\beta/2}{a + b}.$ (7.36)

Для конкретных расчетов цены облигации необходимо знать значения параметров α, β, γ и δ. Их определение на основе экспериментальных данных о виде процесса $r(t)$ – отдельная проблема, выходящая за рамки данного пособия.

Раздел 8. Элементы технического анализа

Технический анализ (ТА) – метод прогнозирования цены финансового актива, основанный на математических, а не на экономических выкладках. Этот метод использует графики движений рынка за предыдущие периоды времени. Под термином ***движение рынка*** аналитики понимают три основных вида информации: цена, объем и открытый интерес.

Ценой может быть как действительная цена товара на бирже, так и значения валютных и других индексов.

Библиотека БГУИР

Объем торговли – общее количество заключенных контрактов за определенный промежуток времени (за торговый день).

Открытый интерес – количество позиций, не закрытых на конец торгового дня.

Главным индикатором, конечно, является цена.

В ТА действует набор аксиом (А).

А1. Движения рынка учитывают все факторы (любой из них – экономики, политики, психологии – влияющий на цену, заранее учтен и отражен в графике цен).

А2. Цены двигаются направленно (тренд – направленное движение цен).

Различают следующие виды тренда (рис. 8.1):

- **бычий** (Bullish) – движение цены вверх;
- **медвежий** (Bearish) – движение цены вниз;
- **боковой** – цена не имеет четко выраженного направления движения.

Другими словами, тренды бывают:

- *восходящие* – характеризуются общим ростом цен, когда каждый последующий максимум выше предыдущего;
- *нисходящие* – характеризуются общим падением цен, когда каждый последующий минимум ниже предыдущего;
- *боковые* – тренд не имеет четко выраженного направления движения.

а б в

Рис. 8.1. Виды трендов

а – бычий тренд; б – медвежий тренд; в – боковой тренд

А3. История повторяется (понимание будущего лежит в изучении прошлого).

На рис. 8.2–8.3 представлены графики движения некоторых финансовых инструментов (индекс Доу – Джонса, цены акций на Лондонской бирже.

Библиотека БГУИР

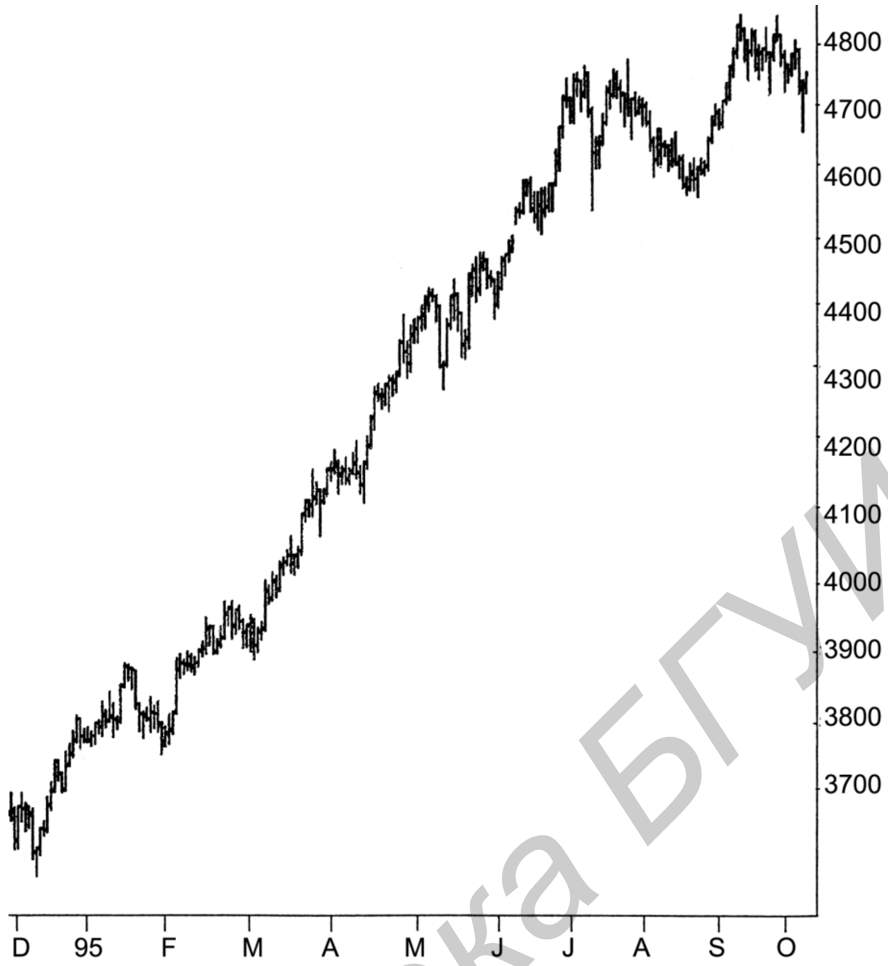


Рис. 8.2. Индекс Доу – Джонса

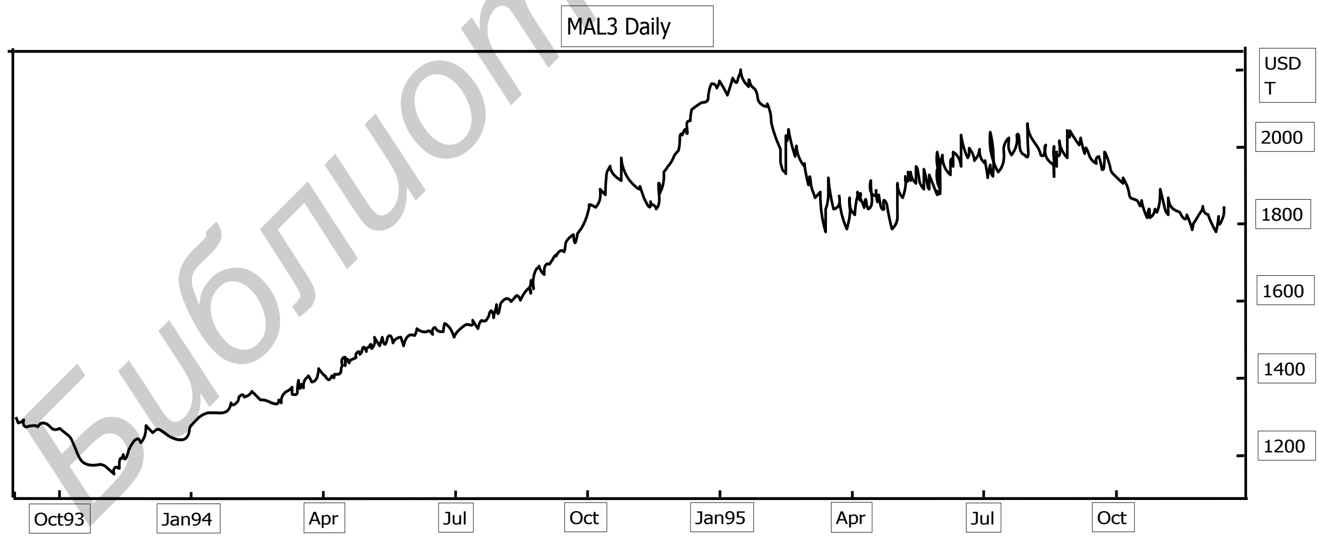


Рис. 8.3. Цены акций на Лондонской бирже в 1997 г.

На рис. 8.4 иллюстрируется ***тезис Доу о трех фазах развития рынка*** и ***о трех видах тренда*** на графиках финансовых активов.

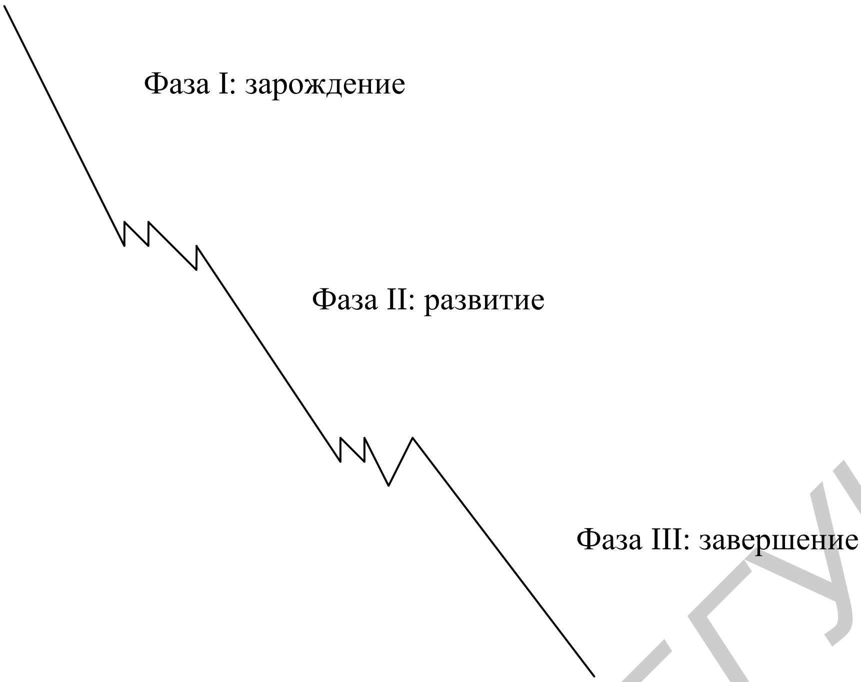


Рис. 8.4. Три фазы развития медвежьего тренда

8.1. Классификация методов технического анализа

Все многообразие методов прогнозирования ТА можно условно разделить на следующие классы

1. Графические методы.
2. Методы, использующие фильтры или механическую аппроксимацию.
3. Теория циклов.

Рассмотрим более подробно первые два класса методов.

Графические методы

Под г*рафическими* понимаются методы, в которых для прогнозирования используются наглядные изображения движений рынка. Колебания цены записываются различными типами графиков (чартов).

В основе технического анализа лежат следующие предположения:

1) цены двигаются в определенном направлении, образуя тренды;

2) рынок обладает памятью, и цены периодически меняют свое направление движения на противоположное;

3) для вычерчивания движения цен и выявления трендов используются специальные графики, а образующиеся на графиках фигуры цен дают определенные сигналы. Основными графиками являются следующие:

– *линейные графики* — представляют собой линии, соединяющие точки, отражающие значения цены (рис. 8.2);

– *гистограммы* – это графики, представляющие собой ряды столбиков, которые строятся на осях координат – цена и время (рис. 8.5). Для каждого рассматриваемого периода времени наносятся высшая и низшая цены, которые соединяются

Библиотека БГУИР

вертикальной линией. Маленькая горизонтальная черта справа от столбика показывает цену закрытия. Черта слева от столбика означает цену открытия дня;

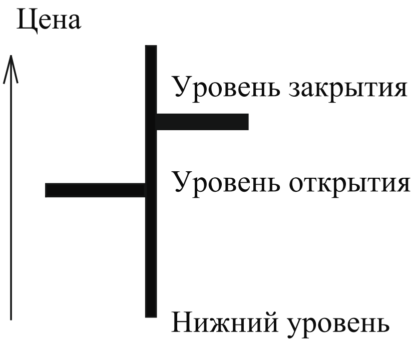


Рис. 8.5. Схема гистограммы

• *японские свечи* – состоят из тел и теней (рис. 8.6). Тело свечи представляет собой прямоугольник, по высоте находящийся между ценами открытия и закрытия. Тело свечи изображают белым, если уровень цены закрытия выше **цены** открытия или черным, если цена закрытия ниже цены открытия. *Тень свечи* – это вертикальная линия, верхняя точка которой соответствует максимальной, а нижняя – минимальной цене за рассматриваемый период. В частных случаях могут отсутствовать либо тело, либо тени свечи.

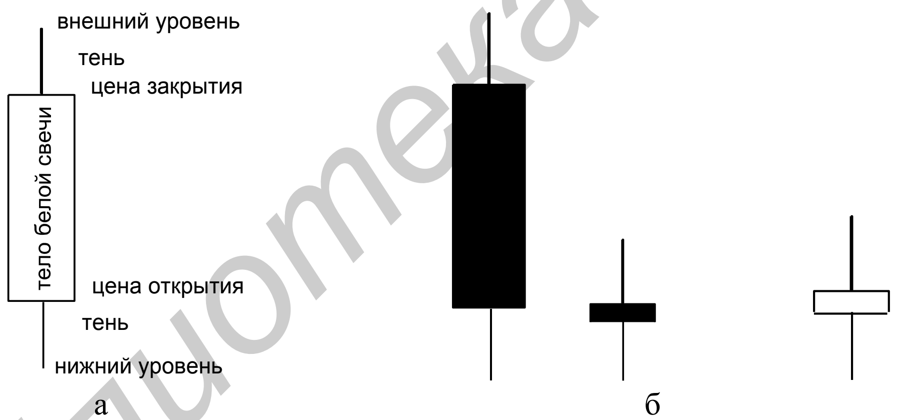


Рис. 8.6. Схема японской свечи:
а – цена повысилась; б – цена понизилась

Белый цвет (пустая свеча) – торговый день закрылся на более высоком уровне, чем открывался (цена повысилась). Черный цвет – цена понизилась.

Прогнозирование на графиках японских свеч

Прогнозирование на графиках японских свеч чаще всего ведется на основании **комбинации трех свеч**, где две из них составляют собственно фигуру, а третья подтверждает сигнал о развороте. **Сигнал о развороте тренда** – наиболее сильная часть прогнозирования с помощью японских свечей. Здесь особую роль играют доджи. Сами по себе они показывают признаки нерешительности в поведении участников рынка, что наблюдается обычно при приблизительно равном количестве быков и медведей.

Библиотека БГУИР

Скачок (окно) указывает на неожиданный, резкий отрыв свечи от предшествующей. При этом ее тело полностью расположено выше (ниже) тела предыдущей свечи.

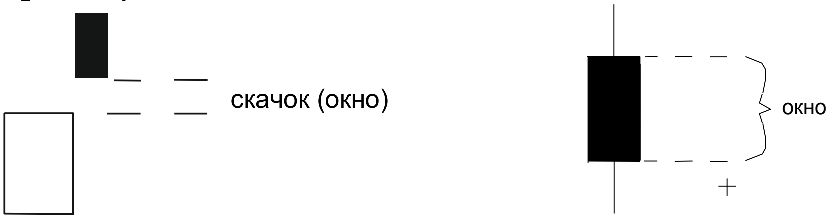


Рис. 8.7. Виды поведения свечей

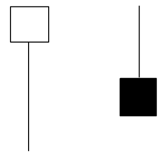


Рис.8.8. Свечи- зонтики

Свечи-зонтики (рис. 8.8) обычно сигнализируют о развороте и встречаются чаще всего в момент изменения тренда.

Наиболее часто встречаются **разворотные индикаторы** и **индикаторы продолжения**. Они получили оригинальные названия (рис. 8.9).

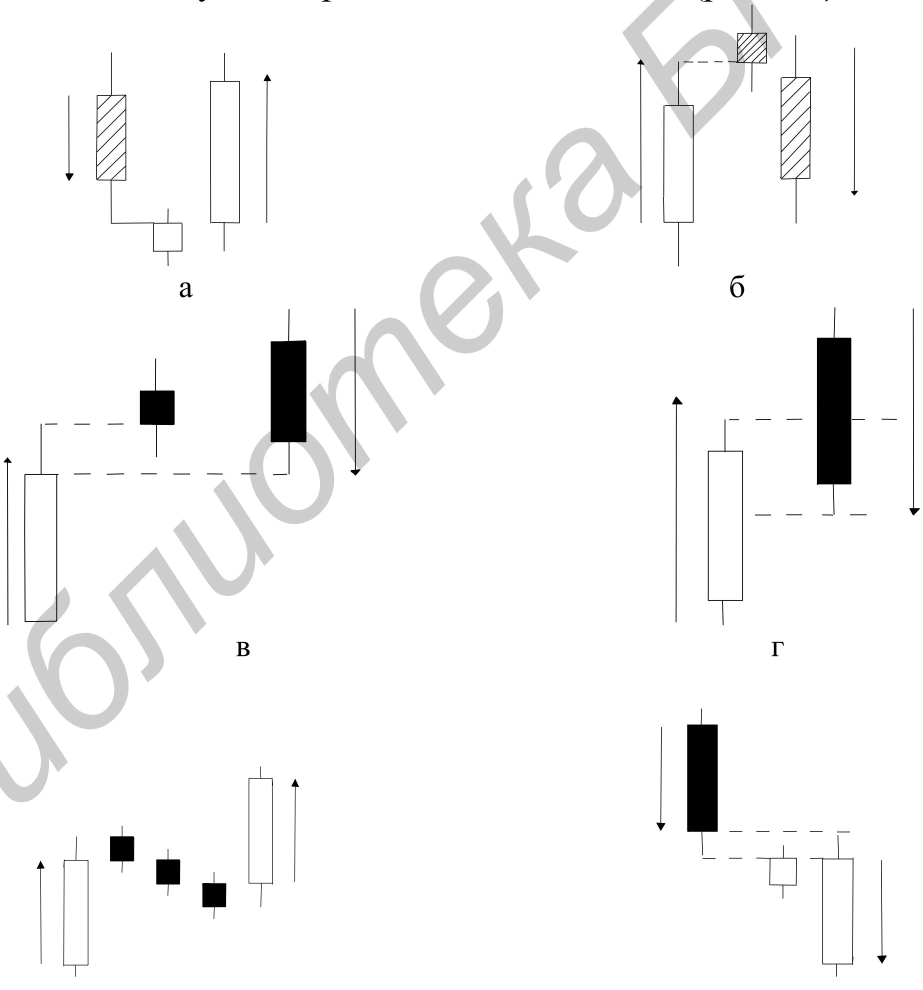


Рис. 8.9. Примеры свечей:
а – утренняя звезда; б – вечерняя звезда; в – две взлетевшие вороны;
г – тёмные облака; д – три падающие свечи; е – белые линии из стороны в сторону

Библиотека БГУИР

Заметим, что для технического анализа с использованием свечей необходим фактический навык, вырабатываемый только со временем. Комбинируя графики свечи с методами фильтрации, можно получить точные и своевременные сигналы об изменении тренда и вовремя вступить в сделку купли или продажи.

8.2. Классические фигуры ТА

Линия тренда проводится через две опорные точки, а для подтверждения правильности этой линии необходимо иметь **проверочную точку** (рис. 8.10).

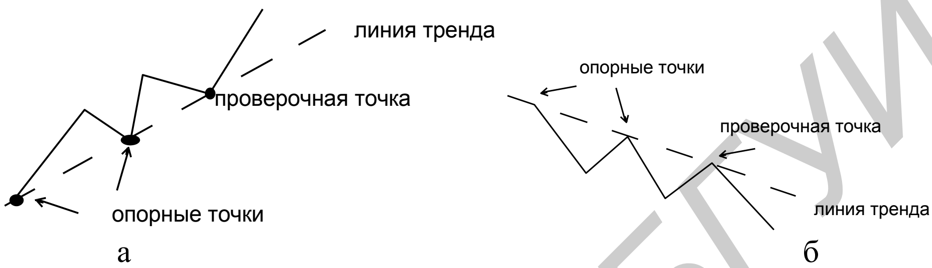


Рис. 8.10. Опорные точки линии тренда:
а – бычьего; б – медвежьего

Возникает вопрос: насколько тот или иной спад или подъем цен серьезен? Является ли он временным, или тренд уже изменился? Ответить на эти вопросы помогают **типовые фигуры ценового графика**.

Одним из критериев силы тренда является его реакция на **уровни сопротивления и поддержки.**

Линия, соединяющая максимумы цен, называется *линией сопротивления*. Линия, соединяющая минимумы, называется *линией поддержки* (рис. 8.11–8.12).

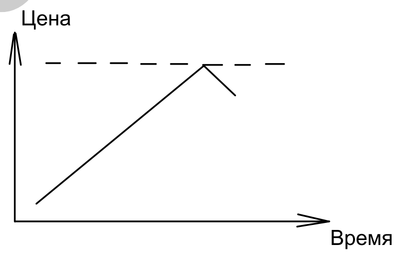


Рис. 8.11. Линия сопротивления для бычьего тренда

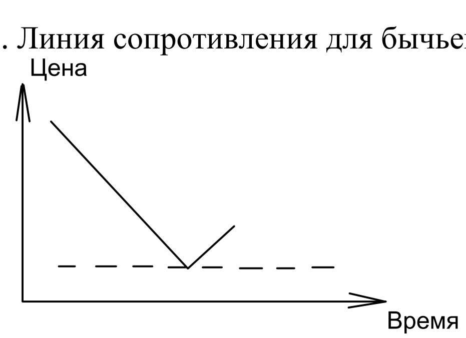


Рис. 8.12. Линия поддержки для медвежьего тренда

Точно такие же линии поддержки и сопротивления можно изобразить и на тех графиках, где существует боковой тренд.

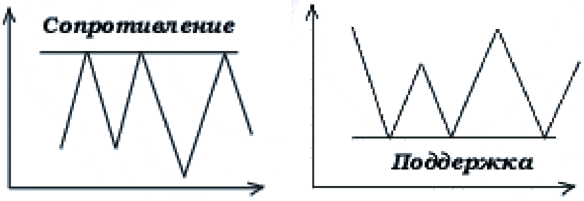


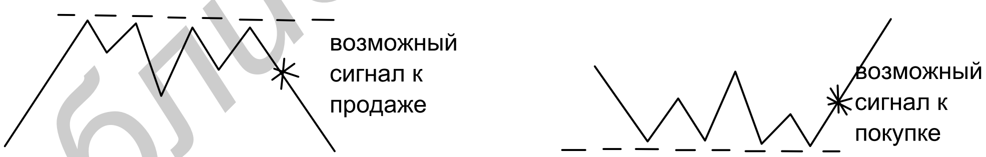
Рис. 8.13. Линии поддержки и сопротивления при боковом тренде

Линия сопротивления при боковом тренде соответствует ситуации, когда продавцам противостоит упорное нежелание покупателей приобретать акции по более дорогим ценам. Часто это свидетельствует о том, что рост котировок достиг своего «потолка». Линия поддержки возникает в обратной ситуации – когда котировки достигли своего «дна», т.е. продавцы уже не желают продавать акции по более дешевым ценам, чем сейчас. Значит, котировки, весьма вероятно, скоро поползут вверх.

На рис. 8.14–8.15 на примерах сильного и слабого трендов представлены сигналы к покупке/продаже.

а б

Рис. 8.14. Сильный тренд и сигналы к покупке/продаже:
а – бычий тренд; б – медвежий тренд



а б

Рис. 8.15. Слабый тренд и сигналы к покупке/продаже:
а – бычий тренд; б – медвежий тренд

Нередко возникают ситуации, когда график *пробивает* линию поддержки или линию сопротивления. Это еще не значит, что тренд изменился, однако на графике все-таки есть изменения (рис. 8.16).

Библиотека БГУИР

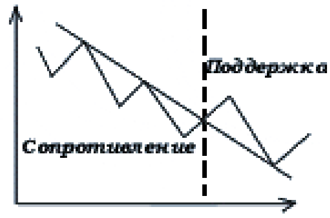
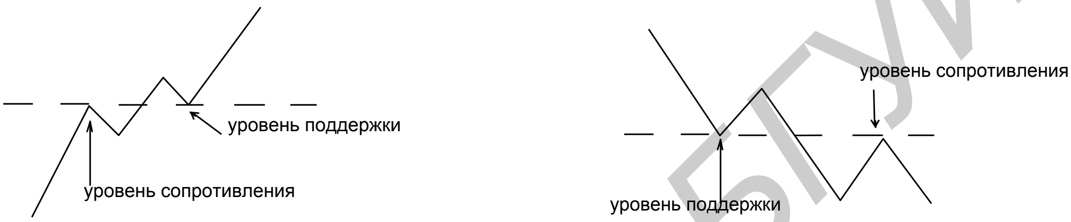


Рис. 8.16. Пробитие графиком линии сопротивления

Здесь график «пробил» линию сопротивления в месте, которое обозначено пунктирной линией. После этого линия сопротивления стала линией поддержки (рис. 8.16, а), а линия поддержки становится линией сопротивления (рис. 8.16, б). Однако сам тренд при этом сохранился.



а б

Рис. 8.17. Изменение уровней:
а – превращение уровня сопротивления в уровень поддержки;
б – превращение уровня поддержки в уровень сопротивления

Ниже приведены примеры линий сопротивления и поддержки на графиках цен.

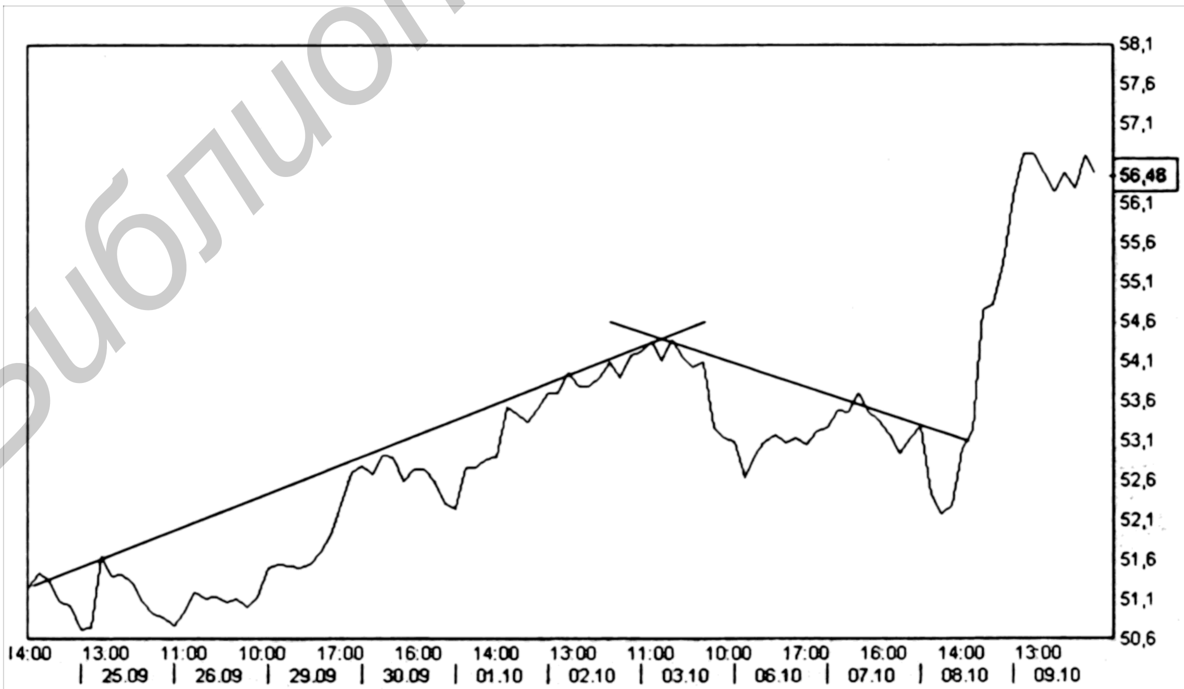


Рис. 8.18. Области сопротивления

Библиотека БГУИР

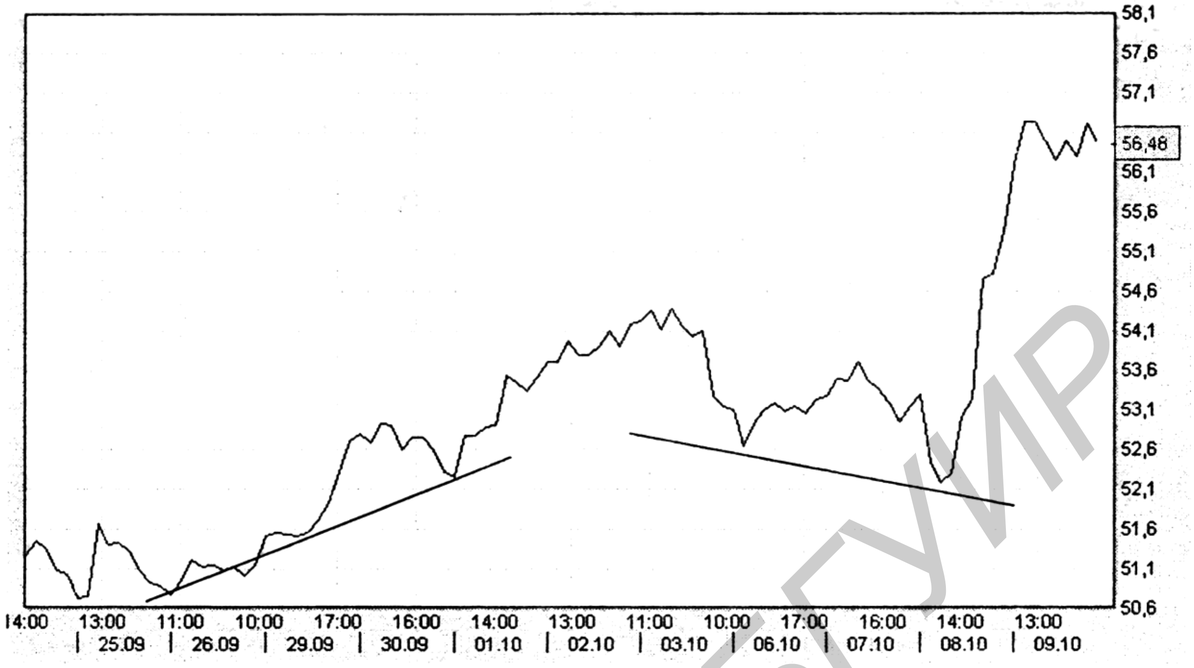
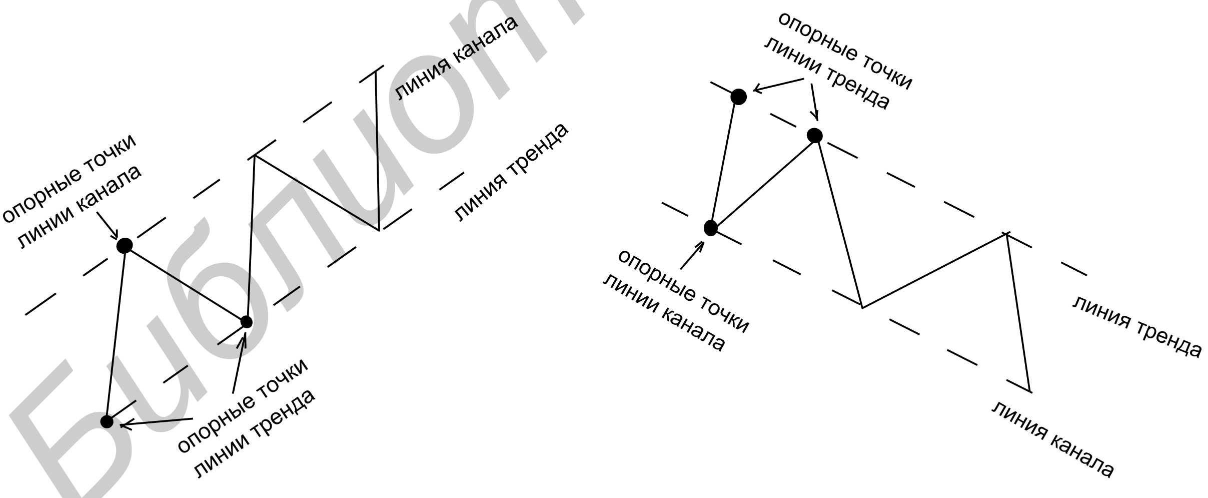


Рис. 8.19. Области поддержки

В случае когда цены находятся в коридоре между линиями поддержки и сопротивления, то говорят о ***движении в канале***.

Линия канала проводится параллельно линии тренда, располагается выше графика цены при бычьем тренде и ниже – при медвежьем тренде (рис. 8.20).



а б

Рис. 8.20. Движение котировок в границах канала:
а – бычий тренд; б – медвежий тренд

Играть на повышение или понижение акций, следуя существующему тренду, дело нетрудное. Гораздо сложнее предугадать момент изменения тренда. Возникает вопрос: что же случилось после изменения тренда: коррекция

Библиотека БГУИР

(временное изменение тренда) или полный разворот (глобальное). Если узнать об этом вовремя, можно сэкономить и время и ресурсы.

Наряду с линиями тренда и линиями канала в классическом ТА используется набор фигур, форму которых принимает ценовой график в том или ином случае. Фигуры корректирующего (временного) характера называют ***фигурами продолжения.*** Фигуры продолжения говорят о том, что предшествующий медвежий (или бычий тренд) все еще в силе, а наблюдаемые явления считаются коррекцией.

Фигуры, сигнализирующие о глобальном изменении тренда, называют ***разворотными.***

Для того чтобы предугадать момент изменения тренда, необходимо представлять себе предпосылки такого разворота и улавливать малейшие сигналы изменений на рынке. Например, на графике одной из предпосылок разворота тренда является пересечение двух разных линий тренда. Такое пересечение в теории Доу называется **треугольником** (рис. 8.21). Треугольники различаются в зависимости от расположения ограничивающих линий – верхней (линия сопротивления), нижней (линия поддержки). Треугольники – классический пример бокового тренда.

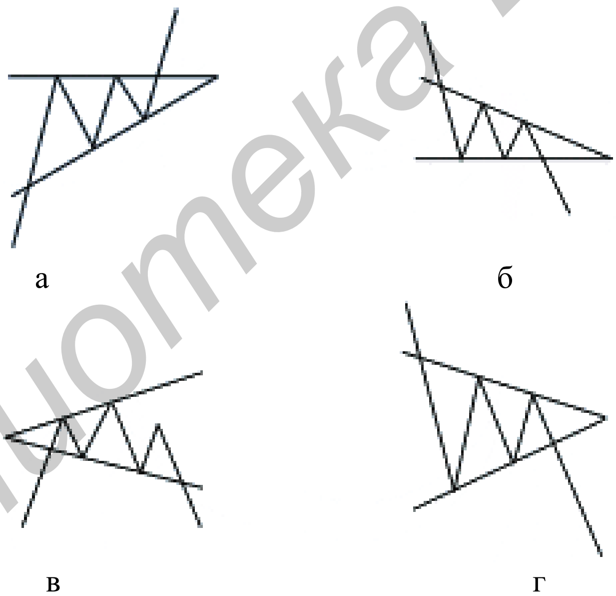


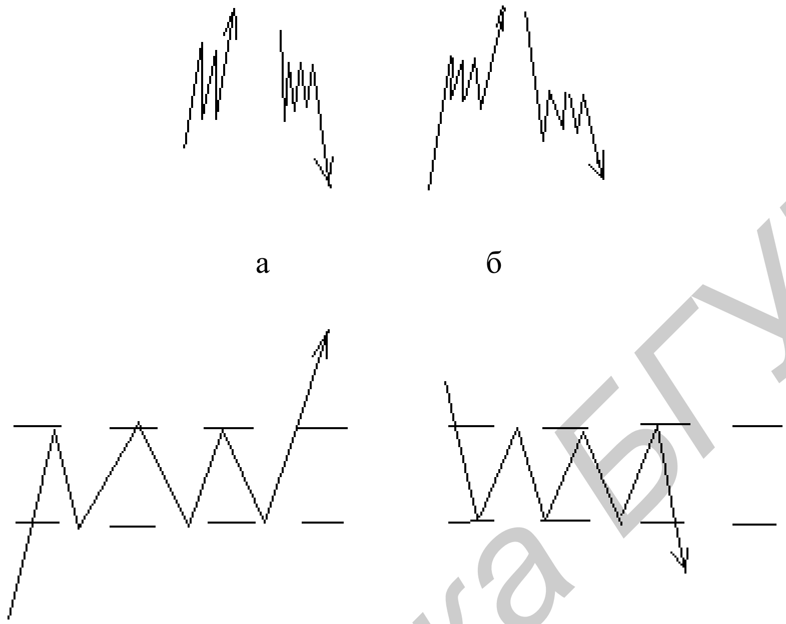
Рис. 8.21. Пересечения двух разных линий тренда (треугольники):
а – восходящий треугольник; б – нисходящий треугольник;
в – расходящийся треугольник; г – симметричный треугольник

Симметричный, восходящий и нисходящий треугольники возникают в ситуациях, когда зигзаги (колебания) курса акции начинают постепенно затухать, двигаясь в рамках двух сходящихся линий. Как правило, еще до достижений точки схождения двух линий график «пробивает» либо верхнюю, либо нижнюю линию. В этот момент график решает проблему конфликта между двумя трендами. Если он выбирает нижний восходящий тренд, значит, он про-

Библиотека БГУИР

бивает верхнюю линию. Если он выбирает верхний снижающийся тренд, значит, он пробивает нижнюю линию.

Треугольники являются коррекционными фигурами, которые после консолидации продолжают основное движение тренда. Другими распространенными фигурами являются частные виды треугольников – «флаги», «вымпелы», «клины» (рис. 8.22).



а б

в

Рис. 8.22. Примеры «треугольников»:
а – клины; б – вымпел; в – флаги

Флаги и вымпелы, в отличие от треугольников, формируются более быстро на фоне уменьшения объема торговли. При этом, например, на восходящем тренде цены вначале снижаются, формируя фигуры, похожие на флаги, вымпелы, а затем происходит прорыв в направлении существовавшего тренда.

Прежде чем искать разворотную фигуру, следует убедиться в наличии четко выраженного предшествующего тренда (бычьего или медвежьего). Одна из наиболее важных и известных разворотных фигур для бычьего тренда – «голова–плечи» (8.23, а), для медвежьего тренда – «перевёрнутые голова и плечи» (8.23, б).

Библиотека БГУИР

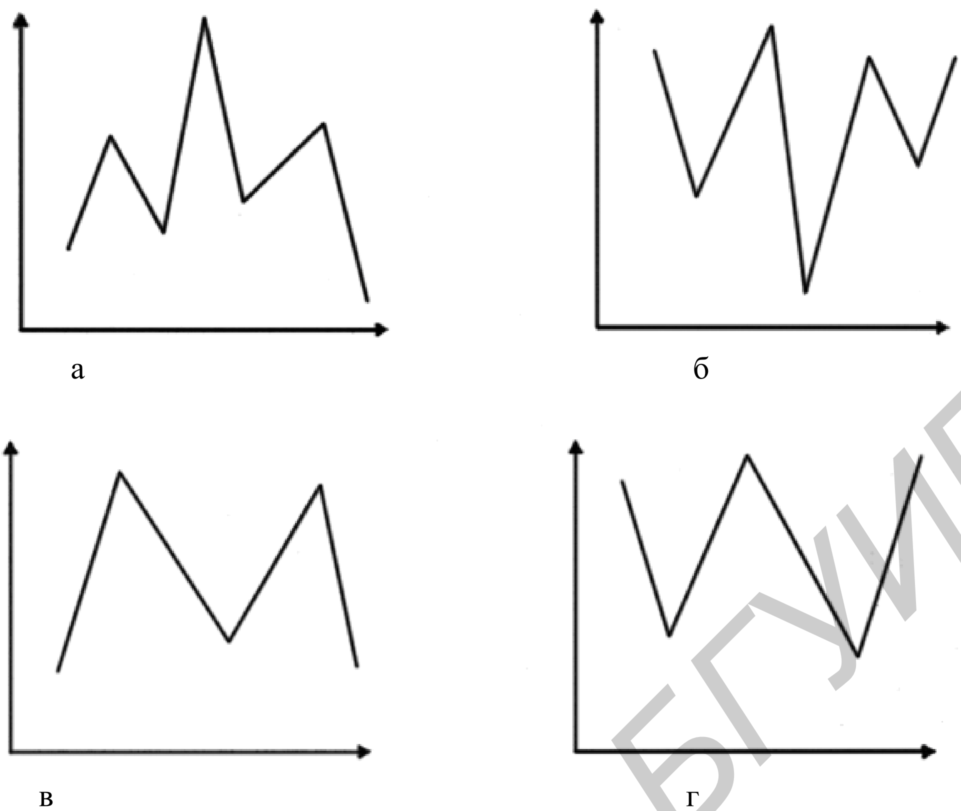


Рис. 8.23. Примеры разворотных фигур:
а – фигура «голова–плечи»; б – фигура «перевёрнутая голова–плечи»;
в – фигура «двойная вершина»; г – фигура «двойная низина»

Существуют и другие разворотные фигуры (рис. 8.24).

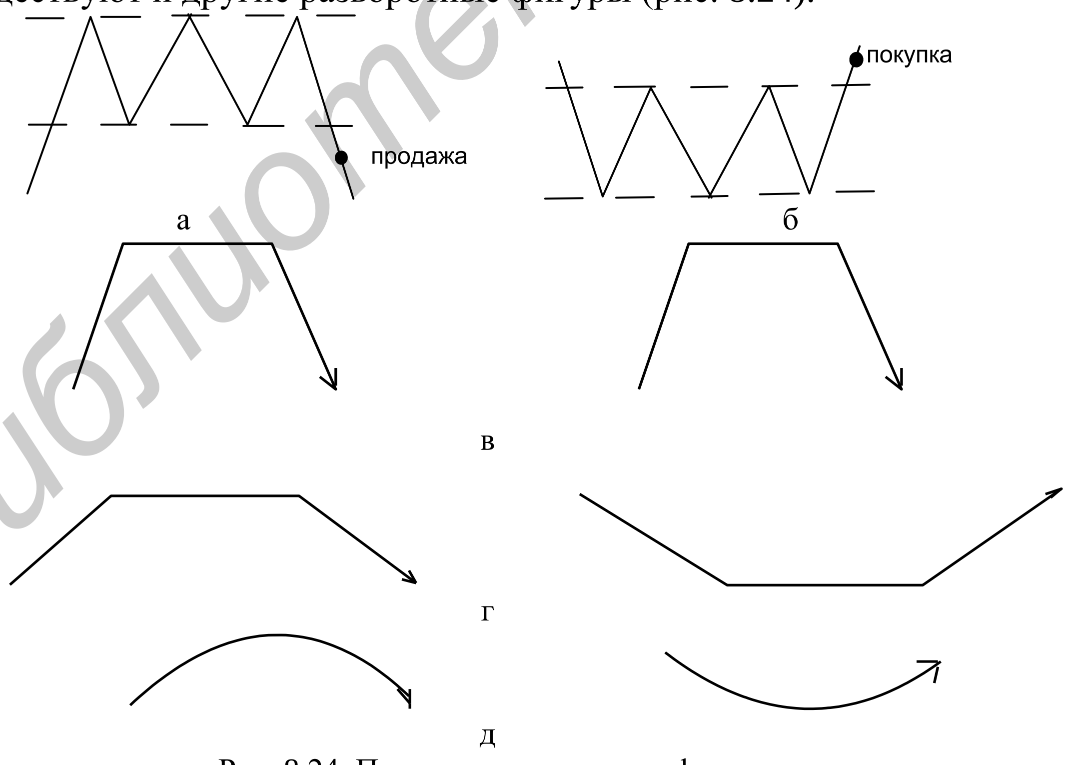


Рис. 8.24. Примеры разворотных фигур
а – «тройной верх»; б – «тройное дно»; в – «кастрюли»; г – «тарелки»; д – «соусники»

Библиотека БГУИР

Ниже будут рассмотрены основные индикаторы технического анализа и другие технические параметры рынка.

8.3. Основные индикаторы технического анализа и методы фильтрации

На настоящий момент разработаны десятки методов технического анализа поведения рынка акций. Компьютеры выполняют такой анализ за считанные секунды. Данные анализа, публикуемые биржами и финансовыми газетами, сейчас доступны практически всем инвесторам. Насколько надежны эти данные? Ответить на этот вопрос нам помогут методы фильтрации.

Методы фильтрации

В мировой практике существует большое число различных методов фильтрации, поэтому ограничимся рассмотрением основных индикаторов, построение которых не требует специального программного обеспечения и доступно каждому пользователю сети Интернет.

Различают две основные группы методов фильтрации: скользящие средние и осцилляторы.

Скользящие средние (Moving Averages) служат для определения времени завершения и начала новой тенденции. В то же время для данного метода характерно следование за динамикой рынка, а не ее опережение. Скользящее среднее значение рассчитывается путем усреднения значения цен закрытия за определенный постоянный период времени.

Различают следующие скользящие средние методы:

1) ***простые*** скользящие средние, при построении которых всем ценам за рассматриваемый период придается одинаковое значение;

2) ***экспоненциальные*** скользящие средние – скользящая средняя является взвешенной, т. е. последней цене придается большее значение;

3) ***взвешенные*** скользящие средние, когда каждой из цен рассматриваемого промежутка присваивается определенный вес.

Если текущие цены находятся ниже средней, то это сигнал к покупке, т.к. акции недооценены, и наоборот.

Для применения МА нужно определить период времени, по которому проводится усреднение. Если нужно изучить глобальные, длительные изменения рынка, используем усреднение по 200 дням. Для изучения месячных изменений используем 50-дневное усреднение. Трейдеры, играющие на недельных и дневных колебаниях цен, используют более короткие промежутки времени. Если проводить усреднение за N дней, то скользящие средние любого рыночного индикатора (или отдельных акций) для текущего i-го дня $MA_N(i)$ вычисляются по формуле (x_i – цена акций (величина индекса) в i-й день):

$$MA_N(i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Для наглядности на график зависимости величины индекса (цены) от времени переносится кривая величин динамического среднего. При растущем

Библиотека БГУИР

рынке величина скользящих средних меньше, чем текущие значения индексов, а при падающем рынке скользящиее средние превосходят текущие значения индексов. Если индексы колеблются около скользящих средних, то никаких определенных выводов о тенеденции рынка по этим характеристикам сделать нельзя.

Чтобы определить степень правдоподобности сигналов, поданных скользящими средними (*MA*), трейдеры и аналитики применяют одновременно комбинации двух или более линий. Можно порекомендовать комбинации из порядков 5-21 или 5-13-21. В самом общем случае линии должны представлять кратко-, средне- и долгосрочный периоды. При этом действуют следующие правила:

1) при безусловном бычьем рынке наиболее чувствительная (краткосрочная) линия МА расположена выше, а наиболее грубая (долгосрочная) – ниже всех остальных. При медвежьем рынке наблюдается обратная закономерность;

2) по пересечению линий можно судить об изменении тренда. Вначале пересекаются линии более чувствительные, затем в порядке возрастания – более и более грубые. По тому, линии каких порядков пересеклись и как поменялось их взаимное расположение, можно судить о том, какой именно тренд изменил свое направление.

Рассмотрим методы вычисления взвешенных и экспоненциальных скользящих средних:

– **взвешенные скользящие средние,** в которых веса w_i... обратно пропорциональны количеству дней, отделяющих рассматриваемый день от текущего:

$$WMA = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \ \sum_i w_i = 1, \ w_i \ge 0;$$

– **экспоненциональные скользящие средние**

$$EMA_N(i) = EMA_{N-1}(i-1) + k(x_i - EMA_{N-1}(i-1)),$$

где i – текущий день, (i–1) - предыдущий день,

$$k = \frac{2}{N+1}.$$

На рис. 8.25 приведен график РТС за период с января 1996 г. по январь 1997 г. На этом же графике показаны 70- и 200-дневные экспоненциальные динамические средние этого индекса.

Библиотека БГУИР

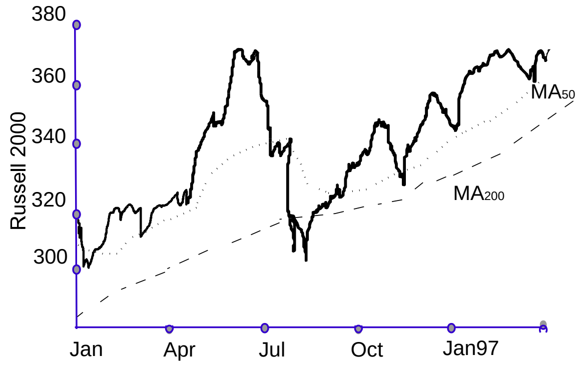


Рис. 8.25. Динамика РТС

Одним из способов применения динамических средних (МА) является построение фильтров **конверта и полосы.**

Конверт процентный: на определенном расстоянии выше и ниже МА строят прараллельные ей линии. Для подтверждения бычьего или медвежьего рынка требуется, чтобы график цены находился соответственно выше или ниже всех трех созданных нами линий. Если же он колеблется между ними (в так называемой буферной зоне), никаких торговых решений принимать не следует.

Полоса создается построением одной и той же динамической средней на основании высших и низших значений данного ценового графика вместо цен закрытия. Верхняя линия служит линией тренда при медвежьем рынке, а нижняя линия – при бычьем.

Наконец, весьма популярны графики отклонений величин коротких динамических средних от величин более длинных средних – так называемые **осцилляторы,** наглядно представляющие колебания рыночных нидексов. Максимум и минимум на этих графиках может быть использован для предсказания изменений направления движения рынка. Их использование наиболее полезно в анализе нетрендовых рынков (боковых рынков). Особенность осцилляторов в том, что они предвосхищают будущие события, сигнализирующие о повороте заранее. Осцилляторы полезны и при развитых трендовых рынках – для подачи сигалов о развороте.

К осцилляторам, основанных на цене, относятся: **моменты, норма изменения, индекс относительной силы** и др. Возможно использование осциллятора, рассчитанного по изменению объема торговли – накопление объема.

Осцилляторы, в отличие от скользящих средних, которые лишь следуют за тенденцией, основаны на математико-статистических исследованиях колебаний основных характеристик рынка, предвосхищают будущие события, сигнализируя об изменениях заранее.

Осцилляторные методы основываются на понятиях перекупленного и перепроданного рынка. Если цены находятся около своей верхней границы, то рынок считается перекупленным. Напротив, если цены настолько низкие, что их дальнейшее падение маловероятно, то такой рынок считается перепроданным.

1. ***Метод конвергенции/дивергенции скользящей средней*** (***MACD***). Метод MACD построен на основе двух линий. Первая линия получается путем вычитания из краткосрочной скользящей линии – более долгосрочной. Вторая линия, именуемая сигнальной, получается путем сглаживания первой (рис. 8.26).

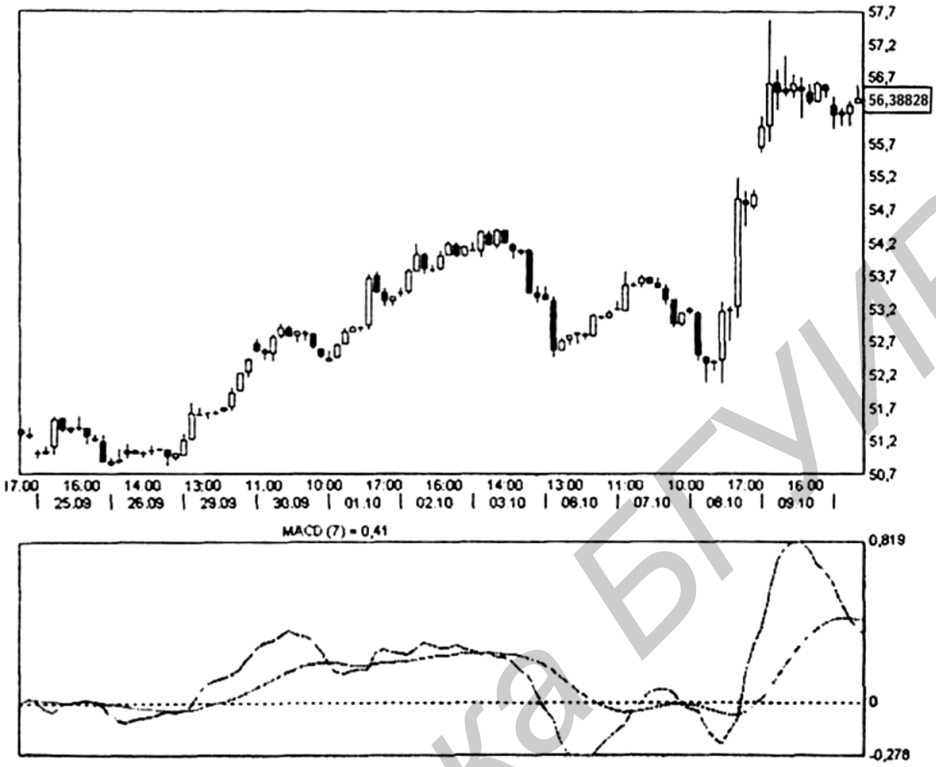


Рис. 8.26. Линейный индикатор MACD

Рыночную ситуацию оценивают с помощью данного метода следующим образом. Когда быстрая линия пересекает медленную снизу вверх, то это сигнал к покупке. И наоборот, если быстрая линия пересекает медленную сверху вниз, то это сигнал к продаже. Следует отметить, что если пересечение линии MACD происходит вдали от ноля, то это означает разворот рынка по отношению к существовавшему тренду. Если же пересечение происходит вблизи нулевой отметки, то, как правило, это не предвещает резких изменений цен.

2. ***Индекс относительной силы*** (*Relative Strength Index – RSI*) был разработан Дж. Уплдером в 1978 г. как измеритель относительной силы рынка, отслеживающий цены закрытия. Основное назначение индекса – определение зон перекупленности и перепродажи. Диапазон изменения RSI колеблется между 0 и 100 (рис. 8.27).

Библиотека БГУИР

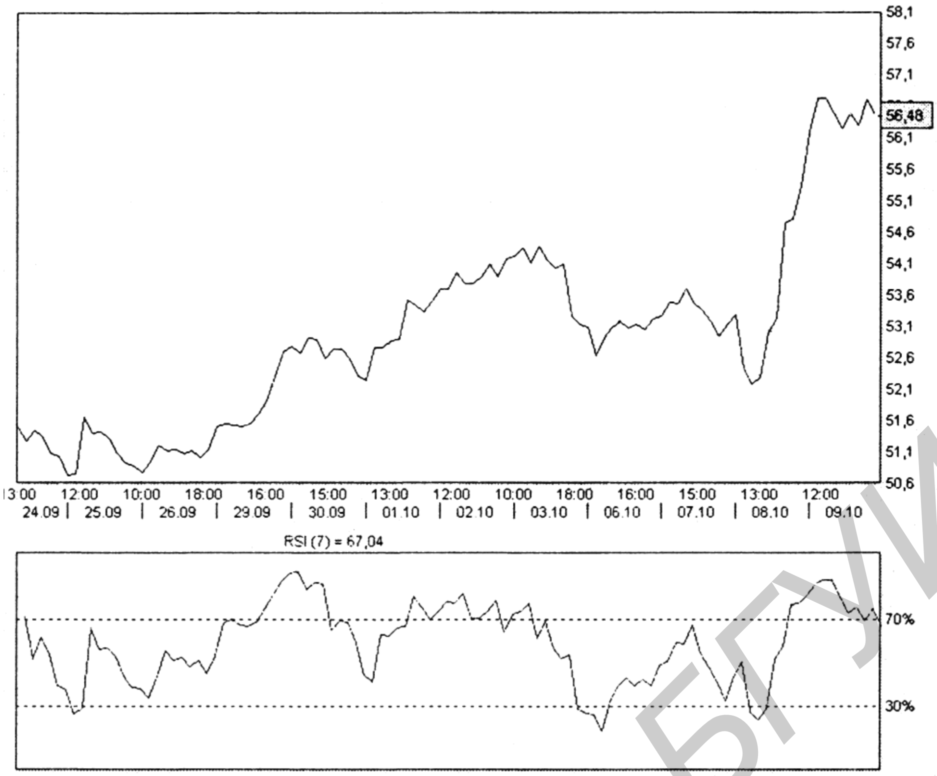


Рис. 8.27. Индекс относительной силы

В качестве критерия перекупленности и перепродажи служат уровни 30 и 70, в то же время на ярко выраженных возрастающих и убывающих трендах используются уровни 20 и 80. Считается, что пересечение при падении линией RSI отметки 70 – это сигнал к продаже акций, тогда как пересечение снизу вверх отметки 30 – сигнал к покупке.

3. ***Момент*** **(*Momentum*).** Индикатор «момент» измеряет разницу между значениями цены через определенный интервал времени. Получившиеся положительные и отрицательные абсолютные значения изображаются на графике (рис. 8.28).

Библиотека БГУИР

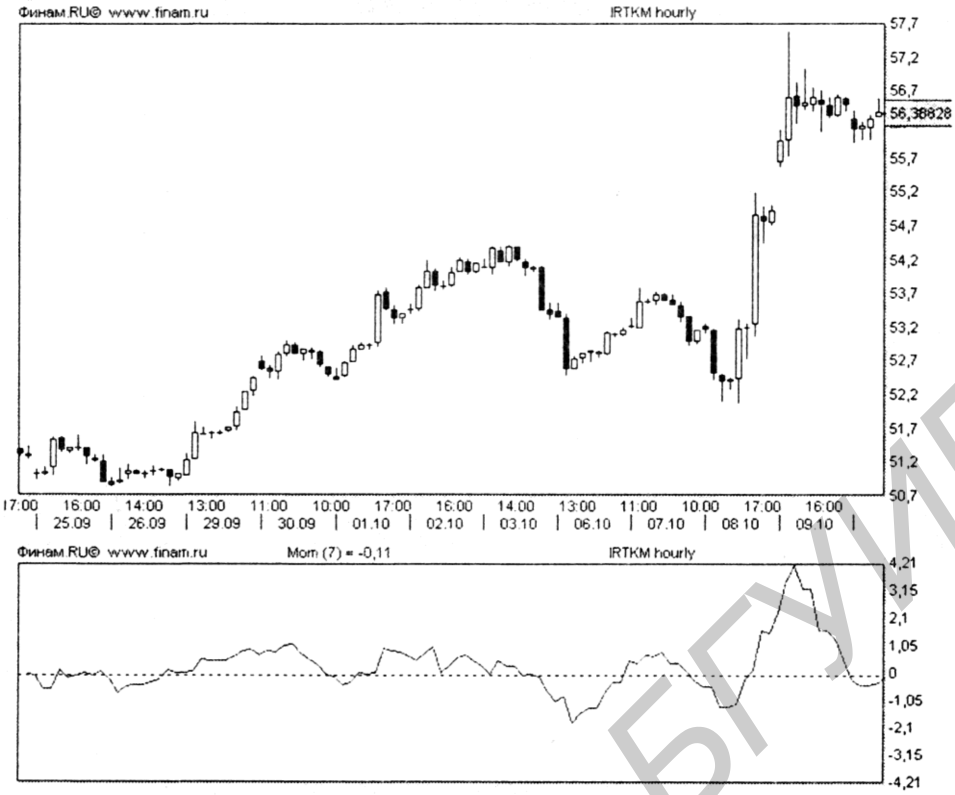


Рис. 8.28. Индикатор «момент»

Большие положительные и отрицательные значения индикатора-«момент» означают более быстрое движение цен вверх или же вниз. В качестве основного сигнала к действиям используется момент пересечения построенной кривой нулевого значения. Если индикатор пересекает нулевую линию сверху вниз, то это служит сигналом к продаже акций, поскольку их рост прекратился. И наоборот, в случае пересечения кривой снизу вверх нулевого уровня, следует приобретать ценные бумаги.

4. *Осциллятор* (*OSC*). С помощью данного метода выявляются движения цен с заданным периодом. Для этого вычисляются две простые скользящие – короткая и длинная. Затем из средней с коротким периодом вычитается средняя с длинным периодом. При использовании данного индикатора сигналом является пересечение OSC нулевой линией (рис. 8.29).

В случае если OSC пересекает нулевую линию снизу вверх, это будет сигналом к началу продаж. Пересечение нулевой отметки линией OSC сверху вниз является сигналом к началу покупки. Таким образом, большие положительные значения индикатора означают завышенные цены по отношению к долгосрочной тенденции и сигнализируют о целесообразности продажи, тогда как большие отрицательные значения подают сигнал к покупке.

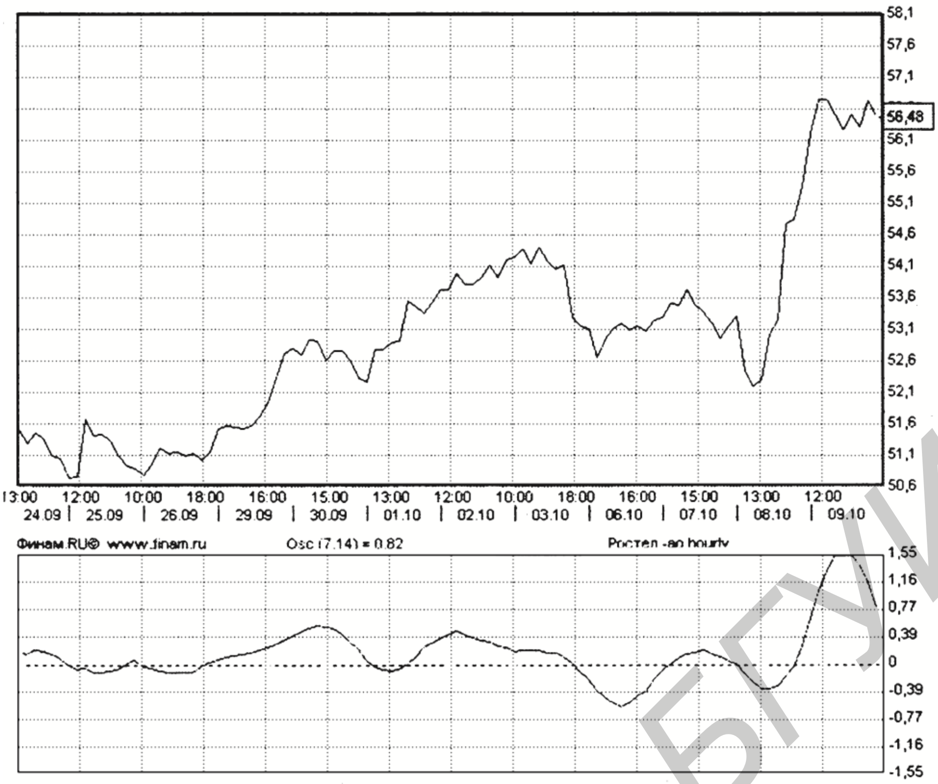


Рис. 8.29. Осциллятор

8.4. О других технических параметрах поведения рынка

Главный недостаток использования динамических средних для анализа поведения рынка – неопределенность выбора адекватного времени усреднения. Поэтому аналитики используют не один, а много технических параметров, делая выводы на основании сопоставления поведения всех характеристик рынка. Некоторые из этих параметров рассматриваются ниже.

1. ***Индекс спекулятивной активности S***

При подъеме рынка последними возрастают акции небольших компаний с нестабильными прибылями или вообще без таковых. Акции хороших компаний уже стоят больше, чем их реальная стоимость (переоценены). Инвесторы начинают обращать внимание на рискованные, спекулятивные акции. Усиливающаяся активность торговли такими акциями свидетельствует о близком конце подъема рынка и о возможной сильной коррекции. Для оценки интенсивности спекулятивной торговли аналитики сравнивают средние объемы дневной торговли акциями на Нью-Йоркской бирже NYSE, на бирже AMEX и рынке NASDAQ и строят показатель

$$S = \frac{V(AMEX) + V(NASDAQ)}{V(NYSE)}.$$

Библиотека БГУИР

Максимум этого показателя соответствует максимуму спекулятивной активности и свидетельствует о возможном скором прекращении роста рынка.

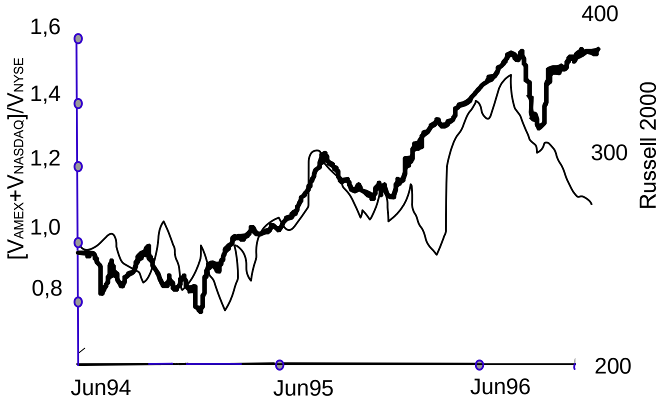


Рис. 8.30. Индекс спекулятивной активности

На рис. 8.30 показано изменение индекса спекулятивной активности за 1994–1996 гг. вместе с индексом Рассела-2000.

Резкий рост индекса в июне 1996 г. предшествовал сильной коррекции рынка.

Следует отметить, что данный индекс ежедневно сильно меняется. Для выяснения его тенденции полезно строить график динамического среднего (усреднение по 10–15 дням).

2. *Накопленный эмоциональный индекс А*

Если обозначить через N^+ число компаний, акции которых выросли в данный день, а через N^- – число компаний, акции которых упали (обычно на Нью-Йоркской бирже), то разность $\alpha = N^+ - N^-$, характеризующая эмоции инвесторов и трейдеров в течение данного дня, называется эмоциональным индексом дня. Обычно используют накопленную сумму за много дней – накопленный эмоциональный индекс A_k:

$$A_k ... = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k.$$

Заметим, что число дней должно быть больше, чем период колебания рынка, который интересует аналитика.

Эмоциональный индекс колеблется вместе с рынком. Рост рынка считается «здоровым», если средняя цена акций на рынке растет вместе с накопленным эмоциональным рынком. Если рост эмоционального индекса начинает отставать от роста рыночных индексов, то это может быть признаком начинающегося финансового кризиса.

На рис. 8.31 приведен график эмоционального индекса Нью-Йоркской биржи вместе с индексом S&P-500 (жирная линия). Переход эмоционального индекса в отрицательную область в мае–июне 1996 г. является предвестником сильной летней коррекции рынка.

Библиотека БГУИР

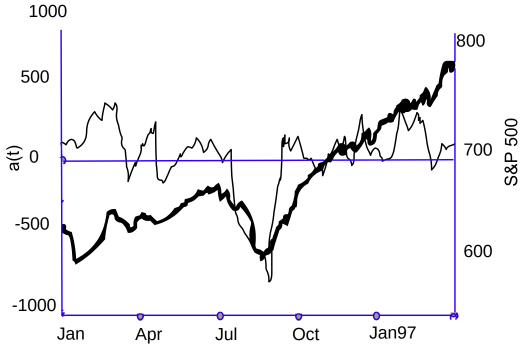


Рис. 8.31. Эмоциональный индекс

3. ***Индекс трейдинга TRIN*** характеризует интенсивность покупки или продажи акций в данный день и вычисляется по формуле

$$TRIN = (N^+/V^+)/(N^-/V^-),$$

где $(N^+,\ N^-)$ – количество компаний, акции которых выросли или упали в данный день;

$(V^+,\ V^-)(V^+,\ V^-)$ – число акций, перешедших в этот день из рук в руки с ростом или падением цен. Из-за больших колебаний значений этого индекса полезно рассматривать его динамические средние за 10–15 дней.

Если индекс *TRIN* начал сильно возрастать, что обычно связано с большим объемом продаж, то это указывает на отток денег с рынка, и вскоре следует ожидать роста рыночных индексов – акции начнут расти в цене. Падение этого индекса указывает на большой объем покупки акций, поэтому следует ожидать уменьшение объема продаж, т.е. падения акций.

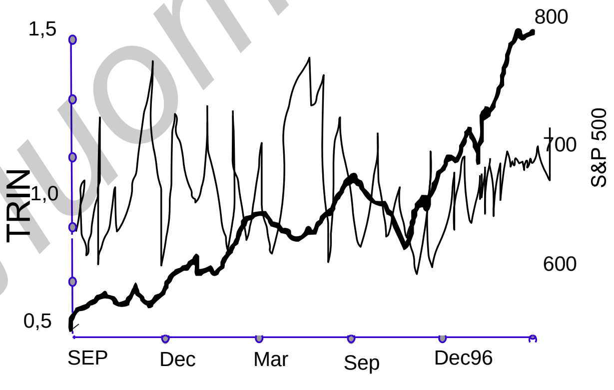


Рис. 8.32. Индекс *TRIN*

На этом рис. 8.32 приведен индекс *TRIN* с сентября 1996 по март 1997 г. вместе с индексом S&P-500 (жирная линия). Яркий максимум данного индекса в июле 1996 г. предшествовал началу сильного роста рынка акций США.

Литература

1 Терпугов, А. Ф. Математика рынка ценных бумаг / А. Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во НТЛ, 2004. – 167 с.

2 Эрлих, А. Технический анализ товарных и финансовых рынков / А. Эрлих. – М. : ИНФРА-М, 1996. – 174 с.

3 Четыркин, Е. М. Финансовая математика: учебник /Е. М. Четыркин. – М. : Дело, 2001. – 400 с.

4 Янукян, М. Г. Практикум по рынку ценных бумаг / М. Г. Янукян. – СПб. : Питер, 2007. - 192 с.

5 Поттосина, С. А. Математика рынка ценных бумаг: практикум для студ. спец. 1-40 10 02-02 «Информационные системы и технологии (в экономике)» всех форм обуч. / С. А. Поттосина, И. Б. Валевская. – Минск : БГУИР, 2010. – 67 с.

6 Лукашин, Ю. П. Основы финансовой математики: учеб. пособие / Ю. П. Лукашин. – М. : Издательство МЭСИ, 1999. – 60 с.

Библиотека БГУИР

Св. план 2010, поз. 127

Учебное издание

Поттосина Светлана Анатольевна
Алёхина Алина Энодиевна

МАТЕМАТИКА РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ
(с элементами технического анализа)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Г. С. Корбут*
Корректор *Е. Н. Батурчик*

Подписано в печать 27.03.2012. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 6,74.
Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 100 экз. Заказ 497.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6

Библиотека БГУИР