

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет радиотехники и электроники

Кафедра информационных радиотехнологий

Э. М. Карпушкин

ТЕОРИЯ РАДИОСИСТЕМ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования по специальностям
«Радиоэлектронные системы»,
«Радиоэлектронная защита информации»*

Минск БГУИР 2023

УДК 621.396.9(075.8)
ББК 32.841я73
К26

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра радиофизики и цифровых медиатехнологий
Белорусского государственного университета
(протокол №5 от 19.11.2019);

ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории
учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»
доктор технических наук, профессор О. Г. Лапука

Карпушкин, Э. М.

К26 Теория радиосистем : учеб. пособие / Э. М. Карпушкин. – Минск :
БГУИР, 2023. – 172 с. : ил.
ISBN 978-985-543-655-4.

В первом разделе пособия «Сигналы и помехи в радиосистемах» излагаются основы теории сигналов и помех. Уделяется внимание особенностям различных форм представления сигналов, основным характеристикам сигналов, определяющим качественные показатели радиосистем, сложным сигналам, разновидностям помех и их описанию. Во втором разделе пособия «Статистические алгоритмы оптимального приема» изложены методы синтеза и анализа устройств оптимальной обработки информационных радиосигналов для радиосистем различного назначения.

УДК 621.396.9(075.8)
ББК 32.841я73

ISBN 978-985-543-655-4

© Карпушкин Э. М., 2023
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РАДИОСИСТЕМАХ	8
1.1 Описание сигналов.....	8
1.1.1 Представление сигнала как действительной функции времени.....	8
1.1.2 Аналитическое представление	9
1.1.3 Спектральное представление	10
1.1.4 Дискретное представление	11
1.1.5 Геометрическое представление	12
1.2 Основные характеристики сигналов	13
1.2.1 Длительность сигнала	13
1.2.2 Ширина спектра сигнала	15
1.2.3 Энергия сигнала.....	17
1.2.4 Корреляционная функция сигнала	18
1.2.5 Вид информационной модуляции	25
1.2.6 Коэффициент частотно-временной связи. База сигнала	29
1.3 Сложные сигналы в РС	30
1.3.1 Сигналы с линейной частотной модуляцией.....	30
1.3.2 Псевдослучайные сигналы с фазовой манипуляцией	33
1.3.3 M-последовательности	35
1.3.4 Четверично-кодированные последовательности	44
1.3.5 Псевдослучайные сигналы с частотной манипуляцией.....	58
1.4 Помехи в РС	61
Вопросы для самопроверки	65
2 СТАТИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА.....	67
2.1 Основные задачи оптимального приема	68
2.2 Понятие об апостериорной вероятности	71
2.3 Критерии оптимального приема	73
2.3.1 Критерий минимума среднего квадрата ошибки.....	74
2.3.2 Критерий максимума отношения сигнал/шум	74
2.3.3 Критерий идеального наблюдателя.....	75
2.3.4 Критерий максимума апостериорной вероятности, отношения правдоподобий.....	76
2.4 Оптимальный линейный фильтр.....	77

2.4.1	Согласованный фильтр	80
2.4.2	Примеры реализации согласованных фильтров.....	86
2.5	Обнаружение радиосигналов	94
2.5.1	Обнаружение известного (детерминированного) радиосигнала	94
2.5.2	Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой.....	99
2.5.3	Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой и флюктуирующей амплитудой	107
2.5.4	Обнаружение пачки радиоимпульсов	112
2.5.5	Обнаружение случайного сигнала.....	116
2.6	Оптимальное различение радиосигналов	119
2.6.1	Оптимальное различение известных радиосигналов.....	119
2.6.2	Различение радиосигналов с неизвестными начальными фазами	127
2.7	Оценка параметров радиосигналов	133
2.7.1	Оценка амплитуды известного радиосигнала	134
2.7.2	Оценка амплитуды радиосигнала с неизвестной начальной фазой ...	135
2.7.3	Оценка неэнергетических параметров радиосигналов	138
2.8	Оптимальная фильтрация сообщений	147
2.8.1	Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана – Бьюси	149
2.8.2	Оптимальная нелинейная фильтрация	154
2.9	Оптимальное разрешение радиосигналов	156
	Вопросы для самопроверки.....	165
Приложение А.	Таблица интеграла вероятности $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$	167
	Перечень сокращений	169
	Список использованных источников	171

Введение

Дисциплина «Теория радиосистем» изучается студентами специальностей «Радиоэлектронные системы» и «Радиоэлектронная защита информации» на завершающем этапе обучения и подводит итог по системной подготовке инженеров по радиоэлектронике. Цель дисциплины – помочь студентам в углубленном изучении основных положений теории сигналов, статистической теории оптимальных методов приема сигналов, в том числе шумоподобных, синтеза и анализа систем со сложными сигналами, особенностей построения. Радиосистема (РС) – это совокупность радиоэлектронных средств, предназначенных для решения одной или нескольких задач, связанных с преобразованием информации.

Все рассматриваемые радиосистемы – информационные – и подразделяются по информационному признаку на:

- 1) радиосистемы передачи информации;
- 2) радиосистемы извлечения информации;
- 3) комбинированные радиосистемы;
- 4) радиосистемы разрушения информации.

Характерным признаком радиосистемы передачи информации (РС ПИ) является наличие отправителя и получателя информации. Различают одноканальные, многоканальные и многостанционные РС ПИ. Одноканальные – один отправитель, один получатель, один канал связи. Многоканальные – несколько отправителей, столько же получателей, один канал связи. Многостанционные – множество отправителей, столько же получателей, несколько каналов связи. Причем отправитель формирует определенным образом информацию в сообщение и с помощью носителя – радиосигнала – передает по каналу связи получателю, который, в свою очередь, принимает радиосигнал, выделяет из него переданное сообщение и использует информацию в сообщении по своему целевому назначению. На рисунке 1.1 в качестве примера приведена структурная схема многоканальной РС ПИ.

В РС извлечения информации (системы радиолокации и радионавигации) информация как таковая не передается, а формируется в процессе прохождения излученного (или переизлученного) радиосигнала по каналу связи и извлекается на приемной стороне из принимаемого радиосигнала. Основное назначение систем радиолокации – обнаружение подвижных объектов, измерение их параметров движения (дальность, радиальная скорость) и угловых координат (азимутальный угол, угол места). Системы радионавигации определяют свое собственное местоположение в пространстве по навигационным параметрам (те же дальность, радиальная скорость, угловые координаты). На рисунке 1.2 в качестве примера приведена структурная схема импульсной радиолокационной системы.

Комбинированные РС представляют собой сочетание РС ПИ и РС извлечения информации. Например, командная радиосистема управления летатель-

ным аппаратом состоит минимум из двух систем радиолокации и радиосистемы передачи информации (рисунок 1.3).

РС разрушения информации предназначены для создания преднамеренных помех системам передачи или извлечения информации с учетом их специфики. На рисунке 1.4 приведена структура одного из вариантов функционирования такой радиосистемы.

Для всех указанных РС важным и наиболее ответственным фактором является выбор формы радиосигнала как носителя информации. От выбора формы радиосигнала зависит по существу структура всей РС, а следовательно, и ее основные характеристики: точность, достоверность, помехоустойчивость, разрешающая способность, пропускная способность, скрытность, электромагнитная совместимость, экологическая совместимость, надежность.

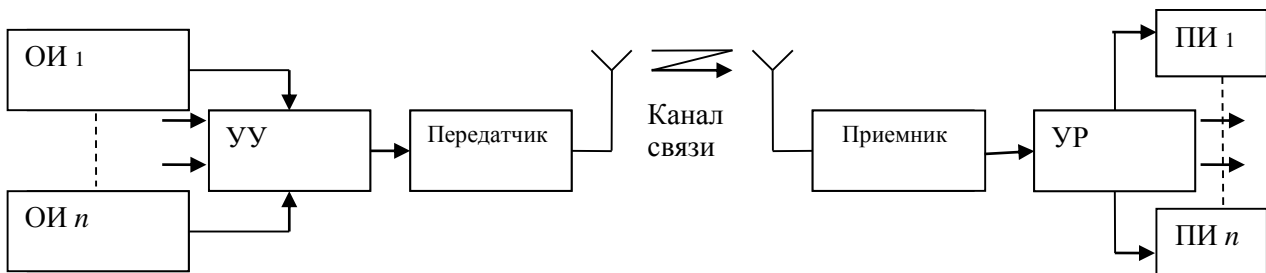


Рисунок 1.1 – Многоканальная РС ПИ

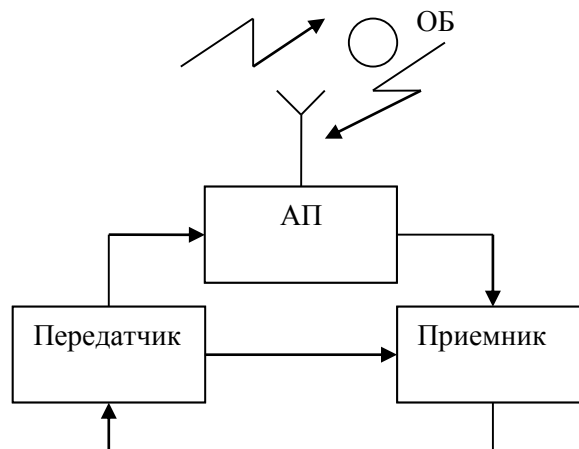


Рисунок 1.2 – Импульсная система радиолокации

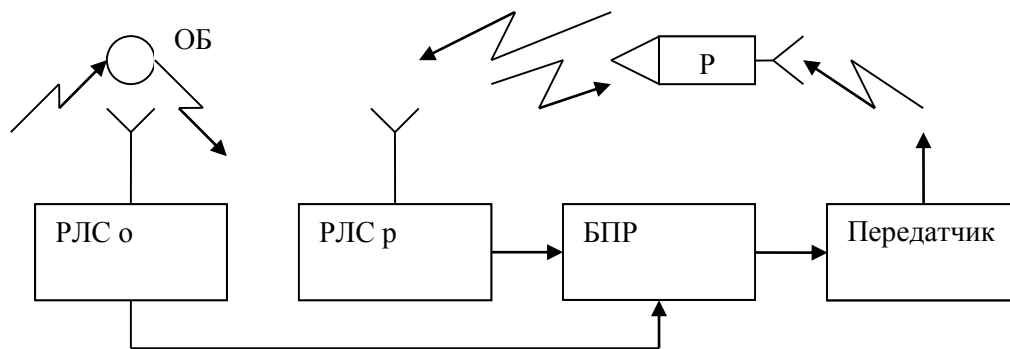


Рисунок 1.3 – Командная система радиоуправления

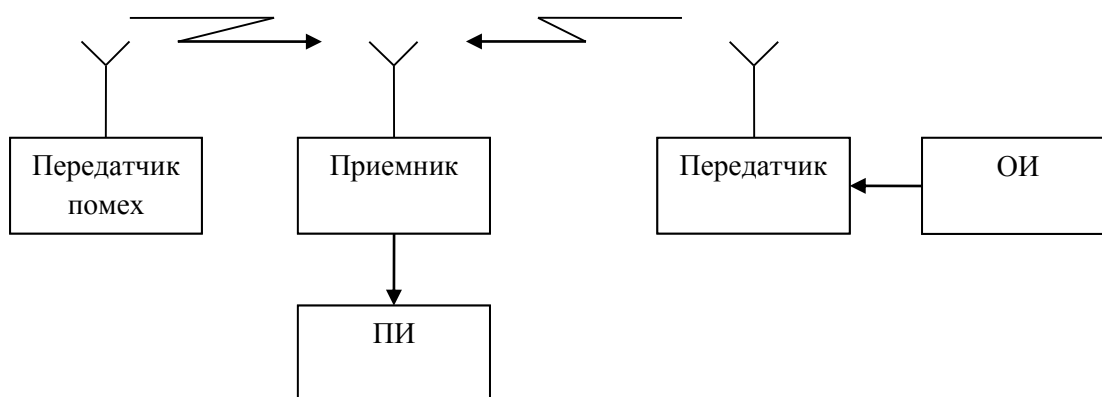


Рисунок 1.4 – Воздействие радиосистемы разрушения информации

На представленных рисунках 1.1 – 1.4 даны условные обозначения:

- 1) ОИ – отправитель информации;
- 2) УУ – устройство уплотнения;
- 3) УР – устройство разделения;
- 4) ПИ – потребитель информации;
- 5) ОБ – объект наблюдения;
- 6) АП – антенный переключатель;
- 7) РЛС о – радиолокационная система наблюдения за объектом;
- 8) РЛС р – радиолокационная система наблюдения за ракетой;
- 9) БПР – блок принятия решения;
- 10) Р – ракета.

1 СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РАДИОСИСТЕМАХ

Все многообразие радиосигналов, используемых в РС, можно разделить на детерминированные, случайные и псевдослучайные. У детерминированных сигналов значения параметров (амплитуда, фаза, частота) в любые моменты времени являются известными величинами. Сигналы называются случайными, если значения их параметров неизвестны и являются случайными величинами.

Псевдослучайными называются детерминированные сигналы, которые, не являясь случайными, по своим статистическим свойствам подобны случайным процессам.

Радиосигналы каждой из названных групп, в свою очередь, могут подразделяться на непрерывные и дискретные. Непрерывным называется сигнал, принимающий все возможные значения на некотором интервале времени T и в диапазоне, ограниченном его максимальным и минимальным амплитудными значениями. Дискретным называется сигнал, квантованный по уровню или по времени, или по уровню и времени одновременно.

1.1 Описание сигналов

При аналитическом анализе и синтезе РС требуется определенное математическое описание сигнала, которое отражало бы основные свойства. В зависимости от конкретного назначения РС и целей исследования один и тот же сигнал может иметь различное описание (или представление), позволяющее наиболее просто решить поставленную задачу. Правильный выбор формы представления сигнала во многом предопределяет не только простоту аналитических расчетов, но и их результаты. Этот факт наиболее очевиден при использовании в РС сложных сигналов. Ниже дается краткая характеристика основным формам представления сигналов, характерных для РС.

1.1.1 Представление сигнала как действительной функции времени

Для одиночного сигнала длительностью T , по которому производится отсчет измеряемого параметра, описание имеет вид

$$S(t) = A(t) \cdot \cos[\omega(t) \cdot t + \varphi(t)]. \quad (1.1)$$

Здесь $A(t)$, $\omega(t)$ и $\varphi(t)$ – законы изменения соответственно амплитуды, частоты и фазы сигнала на интервале определения $0 \leq t \leq T$.

В зависимости от количества переменных и постоянных параметров различают следующие виды информационной модуляции: амплитудную (АМ), частотную (ЧМ), фазовую (ФМ), амплитудно-частотную (АМ-ЧМ), фазо-частотную (ФМ-ЧМ) и т. д.

Эта форма представления сигнала отличается простотой и физической наглядностью.

Основным недостатком такого описания является неоднозначность в оценке вида модуляции.

Например, изменение фазы сигнала на π радиан равно изменению амплитуды сигнала с положительного значения на отрицательное и наоборот.

1.1.2 Аналитическое представление

Наиболее обоснованный путь устранения неоднозначности вида модуляции, присущей описанию сигнала как действительной функции времени, приводит к введению аналитического сигнала. При этом вещественная функция $S(t)$ дополняется мнимой компонентой $\hat{S}(t)$ и образуется комплексный сигнал

$$\dot{S}(t) = S(t) + j\hat{S}(t). \quad (1.2)$$

Компонента $\hat{S}(t)$ зависит от $S(t)$ и связана с ней преобразованием Гильберта:

$$\hat{S}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1.3)$$

Справедливо и обратное преобразование Гильберта:

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{S}(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1.4)$$

Такой выбор мнимой компоненты связан с определением основных характеристик сигнала – его амплитудной огибающей, фазы и мгновенной частоты.

При записи аналитического сигнала в форме

$$\dot{S}(t) = A(t) \cdot e^{j\theta(t)}$$

огибающая и фаза определяются единственным образом:

$$A(t) = \sqrt{S^2(t) + \hat{S}^2(t)}, \quad \theta(t) = \arctg \frac{\hat{S}(t)}{S(t)}, \quad (1.5)$$

а вещественная часть сохраняет заданную форму:

$$S(t) = \operatorname{Re}\{\dot{S}(t)\} = A(t) \cdot \cos \theta(t).$$

Фаза $\theta(t)$ представляется в виде суммы трех слагаемых:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0,$$

где φ_0 – начальная фаза несущего колебания.

Множитель $e^{j\omega_0 t}$ только перемещает спектр сигнала на величину ω_0 , а свойства комплексной огибающей, определяющей форму сигнала, сохраняются.

К недостаткам аналитического представления можно отнести сложность математических преобразований при анализе прохождения сигнала через линейные и нелинейные цепи.

1.1.3 Спектральное представление

Так как сигнал в РС в большинстве случаев является сложной функцией времени и частоты, целесообразно определить его через линейные комбинации простых функций:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \gamma_i(t), \quad (1.6)$$

где $T/2 \leq t \leq T/2$, C_i – безразмерные коэффициенты (в общем случае они могут зависеть от какого-то параметра α ; $\gamma_i(t)$ – базисные функции, определяемые в том же промежутке времени, что и сигнал.

Основные свойства базисных функций:

$$1) \text{ ортогональность } - \int_{-T/2}^{T/2} \gamma_i(t) \cdot \gamma_j(t) dt = 0;$$

$$2) \text{ энергетическая эквивалентность } - \int_{-T/2}^{T/2} |\gamma_k(t)|^2 dt = E_\gamma;$$

$$3) \text{ ортонормированность } - \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) \cdot f_j(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где семейство функций $f_1(t) = \frac{\gamma_1(t)}{\sqrt{E_\gamma}}$, $f_2(t) = \frac{\gamma_2(t)}{\sqrt{E_\gamma}}$, ..., $f_k(t) = \frac{\gamma_k(t)}{\sqrt{E_\gamma}}$

ортонормальны и нормированы.

Представление сигнала $S(t)$ в виде ряда по ортонормированным функциям:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i(t), \quad (1.7)$$

где $d_i = \frac{C_i}{\sqrt{E_\gamma}} = \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot f_i(t) dt$ – спектральные коэффициенты в данном базисе.

Примером спектрального представления периодического сигнала является разложение его в ряд Фурье. Для аналитического сигнала

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{2} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \dot{A}_K e^{j2\pi K \frac{t}{T}}, \quad (1.8)$$

где $\dot{A}_K = A_K \cdot e^{-j\varphi_K} = a_K - jb_K$, $A_K = |\dot{A}_K|$.

Комплексная амплитуда A_K находится по формуле

$$\dot{A}_K = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{S}(t) \cdot e^{-j2\pi K \frac{t}{T}} dt. \quad (1.9)$$

Структура спектра периодического сигнала полностью определяется амплитудами и фазами гармоник (A_K и φ_K).

Разложение в ряд Фурье может быть обобщено на случай непериодического сигнала путем предельного перехода при $T \rightarrow \infty$, $2\pi/T \rightarrow d\omega$, $2\pi k/T \rightarrow \omega$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.10)$$

Пара преобразований Фурье (1.10) связывает между собой аналитическую функцию сигнала $S(t)$ и его комплексную спектральную функцию $S(j\omega)$. Спектральная функция сигнала

$$S(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = S(\omega)e^{-j\varphi(\omega)},$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt,$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt,$$

$$S(\omega) = |S(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

$S^*(j\omega)$ – функция, комплексно-сопряженная со спектральной функцией сигнала

$$S^*(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}.$$

Аналогичным образом любой сигнал можно представить в базисах функций Радемахера, Хаара, Уолша и т. д.

Спектральные представления чаще всего используются при анализе сложных сигналов и в экспериментальных исследованиях.

1.1.4 Дискретное представление

Дискретное представление основано на теореме отсчетов (теореме Котельникова) и формулируется следующим образом: любой непрерывный сигнал $S(t)$, ограниченный верхней частотой F_B , полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга на $\Delta t = 1/nF_0$, где $F_0 \geq F_B$, $n = (2 - 10)$, и зависит от особенностей сигналов [1]:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k \cdot \Delta t) \cdot \frac{\sin 2\pi F_0 [t - k \cdot \Delta t]}{2\pi F_0 [t - k \cdot \Delta t]}. \quad (1.11)$$

Для большинства сигналов при дискретном представлении достаточно брать $n = 2$. Однако для некоторых сигналов, например гармонических и узкополосных, величину коэффициента n необходимо принимать не менее четырех, чтобы исключить существенные информационные потери. Для сигналов с конечной длительностью T количество отсчетов равно $nF_B T$.

Если сигнал $S(t)$ ограничен частотами F_1 и F_2 (радиосигнал), то теорема отсчетов записывается в следующем виде:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} S\left(\frac{k}{F}\right) \cdot \frac{\sin \pi F \left(t - \frac{k}{F}\right)}{\pi F \left(t - \frac{k}{F}\right)} \cdot \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{k}{F}\right) + \varphi\left(\frac{k}{F}\right) \right], \quad (1.12)$$

где $S\left(\frac{k}{F}\right)$ и $\varphi\left(\frac{k}{F}\right)$ – отсчетные значения амплитуды и фазы соответственно,

$$F = F_2 - F_1, \quad \omega_0 = 2\pi \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

Дискретное представление широко используется при аналого-цифровом преобразовании сигнала. Оно позволяет единым образом рассматривать передачу любого сигнала как передачу чисел и лежит в основе всех видов модуляции.

1.1.5 Геометрическое представление

Сигнал задается в виде вектора \vec{S} в m -мерном евклидовом пространстве [11]:

$$\vec{S} = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_m) \quad (1.13)$$

с координатами S_i .

Длина, или норма, вектора определяется как

$$\|\vec{S}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m S_i^2}. \quad (1.14)$$

Расстояние между векторами \vec{S}_1 и \vec{S}_2

$$d_{1,2} = \|\vec{S}_1 - \vec{S}_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (S_{1i} - S_{2i})^2}. \quad (1.15)$$

Обобщением евклидова пространства является гильбертово пространство с бесконечным числом измерений. Если $S(t)$ непрерывная функция, заданная в интервале $0 \leq t \leq T$, то для гильбертова пространства имеем

$$\|\vec{S}\| = \sqrt{\int_0^T |S^2(t) dt|}, \quad (1.16)$$

$$d_{1,2} = \|\vec{S}_1 - \vec{S}_2\| = \sqrt{\int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt}. \quad (1.17)$$

Если учесть, что энергия сигнала

$$E = \int_0^T S^2(t) dt, \quad (1.18)$$

то для сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ с одинаковыми энергиями

$$d_{1,2}^2 = 2E \left(1 - \frac{1}{E} \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t) dt \right) = 2E(1 - \rho_{1,2}), \quad (1.19)$$

где $\rho_{1,2} = \frac{1}{E} \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t) dt$ – коэффициент различимости (коэффициент взаимной корреляции).

Геометрическое представление используется при анализе двоичных кодов. Причем расстояние между векторами в конечномерном пространстве, определяющее метрику пространства, задается в виде

$$d_{1,2} = \sum_{i=1}^m |S_{1i} - S_{2i}|. \quad (1.20)$$

В кодовом пространстве (координаты только 0 и 1) моделью кода является куб с ребром, равным 1, и размерностью, равной значности кода (количеству координат). Любой кодовый вектор совпадает с одной из вершин куба, число которых равно 2^m , где m – значность кода (количество элементов). Расстояние между двумя векторами в кодовом пространстве – это число позиций в комбинациях, на которых стоят различные знаки:

$$d_{ij} = d_k = \frac{m}{2} \cdot (1 - \rho_k), \quad (1.21)$$

где коэффициент различимости ρ_k представляет собой разность между числом позиций с совпадающими символами (знаками) и числом позиций с отличающимися символами (знаками), отнесенными к общему числу позиций. Коэффициенты различимости сигналов и кодов имеют некоторые общие свойства и, в частности, для равноудаленных сигналов и кодов принимают значения

$$-\frac{1}{M-1} \leq \rho_k \leq 1, \quad (1.22)$$

где M – число векторов.

Геометрическое представление широко используется в системах передачи информации.

1.2 Основные характеристики сигналов

Количество известных к настоящему времени сигналов настолько велико, а задачи, решаемые РС, настолько сложны и разнообразны, что оказывается необходимым уметь предварительно выбрать радиосигналы для конкретной РС, пользуясь лишь их основными характеристиками. Ниже рассматриваются характеристики сигналов, определяющие их качественные показатели: длительность T , занимаемая полоса частот F , энергия E , вид информационной модуляции, корреляционная функция, коэффициент частотно-временной связи, база.

1.2.1 Длительность сигнала

Для одиночного сигнала, следующего с периодом T_n ($T_n \gg T$), не всегда определенно можно указать его длительность T . Это характерно для сигналов простых форм: трапецеидальной, колокольной (гауссовой), экспоненциальной. Длительность таких сигналов можно определить через активную длительность, которая измеряется на уровне 0,1 от максимальной амплитуды сигнала, или через эффективную длительность $T_{эф}$, измеряемую на уровне 0,5 от максималь-

ной амплитуды. В теории оценки параметров сигналов применяют эквивалентную длительность $T_{\text{ЭК}}$ [1]. Если комплексная огибающая одиночного сигнала $A(t)$, то

$$T_{\text{ЭК}} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |A(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 dt}}. \quad (1.23)$$

В (1.23) эквивалентная длительность является статистическим параметром и трактуется как корень квадратный из нормированного второго момента квадрата модуля аналитической функции сигнала относительно начала наблюдения t . В качестве примера приведем значения $T_{\text{ЭК}}$ для сигналов с прямоугольной и гауссовой огибающей.

Для одиночного сигнала с прямоугольной огибающей длительностью T

$$A(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & -\frac{T}{2} > t > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.24)$$

имеем

$$T_{\text{ЭК}} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_{-T/2}^{T/2} t^2 dt}{\int_{-T/2}^{T/2} dt}} = \frac{\pi T}{\sqrt{3}} \approx 1,2T. \quad (1.25)$$

Для одиночного сигнала с гауссовой огибающей

$$A(t) = \exp\left[-2,8\left(\frac{t^2}{T_a^2}\right)\right] \quad (1.26)$$

имеем

$$T_{\text{ЭК}} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left[-5,6\left(\frac{t}{T_a}\right)^2\right] dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-5,6\left(\frac{t}{T_a}\right)^2\right] dt}} = \frac{\pi T_a}{\sqrt{2,8}} \geq 1,3T_a. \quad (1.27)$$

Для непрерывных сигналов, а они, как правило, в РС периодические, длительность сигнала T чаще определяется периодом следования T_n . Исключение составляют гармонические, шумовые и некоторые виды шумоподобных сигналов. В последних двух видах периодичность нарушается информационной модуляцией.

1.2.2 Ширина спектра сигнала

Характер спектра сигнала зависит от вида модуляции и в базисе Фурье описывается спектральной функцией $S(j\omega)$, отражающей амплитудно-частотную $S(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ фазочастотную характеристики сигнала. В практике ширину спектра сигнала ограничивают до величины, в пределах которой сосредоточивается большая часть мощности сигнала и обеспечивается максимальное отношение мощности сигнала к мощности шума на входе приемника РС. Отсюда и возникли два понятия ширины спектра сигнала: эффективная и эквивалентная.

Эффективная ширина спектра $F_{\text{эф}}$ определяется по спектральной плотности сигнала $F(\omega)$:

$$F_{\text{эф}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega}{F(\omega_0)}, \quad (1.28)$$

где $F(\omega_0)$ – значение спектральной плотности при центральной частоте ω_0 (для видеосигнала $\omega_0 = 0$).

По определению спектральная плотность выражается через спектральную функцию [13]:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S(j\omega)|^2. \quad (1.29)$$

Для реальных сигналов длительностью T связь между $F(\omega)$ и $S(j\omega)$ устанавливается через равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.30)$$

Эквивалентная (среднеквадратичная) полоса частот $F_{\text{эк}}$ сигнала используется в теории оптимальной оценки неэнергетических параметров сигналов и для симметричного по спектру сигнала определяется следующим выражением:

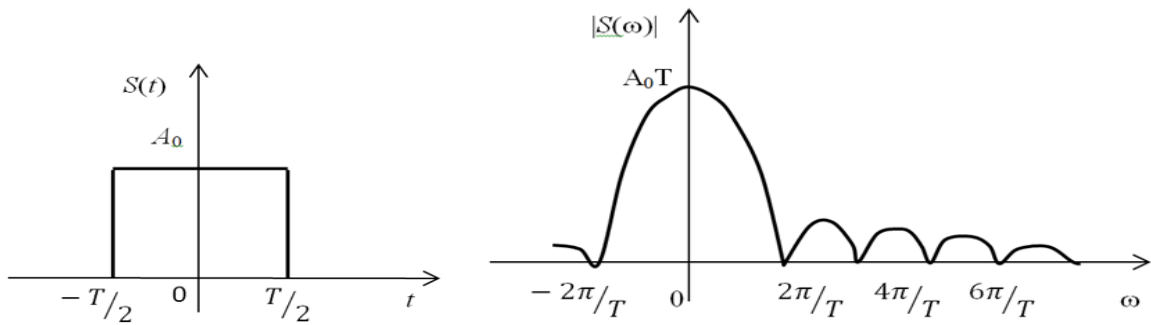
$$F_{\text{эк}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega}}. \quad (1.31)$$

На рисунке 1.5 приведены графики функций времени и частоты простых и цифрового сигналов.

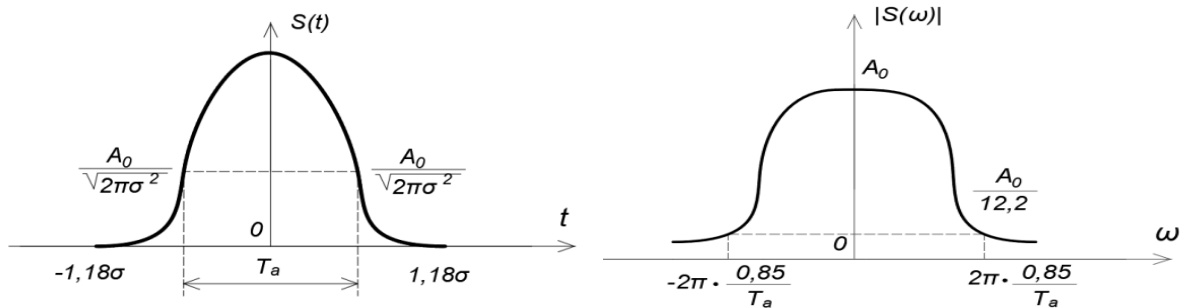
Для прямоугольной огибающей радиоимпульса (рисунок 1.5, а)

$$S(\omega) = A_0 T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \quad (1.32)$$

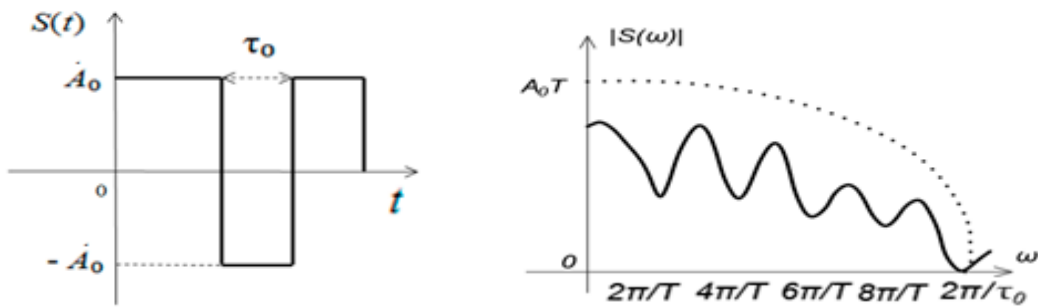
соответствующее значение $F_{\text{эф}} = 1/T$. Примерно 85 % мощности сигнала сосредоточено в полосе от $-\frac{2\pi}{T}$ до $\frac{2\pi}{T}$, поэтому примерно такую же величину будет иметь и эквивалентная полоса.



а



б



в

а – прямоугольный импульс; б – гауссов сигнал; в – цифровой сигнал

Рисунок 1.5 – Графики времени и частоты

Для гауссовой огибающей радиосигнала (рисунок 1.5, б)

$$A(t) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right], \quad (1.33)$$

$$|S(j\omega)| = A_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right].$$

$$F_{\text{эк}} \approx \frac{2}{T_a} \text{ и эффективная полоса } F_{\text{эф}} \approx \frac{1,7}{2T_a}.$$

Здесь $T_a = 2,36\sigma$ зависит только от коэффициента σ .

При $\sigma \rightarrow 0$ сигнал $S(t)$ вырождается в дельта-функцию, спектральная функция которой является равномерной. Для цифрового сигнала (рисунок 1.5, в)

$$A(t) = A_0 \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \text{rect}[t - i\tau_0],$$

$$|S(j\omega)| = |S_0(j\omega)| \cdot A_0 \left| \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \cos n\omega\tau_0 \right| \quad (1.34)$$

и $\alpha_i = \{\pm 1\}$; N – число элементарных символов длительностью τ_0 ; $\text{rect}[t - i\tau_0] = \{0, 1\}$, $|S_0(j\omega)|$ – модуль спектральной функции прямоугольного импульса единичной амплитуды и длительностью τ_0 .

Эффективная полоса частот цифрового сигнала примерно оценивается соотношением

$$F_{\text{эф}} = 1/\tau_0. \quad (1.35)$$

1.2.3 Энергия сигнала

Исходя из определения энергия сигнала E длительностью T равна

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} |\dot{A}(t)|^2 dt. \quad (1.36)$$

Если $S(t)$ – действительная функция времени, а $A(t)$ – огибающая этой функции, то

$$E_{\text{д}} = \int_0^T S^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T A^2(t) dt. \quad (1.37)$$

Мощность сигнала (его дисперсия) вычисляется через спектральную плотность:

$$P_{\text{ср}} = \sigma_c^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (1.38)$$

1.2.4 Корреляционная функция сигнала

Из корреляционной теории случайных процессов вытекают понятия автокорреляционной функции и функции взаимной корреляции. Автокорреляционная функция (АКФ) – функция корреляции между значениями одного случайного процесса $x(t)$ в два разных момента времени записывается формулой

$$r(\tau) = \langle x(t_1) \cdot x(t_2) \rangle - m^2, \quad (1.39)$$

где $\tau = t_2 - t_1$; $\langle x(t_1) \cdot x(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2)P_1(x)dx$; матожидание $m = \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP_1(x)dx$; $P_1(x)$ – одномерная плотность распределения случайного процесса $x(t)$.

Для стационарных эргодических случайных процессов при времени наблюдения T

$$r(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt - \left[\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right]^2. \quad (1.40)$$

Считая далее реальный сигнал $S(t)$ длительностью T в РС стационарным и эргодическим случайным процессом, по аналогии с (1.39) и (1.40) введем понятие АКФ реального сигнала как

$$R(\tau) = \int_0^T S(t) \cdot S(t + \tau) dt. \quad (1.41)$$

Такая запись отражает статистическую связь между различными временными отсчетами сигнала и соответствует математическому описанию операции оптимального корреляционного приемника.

Основные свойства АКФ реального сигнала $S(t)$ длительностью T :

- а) $R(\tau)$ – функция четная, т. е. $R(\tau) = R(-\tau)$;
- б) $R_{\text{макс}}(\tau) = R(0) = E$;
- в) при $\tau \neq 0$ $R(\tau) < R(0)$;
- г) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$, практически при $\tau \geq T$;
- д) если $R(\tau) = 0$ при $0 < \tau < T$, то между значениями $S(t)$ и $S(t + \tau)$ не существует статистической связи, т. е. они ортогональны;

$$е) R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \exp[j\omega\tau] d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot \exp[-j\omega\tau] d\tau.$$

Иногда удобно пользоваться понятием нормированной АКФ сигнала $\rho(\tau)$:

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = \frac{1}{E} \cdot R(\tau). \quad (1.42)$$

При корреляционном анализе цифровых сигналов используют решетчатую АКФ.

Если $S(t)$ – цифровой сигнал, состоящий из набора символов α_i длительностью τ_0 , где $i = 1, 2, \dots, N$, то решетчатая АКФ одиночного цифрового сигнала (непериодического) вычисляется следующим образом:

$$R(k\tau_0) = \sum_{i=1}^{N-k} \alpha_i \cdot \alpha_{i+k}, \quad (1.43)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$.

Решетчатая АКФ периодического цифрового сигнала определяется выражением

$$R_n(k\tau_0) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \alpha_{i+k}, \quad (1.44)$$

где при сдвигах, кратных τ_0 и не превышающих длительности сигнала T , k принимает те же значения, что и в (1.43).

Соответственно выражения для нормированных решетчатых АКФ цифрового сигнала примут вид

$$\begin{aligned} \rho(k\tau_0) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} \alpha_i \cdot \alpha_{i+k}, \\ \rho_n(k\tau_0) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \alpha_{i+k}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Если в (1.43), (1.44) и (1.45) $\alpha_i = \{0, 1\}$, то все нулевые символы заменяются символом «1». В РС интерес представляют сигналы с хорошими АКФ – максимальный уровень бокового остатка существенно ниже основного пика.

Эффективная протяженность функции АКФ называется временем корреляции:

$$\tau_k = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (1.46)$$

На рисунке 1.6 приведены АКФ некоторых сигналов. АКФ прямоугольного видеоимпульса длительностью T (рисунок 1.6, а) описывается выражением

$$R(\tau) = \begin{cases} A_0 T (1 - \frac{|\tau|}{T}), & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (1.47)$$

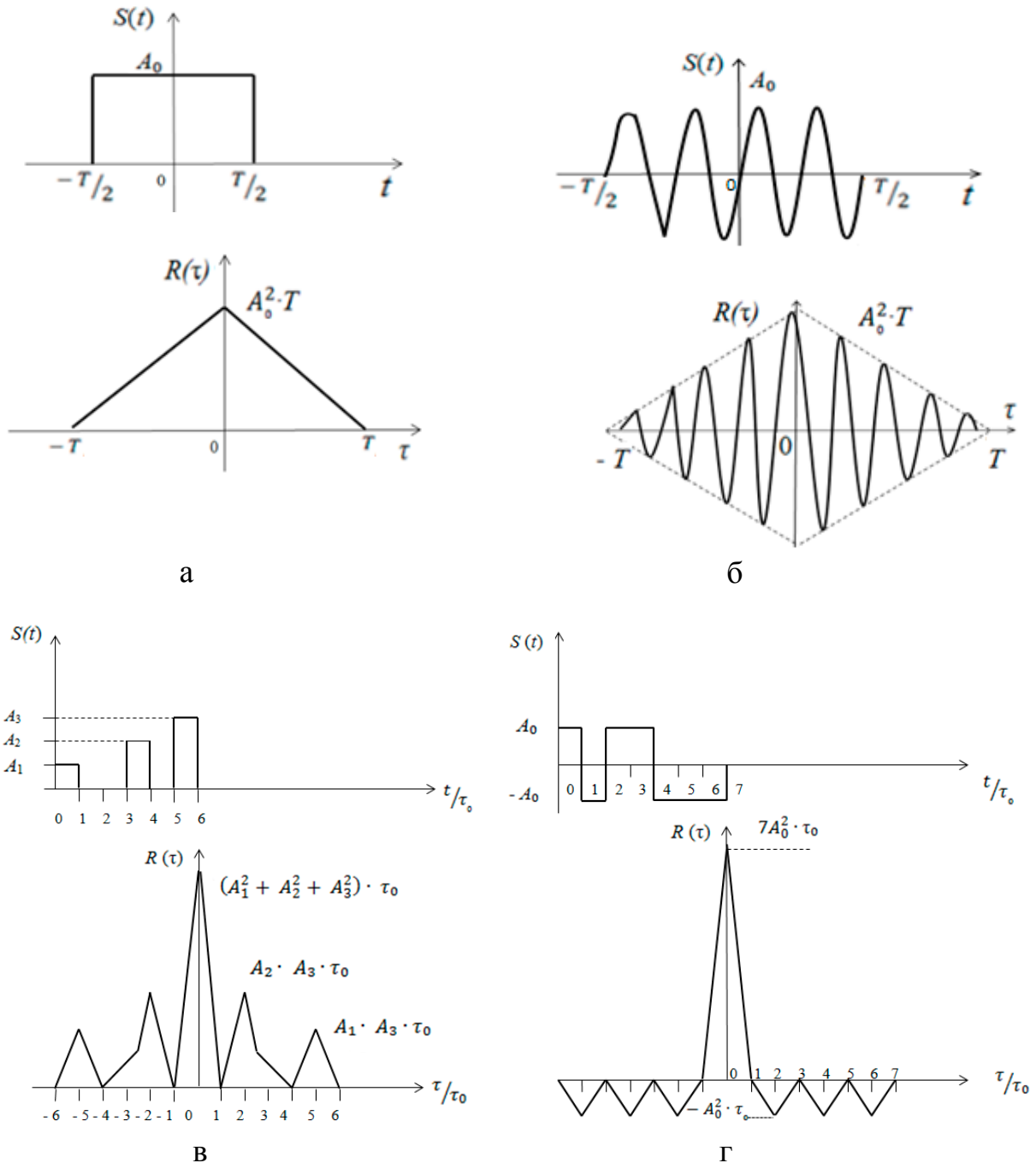
АКФ прямоугольного радиоимпульса длительностью T (рисунок 1.6, б) представляет собой гармоническое колебание на частоте несущей, амплитуда которого изменяется по закону (1.47).

АКФ дискретного сигнала из трех прямоугольных импульсов одинаковой длительности, но разных амплитуд изображена на рисунке 1.6, в. На рисунке 1.6, г приведена АКФ цифрового сигнала, а на рисунке 1.7 демонстрируется метод вычисления решетчатой АКФ в соответствии с выражением (1.43).

Для установления статистической связи между двумя сигналами $S_1(t)$ длительностью T_1 и $S_2(t)$ длительностью T_2 рассмотрим функцию взаимной корреляции (ВКФ):

$$R_{1,2}(\tau) = \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t + \tau) dt. \quad (1.48)$$

Если длительности сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ одинаковы, то $T_1 = T_2 = T$, в противном случае T – минимальное значение, кратное T_1 и T_2 .



а – прямоугольный импульс; б – радиоимпульс; в – дискретный сигнал;
г – цифровой сигнал

Рисунок 1.6 – АКФ сигналов

	+	-	+	+	+	-	-							
-	-	+	-	-	-	+	+							
-		-	+	-	-	-	+	+						
+			+	-	+	+	+	-	-					
+				+	-	+	+	+	-	-				
+					+	-	+	+	+	-	-			
-						-	+	-	-	-	+	+		
+							+	-	+	+	+	-	-	
	-1	0	1	-2	-1	0	7	0	-1	-2	1	0	-1	

Рисунок 1.7 – Вычисление решетчатой АКФ

Нормированную ВКФ двух сигналов с энергиями E_1 и E_2

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{E_1 \cdot E_2}} \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t) dt \quad (1.49)$$

называют коэффициентом взаимной корреляции (коэффициентом различимости).

Для произвольного ансамбля сигналов $\{S_l(t)\}$ равных энергий, где $l = 1, 2, \dots, N$:

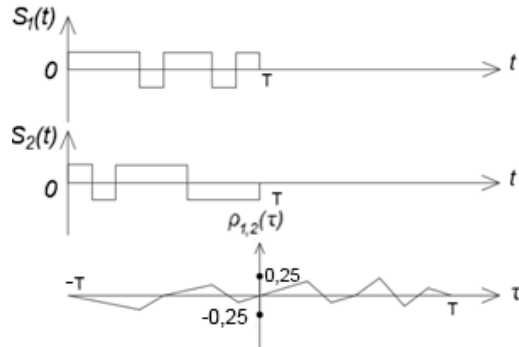
$$\rho_{ij}(0) = \frac{1}{E} \int_0^T S_i(t) \cdot S_j(t) dt. \quad (1.50)$$

Основные свойства ВКФ сигналов:

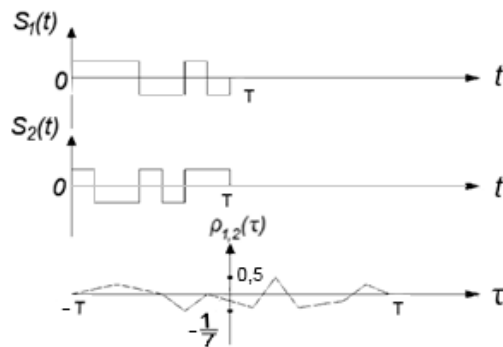
- 1) $\rho_{ij}(\tau) \neq \rho_{ij}(-\tau), \quad i \neq j$;
- 2) $-1 \leq \rho_{ij} < 1, \quad i \neq j$;
- 3) при $\rho_{ij}(0) = -1 \quad S_j(t) = -S_i(t)$;
- 4) при $\rho_{ij}(0) = 0 \quad S_i(t)$ и $S_j(t)$ ортогональны на всем промежутке наблюдения;
- 5) если $S_i(t)$ и $S_j(t)$ взаимно зависимые функции, то степень зависимости их определяется величиной $\rho_{ij}(0)$;
- 6) для системы n равноудаленных сигналов (такие сигналы называют симплексными)

$$\rho_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)}, n - \text{четно}, i \neq j, \\ -\frac{1}{n}, n - \text{нечетно}, i \neq j. \end{cases} \quad (1.51)$$

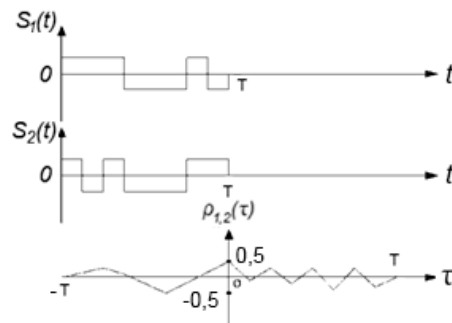
На рисунке 1.8, а приведены ВКФ ортогональных сигналов, на рисунке 1.8, б – симплексных и на рисунке 1.8, в – зависимых. Если по АКФ судят о точности и неопределенности временного положения сигнала, разрешающей способности и однозначности сигнала во времени, то вид ВКФ характеризует степень различимости сигналов, их делимости при совместном приеме.



а



б



в

а – ВКФ ортогональных сигналов; б – ВКФ симплексных сигналов;
в – ВКФ зависимых сигналов

Рисунок 1.8 – ВКФ сигналов

При работе РС с подвижными объектами или размещением РС на подвижных объектах помимо временной неопределенности сигнала появляется неопределенность в оценке частоты сигнала в связи с доплеровским набегом.

Обобщенной функцией, устанавливающей связь между элементами сигнала во временной и частотной областях, является двумерная корреляционная функция:

$$R(\tau, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t) \cdot \dot{A}^*(t - \tau) e^{j\Omega t} dt, \quad (1.52)$$

где $A(t)$ и $A^*(t - \tau)$ – соответственно комплексная огибающая сигнала и сопряженная с ней функция.

Обычно анализируют модуль нормированной двумерной корреляционной функции сигнала

$$|\rho(\tau, \Omega)| = \frac{1}{2E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t) \cdot \dot{A}^*(t - \tau) e^{j\Omega t} dt \right|, \quad (1.53)$$

или

$$|\rho(\tau, \Omega)| = \frac{1}{4\pi E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot S[j(\omega - \Omega)] e^{j\omega\tau} d\omega \right|, \quad (1.54)$$

который называют функцией неопределенности (ФН) сигнала.

Основные свойства ФН:

1) $|\rho(\tau, \Omega)|_{\text{макс}} = |\rho(0, 0)| = 1$;

2) $|\rho(\tau, \Omega)| = |\rho(-\tau, -\Omega)|$;

3) $|\rho(\tau, 0)| = \frac{1}{2E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t) \cdot \dot{A}^*(t - \tau) dt \right|$ – модуль нормированного АКФ сигнала;

нала;

4) $|\rho(0, \Omega)| = \frac{1}{4\pi E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot S[j(\omega - \Omega)] d\omega \right|$ – модуль спектральной функции квадрата огибающей сигнала, определяющий точность, разрешающую способность и однозначность при оценке частоты сигнала;

функции квадрата огибающей сигнала, определяющий точность, разрешающую способность и однозначность при оценке частоты сигнала;

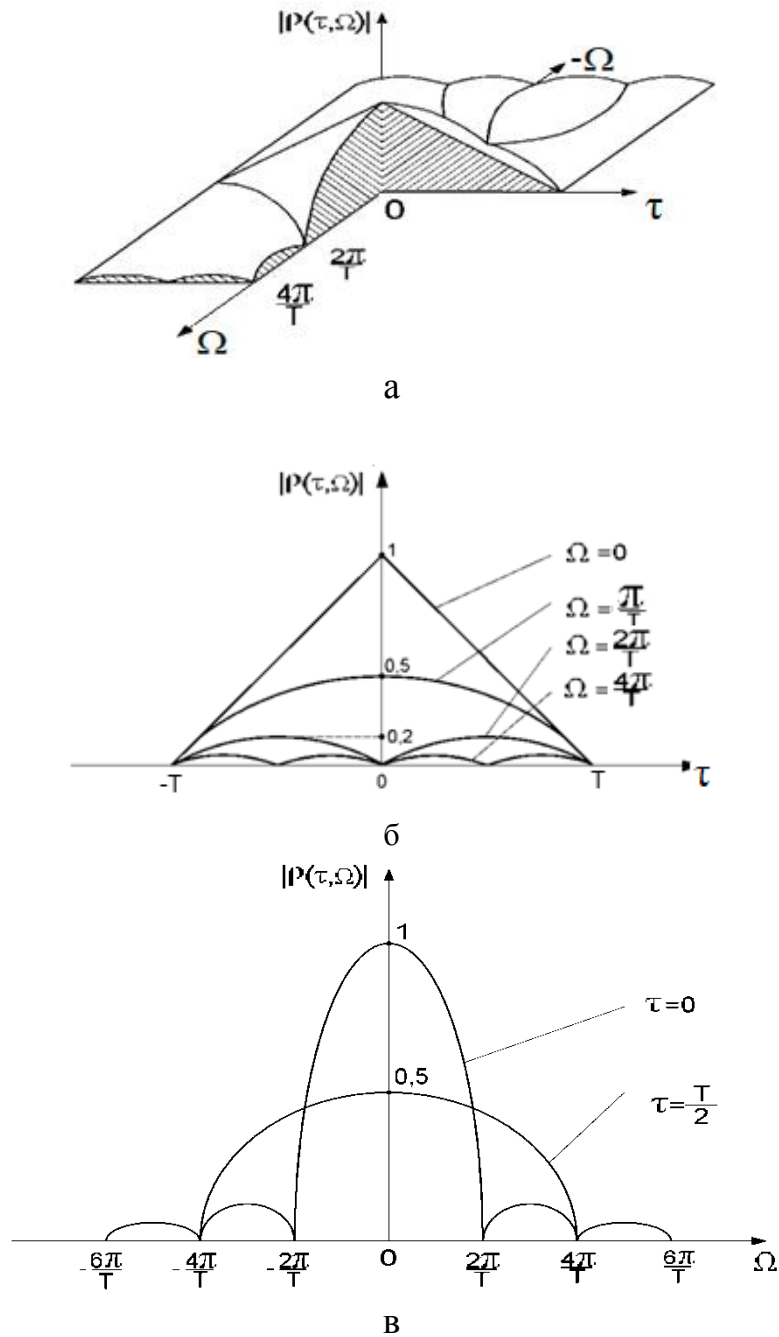
5) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau, \Omega)|^2 d\tau d\Omega = 1$ – объем, ограниченный ФН, есть величина постоянная, не зависящая от формы сигнала.

Последнее свойство в радиолокации известно как принцип неопределенности.

Для простых сигналов он сводится к тому, что повысить точность и разрешающую способность по $\tau(\Omega)$ можно лишь за счет ухудшения точности и разрешающей способности по $\Omega(\tau)$, так как почти весь объем тела неопределенности сосредоточен в области высокой корреляции. Только сложные сигналы позволяют получить тело неопределенности, близкое к игольчатому, с рав-

номерным распределением «излишка объема» в области низкой корреляции плоскости τ, Ω .

На рисунке 1.9 в качестве примера приведено тело неопределенности и его сечения, соответствующие прямоугольному импульсу длительностью T .



а – тело неопределенности; б – сечение $\Omega = \text{const}$; в – сечение $\tau = \text{const}$

Рисунок 1.9 – Тело неопределенности прямоугольного импульса и его сечения

1.2.5 Вид информационной модуляции

Используя гармоническое колебание как переносчик информации, модулированный сигнал в общем виде представляется как

$$S(t) = A(t) \cos \psi(t). \quad (1.55)$$

Из (1.55) вытекает два основных вида информационной модуляции: амплитудная (АМ) и угловая (УМ). Угловая модуляция в свою очередь подразделяется на фазовую (ФМ) и частотную (ЧМ). Для указанных видов информационной модуляции выражение (1.55) запишется в следующих видах:

$$\begin{aligned} \text{АМ} - S(t) &= A_0 [1 + M_{\text{АМ}} \lambda(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \text{ФМ} - S(t) &= A_0 \cos[\omega_0 t + \Delta\varphi_{\text{М}} \lambda(t) + \varphi_0], \\ \text{ЧМ} - S(t) &= A_0 \cos \left[\omega_0 t + \Delta\omega_{\text{М}} \int_0^T \lambda(t) dt + \varphi_0 \right]. \end{aligned} \quad (1.56)$$

В (1.56) $M_{\text{АМ}}$ – коэффициент амплитудной модуляции; $\Delta\omega_{\text{М}}$ – девиация частоты; $\Delta\varphi_{\text{М}}$ – приращение фазы; $\lambda(t)$ – информационное сообщение.

Модулированные колебания имеют сложный спектр, структура которого зависит от спектра передаваемого сообщения и вида модуляции. Рассмотрим каждый вид модуляции в плане помехозащищенности передаваемого сообщения.

Пусть $\lambda(t) = \cos \Omega t$ – гармоническое колебание частотой Ω .

Для АМ-сигнала

$$\begin{aligned} S(t) &= A_0 (1 + M_{\text{АМ}} \cos \Omega t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ \frac{A_0 M_{\text{АМ}}}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0] + \frac{A_0 M_{\text{АМ}}}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0]. \end{aligned} \quad (1.57)$$

На рисунке 1.10 изображен спектр сигнала с АМ, содержащий две боковые составляющие $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ информационного сообщения. Достаточно подавить эти две информационные составляющие, как сообщение будет стерто или искажено. Ширина спектра сигнала равна Ω/π . В общем случае, когда сообщение $\lambda(t)$ ограничено сверху частотой $F_{\text{М}}$, ширина спектра АМ-сигнала будет $F = 2F_{\text{М}}$.

С целью сокращения расхода энергии, кроме обычной АМ, применяется однополосная АМ и АМ без несущей. При однополосной АМ передается только одна боковая полоса, например, верхняя. АМ без несущей осуществляется с применением балансной модуляции. Сигналы с АМ имеют низкую информационную помехозащищенность, но просты в формировании.

Для УМ

$$S(t) = A_0 \cdot \cos[\omega_0 t + m \cdot \cos \Omega t + \varphi], \quad (1.58)$$

где m – индекс угловой модуляции: при ФМ $\rightarrow m_{\text{ФМ}} = \Delta\varphi_{\text{М}}$, при

$$\text{ЧМ} \rightarrow m_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta\omega_{\text{М}}}{\Omega}.$$

После соответствующих тригонометрических преобразований выражение (1.58) примет вид

$$S(t) = A_0 I_0(m) \cos \omega_0 t + A_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(m) \cos(\omega_0 t + k\Omega t) + A_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k(m) \cos(\omega_0 t - k\Omega t), \quad (1.59)$$

где $I_k(m)$ – функция Бесселя первого рода k -го порядка от аргумента m .

Теоретически спектр такого сигнала безграничен. В двух боковых полосах $\omega_0 \pm k\Omega$ даже для гармонического сообщения содержится множество информационных составляющих, подавить которые весьма трудно. Практически эффективная ширина спектра сигнала с УМ ограничена, так как при $k > m$ амплитуды боковых частот быстро убывают и ими можно пренебречь. Ширина спектра колебаний при УМ, таким образом, определяется выражением $F \approx 2mF_M$, где $F_M = \Omega/2\pi$ для гармонического сообщения и верхняя граничная частота для широкополосного сообщения. Для ФМ-сигнала $F = 2\Delta\varphi_M F_M$, а для ЧМ $\rightarrow F = \frac{\Delta\omega_M}{\pi}$. При малых индексах модуляции ($m < 1$) спектр сигнала с УМ мало чем отличается от спектра АМ-сигнала. На рисунке 1.11 приведен спектр сигнала с УМ ($\lambda(t) = \cos \Omega t$) для $m = 5$.

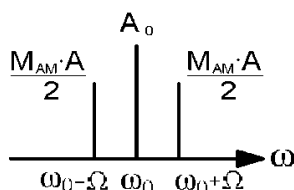


Рисунок 1.10 – Спектр сигнала с АМ

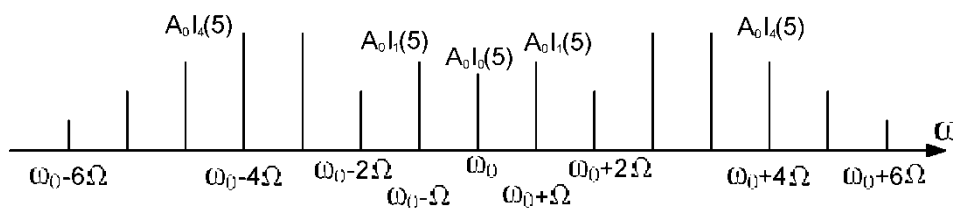


Рисунок 1.11 – Спектр сигнала с УМ

В РС ПИ широкое применение находят импульсные виды информационной модуляции: амплитудно-импульсная (АИМ), широтно-импульсная (ШИМ), фазоимпульсная (ФИМ), частотно-импульсная (ЧИМ) и кодово-импульсная (КИМ). В качестве первичного переносчика сообщения в импульсной модуляции используется периодическая импульсная последовательность, амплитуда, длительность и период повторения которой соответственно модулируются информационным сообщением. На рисунке 1.12 показаны формы сигналов при различных видах импульсной модуляции.

При разложении периодической последовательности импульсов $S(t)$ в ряд Фурье получим

$$S(t) = \frac{A \cdot \tau}{T_{\Pi}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau}{2}} \cos k\omega_1 t \right],$$

АИМ $\rightarrow A = A_0 + \Delta A \lambda(t), \tau = \tau_0, T_{\Pi} = T_{\Pi 0};$

ШИМ $\rightarrow \tau = \tau_0 + \Delta \tau \lambda(t), A = A_0, T_{\Pi} = T_{\Pi 0};$

ЧИМ $\rightarrow T_{\Pi} = T_{\Pi 0} + \Delta T_{\Pi} \lambda(t), A = A_0, \tau = \tau_0.$

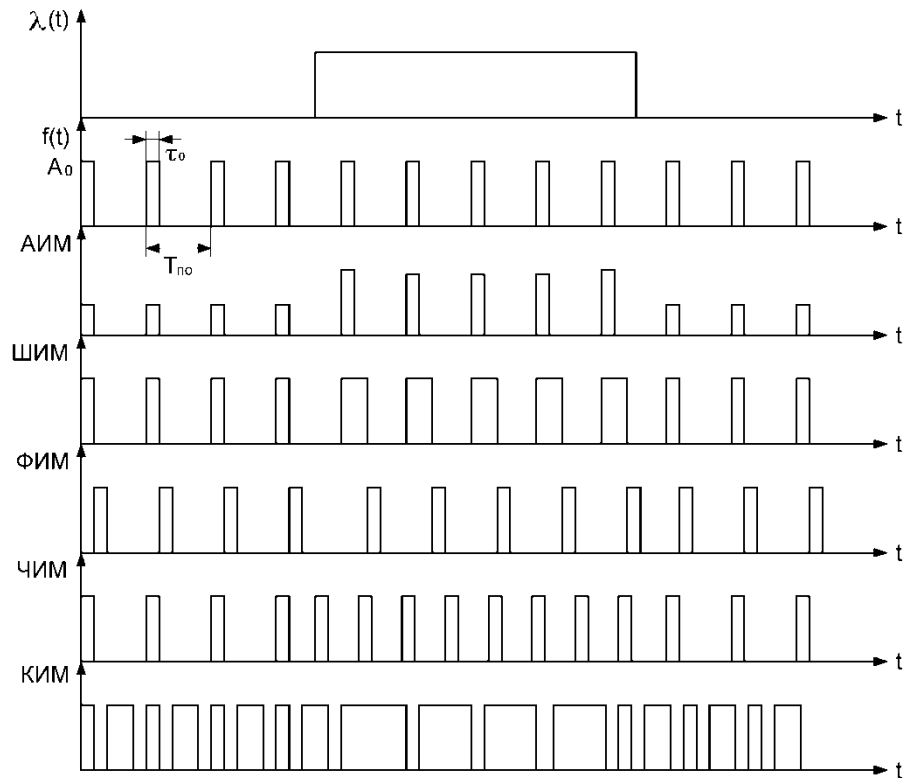


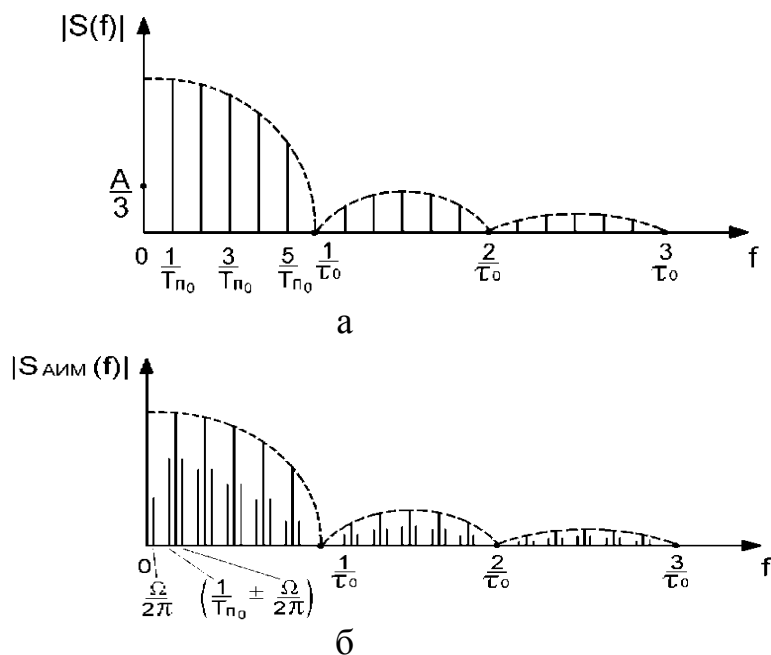
Рисунок 1.12 – Виды импульсной модуляции

ФИМ и КИМ являются производными от ШИМ и ЧИМ. В частности, при КИМ каждый уровень сообщения (при дискретном представлении) передается своей кодовой комбинацией, длительность которой равна ($T_{\Pi 0}$). Сигналы с импульсными видами модуляции обладают высокой информационной помехозащищенностью благодаря сложности спектра, его насыщенности информационными составляющими. В этом можно убедиться на примере с АИМ, взяв для упрощения $\lambda(t) = \sin \Omega t$.

При модуляции одним тоном

$$\begin{aligned}
S_{\text{АИМ}}(t) &= \frac{A_0\tau_0}{T_{\text{ПО}}} (1 + M_{\text{АМ}} \cdot \sin \Omega t) \cdot \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}}{\frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}} \cos \left(2\pi k \frac{t}{T_{\text{ПО}}} \right) \right] = \\
&= \frac{A_0\tau_0}{T_{\text{ПО}}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}}{\frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}} \cos \left(2\pi k \frac{t}{T_{\text{ПО}}} \right) \right] + \frac{M_{\text{АМ}} A_0 \tau_0}{T_{\text{ПО}}} \sin \Omega t + \\
&+ \frac{M_{\text{АМ}} A_0 \tau_0}{T_{\text{ПО}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}}{\frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}} \sin \left(\frac{2\pi k}{T_{\text{ПО}}} + \Omega \right) t + \frac{M_{\text{АМ}} A_0 \tau_0}{T_{\text{ПО}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}}{\frac{\pi k \tau_0}{T_{\text{ПО}}}} \sin \left(\frac{2\pi k}{T_{\text{ПО}}} - \Omega \right) t. \quad (1.60)
\end{aligned}$$

На рисунке 1.13 приведены графики спектров последовательности импульсов (рисунок 1.13, а) и модулированной по амплитуде последовательности импульсов (рисунок 1.13, б). Сравнение графиков спектров показывает, что при АИМ каждая составляющая немодулированным импульсом последовательности модулируется информационным сообщением. Нетрудно себе представить, что спектры сигналов для других видов импульсной модуляции будут более сложными. Следует отметить, что эффективная полоса частот, занимаемая такими сигналами, практически не зависит от вида модуляции и определяется лишь длительностью и формой импульса.



а – спектр немодулированной последовательности импульсов; б – спектр АИМ
Рисунок 1.13 – Графики спектров последовательности импульсов

1.2.6 Коэффициент частотно-временной связи. База сигнала

При совместной оценке ошибок измерения частоты и времени запаздывания вводится коэффициент частотно-временной связи. Он получается из анализа ФН сигнала. Рассматривая ФН сигнала только в области сильной корреляции, можно разложить ФН вблизи начала координат в ряд Тейлора, отбросив слагаемые третьего и более высокого порядка малости [2]:

$$|\rho(\tau, f)| \approx 1 + \frac{\tau^2}{2} \rho''_{\tau\tau}(0,0) + \frac{f^2}{2} \rho''_{ff}(0,0) + \tau \cdot f \rho''_{\tau f}(0,0). \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \text{В (1.61)} \quad \rho''_{\tau\tau}(0,0) &= \left. \frac{\partial^2 \rho(\tau, f)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0, f=0} = -F_{\text{эф}}^2, \\ \rho''_{ff}(0,0) &= \left. \frac{\partial^2 \rho(\tau, f)}{\partial f^2} \right|_{\tau=0, f=0} = -T_{\text{эф}}^2, \\ \rho''_{\tau f}(0,0) &= \left. \frac{\partial^2 \rho(\tau, f)}{\partial \tau \partial f} \right|_{\tau=0, f=0} = F_{\text{эф}} T_{\text{эф}} K_{\tau f}, \end{aligned}$$

где $K_{\tau f}$ – коэффициент частотно-временной связи.

Таким образом,

$$K_{\tau f} = \frac{1}{F_{\text{эф}} T_{\text{эф}}} \left. \frac{\partial^2 \rho(\tau f)}{\partial \tau \partial f} \right|_{\tau=0, f=0} = \frac{\pi}{F_{\text{эф}} T_{\text{эф}} E} \int_{-\infty}^{\infty} t \psi'(t) |S(t)|^2 dt. \quad (1.62)$$

В (1.62) $\psi(t)$ функция фазовой модуляции сигнала, характеризующей набег фазы за длительность сигнала. Если частота постоянна, то $K_{\tau f} = 0$ и оценки τ и f оказываются некоррелированными.

Произведение эффективной полосы частот, занимаемой сигналом, на его эффективную длительность называют базой сигнала B :

$$B = F_{\text{эф}} T_{\text{эф}}. \quad (1.63)$$

В зависимости от величины B различают сигналы простые и сложные:

$B \approx 1$, сигнал простой;

$B \gg 1$, сигнал сложный.

Например, база импульса прямоугольной формы длительностью T (рисунок 1.5, а) равна 1, так как $F_{\text{эф}} = \frac{1}{T}$, $T_{\text{эф}} \approx T$, а база цифрового сигнала (рисунок 1.5, в) равна 5, так как $F_{\text{эф}} = \frac{1}{\tau_0}$, $T_{\text{эф}} = 5\tau_0$.

Все сложные сигналы можно с помощью специальных согласованных фильтров сжать по длительности. Коэффициент сжатия определяется базой сигнала. Ряд сложных сигналов можно сжать и по частоте. Ниже рассматриваются некоторые классы сложных сигналов, нашедших широкое применение в РС.

1.3 Сложные сигналы в радиосистемах

Все сложные сигналы подразделяются на случайные и детерминированные. В качестве случайных сигналов используются реализации случайных процессов. С точки зрения корреляционно-спектральных характеристик случайные сигналы являются идеальными, так как их ФН являются кнопочными. Однако на практике высокие потенциальные возможности случайных сигналов реализовать достаточно трудно из-за сложности организации оптимальной обработки ввиду невозможности формирования копии сигнала. Поэтому в современных РС со сложными сигналами получили наибольшее распространение детерминированные методы формирования сигнала. Среди детерминированных сложных сигналов различают сигналы с непрерывной модуляцией и дискретной. Из всего многообразия сложных сигналов в данном разделе рассматриваются сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) и класс шумоподобных сигналов с фазовой и частотной манипуляциями.

1.3.1 Сигналы с линейной частотной модуляцией

ЛЧМ-сигналы – это класс сложных сигналов, расширение спектров которых осуществляется за счет девиации частоты по линейному закону в пределах длительности сигнала.

Принимая за точку отсчета $t = 0$ середину сигнала длительностью T , ЛЧМ-сигнал с прямоугольной огибающей запишется в виде следующей функции времени:

$$S(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \pi k t^2], \quad |t| \leq \frac{T}{2}, \quad (1.64)$$

где f_0 – центральная частота; $kt = F(t)$ – закон изменения частоты; A_0 – амплитуда сигнала; k – коэффициент, учитывающий крутизну изменения частоты.

На рисунке 1.14 показаны примерный вид ЛЧМ-сигнала, законы изменения его частоты и фазы. При этом фаза сигнала

$$\varphi(t) = 2\pi \left(f_0 t + \frac{\Delta F t^2}{2T} \right),$$

где $\Delta F = kT$ – девиация частоты.

Если $\Delta FT \gg 1$, эффективная ширина спектра сигнала $F_{\text{эф}} \approx \Delta F$. В противном случае $F_{\text{эф}}$ определяется значением $1/T$. Следовательно, база сигнала $B = T\Delta F$. Возможности ЛЧМ-сигнала выявляются из рассмотрения его ФН. Аналитическое выражение ФН комплексной огибающей ЛЧМ-сигнала имеет вид

$$|\rho(\tau, f)| = \begin{cases} \left| \frac{(1 - \frac{|\tau|}{T}) \sin \pi \left\{ \left(\frac{\Delta F}{T} \tau - f \right) [T - |\tau|] \right\}}{\pi \left(\frac{\Delta F}{T} \tau - f \right) [T - |\tau|]} \right|, & |\tau| \leq T. \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (1.65)$$

При $f = 0$ (сечение ФН плоскостью $f = 0$) выражение (1.65) принимает вид

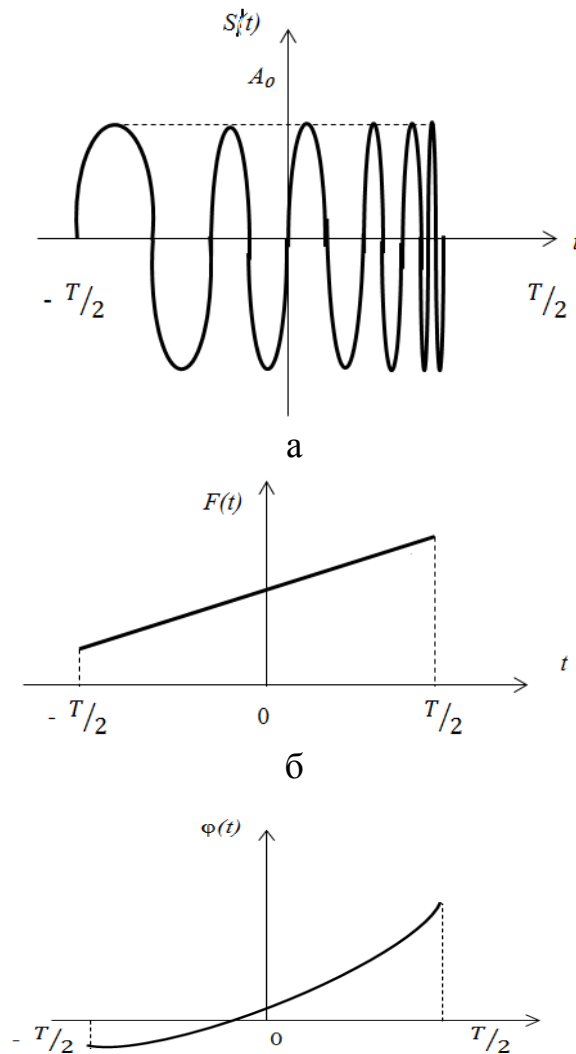
$$|\rho(\tau, 0)| = \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \left| \frac{\sin \pi \Delta F \tau \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)}{\pi \Delta F \tau \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)} \right| \quad (1.66)$$

и является модулем нормированной АКФ комплексной огибающей ЛЧМ-сигнала. Для $\Delta FT \gg 1$ выражение (1.66) упрощается:

$$|\rho(\tau, 0)| = |\rho(\tau)| = \left| \frac{\sin \pi \Delta F \tau}{\pi \Delta F \tau} \right|. \quad (1.67)$$

При $\tau = 0$ (сечение ФН плоскостью $\tau = 0$) выражение (1.65) представляет собой модуль спектральной функции прямоугольного видеоимпульса длительностью T :

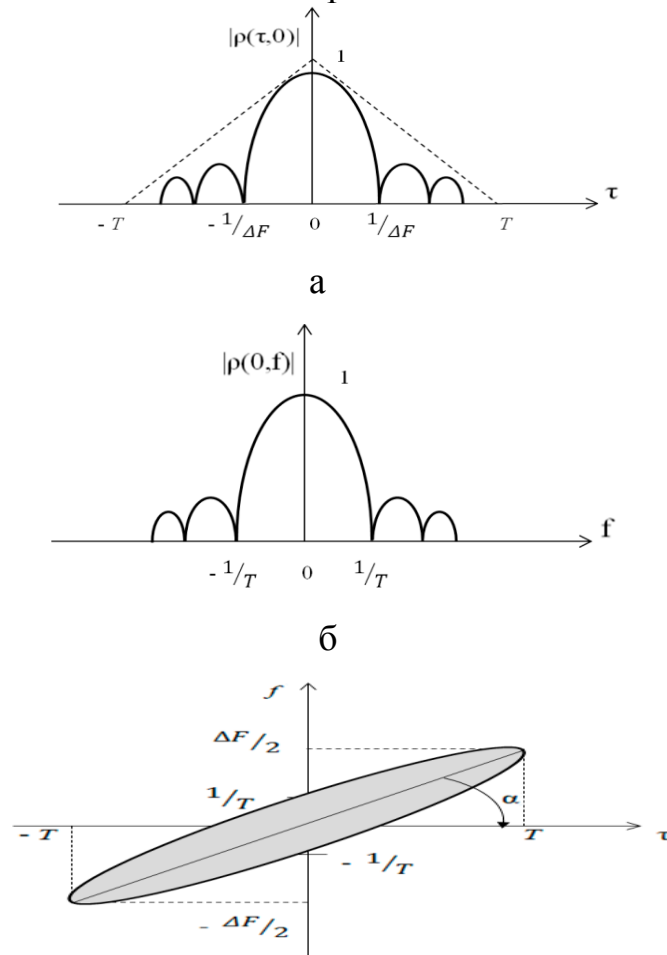
$$|\rho(0, f)| = \left| \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right|. \quad (1.68)$$



а – амплитудная функция; б – частотная функция; в – фазовая функция

Рисунок 1.14 – ЛЧМ-сигнал

На рисунке 1.15 приведены сечения ФН ЛЧМ-сигнала соответственно плоскостями $f = 0$ (1.67) и $\tau = 0$ (1.68). Анализ сечения (рисунок 1.14, а) показывает, что длительность основного лепестка корреляционной функции вдоль оси задержек имеет порядок $1/\Delta F$ и не зависит от длительности огибающей сигнала T , а определяется только максимальной девиацией частоты. Если время корреляции τ_k оценивать на уровне 0,5 от максимума АКФ, то $\tau_k \approx \frac{1,2}{\Delta F}$ и отношение $\frac{T}{\tau_k} = \frac{T\Delta F}{1,2} = K_{сж}$ можно рассматривать как коэффициент сжатия ЛЧМ-сигнала по времени. Возможность ЛЧМ-сигнала при корреляционной обработке сжиматься по оси времени позволяет увеличить точность и разрешающую способность при оценке временного положения. Точность и разрешающая способность при оценке частоты (рисунок 1.14, б) определяются в основном длительностью сигнала T . Однако при неизвестной задержке сигнала ($\tau \neq 0$) показатели качества ухудшаются. Этот эффект удобно наблюдать на диаграмме неопределенности ЛЧМ-сигнала – сечение ФН горизонтальной плоскостью (τ, f) на уровне 0,5 от максимального значения ФН (рисунок 1.15). Сложные ЛЧМ-сигналы нашли применение в системах радиолокации.



а – сечение $f = 0$; б – сечение $\tau = 0$; в – сечение на уровне 0,5

Рисунок 1.15 – Сечения ФН ЛЧМ-сигнала

1.3.2 Псевдослучайные сигналы с фазовой манипуляцией

Из всех сложных сигналов с ФМн наибольший интерес для РС представляют шумоподобные или псевдослучайные сигналы (ПС-сигналы), у которых фаза несущего колебания изменяется по закону дискретной псевдослучайной видеопоследовательности (ПСП).

Статистические характеристики ПСП и случайной видеопоследовательности похожи, что и определило название детерминированной видеопоследовательности. Аналитически ПС-сигнал с ФМн длительностью T записывается в виде

$$S(t) = A_0 \sum_{i=1}^N \text{rect}[t - (i-1)\tau_0] \exp[j(\omega_0 t + \varphi_i + \varphi_0)], \quad (1.69)$$

где $0 \leq t \leq N\tau_0$; τ_0 – длительность элементарного символа ПСП; N (размерность дискретного сигнала) – количество элементарных символов на длительности T ($N\tau_0 = T$); φ_i – дискретные значения фазы, привязанные к соответствующим дискретным значениям модулирующей ПСП, а функция

$$\text{rect}[t - (i-1)\tau_0] = \begin{cases} 1 & \text{при } (i-1)\tau_0 \leq t \leq i\tau_0, \\ 0 & \text{при } (i-1)\tau_0 > t > i\tau_0. \end{cases} \quad (1.70)$$

Комплексная огибающая сигнала (1.69) и закон фазовой манипуляции определяются соответственно следующими выражениями:

$$\dot{A}(t) = A_0 \sum_{i=1}^N \text{rect}[t - (i-1)\tau_0] \exp[j\varphi_i], \quad (1.71)$$

$$A(t) = \text{Re}\{\dot{A}(t)\} = A_0 \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \cdot \text{rect}[t - (i-1)\tau_0]. \quad (1.72)$$

Функцию $\cos \varphi_i$ удобно выразить через символ a_i длительностью τ_0 ($\cos \varphi_i = a_i$), а ПСП – как ансамбль символов $\{a_i\}$, где $i = 1, 2, \dots, N$. Если $a_i \in \{1, -1\}$ ($\varphi_i \in \{0, \pi\}$), то ПСП будет двухуровневой или бинарной. При большом количестве значений a_i ПСП – многоуровневая или многофазная. Очевидно, что спектрально-корреляционные свойства ПС-сигнала с ФМн полностью будут определяться модулирующей ПСП.

Ансамбли видеопоследовательностей можно отнести к классу ПСП, руководствуясь следующими свойствами:

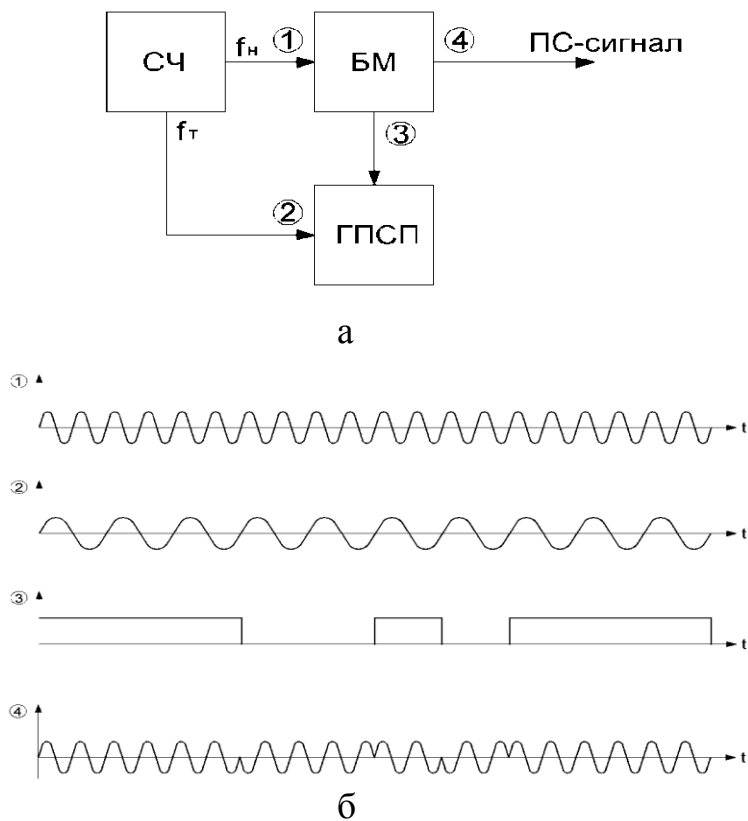
1. Взвешенность. Характеризуется примерным равенством различных символов $\{a_i\}$ на длительности T .
2. АКФ последовательности близка к огибающей кнопочной функции, т. е. максимальный уровень бокового остатка существенно ниже уровня основного пика АКФ.
3. Спектральная плотность видеопоследовательности в пределах ее эффективной полосы должна быть по возможности равномерной.

Существующие классы ПСП можно разбить на две группы: бинарные и небинарные.

К числу небинарных ПСП относятся линейные рекуррентные последовательности (ЛРП) с основанием $P > 2$ (основание характеризует количество различных уровней в последовательности), последовательности Цырлера [3; 4], последовательности символов Лежандра, многофазные коды Фрэнка [6], последовательности Де Лонга, E -коды Велти [5] и др. Отличительной особенностью небинарных ПСП является низкий уровень боковых остатков АКФ, модуль которых для одиночной последовательности не превышает $1/N$ (АКФ нормированная), а для периодической стремится к нулю.

Широкое применение в современных РС с ПС-сигналами нашли бинарные ПСП. Из множества классов бинарных ПСП ниже рассматриваются два класса, которые имеют хорошие спектрально-корреляционные характеристики и отличаются простотой формирования. На рисунке 1.16, а приведена структурная схема формирования ПС-сигнала с ФМн для бинарной ПСП. Указанные на рисунке 1.16, а обозначения соответствуют следующим узлам: СЧ – синтезатор двух когерентных частот f_H и f_T , ГПСП – генератор ПСП, БМ – балансный модулятор.

На рисунке 1.16, б приведены эюры, поясняющие процесс формирования ПС-сигнала с ФМн. Для простоты изображения взята $f_H = 3/T$.



а – структурная схема генератора; б – временные диаграммы работы генератора
Рисунок 1.16 – Генератор ПС-сигнала

1.3.3 М-последовательности

М-последовательности [4] – это класс линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП) максимального периода (отсюда и название М – максимальное) с основанием $p = 2$, удовлетворяющий рекуррентному правилу

$$a_i = c_1 a_{i-1} + c_2 a_{i-2} + \dots + c_n a_{i-n}, \quad (1.73)$$

где $c_i \in \{0,1\}$; n – порядок, определяющий память последовательности; умножение логическое, а сложение – по модулю 2.

Задавая начальной комбинацией из n символов по правилу (1.73), можно формировать М-последовательность. ЛРП описываются полиномами n -й степени вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = 0. \quad (1.74)$$

М-последовательность порядка n как последовательность максимального периода описывается неприводимым и примитивным полиномом степени n из всех заданных выражением (1.74). Количество ненулевых коэффициентов c_i в полиноме (1.74) за исключением $c_0 = 1$ определяет количество символов n -значной комбинации, участвующих в формировании по правилу (1.73), причем число их всегда четное. Например, неприводимый и примитивный полином $x^3 + x^2 + 1 = 0$ описывает М-последовательность порядка $n = 3$, и рекуррентное правило формирования символов имеет вид

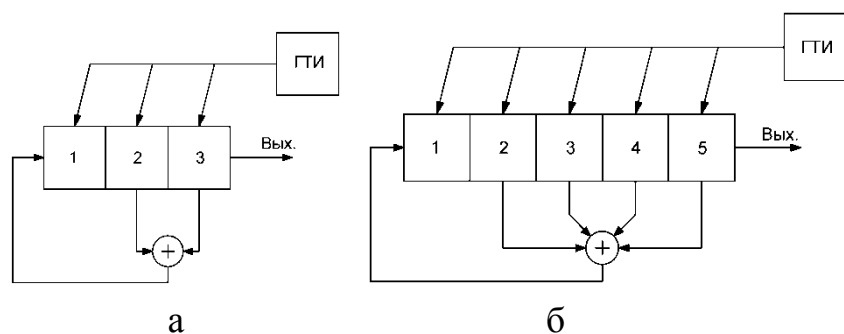
$$a_i = a_{i-2} + a_{i-3}. \quad (1.75)$$

По полиному $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$ рекуррентную формулу генерирования М-последовательности порядка $n = 5$ записывают так:

$$a_i = a_{i-2} + a_{i-3} + a_{i-4} + a_{i-5}. \quad (1.76)$$

На рисунке 1.17 приведены структуры генераторов М-последовательностей порядков 3 и 5 по правилам (1.75) и (1.76) соответственно.

В качестве n -разрядной памяти используются регистры сдвига, управляемые генераторами тактовых импульсов (ГТИ).



а – $N = 7$; б – $N = 31$

Рисунок 1.17 – Генераторы М-последовательностей

Размерность N (количество символов a_i в одном периоде) М-последовательности зависит от порядка n и определяется формулой

$$N = 2^n - 1.$$

На рисунке 1.18 демонстрируется формирование М-последовательности размерностью $N = 7$ по тактам. Двоичные символы, расположенные столбцами справа от линии, являются символами М-последовательности, сформированными на выходе генератора при начальной комбинации 111.

При работе генератора М-последовательности необходимо учесть, что запрещенной начальной комбинацией в регистре сдвига является комбинация из всех нулей. Генератор М-последовательности позволяет формировать как периодическую, так и одиночную последовательность.

Иногда при анализе свойств М-последовательности удобно представлять $a_i \in \{-1, 1\}$. В этом случае рекуррентные формулы (1.75) и (1.76) примут вид

$$a_i = a_{i-2} \cdot a_{i-3}, \quad (1.77)$$

$$a_i = -a_{i-2} \cdot a_{i-3} \cdot a_{i-4} \cdot a_{i-5}, \quad (1.78)$$

где умножение алгебраическое.

0 такт	111	
1 такт	011	1
2 такт	001	1
3 такт	100	1
4 такт	010	0
5 такт	101	0
6 такт	110	1
7 такт	111	0

Рисунок 1.18 – Формирование М-последовательности по тактам

Рассмотрим основные структурные и спектрально-корреляционные свойства М-последовательности:

1. В периоде последовательности число символов 1 отличается от числа символов 0 на единицу.

2. В периоде последовательности содержатся все n -значные комбинации двоичного кода, кроме нулевой.

3. В периоде последовательности из общего числа 2^{n-1} серий 2^{n-2} содержат один символ, 2^{n-3} – два символа, 2^{n-4} – три символа и т. д., пока это число не станет равным 1.

Здесь сериями называют комбинации, состоящие из одинаковых символов. Например, в периоде $N = 2^n - 1 = 31$ ($n = 5$, генератору соответствует рисунок 1.17, б) последовательности содержится 16 серий. Из них восемь серий

имеют только по одному символу, четыре – по два символа, две – по три символа и по одной серии – четыре символа и пять символов. Среди всех серий ровно половина единичных, а другая половина – нулевых. Данное свойство характерно для случайных последовательностей, у которых частота появления серий должна уменьшаться с увеличением числа символов в серии или ее размерности.

4. При суммировании по модулю 2 любой М-последовательности с ее циклическим сдвигом меньше периода получается та же М-последовательность, но с другим циклическим сдвигом. Например, при сложении последовательности (рисунок 1.18) с ее циклическим сдвигом на два символа вправо получим последовательность, которая отличается от первоначальной циклическим сдвигом на три символа вправо:

$$\begin{array}{r} 1110010 \\ + 1011100 \\ \hline 0101110 \end{array} \quad (1.79)$$

Данное свойство является определяющим при анализе корреляционных характеристик периодической М-последовательности.

5. Количество М-последовательностей одной значности определяется выражением

$$z = \frac{\varphi(2^n - 1)}{n}, \quad (1.80)$$

где $\varphi(x)$ – фи-функция Эйлера, равна количеству целых положительных чисел, включая единицу, меньших x и взаимно простых с x . Причем если x – простое число, то $\varphi(x) = x - 1$. Например, при $2^n - 1 = 15$, x принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 и $\varphi(15) = 8$ (взаимно простые числа с числом 15 подчеркнуты). В таблице 1.1 даны значения z для М-последовательностей различных порядков.

Таблица 1.1

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
z	1	2	2	6	6	18	6	48	60	176	144	630	756	1800

В [7] приведены таблицы порождающих полиномов М-последовательностей.

6. Основным показателем корреляционных свойств одиночных последовательностей является уровень максимальных остатков АКФ. АКФ М-последовательности сложная функция времени и в общем виде может быть записана следующим образом:

$$R(k\tau_0 + \varepsilon) = \left(1 - \frac{|\varepsilon|}{\tau_0}\right) \sum_{i=1}^{N-k} a_i \cdot a_{i+k} + \frac{|\varepsilon|}{\tau_0} \sum_{i=1}^{N-k-1} a_i \cdot a_{i+k+1}, \quad (1.81)$$

где $0 \leq k \leq (N-1)$, $0 \leq \varepsilon \leq \tau_0$, $a_i \in \{1, -1\}$, $k\tau_0 + \varepsilon = \tau$.

Анализ нормированных АКФ М-последовательностей различных размерностей N с различными циклическими сдвигами показывает, что модуль нормированного максимального бокового остатка не превышает величины

$$|\rho(\tau)| \leq \frac{1,25}{\sqrt{N}}. \quad (1.82)$$

Среди последовательностей одной размерности N , сформированных по одному полиному, но при разных начальных комбинациях (различные циклические сдвиги), существуют последовательности с минимальным уровнем модуля максимального остатка АКФ, которые называются минимаксные. Например, у минимаксной М-последовательности, полученной по рекуррентной формуле (1.77),

$$|\rho(\tau)|_{\text{макс}} = \frac{1}{N} \text{ при } |\tau| > \tau_0. \quad (1.83)$$

Эта последовательность совпадает с кодом Баркера размерностью 7.

У кодов Баркера модуль боковых остатков нормированных АКФ не превышает значения (1.83). Кодов Баркера всего шесть ($N = 3, 4, 5, 7, 11, 13$).

Интересно отметить, что сумма всех боковых остатков решетчатой АКФ одиночной М-последовательности определяется выражением

$$\sum_{k=1}^{N-1} R(k\tau_0) = -\frac{N-1}{2}. \quad (1.84)$$

На рисунке 1.19, а, б, в приведены нормированные АКФ одиночных М-последовательностей размерностью 7 и 15, причем АКФ (рисунок 1.16, а) принадлежит минимаксной М-последовательности.

7. АКФ любой периодической М-последовательности связана со свойством 4, является периодической функцией с тем же периодом, что и М-последовательность, и в пределах одного периода $N\tau_0$ определяется выражением

$$\rho_{\Pi}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{N}\right), & |\tau| \leq \tau_0, \\ -\frac{1}{N}, & \tau_0 \leq |\tau| \leq (N-1)\tau_0. \end{cases} \quad (1.85)$$

На рисунке 1.20 приведена нормированная АКФ периодической М-последовательности.

8. Спектральная плотность. Выражения для спектральной плотности одиночной и периодической М-последовательности можно найти, воспользовавшись преобразованием Винера – Хинчина:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Для одиночной М-последовательности энергетический спектр имеет вид

$$F(\omega) = |S_0(j\omega)|^2 \left[N + 2 \sum_{i=1}^{N-1} R(i\tau_0) \cos \omega i \tau_0 \right], \quad (1.86)$$

где $S_0(j\omega)$ – спектральная функция огибающей элементарного символа последовательности длительностью τ_0 .

Из выражения (1.86) следует, что ширина спектра M -последовательности определяется спектром элементарного символа последовательности длительностью τ_0 и при $\omega = 0$ с учетом свойства (1.85) $F(0) = |S_0(0)|^2$, т. е. постоянная составляющая спектральной плотности последовательности совпадает с постоянной составляющей спектральной плотности одиночного символа. На рисунке 1.21 в качестве примера показана спектральная плотность одиночной M -последовательности размерностью $N = 15$ (АКФ соответствует рисунку 1.19, в). Очевидно, что различные циклические перестановки этого сигнала дадут различные спектры вследствие различия АКФ.

Выражение для энергетического спектра периодической M -последовательности имеет вид

$$F_n(\omega) = \frac{N+1}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2 \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi i}{N\tau_0} \right) - \frac{1}{N} \delta(\omega). \quad (1.87)$$

Энергетический спектр (1.87) линейчатый и имеет огибающую вида $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$, такую же, как и огибающая энергетического спектра прямоугольного

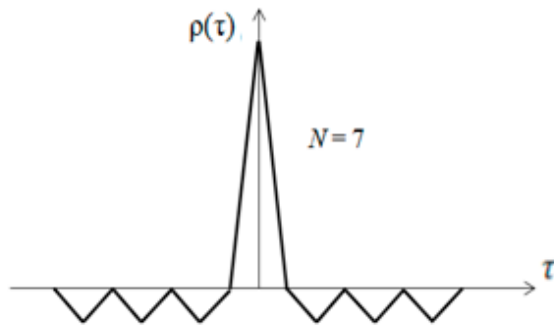
импульса длительностью τ_0 . Расстояние между линиями спектра равно $\frac{2\pi}{N\tau_0}$, а мощность i -й гармоники (исключая $i = 0$) равна

$$F \left(\frac{2\pi i}{N\tau_0} \right) = \frac{N+1}{\pi^2 i^2} \sin^2 \frac{\pi i}{N}. \quad (1.88)$$

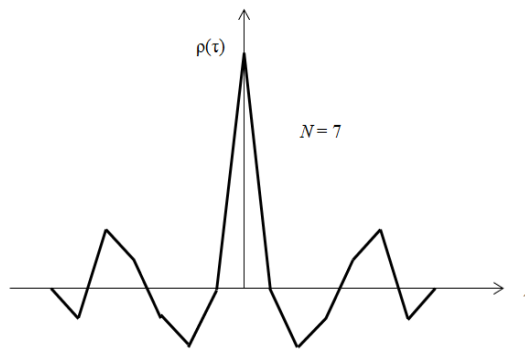
Мощность постоянной составляющей одностороннего спектра

$$F(0) = \frac{1}{N^2}. \quad (1.89)$$

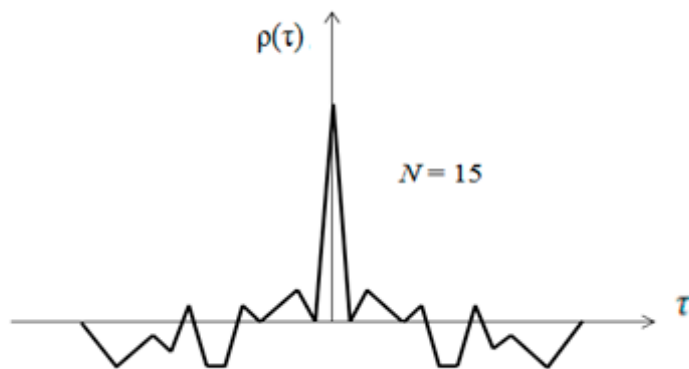
На рисунке 1.21 показан линейчатый спектр периодической M -последовательности размерностью $N = 15$. Если размерность последовательности увеличивается (без изменения τ_0), огибающая спектральной плотности остается неизменной, возрастает количество линеек спектра (его густота). При этом неизменной остается и эффективная полоса частот, занимаемая видеоследовательностью $F_{\text{эф}} = 1/\tau_0$. Непрерывной кривой показан энергетический спектр одиночной M -последовательности.



а



б



в

а – АКФ минимаксной последовательности; б – АКФ неминимаксной последовательности; в – АКФ последовательности размерностью $N = 15$

Рисунок 1.19 – Нормированные АКФ М-последовательностей

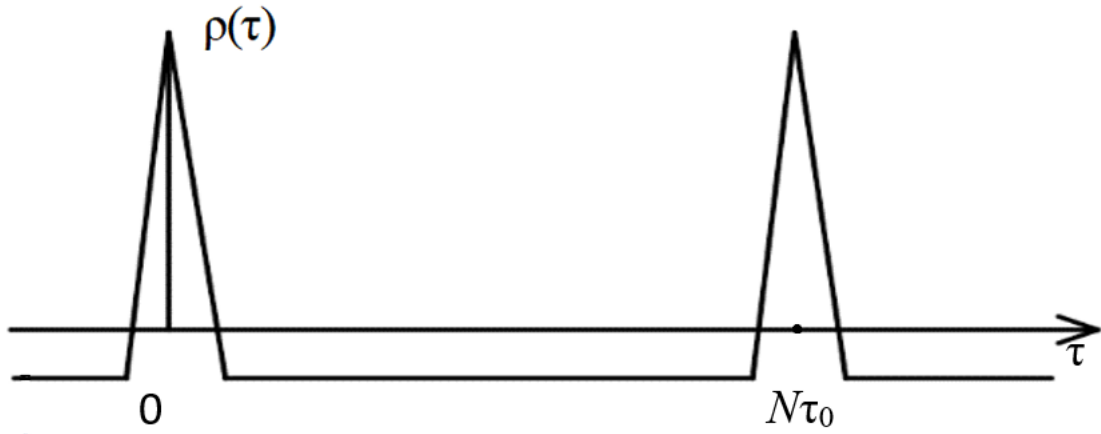


Рисунок 1.20 – АКФ периодической M-последовательности

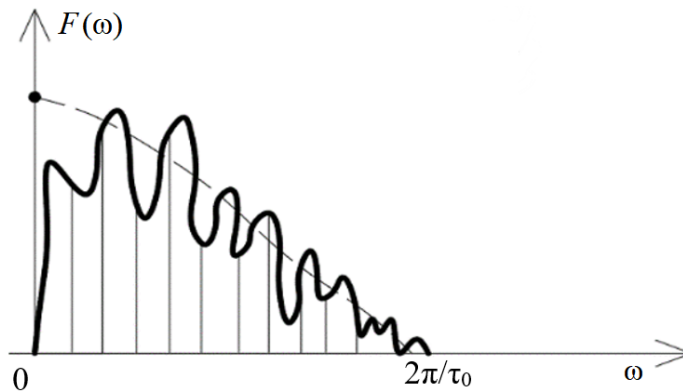


Рисунок 1.21 – Спектральная плотность M-последовательности

9. Функция неопределенности (ФН). Вид ФН M-последовательности позволяет оценить потенциальные возможности ПС-сигнала в области $\{\tau, f\}$, а именно: точность и разрешающую способность, однозначность и способность к синхронизации. Исходя из общего определения ФН через нормированную двумерную АКФ получим для одиночной M-последовательности размерностью N :

$$\begin{aligned}
 \rho(\tau, f) &= \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A^*(t - \tau) \exp[-j2\pi ft] dt = \\
 &= \frac{1}{N\tau_0} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N a_i a_l \int_{\tau}^{N\tau_0} \text{rect}[t - \tau_0(i-1)] \text{rect}[t - \tau_0(l-1) - \tau] \exp[-j2\pi ft] dt = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N a_i a_l \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{N\tau_0} \text{rect}(t) \text{rect}(t - \tau_l) \exp[-j2\pi f(t - (i-1)\tau_0)] dt = \\
 &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N-n} a_i a_{i+n} \exp[-j2\pi f\tau_0(i-1)] \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\varepsilon} \exp[-j2\pi ft] dt + \sum_{i=1}^{N-(n+1)} a_i a_{i+n+1} \exp[-j2\pi f\tau_0 i] \frac{1}{\tau_0} \int_{\varepsilon}^{\tau_0} \exp[-j2\pi ft] dt \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \left[\rho_0(\varepsilon, f) \sum_{i=1}^{N-n} a_i a_{i+1} \exp[-j2\pi f\tau_0(i-1)] \right] + \rho_0(\tau_0 - \varepsilon, f) \sum_{i=1}^{N-(n+1)} a_i a_{i+n+1} \exp[-j2\pi f\tau_0 i], \quad (1.90)
 \end{aligned}$$

где $0 < \tau = n\tau_0 + \varepsilon < N\tau_0$, $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$; $i-1 = n$, $0 < \varepsilon < \tau_0$, $\rho_0(\tau_1, f)$ – двумерная корреляционная функция импульса прямоугольной формы длительностью τ_0 и единичной амплитудой:

$$\rho_0(\tau_1, f) = (1 - \frac{|\tau_1|}{\tau_0}) \frac{\sin \pi f \tau_0 (1 - \frac{|\tau_1|}{\tau_0})}{\pi f \tau_0 (1 - \frac{|\tau_1|}{\tau_0})}. \quad (1.91)$$

В конечном виде выражение (1.91) получено в результате соответствующих подстановок и учета реальных пределов интегрирования. Оно справедливо для любых бинарных последовательностей длиной $N\tau_0$.

При $\tau = N\tau_0$ ($\varepsilon = 0$)

$$\rho(n\tau_0, f) = \frac{1}{N} \frac{\sin \pi f \tau_0}{\pi f \tau_0} \sum_{i=1}^{N-n} a_i a_{i+n} \exp[-j2\pi f \tau_0 (i-1)]. \quad (1.92)$$

Сечение $\rho(n\tau_0, f)$ плоскостью $f = 0$ дает нормированную решетчатую АКФ одиночной последовательности:

$$\rho(n\tau_0, 0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-n} a_i a_{i+n}. \quad (1.93)$$

При $\tau = 0$ (сечение плоскостью $\tau = 0$)

$$\rho(0, f) = \frac{1}{N} \frac{\sin \pi f \tau_0}{\pi f \tau_0} \sum_{i=1}^N a_i^2 \exp[-2\pi f \tau_0 (i-1)] = \frac{\sin \pi f N \tau_0}{\pi f N \tau_0}, \quad (1.94)$$

где первый нуль имеет место на частоте $f = 1/N\tau_0$, определяющей разрешающую способность ПС-сигнала по частоте.

На рисунке 1.22 приведены сечения ФН М-последовательности размерностью $N = 15$, вычисленных по формуле (1.92) при $\tau = \text{const}$ и f , принимающих положительные значения. Уровень максимальных выбросов в плоскости $\{\tau, f\}$ в этих сечениях не превышает величины $2/\sqrt{N}$. Однако в ФН

любой М-последовательности имеются устойчивые выбросы, значения которых достигают 30 % от основного пика. Это имеет место в сечениях ФН плоскостями $|\tau| < \tau_0$, причем максимальные значения выбросов отмечаются в плоскости $\tau = \pm \tau_0/2$.

Воспользуемся выражением (1.93), предварительно представив каждый символ М-последовательности через два одинаковых, но с длительностью $\tau_0/2$:

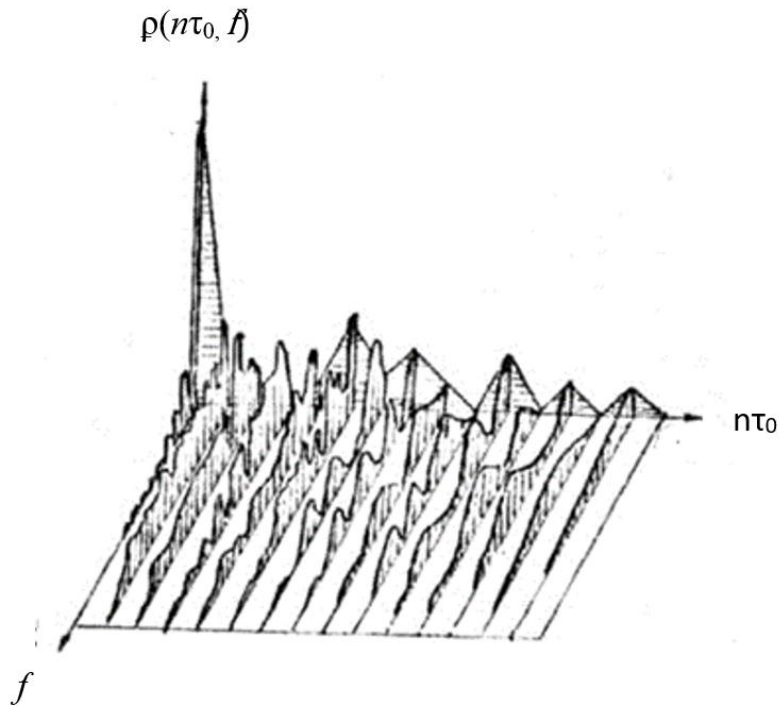


Рисунок 1.22 – Сечения ФН М-последовательности $N = 15$

$$\begin{aligned}
 \rho\left(\frac{\tau_0}{2}, f\right) &= \frac{1}{2N} \frac{\sin \frac{\pi f \tau_0}{2}}{\frac{\pi f \tau_0}{2}} \sum_{i=1}^{2N-1} a_i a_{i+1} \exp[-j2\pi f \frac{\tau_0}{2} (i=1)] = \\
 &= \frac{1}{2N} \frac{\sin \frac{\pi f \tau_0}{2}}{\frac{\pi f \tau_0}{2}} \exp[j\pi f \tau_0] \sum_{i=1}^{2N-1} a_i a_{i+1} \exp[-j\pi f \tau_0 i] = \\
 &= \frac{1}{2N} \frac{\sin \frac{\pi f \tau_0}{2}}{\frac{\pi f \tau_0}{2}} \exp[j\pi f \tau_0] \left[\sum_{i=1}^N a_i^2 \exp[-j\pi f \tau_0 2i] + \right. \\
 &\quad \left. + \exp[-j\pi f \tau_0] \sum_{i=1}^{N-1} a_i a_{i+1} \exp[-j2\pi f \tau_0 i] \right]. \quad (1.95)
 \end{aligned}$$

Анализ выражения (1.95) на максимум показывает, что он имеет место при $f = 1/\tau_0$. Подставив это значение в (1.95) и учитывая (1.94), получим

$$\left| \rho\left(\frac{\tau_0}{2}, \frac{1}{\tau_0}\right) \right| = \frac{1}{2N} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cos \pi \left[\sum_{i=1}^N a_i^2 + \cos \pi \sum_{i=1}^{N-1} a_i a_{i+1} \right] \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{1}{\pi} (-1) \left[N - \frac{1,25}{\sqrt{N}} \right] \right| \approx \frac{1}{\pi}. \quad (1.96)$$

Результат в (1.96) говорит о том, что в спектре произведения М-последовательности на ее циклический сдвиг, равный $|\tau| \leq \tau_0$, содержится ярко выраженная составляющая на частоте $f = 1/\tau_0$, амплитуда которой принимает максимальное значение, равное $1/\pi$, относительно $\rho(0,0)$ при $\tau = \pm \frac{\tau_0}{2}$.

На рисунке 1.23 приведена фотография спектра произведения М-последовательности с ее циклическим сдвигом $\tau = \frac{\tau_0}{2}$ ($N = 255$). Максимальные выбросы соответствуют $f = \pm 1/\tau_0$.

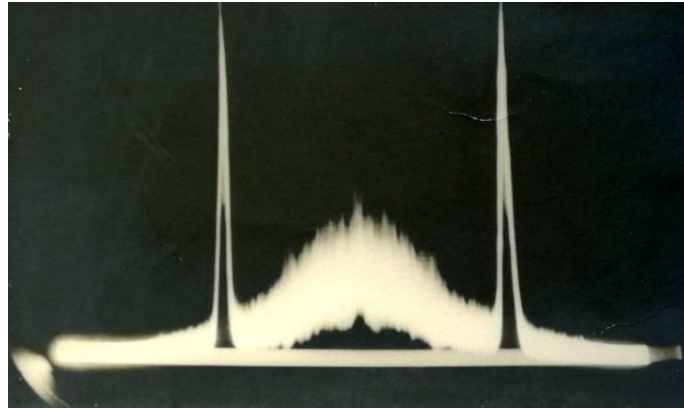


Рисунок 1.23 – Спектральная плотность сечения ФН $\rho(0,5\tau_0, f)$

Свойство (1.96) является очень важным при когерентной обработке ПС-сигнала на этапе синхронизации. Благодаря интересным структурным и хорошим спектрально-корреляционным свойствам класс бинарных М-последовательностей нашел широкое применение в системах радиолокации и радионавигации, системах передачи информации и командно-измерительных комплексах.

1.3.4 Четверично-кодированные последовательности

Четверично-кодированные последовательности (ЧКП), в [8;9] их называют Д-кодами, относятся, как и М-последовательности, к классу бинарных ПСП. В отличие от М-последовательностей семейство ЧКП формируется нелинейным способом и имеет размерность $N = 2^k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$.

Наиболее наглядно процесс формирования ЧКП можно проследить, проанализировав порождающее выражение

$$A_j^k = \overline{\sum_{i=1}^{k-1} B_i^{(k+1)-i} \cdot B_{i+1}^{k-i} + \sum_{i=1}^k X_i^j \cdot B_i^{(k+1)-i}}, \quad (1.97)$$

где $A_j^k = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – условная запись одиночной ЧКП длительностью $T = N\tau_0$ порядка k номера j , символы которой $a_i \in \{0,1\}$; $B_i^{(k+1)-i}$ – функция Радемахера (меандровая функция), определяемая на длительности T с номером i и порядком $[(k+1)-i]$; $X_i^j \in \{0,1\}$ – значение i -го разряда номера последовательности A_j^k , представленного в двоичном виде (для ЧКП порядка k номер опреде-

ляется k -разрядным двоичным числом). В (1.97) суммирование осуществляется по модулю 2, умножение логическое, черта сверху – негатив.

На рисунке 1.24 приведены эшоры, поясняющие процесс формирования ЧКП A_4^3 ($N = 2^3 = 8$, номер последовательности 4 в двоичной форме – 100).

Выражение (1.97) для ЧКП A_4^3 примет вид

$$A_4^3 = \overline{B_1^3 \cdot B_2^2 + B_2^2 \cdot B_3^1 + 0 \cdot B_2^2 + 1 \cdot B_3^1} = \overline{B_3^1 \cdot B_2^2 + B_2^2 \cdot B_3^1 + B_3^1}. \quad (1.98)$$

Второй член выражения (1.97) при изменении номера j описывает строки матрицы Адамара. Матрица Адамара – ортогональная квадратичная матрица (обозначается H_N) размером $N = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, составленная из символов $\{0,1\}$ или $\{-1,1\}$.

Строки матрицы Адамара образуют полную ортонормированную систему с количеством функций $2^k = N$. Эти функции называются функциями Уолша, упорядоченные по Адамару. Простейшей матрицей Адамара является матрица размером 2:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.99)$$

Любую матрицу Адамара размером $2N$ можно получить из матрицы размером N , используя следующее преобразование:

$$H_{2N} = \begin{vmatrix} H_N & H_N \\ H_N & \overline{H_N} \end{vmatrix}, \quad (1.100)$$

где H_N – матрица Адамара размером N , у которой значения символов изменены на противоположные.

Если в выражении (1.97) все разряды номера X_i^j равны нулю, то остается только первый член выражения, формирующий нулевую ЧКП:

$$A_0^k = \overline{\sum_{i=1}^{K-1} B_i^{(k+1)-i} \cdot B_{i+1}^{k-i}}. \quad (1.101)$$

Следовательно, для получения ЧКП любого номера j достаточно сложить по модулю 2 A_0^k с каждой строкой матрицы Адамара:

$$H_{2N} = \begin{vmatrix} H_N & H_N \\ H_N & \overline{H_N} \end{vmatrix}. \quad (1.102)$$

В качестве примера получим семейство ЧКП значностью $N = 8$ на основе матрицы Адамара.

Матрица Адамара размером $N = 8$ имеет вид

$$H_8 = \begin{array}{cccccccc} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} j \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{array}{l} X_i^j \\ 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array} \end{array} \quad (1.103)$$

В соответствии с (1.101) A^3_0 примет вид

$$1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1. \quad (1.104)$$

Подставив в (1.102) значения (1.104) и (1.105), получим квадратную матрицу размером $N = 8$, строки которой являются полным семейством ЧКП значностью $N = 8$:

$$\{A^3_j\} = [00010010] + \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} 11111111 \\ 10101010 \\ 11001100 \\ 10011001 \\ 11110000 \\ 10100101 \\ 11000011 \\ 10010110 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} 11101101 \\ 10111000 \\ 11011110 \\ 10001011 \\ 11100010 \\ 10110111 \\ 11010001 \\ 10000100 \end{array} \right] & \begin{array}{l} j \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{array}{l} X_i^j \\ 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array} \end{array} \quad (1.105)$$

Из выражения (1.97) следует, что ЧКП порядка k формируются из функций Радемахера, которые, в свою очередь, получаются с выходов разрядов k -разрядного двоичного счетчика. На рисунке 1.25 приведена структура генератора, формирующего любую ЧКП из семейства заданной размерности. В состав генератора входит формирователь тактовых импульсов с периодом τ_0 (ФТИ), двоичный счетчик на k разрядов (ДСЧ), формирователь нулевой последовательности (ФНП), функции которого может выполнить дешифратор, коммутатор номера последовательности (КН) и сумматор по модулю 2 (С). В реальных генераторах узлы ФНП, КН и С совместно минимизируются. На рисунке 1.26 в качестве примера приведена схема генератора семейства ЧКП размерностью $N = 8$.

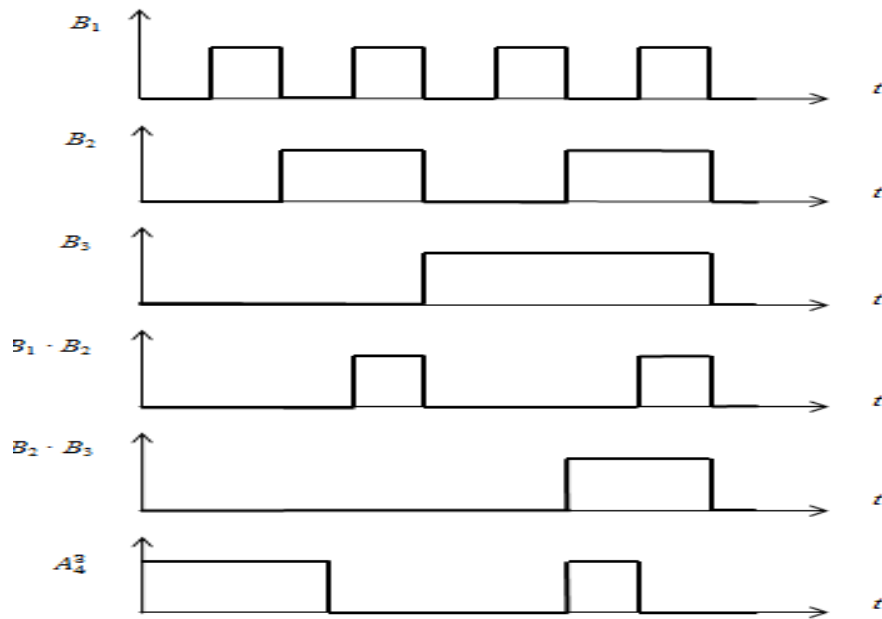


Рисунок 1.24 – Эпюры формирования ЧКП

Ниже рассматриваются основные структурные и спектрально-корреляционные свойства семейства ЧКП.

1. Количество последовательностей одной значности равно N , причем все они взаимно ортогональны, как и строки матрицы Адамара.

2. Разность Δ между количеством разных символов в ЧКП зависит от порядка k -последовательности и определяется соотношением

$$\Delta = \begin{cases} 2^{\frac{k+1}{2}}, & k - \text{нечетное,} \\ 0, & k - \text{нечетное,} \\ 2^{\frac{k}{2}}, & k - \text{четное.} \end{cases} \quad (1.106)$$

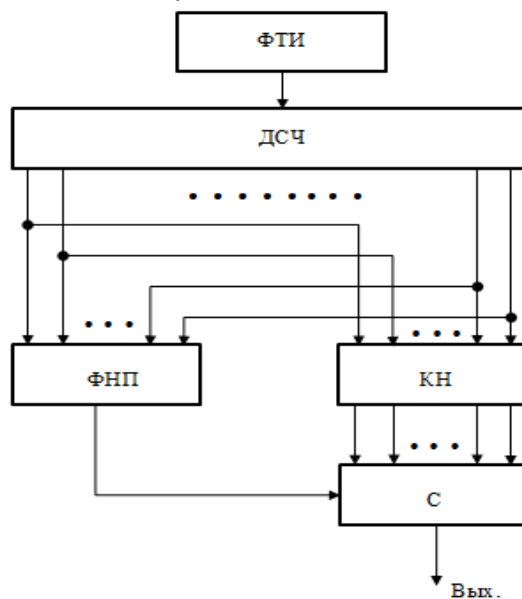


Рисунок 1.25 – Обобщенная структурная схема формирователя ЧКП

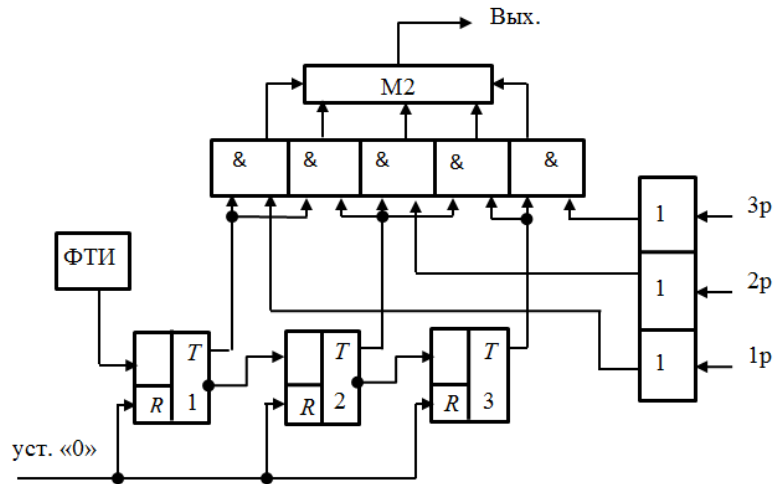


Рисунок 1.26 – Генератор ЧКП размерностью $N = 8$

Последовательностям с $\Delta = 0$ соответствует нечетное количество I , стоящих на нечетных позициях в двоичном номере последовательности. Например, при $k = 3$, выражение (1.106), уравновешенными являются ЧКП $A_1^3, A_3^3, A_4^3, A_6^3$.

3. Каждой ЧКП A_j^k соответствует парная A_i^k , причем $|i - j| = 2^{k-1}$. У парных последовательностей A_j^k и A_i^k первые 2^{k-1} символа совпадают, а следующие 2^{k-1} противоположны. Например, $A_0^3 = 11101101$ и $A_4^3 = 11100010$.

4. Каждой ЧКП A_j^k соответствует смежная A_l^k , причем $|j - l| = 1$. У смежных последовательностей символы, стоящие на нечетных позициях, совпадают, и не совпадают символы, стоящие на четных позициях (или наоборот). Если обозначить через A_j^k инверсную к A_i^k (порядок следования символов обратный), а через A_j^k негативную A_i^k (символы противоположны), то смежная последовательность обозначается как

$$A_j^k = \begin{cases} \overline{A_j^k} & \left\{ \begin{array}{l} \text{а) количество 1 в двоичном } j \text{ нечетно, при } k - \text{ нечетно,} \\ \text{б) количество 1 в двоичном } j \text{ четно, при } k - \text{ четно.} \end{array} \right. \\ \overline{A_j^k} & \left\{ \begin{array}{l} \text{а) количество 1 в двоичном } j \text{ четно, при } k - \text{ нечетно,} \\ \text{б) количество 1 в двоичном } j \text{ нечетно, при } k - \text{ нечетно.} \end{array} \right. \end{cases}$$

Например:

а) $A_2^3 \rightarrow 11011110$ и $A_3^3 \rightarrow 10001011$, парная $A_2^3 \rightarrow 11010001$, инверсия парной $A_2^3 \rightarrow 10001011$;

б) $A_6^3 \rightarrow 11010001$ и $A_7^3 \rightarrow 10000100$, парная $A_6^3 \rightarrow 11011110$, инверсии парной $A_6^3 \rightarrow 01111011$, негатив инверсии парной $A_6^3 \rightarrow 10000100$.

5. Любая ЧКП размерностью N получается из двух парных последовательностей размерностью $N/2$ путем их присоединения или двух смежных той же значности путем чередования их символов.

Например, ЧКП A_0^3 можно получить из двух парных A_0^2 и A_2^2 или двух смежных A_0^2 и A_1^2 путем присоединения или чередования соответственно $A_0^2 \rightarrow 1110$, $A_2^2 \rightarrow 1101$, $A_1^2 \rightarrow 1011$; $A_0^3 \rightarrow 11101101$.

Из данного свойства вытекает алгоритм формирования ЧКП по ее двоичному j : если первый разряд двоичного номера 1 , записываются два первых символа 10 , если первый разряд двоичного номера 0 , записываются -11 , а для всех последующих разрядов номера нулю соответствует приписывание к полученной комбинации ей парной, единице – негатива парной.

Рассмотрим этот алгоритм на примере формирования ЧКП A_{10}^4 .

Номер последовательности в двоичном виде 1010 :

1-й разряд номера $0 \rightarrow 11$,

2-й разряд номера $1 \rightarrow 1101$,

3-й разряд номера $0 \rightarrow 11011110$,

4-й разряд номера $1 \rightarrow 1101111000101110$.

6. Особенностью АКФ одиночной и периодической ЧКП является равенство нулю боковых остатков при сдвигах τ , кратных четным величинам длительности символов.

Общее выражение для нормированной АКФ одиночной ЧКП имеет вид

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{N} \right), 0 \leq |\tau| \leq \tau_0; \\ \sum_{i=1}^{N/2} \rho[(2i-1)\tau_0] \left(1 - \frac{\tau - (2i-1)\tau_0}{\tau_0} \right), 0 \leq [(2i-1)\tau_0] \leq \tau_0. \end{cases} \quad (1.107)$$

На рисунке 1.27 приведены примеры АКФ некоторых одиночных ЧКП.

На рисунке 1.28 представлены зависимости, отражающие характер изменения модуля максимального уровня бокового остатка АКФ одиночной ЧКП от ее порядка $\log_2 N = k$. Причем зависимость 1 дает представление о верхнем уровне модуля максимального остатка, а зависимость 2 – о возможном нижнем уровне. Для сравнения пунктирная зависимость 3 характеризует модуль максимально возможного уровня бокового остатка АКФ одиночной M -последовательности.

Для минимаксных ЧКП одной значности модуль максимального бокового остатка АКФ определяется следующим выражением:

$$\rho_{\text{мин.макс}} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[(k-4)2^{\frac{k-4}{2}} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} (1+2^{i-1}) \right], k - \text{четно}, k \geq 4; \\ \frac{1}{N} \left[(k-3)2^{\frac{k-3}{2}} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} (1+2^{i-1}) \right], k - \text{нечетно}, k \geq 3. \end{cases} \quad (1.108)$$

В таблице 1.2 приведены значения максимальных боковых остатков АКФ одиночных минимаксных ЧКП.

Таблица 1.2

N	16	32	64	128	256	512	1024
$\rho(\tau)_{\text{мин.макс}}$	0,187	0,219	0,14	0,135	0,098	0,08	0,063

7. ЧКП размерностью $N = 2^k$, отличающиеся своими номерами на величину 2^{k-2} , имеют одинаковые по величине и знаку боковые остатки АКФ, однако порядок следования остатков относительно основного пика инверсный (рисунок 1.29).

8. Сумма боковых остатков решетчатой АКФ одиночной ЧКП принимает следующие значения:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \rho(n\tau_0) = \begin{cases} 0, k - \text{четно}; \\ \pm 1/2, k - \text{нечетно}. \end{cases} \quad (1.109)$$

В справедливости соотношения (1.109) можно убедиться, рассмотрев АКФ рисунков 1.27 и 1.29.

9. АКФ парных и смежных ЧКП имеют боковые остатки, при одинаковых сдвигах равные по величине и противоположные по знаку (рисунок 1.30).

Если A_i^k и A_j^k парные (смежные) последовательности, а их нормированные АКФ соответственно $\rho_{A_i^k}$ и $\rho_{A_j^k}$, то

$$\rho_{A_i^k}(\tau) + \rho_{A_j^k}(\tau) = \begin{cases} 2(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}), 0 \leq |\tau| \leq \tau_0; \\ 0, |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (1.110)$$

Соотношение (1.110) характерно для дополнительных последовательностей (серий), описанных Голеем [9]. Все свойства, присущие дополнительным последовательностям, справедливы и для семейства ЧКП.

10. Если боковые остатки АКФ одиночной ЧКП размерностью N опреде-

ляются функцией взаимной корреляции парных последовательностей размерностью $N/2$, образующих эту последовательность, то уровень боковых остатков периодической ЧКП той же размерности определяется суммой двух функций взаимной корреляции, образующих одиночные парные последовательности, вычисленные «справа» и «слева».

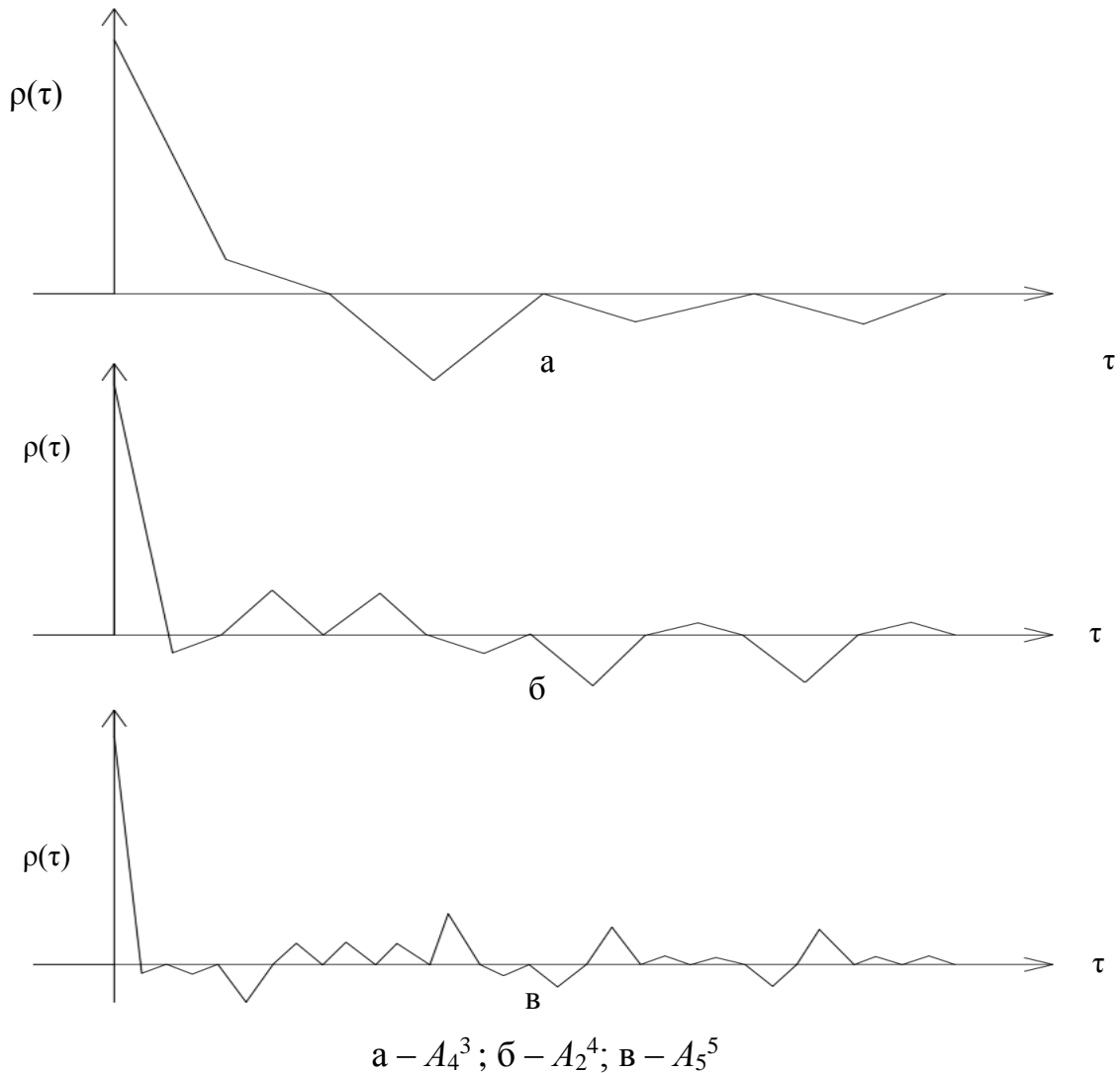


Рисунок 1.27 – АКФ одиночных ЧКП

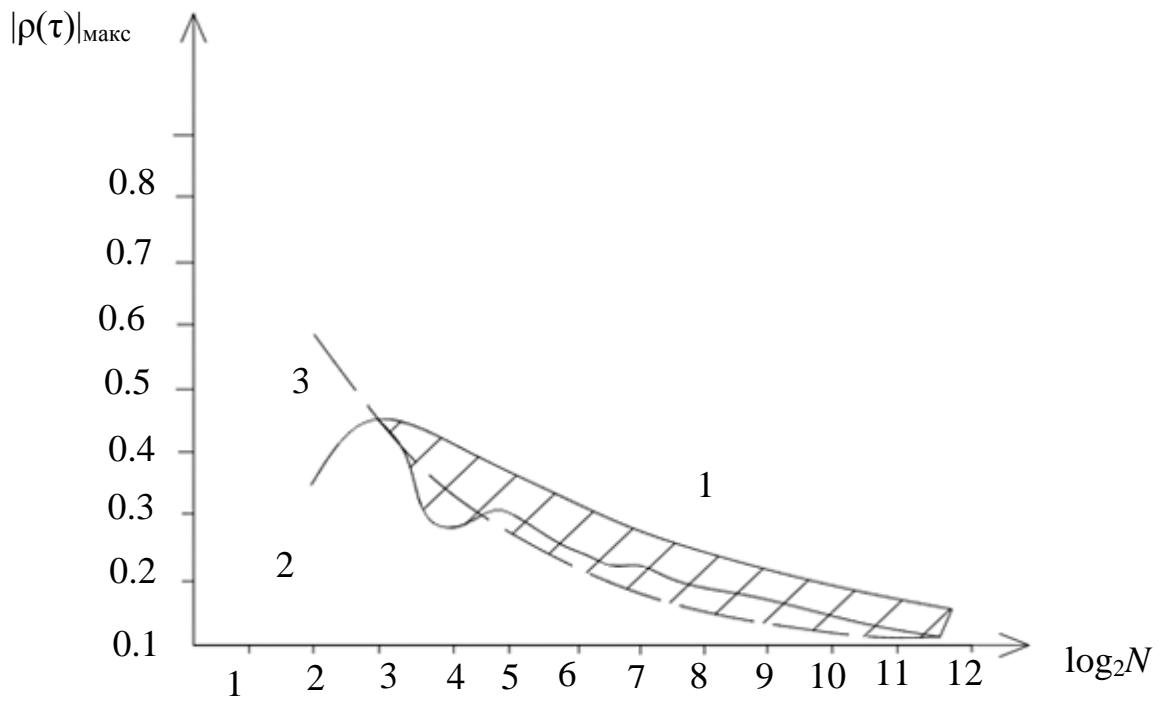


Рисунок 1.28 – Модуль максимального уровня боковых остатков АКФ

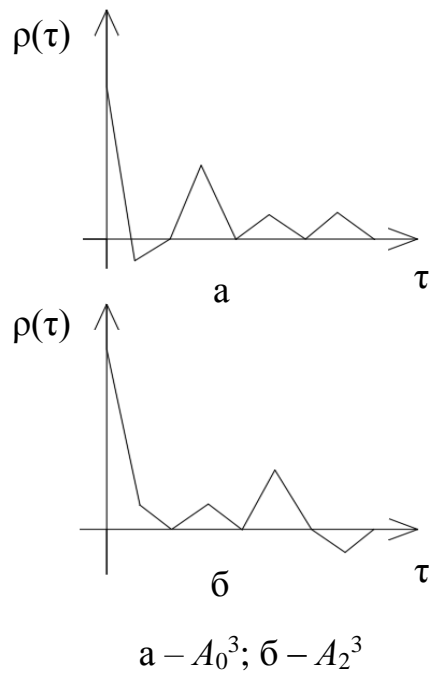
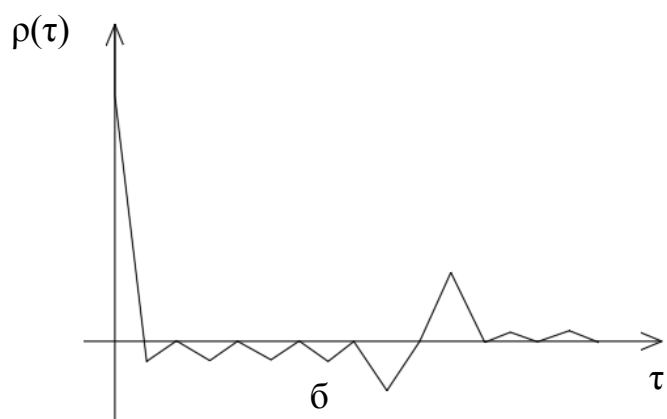
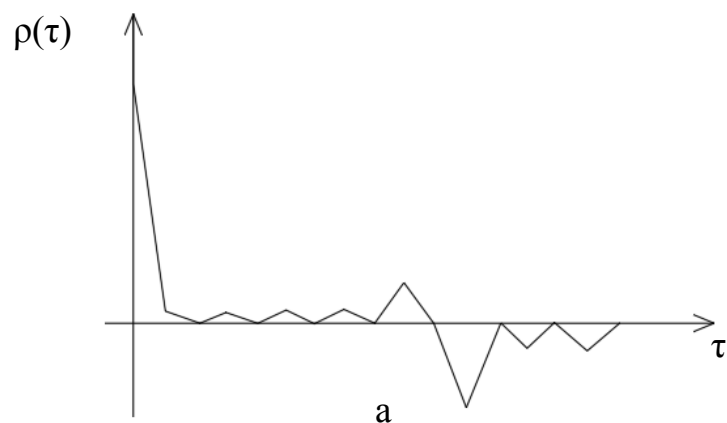


Рисунок 1.29 – ЧКП с инверсными АКФ



а – A_0^4 ; б – A_8^4

Рисунок 1.30 – АКФ парных одиночных ЧКП

Обобщенное выражение для нормированной АКФ периодической ЧКП имеет вид

$$\rho_n(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{|\tau - Nn\tau_0|}{\tau_0} \right), & 0 \leq |\tau - Nn\tau_0| \leq \tau_0 \\ 0, & (nN + 1)\tau_0 \leq |\tau| \leq nN \frac{\tau}{4} \quad \text{и} \\ & \frac{3}{4}(Nn\tau_0) \leq |\tau| \leq (Nn - 1)\tau_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N/4} \rho_n \left[\left(\frac{N}{4} + 2i - 1 \right) \tau_c \right] \left[1 - \frac{\left| \tau - \left(Nn + \frac{N}{4} + 2i - 1 \right) \tau_c \right|}{\tau_0} \right], & \\ & 0 \leq \left| \tau - \left(Nn + \frac{N}{4} + 2i - 1 \right) \tau_c \right| \leq \tau_0. \end{cases} \quad (1.111)$$

Анализ (1.111) показывает:

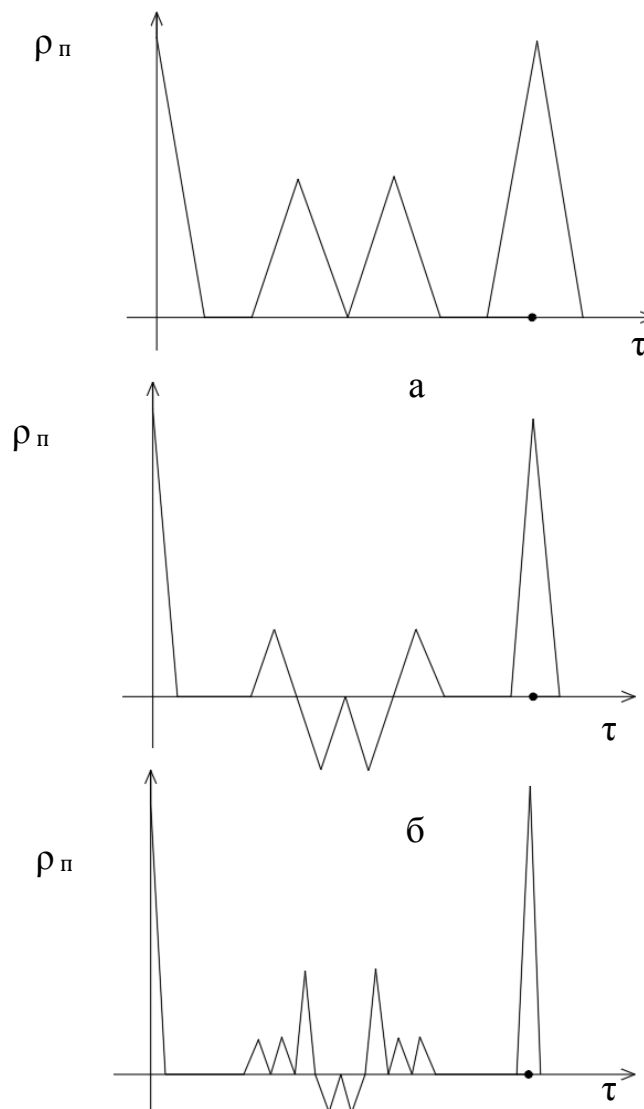
а) боковые остатки АКФ периодической ЧКП порядка K полностью определяются боковыми остатками АКФ одиночной ЧКП порядка $(K-2)$ и равны их учетверенным значениям;

б) в окрестностях основного пика АКФ периодической ЧКП, в пределах четверти периода следования последовательности ($T = N\tau_0$) боковые остатки равны нулю;

в) нахождение периодической ЧКП порядка K с наилучшими АКФ сводится к нахождению образующих парных последовательностей порядка $(K-2)$ одиночных ЧКП с наилучшими АКФ.

Наилучшие АКФ имеют минимаксные последовательности.

На рисунке 1.31 приведены АКФ периодических ЧКП A_2^3 , A_0^4 и A_2^5 .



а – A_2^3 ; б – A_0^4 ; в – A_2^5

В
Рисунок 1.31 – АКФ периодических ЧКП

11. Энергетический спектр периодической ЧКП описывается следующим выражением:

$$F(f) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \pi f \tau_0}{\pi f \tau_0} \right)^2 \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^{N/4} R_{II} \left[\left(\frac{N}{4} + 2i - 1 \right) \tau_0 \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos \left[2\pi f \left(\frac{N}{4} + 2i - 1 \right) \tau_0 \right] \right\} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta \left(2\pi f - \frac{2\pi p}{N\tau_0} \right). \quad (1.112)$$

$$\text{При } f = 0 \quad F(0) = \left. \begin{array}{l} \left\{ \frac{2}{N}, k - \text{нечетно} \right\} \\ 0 \\ \left\{ \frac{1}{N}, k - \text{четно} \right\} \end{array} \right\} \quad (1.113)$$

и определяется свойством 2, соотношением (1.106).

Огибающая модуля энергетического спектра как одиночной, так и периодической ЧКП мало чем отличается от огибающей соответствующей функции М-последовательности. Эффективная полоса частот $F_{\text{эф}}$, занимаемая четверично-кодированным ПС-сигналом, определяется длительностью символа $\tau_0 \rightarrow F_{\text{эф}} \approx \frac{2}{\tau_0}$.

На рисунке 1.32 приведена спектрограмма ЧКП размерностью $N = 256$. Степень изрезанности огибающей спектра зависит от боковых остатков АКФ последовательности и с увеличением размерности последовательности уменьшается, а вид АКФ приближается к кнопочной форме.

12. Описание двумерной АКФ ЧКП в общем виде записывается аналогично (1.91), (1.92), (1.93). Ярко выраженной особенностью ФН ЧКП, в отличие от ФН М-последовательности и других бинарных последовательностей, является наличие выброса в сечении ФН плоскостью $\tau = \tau_0$ на частоте $f = 1/4\tau_0 = f_r/4$. Выброс является следствием четверичной структуры ЧКП.

При $\tau = \tau_0, f = 1/4\tau_0$ и $a_i \in \{-1, 1\}$ имеем [7]

$$\left| \rho \left(\tau_0, \frac{1}{4\tau_0} \right) \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \sum_{i=1}^{N-1} a_i a_{i+1} \exp \left[-j \frac{\pi}{2} (i-1) \right] \right| = \\ = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \sum_{i=1}^{N-1} j a_i a_{i+1} \exp \left[-j \frac{\pi i}{2} \right] \right| = \frac{1}{N} \left| \left(0,9 j \left[\pm 1 \pm j \frac{N}{2} \right] \right) \right| \approx 0,45. \quad (1.114)$$

Конечный результат (1.114) справедлив при $N \gg 1$ и получен с учетом структурных и корреляционных свойств ЧКП: нечетным значениям i соответствует знакопеременное произведение $a_i \cdot a_{i+1}$ и знакопеременное $j \sin \frac{\pi}{2} i = \pm j$,

четным значениям $i - \sum_{i=1}^{N-1} a_i a_{i+1} \cos \frac{\pi i}{2} = \pm 1$. На рисунке 1.33 приведена спектрограмма сечения.

При $\tau = \tau_0/2, f = 1/\tau_0$ ФН ЧКП, как и ФН М-последовательности, имеет устойчивый выброс (рисунок 1.23):

$$\left| \rho \left(\frac{\tau_0}{2}, \frac{1}{\tau_0} \right) \right| = \frac{1}{2N} \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cos \pi \sum_{i=1}^N a_i^2 \cos 2\pi i + \sum_{i=1}^{N-1} a_i a_{i+1} \cos 2\pi i \right| = \quad (1.115)$$

$$= \frac{1}{N\pi} [N \mp 1] \approx \frac{1}{\pi}.$$

Свойства сечений (1.114) и (1.115) можно использовать для синхронизации при обработке ПС-сигнала.

В качестве примера на рисунке 1.34 приведены сечения ФН ЧКП размерностью $N = 16$.

Специфические особенности структурных и спектрально-корреляционных свойств семейства ЧКП, особенно в последнее время, привлекают разработчиков систем радиолокации и радионавигации, систем передачи информации и управления.

Рассмотренные два класса ПСП благодаря простоте генерирования, хорошим спектрально-корреляционным характеристикам, большим ансамблям нашли наибольшее распространение в ПС-сигналах с ДФМ, обеспечивая возможность реализации ускоренных алгоритмов обработки сигналов при минимальных аппаратных затратах.

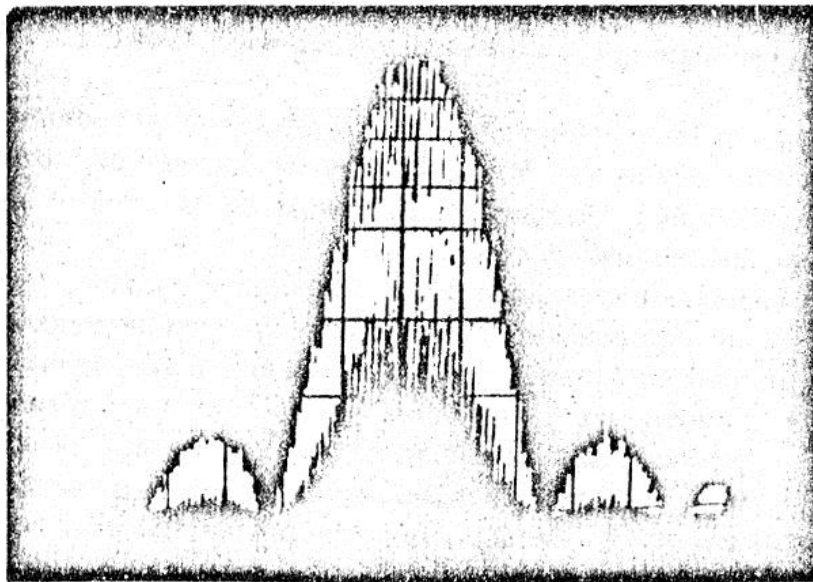


Рисунок 1.32 – Спектрограмма ЧКП

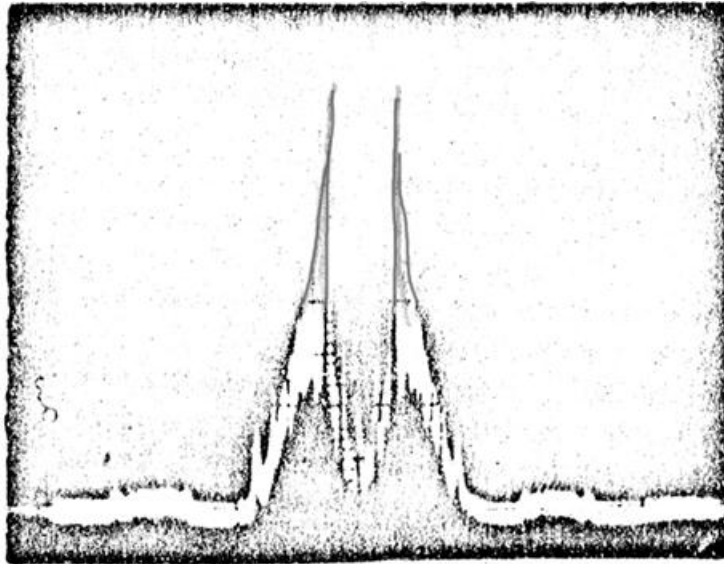


Рисунок 1.33 – Спектрограмма сечения ФН ЧКП $\rho(\tau_0, 1/4\tau_0)$

На базе этих классов ПСП синтезируются системы комбинированных сигналов, повышающих эффективность систем со сложными сигналами.

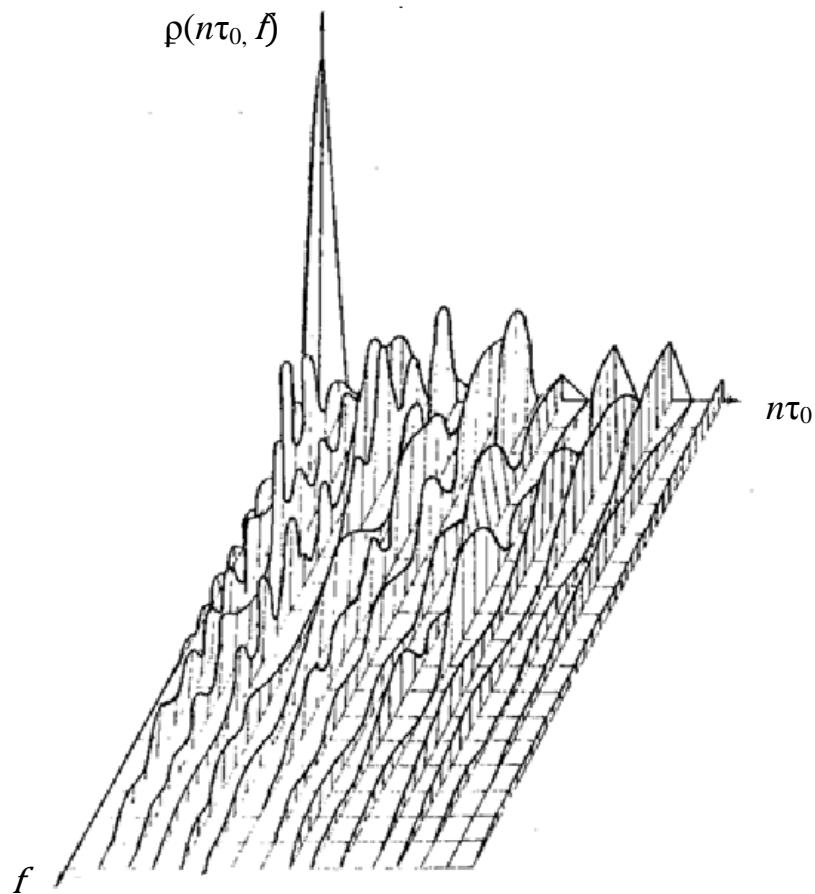


Рисунок 1.34 – Сечения ФН ЧКП размерностью $N = 16$

1.3.5 Псевдослучайные сигналы с частотной манипуляцией

Прямым следствием развития сигналов с частотной модуляцией явились частотно-манипулированные (ЧМн) сигналы. ЧМн-сигнал состоит из радиоимпульсов, которые имеют одинаковые огибающие $A_0(t)$, разные частоты, расположенные во времени в соответствии с периодической последовательностью случайных чисел $\{N_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ номер частоты в последовательности. Псевдослучайность ЧМн-сигналов достигается равномерной спектральной плотностью распределения по частоте за счет равномерного разброса дискретных значений частоты в пределах $F_{\text{эф}}$ и случайностью скорости изменения частоты благодаря псевдослучайности следования частот.

Различают ЧМн-сигналы с произвольным шагом дискретности по частоте и времени и с постоянным шагом по частоте и времени. Кроме того, в зависимости от соотношения между фазами φ_i случайно чередующихся радиоимпульсов различают:

- а) ЧМн-сигнал «без разрыва фазы», т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N$;
- б) ЧМн-сигнал «с разрывом фазы», при смене фаз сигнала с последующим восстановлением, т. е. $\varphi_i(t) = \text{const}$, $\varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \dots \neq \varphi_N$;
- в) ЧМн-сигнал «с разрывом фазы», при смене фаз сигнала без восстановления;
- г) ЧМн-сигнал «с разрывом фазы» в каждом такте.

Случаи «а» и «б» относятся к когерентным ЧМн-сигналам, а случаи «в» и «г» – к некогерентным.

В настоящее время наиболее исследованными из ПС-сигналов с ЧМн являются сигналы постоянной амплитуды (A_0) с постоянным шагом дискретности по частоте (ΔF), с постоянной длительностью элемента (τ_0), с постоянной начальной фазой (φ_0) и ортогональностью элементов по частоте и времени [5]. Аналитически такой сигнал в пределах одного периода $N\tau_0 = T$ может быть записан в виде

$$s(t) = A_0 \sum_{i=1}^N \text{rect}[t - (i-1)\tau_0] \exp[-j(\omega_0 t + (N_i - N_{\text{II}})2\pi\Delta F e + \varphi_0)], \quad (1.116)$$

где N_i – номер числовой последовательности на позиции i ; N – число дискретных частот (число элементов числовой последовательности);

$$N_i = \begin{cases} \frac{N+1}{2}, & \text{если } N - \text{нечетно;} \\ N/2, & \text{если } N - \text{четно.} \end{cases}$$

$$\tau_0 = 1/\Delta F, \quad \Delta F = f_e - f_{e-1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N.$$

ΔF – минимальная разность дискретных частот.

На рисунке 1.35 показана структурная схема формирования ПС-сигнала с ЧМн. В состав схемы входят синтезатор сетки ($N+1$) частот (СЧ), генератор слу-

чайных чисел (ГСЧ), цифровой коммутатор (ЦК). Генератор случайных чисел с частотой f_T формирует параллельный двоичный код (номер частоты в двоичной форме).

Число различных кодов равно N . Цифровой коммутатор ставит в соответствие каждому двоичному коду конкретно закрепленное за ним значение дискретной частоты, и только сигнал этой частоты в течение времени $1/f_r = \tau_0$ пропускается на выход формирователя ПС-сигнала.

Основные структурные и спектрально-корреляционные свойства ЧМн-сигналов вида (1.116) изложены ниже.

1. Максимально возможное число ЧМн-сигналов определяется числом различных частот $\{N_i\}$:

$$Z = (N - 1)! \quad (1.117)$$

Для обеспечения независимости оценок частоты и запаздывания ЧМн-сигнала необходимо, чтобы порядок перебора чисел в последовательности $\{N_i\}$ удовлетворял диофантову уравнению [7]:

$$\sum_{i=1}^N iN_i = 0,25N(N + 1)^2. \quad (1.118)$$

Решая уравнение (1.118), можно отыскать ряд требуемых числовых последовательностей, которые называются псевдочетными.

Рассмотренные ранее генераторы М-последовательностей позволяют получить псевдослучайную последовательность чисел, причем код чисел снимается с разрядов регистра сдвига. Например, М-последовательности значностью $N = 7 \rightarrow 1110010$ соответствует последовательность чисел в двоичном виде 111, 011, 001, 100, 010, 101, 110, а в десятичном – 7, 3, 1, 4, 2, 5, 6.

2. Амплитудный спектр модуляции периода ЧМн-сигнала представляет собой сумму спектров элементов с различными f_i :

$$s(j2\pi f) = \tau_0 \sum_{i=1}^N \frac{\sin \pi(\Delta FN_i - f)\tau_0}{\pi(\Delta FN_i - f)\tau_0} \exp \left[-j2\pi f \tau_0 \left(i - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (1.119)$$

Полный нормированный спектр модуляции имеет вид

$$F(f) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sin \pi(\Delta FN_i - f)\tau_0}{\pi(\Delta FN_i - f)\tau_0} \right]^2 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=n+1}^N \frac{\sin \pi(\Delta FN_n - f)\tau_0}{\pi(\Delta FN_n - f)\tau_0} \times \\ \times \frac{\sin \pi(\Delta FN_i - f)\tau_0}{\pi(\Delta FN_i - f)\tau_0} \cdot \cos 2\pi f \tau_0 (i - n).$$

Из формулы следует, что энергетический спектр ЧМн-сигнала содержит два слагаемых: первое определяет регулярную часть спектра, инвариантную к порядку перебора чисел N_i в последовательности; второе слагаемое – нерегулярную часть, зависящую от порядка перебора разности $(i - n)$ и определяющую тонкую структуру спектра.

На рисунке 1.36 приведена форма энергетического спектра ЧМн-сигнала при $N = 7$ для числовой последовательности $\{N_i\} = 4, 7, 3, 1, 6, 2, 5$, $\Delta F = 1$ МГц.

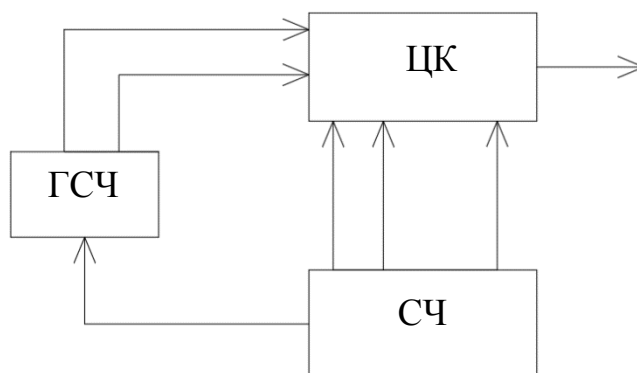


Рисунок 1.35 – Генератор ПС-сигнала с ЧМн

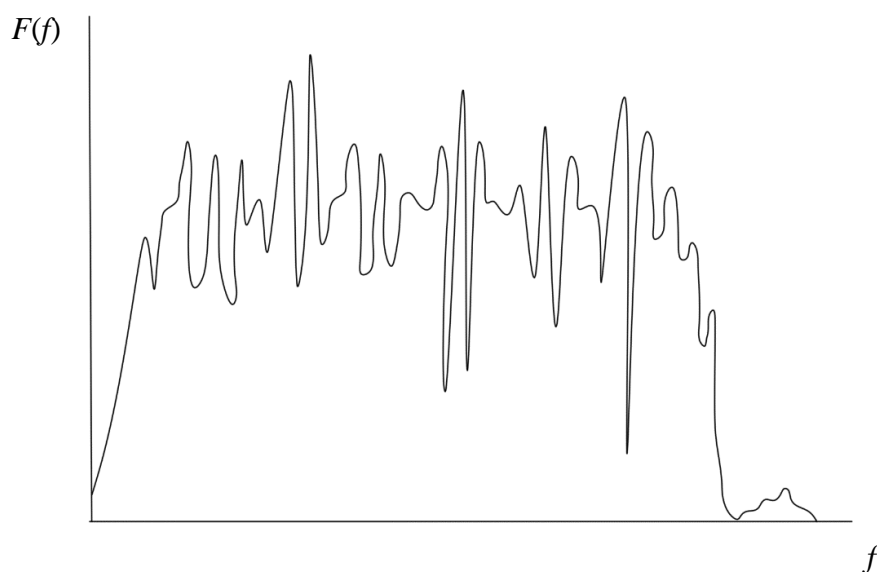


Рисунок 1.36 – Энергетический спектр ЧМн-сигнала

Исходя из описанных основных свойств ПС-сигналов с ЧМн отметим основные достоинства и недостатки этого класса сигналов.

Основные достоинства:

- возможность получения большого ансамбля квазиортогональных сигналов;
- база сигнала B равна квадрату размерностью (N^2) модулирующей числовой последовательности;
- спектр сигнала в пределах $F_{эф}$ близок к равномерному и обеспечивает лучшее использование выделенной полосы;
- ширина основного пика АКФ сигнала на уровне 0,5 не превышает величины τ_0/N , т. е. коэффициент сжатия по временной оси пропорционален N^2 ;
- возможность получения боковых остатков АКФ, не превышающих величины $1/N$;
- высокая структурная скрытность.

Основные недостатки:

- сложность формирования ансамбля когерентных ПС-сигналов, связанная с аппаратными трудностями получения сетки когерентных дискретных частот;

- сложность реализации когерентной цифровой обработки сигнала.

ПС-сигналы с ЧМн привлекают разработчиков информационных систем благодаря их достоинствам.

1.4 Помехи в РС

По происхождению помехи делятся на организованные и неорганизованные. Организованные помехи могут быть активными, пассивными и комбинированными. Активные помехи создаются системами радиопротиводействия (разрушения информации). По характеру воздействия на РС активные помехи делятся на маскирующие и имитационные. Маскирующая помеха создает мешающий фон, затрудняя обнаружение сигналов, их различие и оценку параметров. Маскирующие помехи могут быть шумовыми или детерминированными, непрерывными во времени или импульсными. Непрерывная шумовая помеха используется для подавления РС с любым типом сигнала. В зависимости от соотношения эффективной полосы частот сигнала $F_{эф}$ и помехи F_n различают прицельные ($F_n \approx F_{эф}$) и заградительные ($F_n \gg F_{эф}$) шумовые помехи. Прицельная помеха при том же мешающем действии, что и заградительная, имеет меньшую мощность, но требует информацию о спектре подавляемого сигнала. Эффективным видом случайной импульсной помехи является хаотическая импульсная помеха (ХИП), представляющая собой случайную последовательность импульсов, параметры которой близки к параметрам сигнала РС.

Имитирующая помеха похожа на сигнал РС, отличаясь от него значением информационного параметра. Пассивная помеха создается за счет отражения, поглощения или преломления радиоволн, излучаемых подавляемой РС. Неорганизованные помехи делятся на естественные (не связанные с работой других радиоэлектронных средств), промышленные (исключение составляют радиоэлектронные средства) и взаимные (за счет работы других радиоэлектронных средств).

Основные виды естественных помех: внутренний шум РС, атмосферные помехи, космические помехи (излучение солнца, звезд, ионосферы и других космических объектов); помехи, возникающие в процессе распространения радиоволн (амплитудные, фазовые, поляризационные, флуктуации сигнала, затухание, преломление, отражение радиоволн и другие явления).

Неорганизованные помехи, как и организованные, могут быть шумовыми и детерминированными, непрерывными и импульсными.

По характеру взаимодействия с радиосигналами помехи делят на аддитивные и мультипликативные:

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad (1.120)$$

$$x(t) = n(t) S(t, \lambda), \quad (1.121)$$

где $S(t, \lambda)$ – полезный радиосигнал; $n(t)$ – помеха. Случай (1.120) соответствует аддитивной помехе $n(t)$, а случай (1.121) – мультипликативной.

Мультипликативная помеха оказывает влияние на энергетику сигнала, поэтому информационные параметры сигнала нужно выбирать неэнергетические, например τ, φ, ω . Кроме того, совершенствуя приемно-передающие тракты РС и выбирая соответствующий частотный диапазон радиолиний, можно существенно снизить влияние мультипликативной помехи.

Сложнее приходится с аддитивной помехой. Если спектры радиосигнала и аддитивной помехи перекрываются, то необходимо применять оптимальные методы приема радиосигналов, учитывающие статистические характеристики сигнала и помех, априорные и апостериорные (послеопытные) вероятности.

В классической теории оптимальных методов приема радиосигналов основной помехой является аддитивная случайная.

Нормальный случайный процесс – основная модель непрерывной помехи.

Случайный процесс $n(t)$ называется нормальным, если при любом k и любых t_1, t_2, \dots, t_k из области изменения аргумента t многомерная плотность вероятности для совокупности случайных величин $n_i = n(t_i), i = 1, 2, \dots, k$ подчиняется гауссову закону:

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_k \sqrt{(2\pi)^k D}} \exp \left[-\frac{1}{2D} \sum_{i,l=1}^k D_{il} \frac{(n_i - m_i)(n_l - m_l)}{\sigma_i \sigma_l} \right], \quad (1.122)$$

где $m_i = \langle n(t_i) \rangle$ – математическое ожидание случайной величины $n(t_i)$; $\sigma_i^2 = \langle (n_i - m_i)^2 \rangle$ – дисперсия случайной величины $n(t_i)$; D определитель k -го порядка, составленный из коэффициентов корреляции $\rho_{il} = \rho(t_i, t_l) = \langle (n_i - m_i)(n_l - m_l) \rangle / \sigma_i \sigma_l$; D_{il} – алгебраическое дополнение элемента ρ_{il} определителя D .

Для стационарного случайного нормального процесса $\rho_{il} = 0$ при $i \neq l$, $\rho_{il} = 1$, $m_i = \langle n(t_i) \rangle = m$, $\sigma_i^2 = \sigma^2 = \langle [n(t) - m]^2 \rangle$, $D = 1$, $D_{il} = 0$.

При $i \neq l$, $D_{il} = 1 \rightarrow i = l$ и многомерная плотность распределения определяется так:

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{k/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k (n_i - m)^2 \right]. \quad (1.123)$$

Важной моделью стационарного нормального случайного процесса является белый шум.

Для белого шума $m = 0$ и многомерная плотность распределения будет

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{k/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k n_i^2 \right]. \quad (1.124)$$

Энергетический спектр белого шума является равномерным в очень широком диапазоне частот и равен некоторой постоянной величине $N_0/2$. Если $F(\omega) = N_0/2$, то корреляционная функция такого процесса определяется как

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (1.125)$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция, равная нулю всюду, за исключением точки $\tau = 0$, где $\delta(0) = \infty$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1. \quad (1.126)$$

Белый шум следует рассматривать как идеализацию, так как реальные процессы всегда имеют энергетический спектр, убывающий с частотой и, следовательно, обладают конечным временем корреляции $\tau_k \neq 0$ и ограниченной средней мощностью. Эта идеализация применима в тех случаях, когда в пределах полосы пропускания системы спектральную плотность воздействующего реального шума можно приближенно считать постоянной.

Если полоса пропускания приемника РС $\Delta F = f_2 - f_1$, то дисперсия шума с постоянной спектральной плотностью $N_{0/2}$ в этой полосе составит

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} \frac{N_0}{2} d\omega = \frac{N_0}{2} \Delta F, \quad (1.127)$$

а корреляционная функция шума, ограниченного полосой ΔF , примет вид

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \Delta F \frac{\sin \pi \Delta F \tau}{\pi \Delta F \tau} e^{j\pi(f_1+f_2)\tau}. \quad (1.128)$$

Огибающая $R_n(\tau)$ ограниченного по полосе белого шума принимает первые нулевые значения при $\tau = \pm 1 / \Delta F$.

Для интервала наблюдения $0 \leq t \leq T$, переходя от дискретных значений белого шума к непрерывным, получим из (1.124) следующее выражение для плотности вероятности:

$$P[n(t)] = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{(2\pi \frac{N_0}{2\Delta})^{k/2}} \exp\left[-\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k n_i^2 \Delta\right] = k \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T n^2(t) dt\right], \quad (1.129)$$

где $\Delta = (t_{i+1} - t_i)$ – шаг дискретизации по времени; $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2\Delta}$; $k = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\pi \frac{N_0}{\Delta})^{-k/2}$ – масштабный коэффициент, зависящий только от Δ .

Выражение (1.129) обычно называют функционалом плотности вероятности белого шума.

Если гауссово распределение характерно для широкополосного нормального случайного процесса, то огибающая узкополосного нормального шума будет иметь распределение Рэлея.

Случайный процесс называется узкополосным, когда ширина спектра процесса относительно мала по сравнению со средней частотой этого спектра. Такого рода процессы имеют место на выходе устройств, работающих на высоких и промежуточных частотах.

Если $X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ – нормальный узкополосный шум, у которого огибающая $A(t)$ и фаза $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся во времени функции по сравнению с колебаниями на несущей частоте ω_0 , тогда плотность распределения огибающей

$$P(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} \quad (1.130)$$

есть распределение Рэлея.

Плотность распределения фазы нормального узкополосного шума имеет равномерное распределение $P(\varphi) = 1/2\pi$. Для смеси синусоидального колебания $S(t) = S_0 \sin \omega_0 t$ и нормального узкополосного шума $A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ плотность распределения огибающей случайного процесса примет вид

$$P(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2 + S_0^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{S_0 A}{\sigma^2}\right), \quad (1.131)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Выражение (1.131) носит название обобщенного распределения Рэлея или распределения Райса. При $S_0 A \gg \sigma^2$ и $A > 0$ в (1.131), используя асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя, получим приближенное распределение Райса, которое близко к гауссову распределению:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{A}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2 + S_0^2}{2\sigma^2}\right] \left(2\pi \frac{S_0 A}{\sigma^2}\right) \exp\left[\frac{S_0 A}{\sigma^2}\right] = \\ &= \left(\frac{A}{2\pi S_0 \sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{A^2 + S_0^2}{2\sigma^2}\right]. \end{aligned} \quad (1.132)$$

Среди импульсных случайных помех (ХИП) наиболее просто описывается законами распределения случайный телеграфный сигнал, представляющий собой последовательность прямоугольных импульсов с одинаковой амплитудой A_0 , характеризующая тем, что в любой момент времени t равновероятны значения A_0 и нуля.

Если T – время наблюдения, n – количество скачков за время T , а ν – среднее число скачков в единицу времени, то плотность распределения случайного телеграфного сигнала задается законом Пуассона:

$$P_T(n) = \frac{(\nu T)^n}{n!} e^{-\nu T}.$$

Вся классическая теория оптимальных методов приема радиосигналов построена на представлении аддитивной помехи как нормального случайного процесса.

Повышенное внимание, проявленное к нормальным процессам, объясняется тем, что реальная радиопомеха часто оказывается суперпозицией большого

число некоторых элементарных случайных колебаний и ее многомерные плотности вероятности удастся аппроксимировать нормальным законом на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей. Смысл последней сводится к утверждению о нормализации суммы случайных слагаемых с произвольными плотностями вероятности по мере увеличения их числа.

Реальные сигналы и помехи представляют собой случайные процессы. Между сигналами и помехами иногда нет принципиальной разницы. Помеха – это сигнал, но нежелательный для данной РС.

Поэтому часто математический аппарат, используемый для описания сигналов, применяют при анализе помех.

Вопросы для самопроверки

1. Почему радиотехнические системы являются информационными?
2. Какое место при проектировании РС занимает радиосигнал?
3. По каким признакам классифицируются радиосигналы, применяемые в РС?
4. Почему при описании сигнала используют несколько форм его представления?
5. Укажите основные достоинства и недостатки аналитического представления радиосигнала.
6. Каковы особенности спектрального представления сигнала?
7. В чем суть дискретного представления сигнала и где эта форма описания сигнала находит применение?
8. Какая форма представления используется для описания цифрового сигнала?
9. Каковы особенности геометрического представления сигналов?
10. Какие характеристики радиосигнала влияют на качественные показатели РС?
11. В чем состоит отличие активной длительности сигнала от эффективной?
12. Какая связь между спектральной функцией и спектральной плотностью сигнала? Дайте определение спектральной плотности сигнала.
13. Как определяется энергетическая полоса частот, занимаемая сигналом?
14. Как оценить эффективную полосу частот, занимаемую сигналом?
15. Каков физический смысл эффективной полосы?
16. Почему сигналы с угловыми видами информационной модуляции имеют высокую потенциальную помехоустойчивость?
17. Где применяются сигналы с импульсными видами информационной модуляции? Перечислите разновидности импульсной модуляции.
18. Какие достоинства имеют сигналы с импульсными видами информационной модуляции?
19. Как оценить энергию сигнала при различных формах его описания?
20. Какая смысловая информация заложена в корреляционной характеристике сигналов?

21. Перечислите основные свойства АКФ сигнала.
22. Какие свойства присущи ВКФ сигналов?
23. Что понимается под решетчатой корреляционной функцией? Как вычисляются решетчатые АКФ и ВКФ сигналов?
24. Дайте определение понятию «время корреляции».
25. Какую характеристику дает сигналу его двумерная АКФ? Приведите формы записи двумерной АКФ сигнала.
26. Что понимается под функцией неопределенности сигнала? Основные свойства функции неопределенности.
27. В чем суть принципа неопределенности?
28. Какую информацию дают сечения ФН сигнала плоскостями $\tau=0, f=0$?
29. Дайте определение понятию «база сигнала».
30. Какую смысловую информацию несет коэффициент частотно-временной связи сигнала?
31. Какие преимущества дают сложные сигналы по сравнению с простыми при их использовании в РС?
32. Укажите достоинства и недостатки сигналов с ЛЧМ.
33. Укажите особенности, характерные для псевдослучайных (шумоподобных) сигналов.
34. Дайте общую характеристику ПС-сигналам с ФМн.
35. Какие критерии применяются для отбора псевдослучайных видеопоследовательностей из всего ансамбля видеопоследовательностей?
36. Как формируются М-последовательности?
37. По характеристическому полиному $x^4 + x^3 + 1 = 0$ сформируйте М-последовательность, вычислите ее решетчатую АКФ и выделите модуль максимального бокового остатка, сравнив его с верхним статистическим уровнем.
38. Какие структурные свойства характерны для М-последовательностей?
39. Перечислите основные особенности АКФ одиночной и периодической М-последовательности.
40. Что представляет собой энергетический спектр М-последовательности?
41. Какие особенности характерны для ФН М-последовательности?
42. Как генерируется семейство четверично-кодированных последовательностей?
43. Сформируйте ЧКП A_4^4 , вычислите ее решетчатую АКФ и выделите модуль максимального бокового остатка, сравнив его с верхним статистическим уровнем.
44. Какие структурные свойства характерны для семейства ЧКП?
45. Какими свойствами обладают парные и смежные ЧКП?
46. Укажите на особенности АКФ одиночной и периодической ЧКП.
47. Чем отличается спектр ЧКП от спектра М-последовательности?
48. Какие особенности характерны для ФН ЧКП?
49. Дайте характеристику ПС-сигналам с ДЧМ.

50. Какие трудности встречаются при построении генератора ПС-сигнала с ЧМн?

51. Какие требования к модулирующей функции предъявляются при построении сигналов с ЧМн?

52. Какие особенности характерны для АКФ когерентного ПС-сигнала с ДЧМ?

53. Каковы особенности энергетического спектра ПС-сигнала с ЧМн?

54. Перечислите основные достоинства и недостатки ПС-сигналов с ЧМн.

55. Дайте сравнительную характеристику ПС-сигналов с ФМн и ЧМн.

56. Как классифицируются помехи в РС?

57. Основные преимущества модели флюктуационной помехи «белый шум».

58. Почему нормальный шум является основной помехой в теории оптимального приема.

2 СТАТИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА

Задачи, решаемые современными радиотехническими системами (РС), характеризуются сложностью и разнообразием помеховой обстановки, поэтому разработка таких систем возможна лишь на базе современных методов оптимизации.

Проблему оптимизации РС можно условно разделить на три направления:

- выбор (синтез) наилучших сигналов для достижения требуемых результатов;

- оптимальная обработка принимаемых радиосигналов;

- совместный синтез сигнал – устройство обработки.

В данном пособии внимание уделяется проблемам оптимального приема (обработки) радиосигналов в РС.

Основная задача приемов радиосигналов сводится к наилучшему выделению или восстановлению полезной информации по сигналу, искаженному при распространении и в результате воздействия помех. Приемник, который наилучшим образом минимизирует искажения воспроизводимой или выделяемой информации из принимаемого сигнала на фоне помех, называется оптимальным. Синтез оптимального приемника заранее (априорно) предполагает известными некоторые характеристики полезного сигнала, канала связи и помех, а также их функциональное взаимодействие. Чем больше достоверных априорных сведений, тем легче и точнее решается задача синтеза. Наконец, результаты синтеза оптимального приемного устройства зависят от выбора математически продуктивного критерия оптимальности, отражающего количественные характеристики искажений.

Задание условия приема и выбранный критерий определяют минимальный уровень искажений воспроизводимой или извлекаемой информации, т. е. определяют потенциальную помехоустойчивость оптимального приемника. Потенциальная не может быть ниже помехоустойчивости реального приемника и характеризует его степень технического совершенства. Иногда оптимальное устройство оказы-

вается трудно реализуемым или экономически не выгодным, тогда обращаются к квазиоптимальным методам приема, при которых незначительное снижение помехоустойчивости компенсируется простотой аппаратной реализации.

Теория оптимального радиоприема позволяет также определить наилучшие формы сигналов – носителей информации, обеспечивающих наибольшую помехоустойчивость.

Решение основных задач теории оптимального радиоприема базируется на хорошо разработанных методах математической статистики, непосредственно применяемых к решению прикладных задач радиоэлектроники (работы А. Н. Колмогорова, Н. Винера, В. А. Котельникова, Р. Л. Стратоновича, К. Шеннона и др.) [1; 2; 3].

2.1 Основные задачи оптимального приема

Исходя из требований целевого назначения РС, условий их функционирования, а также из методических соображений, для типовых РС можно сформулировать шесть частных задач оптимального радиоприема:

1. Обнаружение сигнала.
2. Различение сигналов.
3. Оценка параметров сигнала.
4. Фильтрация сообщений.
5. Разрешение сигналов.
6. Распознавание образов.

При рассмотрении этих частных задач далее будем представлять на входе приемника аддитивную сумму полезного сигнала $S(t)$ и помехи $n(t)$:

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

$$S(t, \lambda) = \begin{cases} A \cdot \exp[\omega(t - \tau) + \varphi + \varphi_0], \\ 0, t > T, \tau > T. \end{cases} \quad (2.2)$$

В (2.1) и (2.2) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – параметры, от которых зависит сигнал.

Конкретно для (2.2) $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = \omega$, $\lambda_3 = \varphi$, $\lambda_4 = \tau$, $\lambda_5 = T$.

В принятой модели полезного сигнала $S(t, \lambda)$ некоторые параметры могут быть заранее известными. Известные параметры и их вероятностные характеристики составляют априорные сведения. Неизвестные параметры сигнала, которые отражают полезную информацию, называются информационными, а остальные – сопутствующими.

К априорным сведениям относится и вид помехи $n(t)$. Далее во всех рассматриваемых задачах помеха представляет собой нормальный случайный процесс с нулевым матожиданием и известной спектральной плотностью.

1. При обнаружении сигнала

$$x(t) = \lambda_i S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \lambda_i = 0, 1 \quad (2.3)$$

неизвестен сам факт наличия или отсутствия сигнала в принимаемой смеси $x(t)$. Требуется по принятой реализации $x(t)$ на интервале T решить оптимальным образом, присутствует или отсутствует сигнал $S(t)$. По результатам решения должна быть синтезирована структурная схема оптимального обнаружителя полезного радиосигнала и определены количественные характеристики качества обнаружения.

Задача характерна для систем радиолокации и радионавигации.

2. Задача различения сигналов

$$x(t) = S_i(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_i \quad (2.4)$$

состоит в оптимальном принятии решения о присутствии в принятой реализации $x(t)$ одного из m сигналов, где $i = \overline{1, m}$. При $m = 1$ задача различения переходит в задачу обнаружения.

Результатом решения задачи различения является синтез оптимальной структуры различителя и количественная оценка качества различения. Задача характерна для систем передачи информации и управления.

3. При решении задачи оценки параметров

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.5)$$

неизвестный параметр λ является случайной величиной с априорной вероятностью $P(\lambda)$.

Необходимо с минимальной погрешностью определить значение этого параметра λ в принятой реализации $x(t)$. Если полезный сигнал $S(t, \lambda)$ зависит от нескольких случайных параметров, то ставится задача о совместной оценке двух и большего числа параметров. Оцениваемыми параметрами могут быть задержка τ , частота ω , фаза φ , амплитуда A , длительность сигнала T .

Результатом решения задачи является синтез структурной схемы соответствующего оптимального измерителя и оценка потенциальной точности измерения. Задача характерна для систем передачи и извлечения информации.

4. Задача фильтрации сообщений состоит в непрерывном выделении информационного сообщения $\lambda(t)$ из реализации

$$x(t) = S[t, \lambda(t)] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.6)$$

причем сообщение $\lambda(t)$ рассматривается как случайный процесс с известными статистическими характеристиками. Задача фильтрации переходит в задачу оценки параметра, если фильтруемый параметр за время наблюдения T не успел существенно измениться.

Задача фильтрации является более общей и сложной, чем задача оценки параметров. В результате решения задачи синтезируется структурная схема оптимального фильтра, как правило, следящего, и производится потенциальная оценка точности выделения сообщения.

Задача фильтрации возникает в системах извлечения, передачи информации и радиуправления.

5. При оптимальном разрешении принимается реализация

$$x(t) = \sum_{i=1}^m C_j \cdot S_i(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.7)$$

которая представляет собой сумму нескольких налагающихся сигналов, зависящих от параметров λ_i ($i = \overline{1, m}$) и помехи $n(t)$, коэффициенты C_j принимают значения 0 или 1. Требуется оптимальным образом не только разрешить (разделить) принимаемые полезные сигналы, но и произвести отдельную оценку их информационных параметров. Следовательно, задачу разрешения можно рассматривать по двум направлениям: разрешение – разделение и разрешение – измерение.

Результатом решения задачи является синтез структурной схемы оптимального разделителя сигналов и потенциальная оценка разрешающей способности выделяемых информационных параметров.

Разрешение – разделение характерно для систем передачи информации, а разрешение – измерение возникает в системах извлечения информации.

6. Задача распознавания образов (или задача классификации) связана с построением систем, предназначенных для определения принадлежности данного (исследуемого) объекта к одному из заранее выделенных классов объектов. Причем каждый объект описывается совокупностью основных характеристик $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, заданных многомерным вектором, и дополнительной характеристикой μ , которая указывает на принадлежность объекта к некоторому классу. Следовательно, в принимаемой реализации

$$x(t) = S(t, \vec{\lambda}, \mu) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8)$$

по значениям параметров λ полезного сигнала устанавливается наиболее правдоподобное значение характеристики μ . При этом набор закономерных связей параметров $\vec{\lambda}$ и характеристики μ заранее известны в соответствии с принятой классификацией объектов.

Решение этой задачи, в частности, предусматривает пространственно-временную и поляризационную обработку принимаемого сигнала, что характерно для систем извлечения информации.

Все вышеуказанные задачи оптимального приема тесно связаны между собой и в практических ситуациях некоторые из них должны решаться не отдельно, а совместно. Ниже каждая из первых пяти задач будет рассматриваться достаточно полно.

Перед тем как приступить к рассмотрению перечисленных задач, введем ряд понятий и определений, которые позволят подойти к решению с единых позиций.

2.2 Понятие об апостериорной вероятности

Решение всех частных задач оптимального радиоприема осуществляется на основе априорных (предварительных) данных о сигнале, сообщении, помехи, канале связи. К априорным данным можно отнести статистические характеристики реализаций на входе приемника: законы распределения амплитуды, частоты, фазы, задержки сигнала; закон распределения амплитуды сообщения; закон распределения амплитуды помехи; вероятность появления полезного сигнала. К априорным данным относятся также знания о форме огибающей и виде информационной модуляции сигнала. С учетом априорных сведений знания, полученные наблюдателем в результате анализа принятых колебаний, называются апостериорными и полностью описываются апостериорной плотностью вероятности.

Рассмотрим формирование апостериорной вероятности [8].

Пусть принятое колебание

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.9)$$

представляет аддитивную смесь полезного сигнала $S(t, \lambda)$ и гауссова белого шума $n(t)$ с известной спектральной плотностью N_0 . При дискретном наблюдении, когда отсчеты в соответствии с теоремой Котельникова берутся через равноотстоящие моменты времени $\Delta = t_i - t_{i-1}$ на интервале $[0, T]$, выборочные значения принятого колебания $x(t)$ в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k будут заключены в случайных величинах $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_k = x(t_k)$.

Очевидно, что

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} x(t) dt, \quad S_i(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} S(t, \lambda) dt, \quad n_i = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} n(t) dt \quad (2.10)$$

$$\text{и } n_i = x_i - S_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.11)$$

Если выборочные значения x_1, x_2, \dots, x_k описываются совместной плотностью вероятности $P_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$, а соответствующие выборочные значения помехи – плотностью вероятности $P_k(n_1, n_2, \dots, n_k)$, то совместная плотность вероятности $P(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_k)$ согласно теореме умножения вероятностей примет вид

$$P(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_k) = P_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot P(\lambda / x_1, x_2, \dots, x_k) = P_{pr}(\lambda) P(x_1, x_2, \dots, x_k / \lambda), \quad (2.12)$$

где $P_{pr}(\lambda)$ – априорная плотность вероятности информационного параметра λ .

Отбросив в (2.12) левую часть равенства и учитывая, что $P_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ не зависит от интересующего нас параметра λ , получим

$$P(\lambda / x_1, x_2, \dots, x_k) = K \cdot P_{pr}(\lambda) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_k / \lambda). \quad (2.13)$$

В (2.13) условная плотность вероятности

$$P_{ps}(\lambda) = P(\lambda / x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.14)$$

называется апостериорной плотностью вероятности, так как в ней заключено все то, что можно узнать о параметре λ после приема колебания $x(t)$.

Условная плотность вероятности

$$L(\lambda) = P(x_1, x_2, \dots, x_k / \lambda) \quad (2.15)$$

называется функцией правдоподобия и показывает, насколько одно возможное значение параметра λ более правдоподобно, чем другое при фиксированных значениях x_1, x_2, \dots, x_k .

Нормирующий коэффициент K принимается равным

$$K = \left[\int_{-\infty}^{\infty} P_{pr}(\lambda)L(\lambda)d\lambda \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

С учетом (2.12) и (2.13) выражение (2.11) примет вид

$$P_{ps}(\lambda) = KP_{pr}(\lambda)L(\lambda). \quad (2.17)$$

В (2.17) показано, как из априорных данных и результатов анализа принятого колебания формируется апостериорное знание.

Для дискретного параметра λ , принимающего одно из нескольких значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ с априорными вероятностями $P_{pr}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, (2.17) запишется в виде

$$P_{ps}(\lambda_i) = KP_{pr}(\lambda_i)L(\lambda_i), \quad (2.18)$$

где

$$K = \left[\sum_{i=1}^m P_{pr}(\lambda_i)L(\lambda_i) \right]^{-1}.$$

Раскроем структуру функции правдоподобия $L(\lambda_i)$ для указанного дискретного наблюдения.

Совместная плотность вероятности для случайной величины $\{n_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, имеет вид

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \left(\pi \frac{N_0}{\Delta} \right)^{-\frac{k}{2}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} \sum_{i=0}^k n_i^2 \cdot \Delta \right], \quad (2.19)$$

где согласно (2.10) для нормального распределения принято матожидание $\langle \{n_i\} \rangle = 0$, дисперсия $\langle \{n_i^2\} \rangle = N_0 / 2\Delta$, а корреляционный момент $\langle \{n_i \cdot n_j\} \rangle = 0$ при $i \neq j$.

Считая значение параметра λ фиксированным за время наблюдения, подставим значение n_i из (2.11) в (2.19), учитывая при этом, что якобиан преобразования от переменных n_i к переменным x_i равен единице. Полученное выражение

$$P_k \cdot [x_1 - S(\lambda), x_2 - S(\lambda), \dots, x_m - S_m(\lambda)] = P\left(\frac{x_1, x_2, \dots, x_m}{\lambda}\right) = L(\lambda) =$$

$$= \left(\pi \frac{N_0}{\Delta}\right)^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \sum_{i=0}^k [x_i - S_i(\lambda)]^2 \Delta\right\} \quad (2.20)$$

и является функцией правдоподобия информационного параметра λ .

Если принимаемый сигнал зависит от нескольких параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e$, то (2.20) примет вид

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e) = \left(\pi \frac{N_0}{\Delta}\right)^{-\frac{k}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k [x_i - S_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e)]^2 \cdot \Delta\right\}. \quad (2.21)$$

При непрерывности наблюдения необходимо перейти к пределу при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} k_{\Delta} P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = P[n(t)] = \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T n^2(t) dt\right\}, \quad (2.22)$$

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} k_{\Delta} L(\lambda) = F(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \lambda)]^2 dt\right\}. \quad (2.23)$$

Коэффициент пропорциональности k_{Δ} в (2.22) и (2.23) зависит только от Δ , а функцию $F(\lambda)$ в (2.23) в дальнейшем будем называть функционалом правдоподобия.

Таким образом, при непрерывной обработке принимаемой смеси (2.9) выражение для апостериорной вероятности информационного параметра λ примет вид

$$P_{ps}(\lambda) = KP_{pr}(\lambda) \cdot F(\lambda) = KP_{pr}(\lambda) \cdot \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \lambda)]^2 dt\right]. \quad (2.24)$$

При решении частных задач оптимального приема чаще приходится оперировать с отношением апостериорных вероятностей или функционалов правдоподобия.

2.3 Критерии оптимального приема

Ранее было отмечено, что оптимизация приема зависит от выбранного критерия и заданных условий приема. Критерии – это количественные характеристики искажений принимаемых (извлекаемых) сообщений.

В зависимости от назначения радиосистемы критерии могут быть разными. При выбранном критерии оптимальный приемник радиосистемы обеспечивает минимальные искажения сообщения, уровень которых часто называют потенциальной помехоустойчивостью. Реальный приемник при заданных услови-

ях приема не может превзойти потенциальную помехоустойчивость, а может лишь стремиться к ее достижению,

Рассмотрим некоторые критерии оптимального приема, которые нашли наибольшее применение при разработке и анализе радиосистем.

2.3.1 Критерий минимума среднего квадрата ошибки

Этот критерий является удобным при восстановлении воспроизводимого непрерывного сообщения и может быть использован в задачах фильтрации.

Если воспроизводимое непрерывное сообщение $\lambda(t)$ с известными корреляционной функцией $R_\lambda(\tau)$ или спектральной плотностью $F_\lambda(\omega)$ и аддитивная помеха $n(t)$ с известными корреляционной функцией $R_n(\tau)$ или спектральной плотностью $F_n(\omega)$ поступают на вход оптимального приемника, то на выходе его воспроизведенное сообщение $\hat{\lambda}(t)$ будет отличаться от переданного на величину ошибки $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t). \quad (2.25)$$

Наиболее полно ошибку $\varepsilon(t)$ характеризуют математическим ожиданием $m_\varepsilon = \langle \varepsilon(t) \rangle$ и корреляционной функцией $R(\tau) = \langle [\varepsilon(t) - m_\varepsilon][\varepsilon(t-\tau) - m_\varepsilon] \rangle$. Однако на практике достаточной характеристикой ошибки является средний квадрат ошибки:

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\omega) d\omega, \quad (2.26)$$

где спектральная плотность ошибки определяется выражением

$$F_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_\varepsilon(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2.27)$$

а $r(\tau) = \langle \varepsilon(t) : \varepsilon(t) \rangle$ – корреляционная функция ошибки.

Отсюда следует критерий минимума среднего квадрата ошибки, который сводится к минимизации выражения (2.26):

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \text{мин.} \quad (2.28)$$

2.3.2 Критерий максимума отношения сигнал/шум

Данный критерий чаще всего используется при линейной фильтрации полученного сигнала $S(t)$ известной формы на фоне аддитивного нормального случайного шума $n(t)$ с заданной спектральной плотностью N_0 .

Если $x(t) = S(t) + n(t)$ аддитивная смесь полезного сигнала с нормальным случайным шумом на входе оптимального приемника, а $y(t) = y_s(t) + y_n(t)$ по-

лезная и шумовая составляющая на его выходе, то критерий максимума отношения сигнал/шум записывается в следующем виде:

$$\frac{P_{ys}}{P_{yn}} = q_{\text{макс}}, \quad (2.29)$$

где P_{ys} и P_{yn} – соответственно пиковое значение мощности полезного сигнала и мощности (дисперсии) шума на выходе оптимального приемника.

2.3.3 Критерий идеального наблюдателя

Пусть имеется некоторое число различных сигналов $S_i(t)$ $i=1, 2, \dots, n$, лишь один из которых может поступать аддитивно с шумом на вход приемника на интервале наблюдения. Сигналы могут быть детерминированными, квазидетерминированными либо случайными.

После приема смеси

$$x(t) = S_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.30)$$

могут быть выдвинуты разные гипотезы о том, какой из сигналов $S_i(t)$ был передан.

В зависимости от числа возможных вариантов передаваемых сигналов задача обнаружения одного из них приемником подразделяется на бинарную и многоальтернативную. В бинарных задачах на интервале наблюдения передается один из двух сигналов. Частным случаем бинарной задачи является обнаружение факта передачи или отсутствия одного сигнала. В многоальтернативных задачах требуется идентифицировать принятый сигнал с одним из n сигналов с известными характеристиками, причем $n > 2$.

Для бинарной задачи обнаружения (различения двух сигналов) критерий идеального наблюдателя запишется в следующем виде:

$$P(S_1) \cdot P(S_2 / S_1) + P(S_2) \cdot P(S_1 / S_2) = \text{мин}, \quad (2.31)$$

где $P(S_1)$ и $P(S_2)$ – известные априорные вероятности передачи сигналов S_1 и S_2 ($P(S_1) + P(S_2) = 1$), $P(S_2 / S_1)$ и $P(S_1 / S_2)$ – условные вероятности ошибки выделения сигналов S_1 и S_2 соответственно при приеме смеси относительно порога h .

Выражение (2.31) минимизирует общую вероятность ошибки в бинарной задаче обнаружения.

При обнаружении одного сигнала критерий (2.31) примет вид

$$P(S_1) \cdot P(O / S_1) + P(O) \cdot P(S_1 / O) = \text{мин}, \quad (2.32)$$

где $P(O)$ – априорная вероятность отсутствия сигнала; $P(O / S_1)$ – вероятность пропуска сигнала; $P(S_1 / O)$ – вероятность ложной тревоги.

Для многоальтернативной задачи обнаружения критерий идеального наблюдателя примет вид

$$\sum_{j,i=1}^n P(S_i) \cdot P(S_j / S_i) = \text{мин}, \quad (2.33)$$

где $P(S_j / S_i)$ – условная вероятность ошибки того, что при передаче сигнала S_i принят какой-то другой сигнал S_j , т. е. $i \neq j$.

Критерии (2.31), (2.32), (2.33) являются частными случаями более обобщенного критерия среднего риска R , минимизирующего средние потери:

$$r = \sum_{\substack{j,i=1 \\ i \neq j}}^n C_{ij} \cdot P(S_j / S_i) = \text{мин}, \quad (2.34)$$

где весовые коэффициенты C_{ij} характеризуют потери (или выигрыш) при соответствующем исходе.

Критерий идеального наблюдателя применяется в основном для оптимизации приема в системах передачи дискретной информации. В радиолокационных системах из-за отсутствия знаний об априорных вероятностях критерий идеального наблюдателя не используется.

2.3.4 Критерий максимума апостериорной вероятности, отношения правдоподобий

Задачу оптимизации приема смеси (2.30) можно построить на сравнении апостериорных вероятностей (2.24):

$$P_{ps}(S_1) \geq P_{ps}(S_2) \geq \dots \geq P_{ps}(S_u), \quad (2.35)$$

$$P_{ps}(S_i) = K P_{ps}(S_i) \times \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S_i(t)]^2 dt \right\}. \quad (2.36)$$

Решение о приеме сигнала принимается по вычисленной максимальной апостериорной вероятности. Если $P_{ps}(S_i) = \text{макс}$, то принимается решение о принятии сигнала $S_i(t)$ с заданными показателями качества.

При приеме одного из двух сигналов критерий максимума апостериорной вероятности сводится к критерию отношения апостериорных вероятностей:

$$\frac{P_{ps}(S_1)}{P_{ps}(S_2)} \geq 1. \quad (2.37)$$

В задачах радиолокации, когда речь идет об обнаружении одиночного сигнала, записывается отношение их функционалов правдоподобия:

$$\frac{F(S_1)}{F(0)} = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S_1(t)]^2 dt \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\}} \geq h, \quad (2.38)$$

где h – порог обнаружения. Соотношение (2.38) известно как критерий отношения правдоподобий. Если отношение правдоподобий превышает порог, то принимается решение о наличии сигнала, в противном случае – о его отсутствии.

Критерий, по которому при заданном значении вероятности ложной тревоги $P_{лт} = P(S_1 / 0)$, определяемой порогом h_0 , минимизируется вероятность пропуска $P_{проп} = P(0 / S_1)$ или максимизируется вероятность правильного обнаружения $P_{по} = 1 - P_{проп}$, называется критерием Неймана – Пирсона.

Рассмотренные критерии и их модификации охватывают весь круг задач, решаемых оптимальным приемом.

2.4 Оптимальный линейный фильтр

Рассмотрим два классических случая построения оптимальных линейных фильтров по двум разным критериям: минимуму среднего квадрата ошибки и максимуму отношения сигнал/шум на выходе фильтра.

Линейный фильтр, минимизирующий средний квадрат ошибки при выделении полезного сигнала на фоне аддитивного шума, будем в дальнейшем называть оптимальным линейным фильтром, а линейный фильтр, максимизирующий на выходе отношение сигнал/шум, – согласованным фильтром. При рассмотрении этих случаев будем считать сигнал и шум независимыми стационарными случайными процессами с известными характеристиками (корреляционными функциями или спектральными плотностями).

Пусть на вход линейного фильтра (ЛФ) (рисунок 2.1) поступает сигнал $S(t)$ с известной корреляционной функцией $r_s(\tau)$ и аддитивный шум $n(t)$ с корреляционной функцией $r_n(\tau)$:

$$x(t) = S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.39)$$

где T – время анализа.



Рисунок 2.1 – Линейный фильтр

Задача состоит в нахождении импульсного отклика ЛФ – $g(t)$, минимизирующего среднеквадратичную ошибку при выделении сигнала $S(t)$.

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \langle [\hat{S}(t) - S(t + \Delta)]^2 \rangle. \quad (2.40)$$

В (2.40) $\hat{S}(t)$ – оценка сигнала $S(t)$ на выходе ЛФ, а Δ – временной сдвиг, создаваемый ЛФ.

Анализ будем проводить на интервале наблюдения $(0, T)$. Сигнал на выходе ЛФ определяется сверткой

$$\hat{S}(t) = \int_0^T g(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau. \quad (2.41)$$

Выражение для среднего квадрата ошибки при этом примет вид

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \left\langle \left\{ \left[\int_0^T S(t - \tau) + n(t - \tau) \right] g(\tau) d\tau - S(t + \Delta) \right\}^2 \right\rangle = \\ &= \sigma_s^2 + \int_0^T g(\tau_1) d\tau_1 \left\{ \int_0^T [r_s(\tau_1 - \tau_2) + r_n(\tau_1 - \tau_2)] g(\tau_2) d\tau_2 - 2r_s(\tau_1 + \Delta) \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

В (2.42) средний квадрат ошибки принимает минимальную величину, если выполняется равенство

$$\int_0^T [r_s(\tau - t) + r_n(\tau - t)] g(t) dt = r_s(\tau + \Delta). \quad (2.43)$$

Интегральное уравнение (2.43) называется уравнением линейной регрессии Винера – Хопфа и является основным уравнением линейной фильтрации по заданному критерию. Решая уравнение (2.43), находят импульсный отклик $g(t)$ оптимального ЛФ. Общая теория и синтез таких фильтров были разработаны А. Л. Колмогоровым и Н. Винером [2]. Определим физическую реализацию оптимального ЛФ, выразив средний квадрат ошибки через спектральную плотность ошибки $F_\varepsilon(\omega)$ и осуществив ряд подстановок и преобразований:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\omega) d\omega. \quad (2.44)$$

Спектральную плотность ошибки $F_\varepsilon(\omega)$ найдем, вычислив функцию корреляции ошибки:

$$r_\varepsilon(\tau) = \left\langle \left[\hat{S}(t) - S(t + \Delta) \right] \cdot \left[\hat{S}(t - \tau) - S(t - \tau + \Delta) \right] \right\rangle = r_{\hat{S}}(\tau) + r_s(\tau) - r_{\hat{S}S}(\tau) - r_{S\hat{S}}(\tau). \quad (2.45)$$

Так как преобразование Винера – Хинчина, связывающее $F_\varepsilon(\omega)$ и $r_\varepsilon(\tau)$ линейно, то

$$F_\varepsilon(\omega) = F_{\hat{S}}(\omega) + F_s(\omega) - F_{\hat{S}S}(\omega) - F_{S\hat{S}}(\omega). \quad (2.46)$$

В (2.45) и (2.46) $r_{\hat{S}}(\tau)$ и $F_{\hat{S}}(\omega)$ – корреляционная функция и спектральная плотность оценки сигнала, $r_\varepsilon(\tau)$ и $F_\varepsilon(\omega)$ – корреляционная функция и спектральная плотность ошибки, $r_s(\tau)$ и $F_{SS}(\omega)$ – функция корреляции сигнала и взаимная спектральная плотность сигнала и его оценки, $r_{\hat{S}S}(\tau)$ и $F_{\hat{S}S}(\omega)$ – взаимные корреляция и спектральная плотность оценки сигнала и сигнала. В (2.45) в целях упрощения записи опущена задержка Δ ЛФ, которая в дальнейшем будет учтена. Спектральная плотность сигнала оценки исходя из теории линейных систем имеет вид

$$F_{\hat{S}}(\omega) = |k(j\omega)|^2 \cdot F_x(\omega) = |k(j\omega)|^2 \cdot [F_s(\omega) + F_n(\omega)], \quad (2.47)$$

где $k(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ – коэффициент передачи ЛФ; $F_n(\omega)$ – спектральная плотность шума; $F_x(\omega)$ – спектральная плотность аддитивной смеси на входе ЛФ.

Получим выражение для взаимной спектральной плотности $F_{S\hat{S}}(\omega)$:

$$\begin{aligned} F_{S\hat{S}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{S\hat{S}}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \langle S(t) \cdot \hat{S}(t-\tau) \rangle \cdot e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \left\{ S(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [S(\tau_1) + n(\tau_1)] g(t-\tau-\tau_1) d\tau_1 \right\} \right\rangle e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_s(t-\tau_1) \cdot g(t-\tau-\tau_1) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau = k^*(j\omega) \cdot F_s(\omega), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где $k^*(j\omega)$ – функция, комплексно-сопряженная с $k(j\omega)$. Выполнив аналогичные преобразования для $F_{\hat{S}S}(\omega)$, получим

$$F_{\hat{S}S}(\omega) = k(j\omega) \cdot F_s(\omega). \quad (2.49)$$

Если не принимать во внимание задержки ЛФ, то коэффициент передачи в (2.48) и (2.49) является вещественной величиной.

Окончательное выражение для спектральной плотности ошибки без учета задержки ЛФ с учетом (2.47), (2.48) и (2.49) примет вид

$$F_{\varepsilon}(\omega) = k^2(\omega) \cdot [F_s(\omega) + F_n(\omega)] + F_s(\omega) - 2k(\omega) \cdot F_s(\omega). \quad (2.50)$$

Взяв производную спектральной плотности ошибки по коэффициенту передачи и приравняв ее к нулю, получим выражение для оптимального коэффициента ЛФ:

$$\frac{dF_{\varepsilon}(\omega)}{dk(\omega)} = 2k(\omega)[F_s(\omega) + F_n(\omega)] - 2F_s(\omega) = 0, \quad (2.51)$$

$$k_{\text{ОПТ}}(\omega) = \frac{F_s(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)}.$$

С учетом задержки сигнала получим

$$k_{\text{ОПТ}}(j\omega) = \frac{F_s(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)} \cdot e^{-j\omega\Delta}. \quad (2.52)$$

При этом спектральная плотность ошибки примет вид

$$F_{\varepsilon}(\omega) = \frac{F_s(\omega) \cdot F_n(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)}. \quad (2.53)$$

Минимальное значение среднего квадрата ошибки

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{мин}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(\omega) \times F_n(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)} d\omega. \quad (2.54)$$

Анализ (2.54) показывает:

а) ошибки равны нулю ($\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{мин}} = 0$), когда $F_s(\omega) \cdot F_n(\omega) = 0$, что выполняется или при отсутствии шума, или когда спектры сигнала и шума не перекрываются;

б) при полном или частичном перекрытии спектров сигнала и шума ошибка минимальна, когда $F_s(\omega) \gg F_n(\omega)$:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{мин}} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega) d\omega = \sigma_n^2, \quad (2.55)$$

в) ошибка максимальна, когда $F_s(\omega) \ll F_n(\omega)$:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\omega) d\omega = \sigma_s^2, \quad (2.56)$$

и восстановление сигнала ЛФ невозможно.

Следовательно, оптимальный ЛФ, синтезированный по критерию минимума среднего квадрата ошибки, – это полосовой фильтр, настроенный на эффективную полосу выделяемого полезного сигнала.

Лучшие результаты фильтрации можно получить, применяя предсказание, т. е. предварительно пропуская на передающей стороне сигнал через ЛФ₂ и оптимизируя коэффициенты передачи обоих фильтров с целью получения минимума среднего квадрата ошибки. Однако и в этом случае выигрыш зависит от относительной ширины полосы перекрытия сигнала и шума.

Оптимальные линейные фильтры охватывают мало практически интересных случаев в обработке сигналов. В основном оптимизируют полосу пропускания.

2.4.1 Согласованный фильтр

Пусть на вход ЛФ (рисунок 2.1) поступает аддитивная смесь полезного сигнала $S(t)$ известной формы и стационарного случайного процесса типа белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0 / 2$:

$$x(t) = S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.57)$$

где T – длительность полезного сигнала.

Поставим теперь задачу получения на выходе ЛФ такого полезного сигнала, отношение пиковой мощности которого к мощности шума максимизируется.

Обозначим процесс на выходе ЛФ функцией

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t), \quad (2.58)$$

состоящей из полезной составляющей $y_s(t)$ и шумовой $y_n(t)$.

Если $k(j\omega) = k(\omega) \cdot e^{j\psi(\omega)}$ – коэффициент передачи ЛФ,

$S(j\omega) = S(\omega)e^{j\psi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ – спектральная функция сигнала $S(t)$, то

полезный сигнал на выходе ЛФ выразится равенством

$$y_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot k(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.59)$$

Мощность (дисперсия) шума на выходе ЛФ равна

$$\sigma_n^2 = P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega) \cdot |k(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.60)$$

Отношение мощности мгновенного значения полезного сигнала на выходе ЛФ в некоторый момент времени t_0 к мощности выходного шума равно

$$q = \frac{|y_c(t)|^2}{\sigma_n^2} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot k(j\omega) \cdot e^{j\omega\tau_0} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (2.61)$$

Найдем такой коэффициент передачи $k(j\omega)$, при котором отношение (2.61) в момент времени t_0 достигает максимума. На основании неравенства Буняковского – Шварца

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \cdot f_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\omega)|^2 d\omega$$

получим

$$q \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{2E_c}{N_0}, \quad (2.62)$$

где $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = E_c$ – энергия входного полезного сигнала.

Таким образом, отношение мощности полезного сигнала к мощности шума на выходе любого линейного фильтра не может превышать величины $2E_c / N_0 = q_{\text{макс}}$.

Указанная максимальная величина q имеет место при максимальном значении интеграла в числителе выражения (2.62):

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot k(j\omega) \cdot e^{j\omega\tau_0} d\omega = \text{макс.} \quad (2.63)$$

Из выражения (2.64) вытекает требование к коэффициенту передачи $k(j\omega)$ ЛФ, максимизирующего отношение (2.63), которое достигается при выполнении условия

$$k(j\omega) = C \cdot S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau_0}, \quad (2.64)$$

где C – постоянный коэффициент, учитывающий ослабление или усиление сигнала ЛФ, а

$$S^*(j\omega) = S(\omega) \cdot e^{-j\psi(\omega)} \quad (2.65)$$

функция, комплексно-сопряженная со спектральной функцией входного полезного сигнала $S(t)$.

Линейный фильтр, комплексный коэффициент передачи которого удовлетворяет условию (2.64), называется оптимальным согласованным фильтром для сигнала $S(t)$.

Для согласованного фильтра из (2.63) с учетом (2.58) и (2.65) получим равенства

$$|k(j\omega)| = C \cdot |S(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -[\psi(\omega) + \omega t_0], \quad (2.66)$$

из которых следует, что амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра пропорциональна амплитудно-частотному спектру ожидаемого сигнала, а фазочастотная характеристика равна сумме фазового спектра входного сигнала, взятого с обратным знаком, и фазовой задержки $(-\omega t_0)$.

Фаза гармонических составляющих полезного сигнала на выходе согласованного фильтра (2.60) равна

$$\omega t + \varphi(\omega) + \psi(\omega) = \omega(t - t_0) \quad (2.67)$$

и при $t = t_0$ становится нулевой, т. е. в момент времени t_0 все гармонические составляющие сигнала имеют одинаковую фазу и их амплитуды складываются арифметически, образуя пик сигнала на выходе фильтра. Спектральные составляющие шума на выходе фильтра при этом имеют случайные фазы.

Найдем выражение для импульсного отклика $g(t)$ согласованного фильтра, применив обратное преобразование Фурье от коэффициента передачи:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega(t_0 - t)} d\omega = C \cdot S(t_0 - t). \quad (2.68)$$

Таким образом, импульсным откликом согласованного фильтра является функция зеркально отображенного сигнала $S(t)$ относительно времени t_0 , умноженная на коэффициент C (рисунок 2.2).

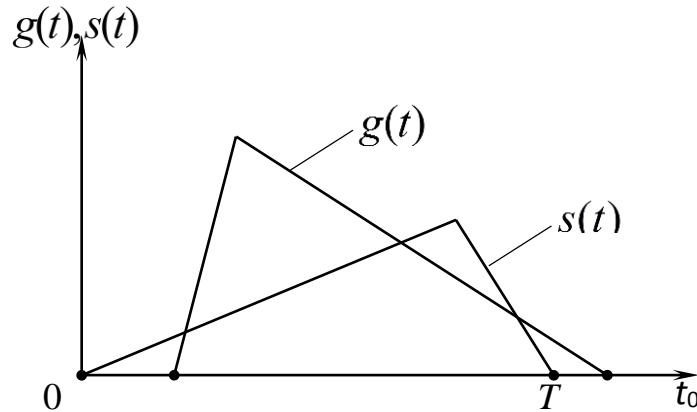


Рисунок 2.2 – Временные диаграммы сигнала и импульсного отклика СФ

Из (2.68) и рисунка 2.2 видно, что для практически реализуемого согласованного фильтра $t_0 \geq T$. Обычно берут $t_0 = T$.

Форма сигнала на выходе согласованного фильтра определяется по теореме Дюамеля:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^T x(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = \int_0^T [S(t-\tau) + n(t-\tau)] \cdot C \cdot S(t_0-\tau) d\tau = \\
 &= C \int_0^T S(t-\tau) \cdot S(t_0-\tau) d\tau + C \int_0^T S(t_0-\tau) \cdot n(t-\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{2.69}$$

Откуда форма полезного сигнала на выходе фильтра равна

$$y_c(t) = C \int_0^T S(t-\tau) \cdot S(t_0-\tau) d\tau = C \cdot R_c(t-t_0)
 \tag{2.70}$$

и с точностью постоянного коэффициента C представляет автокорреляционную функцию сигнала $S(t)$, которая в точке $t = t_0$ принимает максимальное значение, пропорциональное энергии входного полезного сигнала:

$$y_c(t)_{\text{макс}} = y_c(t_0) = C \cdot R(0) = C \cdot E_c.
 \tag{2.71}$$

Дисперсия σ_n^2 шумовой составляющей сигнала $y_n(t)$ находится из ее корреляционной функции:

$$\begin{aligned}
r(t_1, t_2) &= \langle y_n(t_1) \cdot y_n(t_2) \rangle = \\
&= \left\langle C^2 \int_0^T \int_0^T S(t_0 - \tau_1) \cdot n(t_1 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_2) \cdot n(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\rangle = \\
&= C^2 \int_0^T \int_0^T r_n(t_1 - t_2 + \tau_2 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= C^2 \int_0^T \int_0^T \delta(t_1 - t_2 + \tau_2 - \tau_1) \cdot \frac{N_0}{2} \cdot S(t_0 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= C^2 \frac{N_0}{2} \int_0^T S(t) \cdot S(t + t_1 - t_2) dt = C^2 \frac{N_0}{2} \cdot R_c(t_1 - t_2). \tag{2.72}
\end{aligned}$$

При выводе конечного выражения (2.72) принимались во внимание дельта-коррелированность белого шума, $r_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$, и фильтрующие свойства дельта-функции.

В (2.72) при $t_1 - t_2 = \tau = 0$ получаем дисперсию шума на выходе фильтра:

$$\sigma_n^2 = C^2 \cdot \frac{N_0 E_c}{2}, \tag{2.73}$$

Отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра в момент времени t_0 с учетом (2.68) и (2.73)

$$q = \frac{P_c}{\sigma_n^2} = \frac{C^2 E^2}{C^2 \cdot \frac{N_0 E}{2}} = \frac{2E}{N_0} \tag{2.74}$$

можно пересчитать к отношению сигнал/шум на входе фильтра:

$$q = \frac{2E}{N_0} = \frac{2P_{c \text{ ВХ}} \cdot T_{\text{эф}} \cdot \Delta f_{\text{эф}}}{N_0 \Delta f_{\text{эф}}} = T_{\text{эф}} \Delta f_{\text{эф}} \frac{P_{c \text{ ВХ}}}{P_{n \text{ ВХ}}} = B \frac{P_{c \text{ ВХ}}}{P_{n \text{ ВХ}}} = B q_{\text{ВХ}}, \tag{2.75}$$

где $T_{\text{эф}}$, $\Delta f_{\text{эф}}$ – эффективная длительность и эффективная полоса частот полезного сигнала $S(t)$; $B = T_{\text{эф}} \cdot \Delta f_{\text{эф}}$ – база сигнала.

Следует учесть, что максимальное отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра определяется только энергией сигнала и спектральной плотностью шума и не зависит от формы сигнала.

В общем случае, когда шум $n(t)$ не белый и является нормальным стационарным процессом со спектральной плотностью $N(\omega)$, коэффициент передачи согласованного фильтра находится по формуле

$$k(j\omega) = \frac{CS^*(j\omega)}{N(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}. \quad (2.76)$$

Отношение сигнал/шум на выходе фильтра в этом случае равно

$$q = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)k(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) \cdot |k(j\omega)|^2 d\omega} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega. \quad (2.77)$$

Максимально возможное значение этого отношения определяется величиной

$$q_{\text{макс}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega. \quad (2.78)$$

Формально коэффициент передачи оптимального фильтра (2.76) для произвольного аддитивного стационарного гауссова шума можно представить в виде произведения коэффициентов передачи двух последовательно включенных линейных фильтров, первый из которых «обесцвечивающий», а второй – согласованный с полезным сигналом на выходе «обесцвечивающего» фильтра:

$$k(j\omega) = k_1(j\omega) \cdot k_2(j\omega) = \frac{C_1}{\sqrt{N(\omega)}} \cdot \frac{C_2}{\sqrt{N(\omega)}} S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (2.79)$$

Так как есть определенная свобода в выборе фазовой характеристики «обесцвечивающего» фильтра, то можно достигнуть физической реализуемости оптимального фильтра.

Исходя из вышеизложенного укажем основные свойства согласованных фильтров (СФ).

1. Среди всех линейных фильтров СФ на фоне белого шума дает на выходе максимальное отношение мощности пикового значения выходного сигнала и мощности шума, равное $\frac{2E_c}{N_0}$.

2. Сигнал на выходе СФ по форме совпадает с функцией автокорреляции входного сигнала.

3. Функция корреляции шума на выходе СФ имеет вид функции корреляции входного сигнала.

4. СФ сложного сигнала в базу раз сжимает по длительности входной сигнал и в базу раз улучшает входное отношение сигнал/шум, если прием осуществляется в полосе сигнала.

5. Физически осуществимый СФ должен иметь $t_0 \geq T$ (время запаздывания фильтра не меньше длительности сигнала).

В ряде применений, особенно при приеме простых сигналов, используют квазиоптимальные фильтры, которые проще СФ в реализации и осуществляют

согласование с сигналом по эффективной полосе. Это фильтры с передаточной функцией прямоугольного вида, одиночного резонансного колебательного контура, гауссовой резонансной кривой. Для простых форм сигналов квазиоптимальные фильтры ухудшают отношение сигнал/шум по сравнению с СФ на величину, не превышающую 15 %. Функции квазиоптимальных фильтров обычно выполняют усилители промежуточной частоты.

2.4.2 Примеры реализации согласованных фильтров

1. Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса.

$$S(t) = \begin{cases} A_0, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & 0 > t, t > T, \end{cases} \quad (2.80)$$

где T – длительность импульса, A_0 – его амплитуда.

Спектральная функция сигнала

$$S(j\omega) = A_0 \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \frac{A_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (2.81)$$

Если задержка СФ $t_0 = T$, то коэффициент передачи равен

$$k(j\omega) = C \cdot S^*(j\omega) e^{-j\omega t} = \frac{CA_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (2.82)$$

На рисунке 2.3, а в соответствии с (2.83) представлена возможная схема СФ для видеоимпульса длительностью T , состоящая из видеоусилителя с коэффициентом усиления CA_0 , интегратора, линии задержки на $t_0 = T$ и вычитающего устройства.

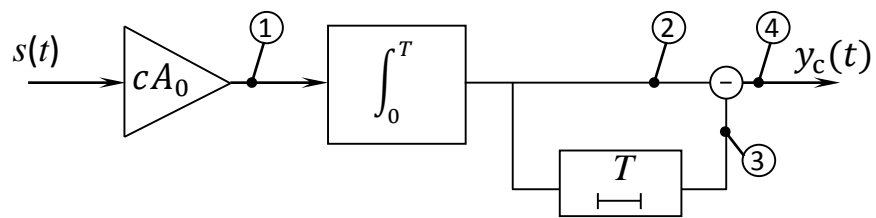
На рисунке 2.3, б показаны напряжения на выходе отдельных элементов схемы. Напряжение на выходе СФ описывается выражением

$$y_c(t) = C \cdot A^2 \cdot T \left(1 - \frac{|t - T|}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq 2T. \quad (2.83)$$

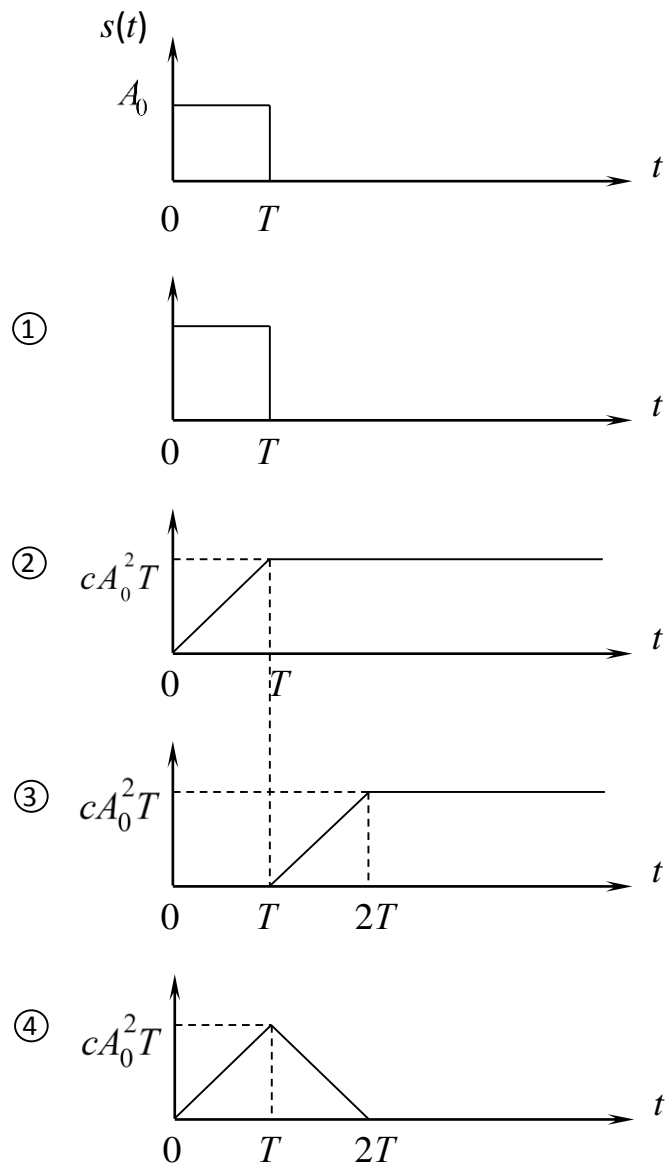
Другая реализация СФ на линии задержки (ЛЗ) с отводами и сумматором приведена на рисунке 2.4.

Форма выходного сигнала тем ближе к описанию (2.83), чем больше количество отводов (меньше длительность ступеньки). Импульсный отклик этого фильтра равен

$$g(t) = \text{rect}(T - t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t \leq 0, t > T. \end{cases} \quad (2.84)$$

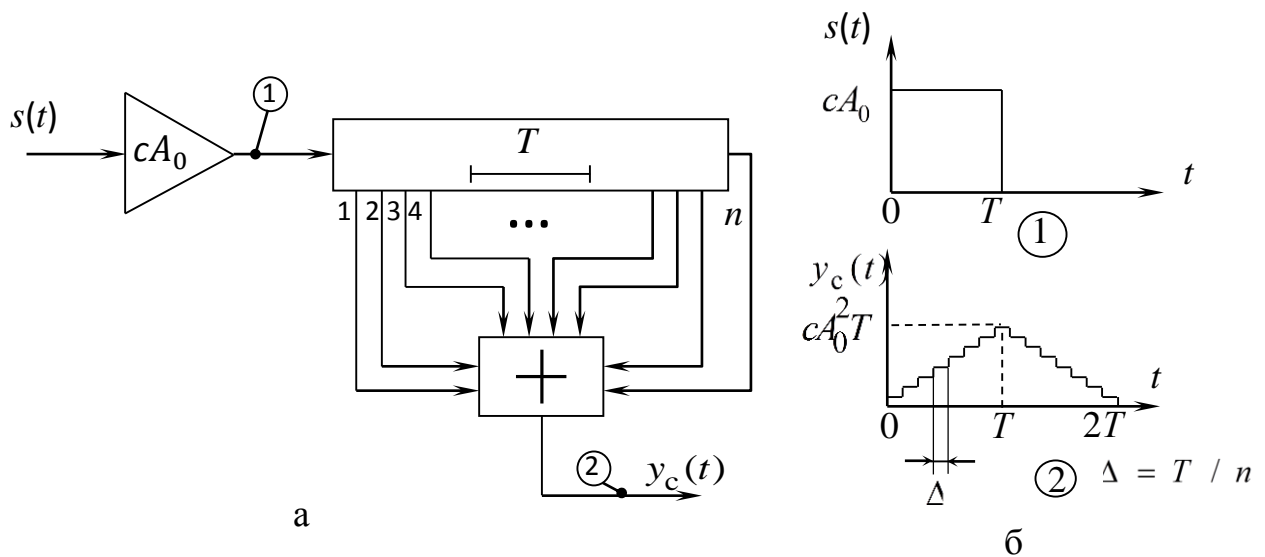


а



б

а – функциональная схема; б – временные диаграммы
Рисунок 2.3 – СФ для прямоугольного импульса



а – функциональная схема СФ; б – временные диаграммы
 Рисунок 2.4 – СФ на ЛЗ для прямоугольного импульса

2. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

$$S(t) = A_0 \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.85)$$

Спектральная функция сигнала

$$S(j\omega) = \int_0^T A_0 \cos \omega_0 t \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{A_0}{2} \left[\frac{e^{j(\omega_0 - \omega)T} - 1}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_0 + \omega)T} - 1}{j(\omega_0 + \omega)} \right], \quad (2.86)$$

где
$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}].$$

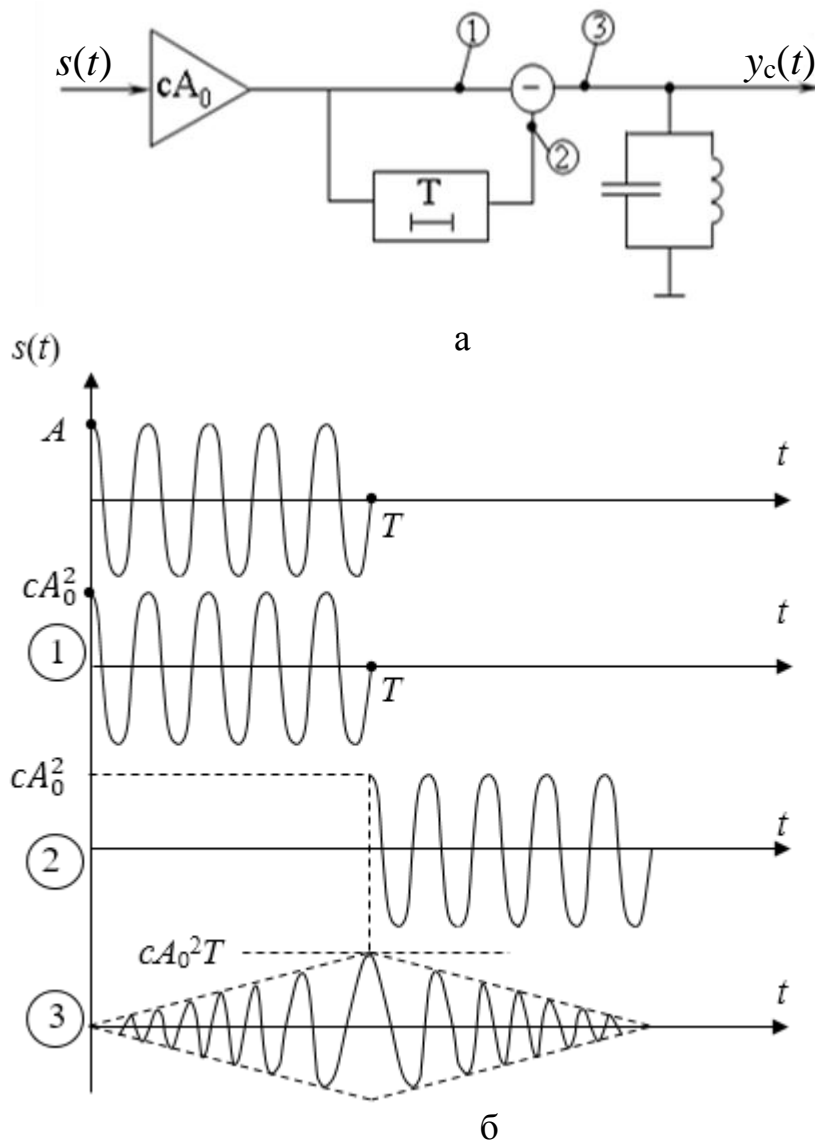
При $t_0 = T$ коэффициент передачи СФ равен

$$k(j\omega) = C \cdot S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} = C \frac{A_0}{2} \left[\frac{e^{-j\omega T} - e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j\omega T} + e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0 + \omega)} \right]. \quad (2.87)$$

Если в (2.87) $\omega_0 T = 2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$k(j\omega) = CA_0 (1 - e^{-j\omega T}) \cdot \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.88)$$

В соответствии с (2.88) на рисунке 2.5, а приведена функциональная схема СФ, состоящая из полосового усилителя с коэффициентом усиления CA_0 , линии задержки на $t_3 = T$, вычитающего усилителя и идеального колебательно-го контура ($\omega_0^2 = 1/LC$ – квадрат резонансной частоты колебательного контура, $j\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$ – передаточная функция контура). На рисунке 2.5, б изображены диаграммы, поясняющие работу СФ.



а – функциональная схема СФ; б – временные диаграммы

Рисунок 2.5 – Схема СФ для радиоимпульса и ее временные диаграммы

Напряжение на выходе СФ описывается выражением

$$y_c(t) = CA_0T \left(1 - \frac{|t-T|}{T} \right) \cos \omega_0 t. \quad (2.89)$$

3. Согласованный фильтр для пачки прямоугольных импульсов.

В импульсной радиолокации чаще всего приходится обрабатывать не одиночный радиоимпульс, а пачку. Синтезируем СФ для пачки из n периодически следующих прямоугольных импульсов:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} S_0(t - iT_n), \quad 0 \leq t \leq nT_n, \quad (2.90)$$

где $S_0(t)$, $0 \leq t \leq T$ – одиночный прямоугольный импульс с энергией E_0 ; T_n – период следования импульсов.

Спектральная функция пачки импульсов (2.90)

$$S(j\omega) = \int_0^{nT_n} S(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{iT_n}^{(i+1)T_n} S_0(t - iT_n)e^{-j\omega t} dt = S_0(j\omega) \sum_{i=1}^{n-1} e^{-j\omega T_n^i},$$

(2.91)

где $S_0(j\omega)$ – спектральная функция одиночного импульса.

При $t_0 = nT_n$ коэффициент передачи СФ для пачки импульсов будет равен

$$k(j\omega) = CS^*(j\omega)e^{-j\omega T_n} = CS_0^*(j\omega)e^{-j\omega T_n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-j\omega(n-1)T_n} \cdot e^{j\omega T_n} =$$

$$= CS_0^*(j\omega)e^{-j\omega T_n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-j\omega T_n} = k_0(j\omega) \cdot k_1(j\omega),$$

(2.92)

где $k_0(j\omega) = CS_0^*(j\omega)e^{-j\omega T_n}$, $k_1(j\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-j\omega T_n}$, $S^*(j\omega) = S_0^*(j\omega) \sum_{i=0}^{n-1} e^{j\omega T_n}$.

Первый сомножитель в (2.92) есть коэффициент передачи СФ для одиночного радиоимпульса, а второй – частотная характеристика сумматора задержанных импульсов с выхода СФ.

На рисунке 2.6 приведена функциональная схема СФ на линии задержки с отводами для пачки из когерентных радиоимпульсов.

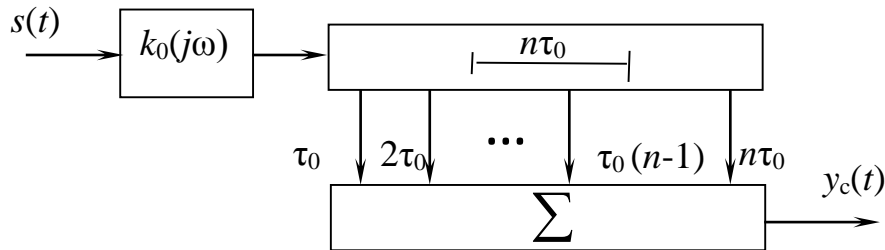


Рисунок 2.6 – Функциональная схема согласованного фильтра для пачки когерентных радиоимпульсов

На практике трудно осуществить задержку на длительность пачки радиоимпульсов, поэтому используют линию задержки на один период повторения импульсов T_n с обратной связью с выхода на вход. Такое устройство называют рециркулятор.

На рисунке 2.7 представлена функциональная схема рециркулятора, состоящая из операционного усилителя, линии задержки на T_n и узла, обеспечивающего нужный коэффициент обратной связи α . Обычно берут коэффициент $\alpha < 1$, чтобы не возникало самовозбуждения.

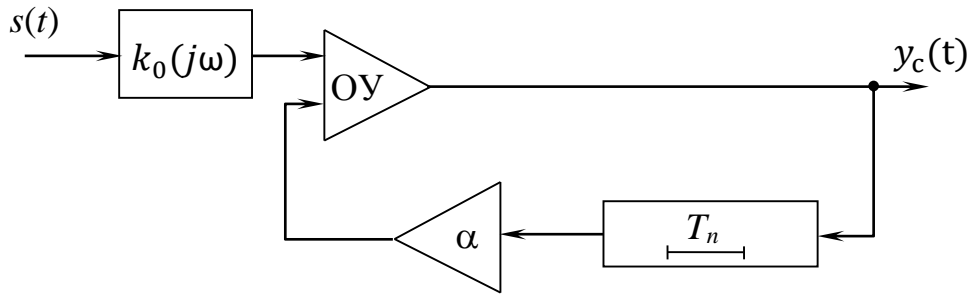


Рисунок 2.7 – Функциональная схема рециркулятора

Комплексная частотная характеристика рециркулятора в соответствии с (2.93) равна

$$k_p(j\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i e^{-j\omega i T_n} = \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j\omega T_n}}. \quad (2.93)$$

Амплитудно-частотная характеристика рециркулятора (рисунок 2.8) является периодической функцией частоты и имеет вид гребенки с максимумами, равными $1/(1-\alpha)$ при частотах $\omega = 2\pi n / T_n$, $n=0,1,2,\dots$. Отсюда и другое название рециркуляторов – гребенчатые фильтры.

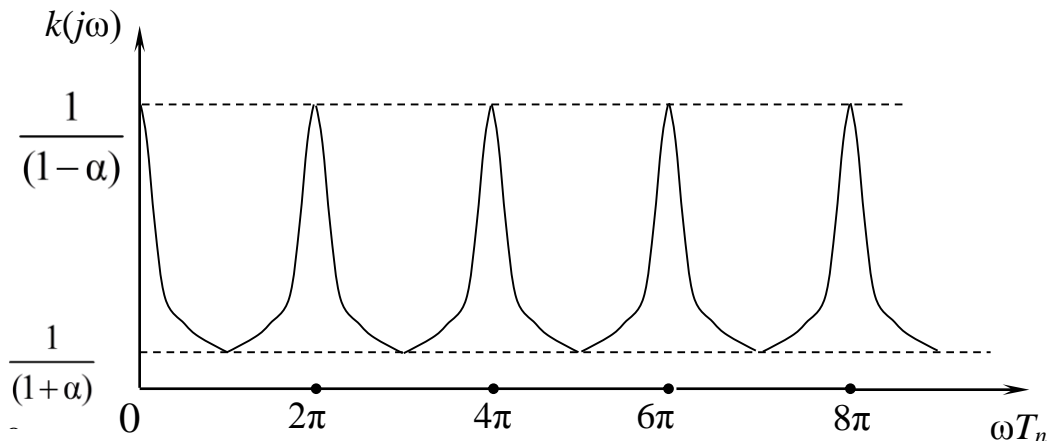


Рисунок 2.8 – Коэффициент передачи рециркулятора

Наибольшее отношение сигнал/шум на выходе рециркулятора составляет

$$q_{p \text{ макс}} = \frac{(1 + \alpha) \cdot (1 - \alpha^n)^2}{1 - \alpha} \cdot \frac{2E_c}{N_0}. \quad (2.94)$$

4. Согласованный фильтр для цифрового сигнала.

В современных РС широко используются сложные сигналы с дискретной фазовой или частотной модуляцией. Свойства этих сигналов в основном определяются свойствами модулирующей цифровой последовательности

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \text{rect}[t - (i-1)\tau_0], \quad (2.95)$$

где $\{\alpha_i\}$ – символы цифровой последовательности длительностью τ_0 , принимающие значения

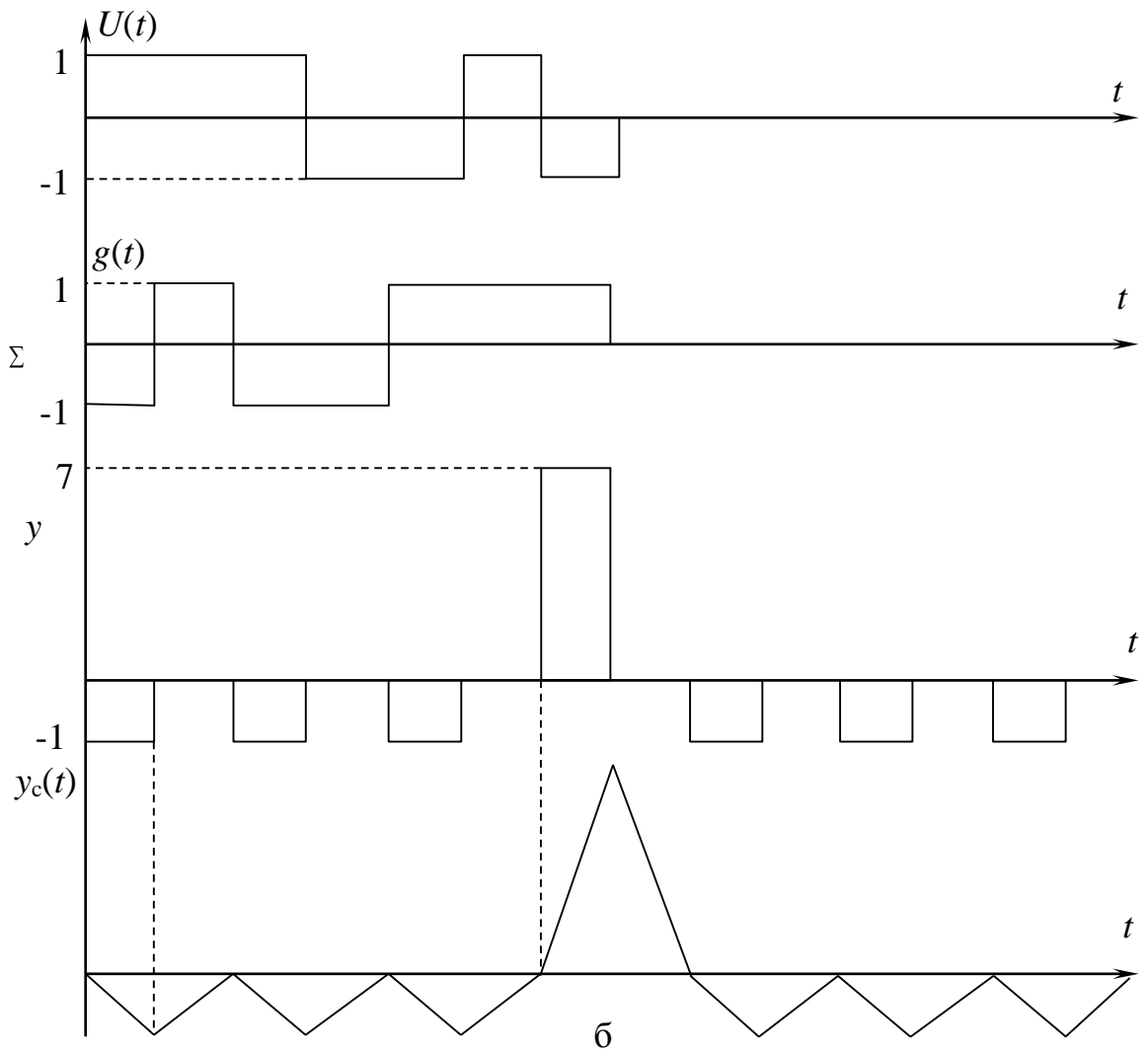
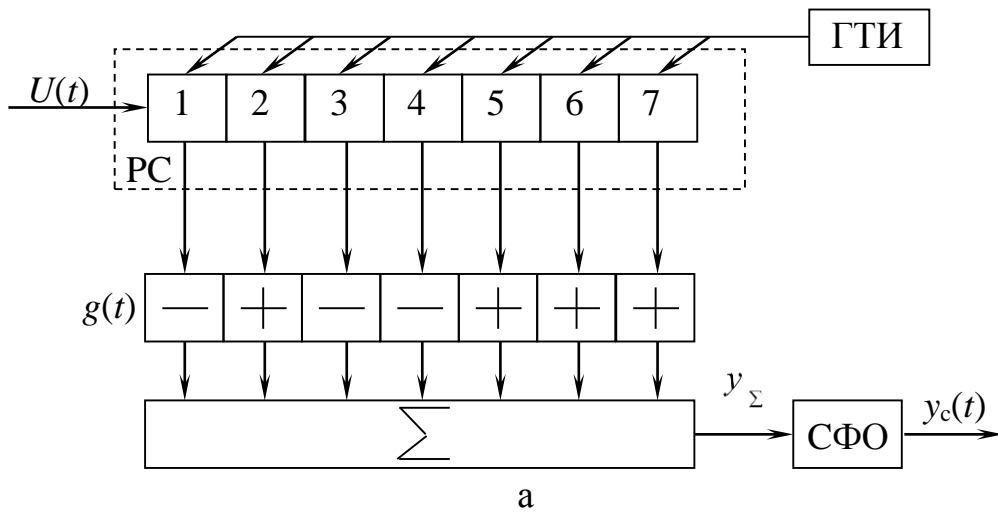
$$\text{rect}[t - (i-1)\tau_0] = \begin{cases} 1, & (i-1)\tau_0 \leq t \leq iT_0, \\ 0, & \text{другие значения } t, \end{cases}$$

N – количество символов в цифровой последовательности.

Импульсный отклик СФ для цифровой последовательности (2.95) $g(t) = C \cdot U(T-t)$, где $T = N\tau_0$, представляет собой функцию, в которой без учета коэффициента C порядок следования символов цифровой последовательности инверсный (обратный) по отношению к сигнальной цифровой последовательности.

На рисунке 2.9, а приведена функциональная схема СФ для бинарной М-последовательности с генераторным полиномом $x^3 + x^2 + 1 = 0$ и $c = 1$.

В состав СФ входят генератор тактовых импульсов (ГТИ) с частотой следования $f_t = 1/\tau_0$, регистр сдвига (РС) на семь разрядов ($N = 2^3 - 1 = 7$), блок весовых коэффициентов (БВК), который отражает характер импульсного отклика $g(t)$ путем инвертирования или неинвертирования выходных сигналов соответствующих разрядов РС, арифметический сумматор (Σ) и согласованный фильтр для одиночного прямоугольного импульса длительностью τ_0 (СФО). Временные диаграммы, поясняющие работу фильтра, изображены на рисунке 2.9, б. В описанной схеме регистр сдвига можно заменить линией задержки с отводами. С помощью линии задержки с отводами, блока весовых коэффициентов и сумматора можно построить схему СФ для сигнала с ЛЧМ.



а – функциональная схема СФ; б – временные диаграммы

Рисунок 2.9 – СФ для цифрового сигнала

2.5 Обнаружение радиосигналов

Как указывалось ранее, задача обнаружения радиосигналов характерна для всех РС и предшествует всем частным задачам оптимального приема, так как прежде чем извлечь или воспроизвести информацию из принятого радиосигнала, необходимо однозначно ответить на вопрос, присутствует ли в момент наблюдения полезный сигнал на входе приемника или отсутствует.

Бинарный характер задачи обнаружения связан с наличием на входе приемника аддитивного шума.

Обнаружение радиосигнала может быть простым и сложным. При простом обнаружении, помимо априорных данных о радиосигнале и шуме, известны возможные моменты времени присутствия полезного сигнала в принимаемой смеси. Сложное обнаружение отличается необходимостью оценки временного положения радиосигнала.

Далее мы будем рассматривать простое обнаружение, а вопросы оценки временного положения радиосигнала являются предметом отдельного обсуждения. Ниже рассматриваются три случая обнаружения: обнаружение известного радиосигнала, обнаружение известного радиосигнала с неизвестной фазой, обнаружение радиосигнала с неизвестной фазой и флюктуирующей амплитудой.

2.5.1 Обнаружение известного (детерминированного) радиосигнала

Пусть принятая смесь

$$x(t) = \lambda S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.96)$$

где $n(t)$ – белый гауссов шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0 / 2$; $S(t)$ – полезный сигнал с известными параметрами, определяемый на интервале $[0, T]$. Параметр λ неизвестен и может принимать одно из двух значений: $\lambda = 1$ (сигнал присутствует в смеси), $\lambda = 0$ (сигнал отсутствует в смеси). Считаем, что $S(t)$ и $n(t)$ некоррелируемые процессы.

Для синтеза оптимальной структуры обнаружителя воспользуемся критерием максимума отношения правдоподобия (2.38):

$$\Lambda = \frac{F(1)}{F(0)}. \quad (2.97)$$

Отношения (2.98) будет по крайней мере не меньше единицы, если в принимаемой смеси присутствует сигнал $S(t)$.

Функционал правдоподобия при наличии сигнала $S(t)$ на входе приемника

$$F(1) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t)]^2 dt \right]. \quad (2.98)$$

Функционал правдоподобия при присутствии на входе приемника только шума ($\lambda = 0$)

$$F(0) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right]. \quad (2.99)$$

Отношение функционалов правдоподобия (2.99) и (2.100)

$$\frac{\exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t)]^2 dt \right]}{\exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right]} = \exp \left[-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t) dt \right] = \quad (2.100)$$

$$= \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t) dt \right] \cdot \exp \left[-\frac{E}{N_0} \right] \geq h_0,$$

где $E = \int_0^T S^2(t) dt$ – энергия сигнала; h_0 – порог, относительно которого оценивается величина отношения.

Прологарифмируем обе части выражения (2.100):

$$\int_0^T x(t) S(t) dt \geq h, \quad (2.101)$$

где порог $h = N_0 / 2 [E / N_0 + \ln h_0]$.

Структурная схема оптимального обнаружителя приведена на рисунке 2.10.

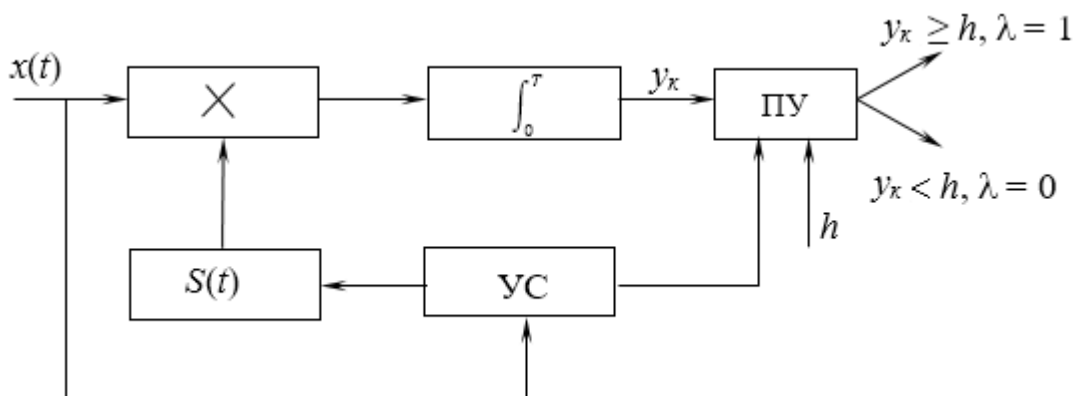


Рисунок 2.10 – Структурная схема оптимального обнаружителя известного сигнала

Из рисунка 2.10 и выражения (2.101) следует, что оптимальная процедура обнаружения сигнала состоит в вычислении функции взаимной корреляции между входной смесью $x(t)$ и опорным сигналом $S(t)$, который является копией переданного сигнала, сравнении полученного значения с порогом h в пороговом устройстве (ПУ) в момент времени, определяемым устройством синхронизации

(УС). Если величина y на выходе интегратора не меньше порога h , то принимается решение о наличии полезного сигнала на входе приемника, в противном случае – его отсутствии.

Для простоты анализа будем считать коэффициент отношения полезного сигнала на входе к опорному равным 1, коэффициент передачи перемножителя также равным 1.

Величина

$$y = \int_0^T x(t)S(t)dt = \int_0^T S^2(t)dt + \int_0^T n(t)S(t)dt = y_c + y_n \quad (2.102)$$

состоит из полезной составляющей и шумовой.

Полезная составляющая y_c в момент сравнения с порогом численно равна энергии сигнала, что соответствует пику автокорреляционной функции входного сигнала $S(t)$. Дисперсия шумовой составляющей y_n аналогично преобразованиям (2.73) равна

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0 E}{2}. \quad (2.103)$$

Отношение сигнал/шум на входе порогового устройства

$$q = \frac{P_c}{\sigma_n^2} = \frac{E^2}{N_0 E / 2} = \frac{2E}{N_0}. \quad (2.104)$$

Таким образом, корреляционный приемник в обнаружителе обеспечивает на своем выходе, как и согласованный фильтр, пиковое значение полезной составляющей, пропорциональное энергии сигнала E , и максимальное отношение сигнал/шум, равное $2E / N_0$. Отсюда вытекает структура обнаружителя известного сигнала на СФ, которая приведена на рисунке 2.11.

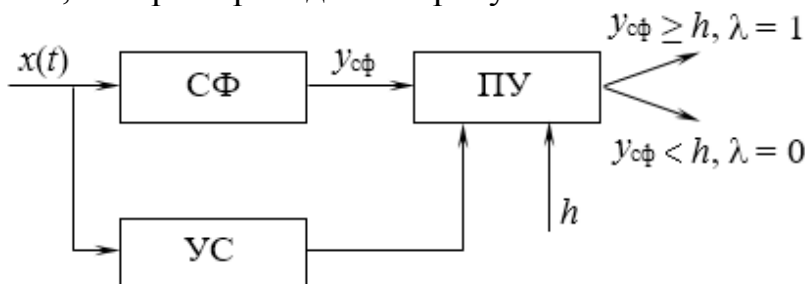


Рисунок 2.11 – Фильтровый обнаружитель известного сигнала

Отличительной особенностью обнаружителя на СФ (рисунки 2.10 и 2.11) является ненадобность в опорном генераторе. По помехоустойчивости обе схемы равнозначны. При сложности построения СФ выбирают корреляционный вариант обнаружителя. На рисунке 2.12 приведены формы напряжений на выходе коррелятора и СФ для прямоугольного импульса.

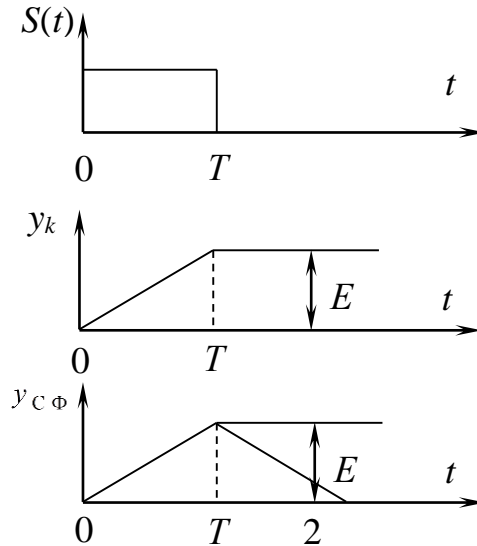


Рисунок 2.12 – Эпюра напряжений на выходе коррелятора и согласованного фильтра для прямоугольного импульса

Определим количественные характеристики качества обнаружения, воспользовавшись критерием Неймана – Пирсона. Так как смесь на входе приемника подчиняется нормальному закону распределения, а операции в обнаружителе линейные, то величина y также будет описываться нормальным законом распределения. Найдем характеристики законов распределения величины y для двух возможных случаев.

Пусть $\lambda = 1$, тогда

$$y_1 = \int_0^T [S(t) + n(t)] \cdot S(t) dt,$$

$$m_1 = \langle y_1 \rangle = \int_0^T S^2(t) dt + \int_0^T \langle n(t) \cdot S(t) \rangle dt = E, \quad \sigma_1^2 = \langle (y_1 - m_1)^2 \rangle = \frac{EN_0}{2}. \quad (2.105)$$

При $\lambda = 0$

$$y_0 = \int_0^T n(t)S(t)dt, \quad m_0 = \langle y_0 \rangle = 0, \quad \sigma_0^2 = \langle (y_0 - m_0)^2 \rangle = \frac{EN_0}{2} = \sigma_1^2 = \sigma^2. \quad (2.106)$$

Плотности распределения случайных величин y_1 и y_0 в соответствии с (2.105) и (2.106) имеют вид

$$P(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma^2}\right], \quad P(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.107)$$

На рисунке 2.13 приведены графики распределений (2.107).

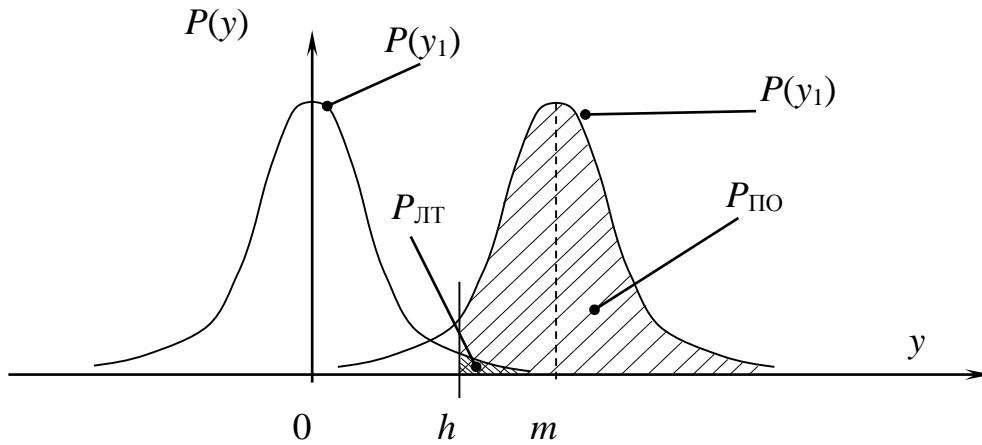


Рисунок 2.13 – Графики распределений плотностей вероятности

Для выбранного порога h вероятность правильного обнаружения составит

$$P_{\text{ПО}} = P(1/1) = \int_h^{\infty} P(y_1) dy_1 = 1 - \Phi\left(\frac{h - E}{\sqrt{EN_0/2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{2h}{N_0} - \frac{2E}{N_0}}{\sqrt{2E/N_0}}\right), \quad (2.108)$$

а вероятность ложной тревоги соответственно

$$P_{\text{ЛТ}} = P(1/0) = \int_h^{\infty} P(y_0) dy_0 = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{EN_0/2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{2h}{N_0}}{\sqrt{2E/N_0}}\right). \quad (2.109)$$

В (2.108) и (2.109) функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется интегралом

вероятности. Основные свойства интеграла вероятности:

- а) $\Phi(\infty) = 1$;
- б) $\Phi(0) = 0,5$;
- в) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

На рисунке 2.14 изображены зависимости $P_{\text{ПО}} = f(2E/N_0, P_{\text{ЛТ}})$, которые называются характеристиками обнаружения.

С помощью характеристик обнаружения по заданным $P_{\text{ПО}}$ и $P_{\text{ЛТ}}$ можно определить необходимое отношение сигнал/шум $2E/N_0$ на входе порогового устройства и величину порога h . Часто в литературе встречается понятие «пороговый сигнал». Это сигнал, энергия которого при заданной $P_{\text{ЛТ}}$ обеспечивает

обнаружение требуемой $P_{\text{по}}$. Например, при $P_{\text{лт}} = 0,1$ и требуемой $P_{\text{по}} = 0,8$ (рисунк 2.14) пороговому сигналу соответствует $2E/N_0 = 2$.

Для произвольных сигналов

$$2E/N_0 = 2P_{\text{вх}}T/N_0 = 2P_{\text{вх}}B/N_0F_{\text{эф}} = 2P_{\text{вх}}B/\sigma^2 = 2q_{\text{вх}}B,$$

где $P_{\text{вх}}$ – мощность входного сигнала; T – длительность входного сигнала; B – база сигнала; $F_{\text{эф}}$ – эффективная полоса частот сигнала; $q_{\text{вх}}$ – входное отношение сигнал/шум по мощности; σ^2 – дисперсия шума на входе.

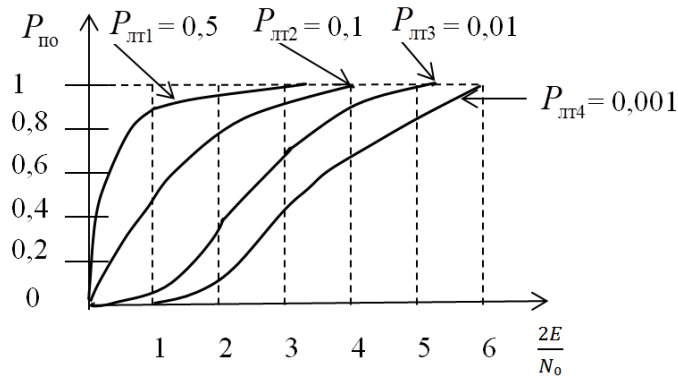


Рисунок 2.14 – Характеристики обнаружения известного сигнала

Основные выводы:

1. Качество обнаружения известного сигнала с заданным $P_{\text{по}}$ и $P_{\text{лт}}$ не зависит от формы сигнала и определяется только максимальным отношением сигнал/шум на выходе коррелятора или согласованного фильтра.
2. Полученные количественные оценки качества обнаружения следует рассматривать как теоретический верхний предел (потенциальные возможности).
3. При обнаружении сложного сигнала входное отношение сигнал/шум улучшается в базу раз.
4. Синтезированные структуры оптимальных обнаружителей известных сигналов можно рассматривать как оптимальные когерентные приемные устройства.

2.5.2 Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой

На практике начальная фаза принимаемого сигнала часто заранее неизвестна, поэтому рассмотрим этот случай с учетом априорных сведений о фазе.

Смесь на входе обнаружителя

$$x(t) = \lambda \cdot S(t, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.110)$$

где $S(t, \varphi) = S_0(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $F_n(\omega) = N_0 / 2$, – спектральная плотность шума; $S_0(t)$ – известная огибающая; φ – случайная начальная фаза; λ по-прежнему принимает значения 1 или 0.

Будем считать начальную фазу равномерно распределенной, т. е.

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.111)$$

Тогда отношение правдоподобия запишется аналогично (2.100) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi) &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \varphi)]^2 dt\right]}{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt\right]} = \exp\left\{-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) S_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt\right\} = \\ &= \exp\left[-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} \left(\cos \varphi \int_0^T x(t) S_0(t) \cos \omega_0 t dt - \sin \varphi \int_0^T x(t) S_0(t) \sin \omega_0 t dt\right)\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} Z \cos(\varphi + \psi)\right]. \end{aligned} \quad (2.112)$$

При получении конечного выражения в (2.112) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} Y/X, \\ X &= \int_0^T x(t) S_0(t) \cos \omega_0 t dt, \\ Y &= \int_0^T x(t) S_0(t) \sin \omega_0 t dt. \end{aligned} \quad (2.113)$$

С физической точки зрения Z – огибающая функции взаимной корреляции входной смеси с копией полезного сигнала.

Безусловное отношение правдоподобия:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_0^{2\pi} P(\varphi) \Lambda(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{E + 2}{N_0} Z \cos(\varphi + \psi)\right] d\varphi = \\ &= \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2Z}{N_0} \cos(\varphi + \psi)\right] d\varphi = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right), \end{aligned} \quad (2.114)$$

где $I_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\gamma \cos(\varphi + \psi)} d\varphi$ – модифицированная функция Бесселя первого

рода нулевого порядка. На рисунке 2.15 приведен график этой функции, являющейся монотонно возрастающей функцией своего аргумента. При $\gamma > 1$ ее можно представить первым членом разложения в экспоненциальный ряд:

$$I_0(\gamma) \approx \frac{e^\gamma}{\sqrt{2\pi\gamma}} \left[1 + \frac{1}{8\gamma} + \frac{9}{128\gamma^2} + \dots \right]. \quad (2.115)$$

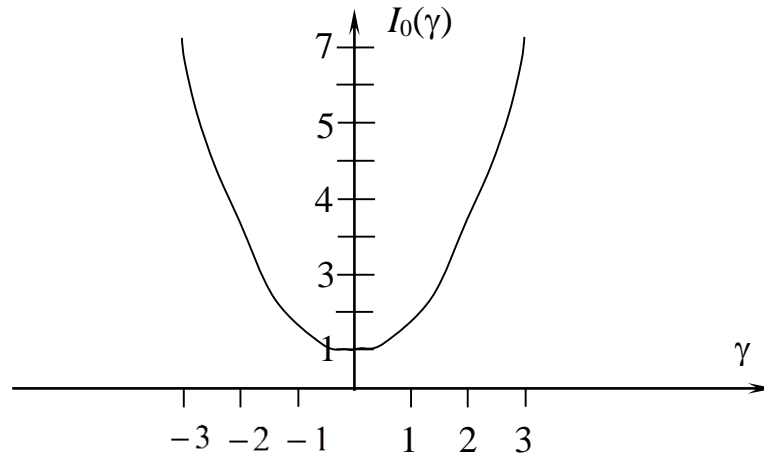


Рисунок 2.15 – Модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка

Из (2.115) следует алгоритм оптимального обнаружения сигнала со случайной начальной фазой:

$$\exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \geq h_0. \quad (2.116)$$

Ввиду монотонности функции $I_0(\gamma)$ это правило эквивалентно следующему:

$$\ln I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \geq \frac{E}{N_0} + \ln h_0. \quad (2.117)$$

Обычно аргумент модифицированной функции Бесселя первого рода нулевого порядка для случаев, имеющих практическое значение, больше единицы, поэтому если воспользоваться разложением (2.115), то получим правило сравнение огибающей Z с некоторым порогом h :

$$Z \geq h, \quad (2.118)$$

которое далее используется для построения структур оптимальных обнаружителей.

В соответствии с правилом (2.118) и соотношениями (2.113) на рисунке 2.16 приведена структурная схема оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой.

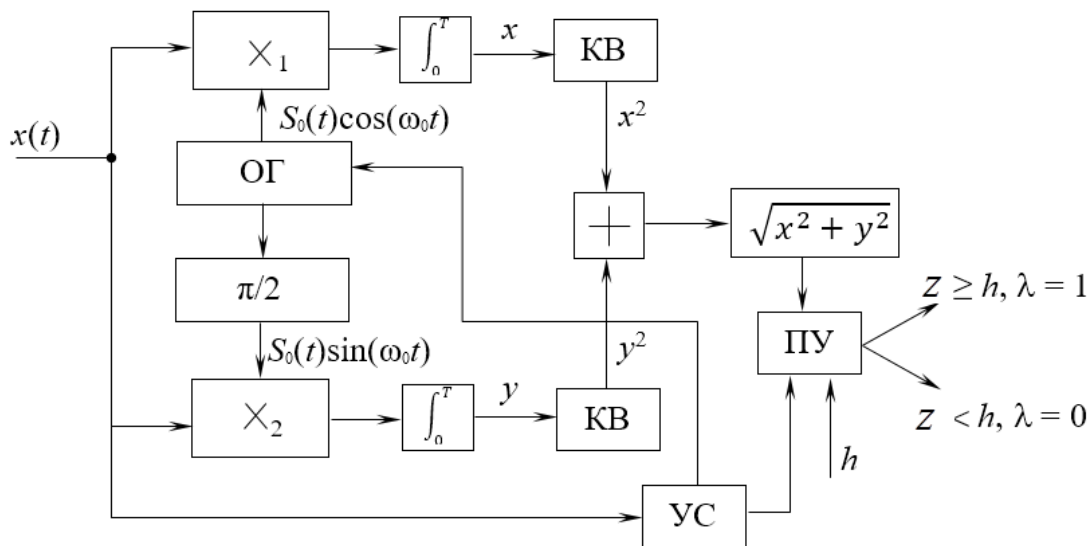


Рисунок 2.16 – Структурная схема оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой

Схема состоит из двух корреляционных квадратурных каналов как естественного результата при незнании начальной фазы сигнала.

Шумы в каналах, будучи взаимно независимыми, суммируются в сумматоре по мощности, вдвое ухудшая отношение сигнал/шум на его выходе.

Таким образом, снижение помехоустойчивости приема является платой за случайность начальной фазы радиосигнала. Рассматриваемый случай обнаружения (рисунок 2.16) – классический случай оптимального некогерентного приема.

На рисунке 2.17 приведена другая структурная реализация оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой – на основе СФ.

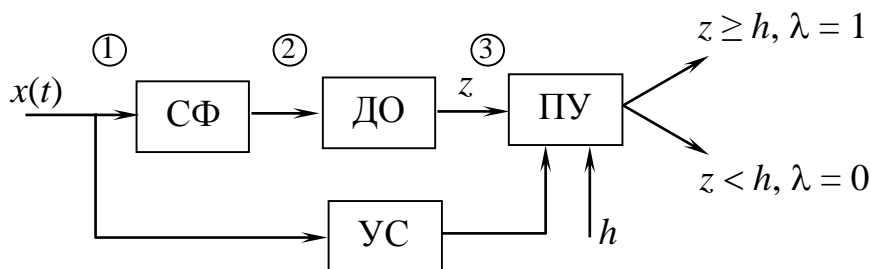


Рисунок 2.17 – Фильтровая структурная схема обнаружителей радиосигнала с неизвестной начальной фазой

Импульсный отклик фильтра $g(t) = C \cdot S(T - t, \varphi_0)$ согласован с радиосигналом $S(t)$, имеющим некоторое фиксированное значение φ_0 . Огибающая корреляционной функции Z выделяется на выходе детектора огибающей (ДО). Потенциальные возможности структур (рисунки 2.16 и 2.17) при количественной оценке качества обнаружения одинаковы.

В некоторых литературных источниках [4] приводятся другие модификации обнаружителей радиосигналов с неизвестными фазами. Интерес представ-

ляет корреляционно-фильтровая структура обнаружителя (рисунок 2.18), которая содержит, помимо узлов УС, ПУ, перемножитель (x), радиointегратор (РИ) на частоте $f_{\text{пр}}(\omega)$, линейный детектор огибающей (ДО).

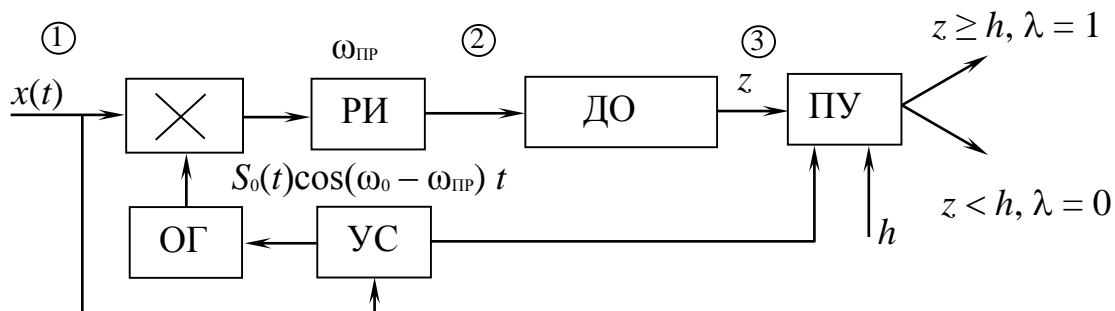


Рисунок 2.18 – Корреляционно-фильтровый обнаружитель

Особенность схемы (рисунок 2.18) состоит в том, что принятая смесь $x(t)$ умножается на копию полезного сигнала, у которого несущая частота относительно несущей частоты полезного сигнала сдвинута на величину $\omega_{\text{пр}}$. За перемножителем следует идеальный радиointегратор, настроенный на частоту $\omega_{\text{пр}}$ (колебательный контур с малым коэффициентом затухания). Колебания с выхода радиointегратора детектируются линейным детектором огибающей, значение выходного напряжения которого при $t = T$ с точностью до постоянного коэффициента равно Z . На рисунке 2.19,а изображены эпюры напряжений на отдельных элементах схем обнаружителей фильтрового и корреляционно-фильтрового (рисунок 2.19, б) типов для прямоугольного радиоимпульса.

Расчеты показывают, что потенциальная помехоустойчивость корреляционно-фильтрового обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой мало отличается от потенциальной помехоустойчивости фильтрового (корреляционного) обнаружителя.

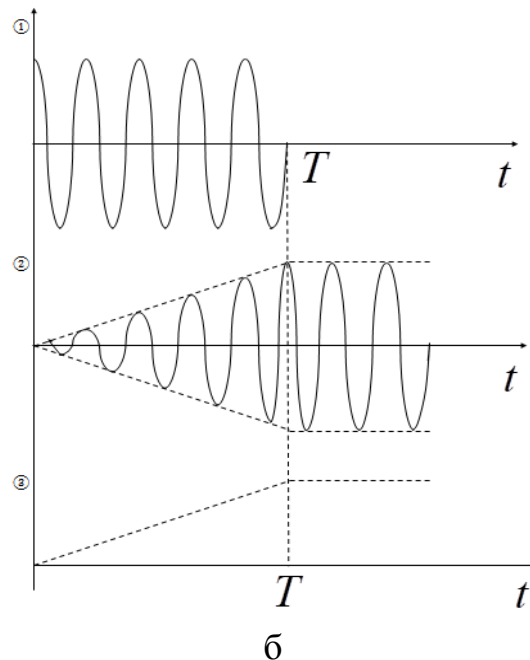
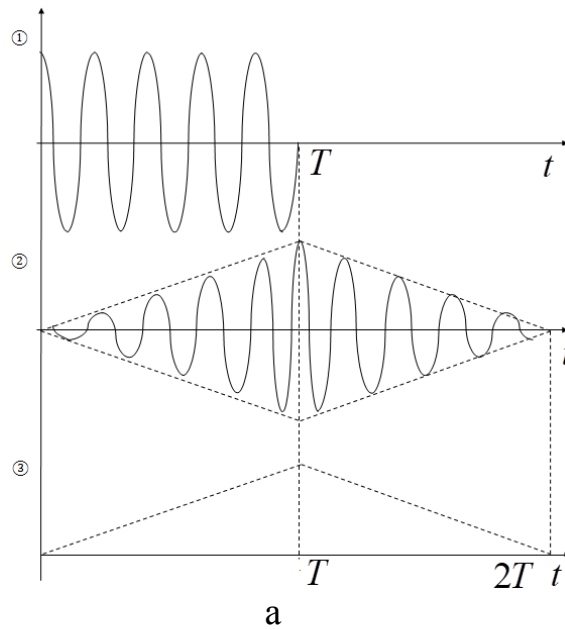
Найдем соотношения для построения характеристик обнаружения.

Считаем фазу φ принимаемой смеси (2.110) постоянной, и в силу линейности операций, выполняемых в обнаружителе, случайные величины X и Y в выражении (2.113) являются нормально распределенными с одинаковыми дисперсиями:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2 = N_0 E / 2. \quad (2.119)$$

Условные математические ожидания их соответственно равны

$$m_x = \langle X \rangle = E \cdot \cos \varphi; \quad m_y = \langle Y \rangle = E \cdot \sin \varphi. \quad (2.120)$$



а – для фильтровой схемы; б – для корреляционной схемы
 Рисунок 2.19 – Эпюры напряжений обнаружителей фильтрового и корреляционного типов

Кроме того, случайные величины X и Y взаимно независимы, поэтому при наличии в смеси (2.110) полезного сигнала случайная величина Z подчиняется обобщенному закону Рэлея (закону Райса):

$$P_1(z) = \frac{2Z}{N_0E} \exp\left(-\frac{Z^2 + E^2}{N_0E}\right) \cdot I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right), \quad Z \geq 0, \quad (2.121)$$

где $I_0(2Z / N_0)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Если в принимаемой аддитивной смеси (2.110) отсутствует полезный

сигнал ($S(t, \varphi) = 0$), то независимые гауссовы случайные величины X и Y имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии, а случайная величина Z описывается рэлеевской плотностью распределения:

$$P_0(Z) = \frac{2Z}{N_0 E} \exp\left(-\frac{Z^2}{N_0 E}\right), \quad Z \geq 0. \quad (2.122)$$

На рисунке 2.20 изображены графики распределений (2.121) и (2.122).

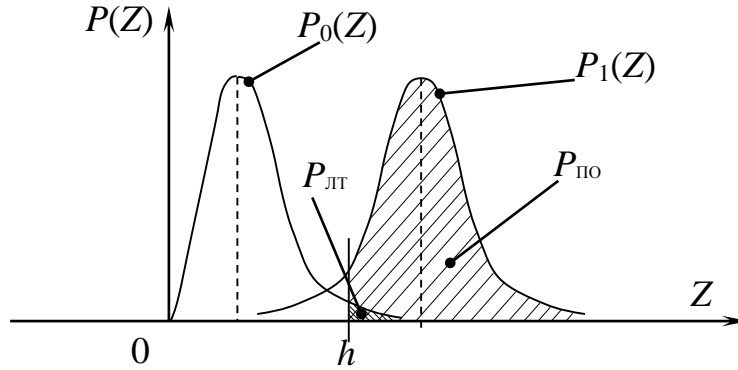


Рисунок 2.20 – Характеристики обнаружения радиосигнала с неизвестной начальной фазой

Вероятность ложной тревоги

$$P_{лт} = \int_h^{\infty} P_0(Z) dZ = \int_{h/\sqrt{N_0 E/2}}^{\infty} V \exp\left(-\frac{V^2}{2}\right) dV = e^{-\frac{h^2}{N_0 E}}. \quad (2.123)$$

Вероятность правильного обнаружения

$$P_{по} = \int_h^{\infty} P_1(Z) dZ = \int_{\frac{h}{\sqrt{EN_0/2}}}^{\infty} V \exp\left[-\frac{V^2 + 2E/N_0}{2}\right] I_0\left(V \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) dV = Q\left(\frac{h}{\sqrt{\frac{EN_0}{2}}}, \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

С учетом (2.115) имеем

$$\begin{aligned} P_{пр} &= \int_h^{\infty} V \exp\left[-\frac{V^2 + 2E/N_0}{2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot V \sqrt{2E/N_0}}} \exp\left[V \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right] dV \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{h}{\sqrt{EN_0/2}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{\left(V - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)^2}{2}\right] dV = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{E-h}{\sqrt{EN_0/2}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{E-h}{\sqrt{\frac{EN_0}{2}}}\right), \quad (2.124) \end{aligned}$$

где $V = Z / \sqrt{EN_0} / 2$; $Q(\gamma, \delta)$ – табулированная Q – функция Маркума (интегральное распределение Рэля – Райса).

Из выражений (2.123) и (2.124) вытекает соотношение

$$P_{\text{по}} = \Phi \left(\sqrt{2E / N_0} - \sqrt{2 \ln \frac{1}{P_{\text{лт}}}} \right), \quad (2.125)$$

где $E/N_0 = PT/N_0 = PB/N_0 F_{\text{эф}} = qB$, где P – мощность полезного сигнала на входе обнаружителя; T – длительность сигнала; B – база сигнала; $F_{\text{эф}}$ – эффективная полоса частот сигнала; q – входное отношение сигнал/шум по мощности.

Для сравнения пунктирными линиями нанесены зависимости при обнаружении известного сигнала. Анализ показывает, что проигрыш порогового значения отношения сигнал/шум по мощности обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой обнаружителю известного радиосигнала составляет 1,1–1,3 дБ.

На рисунке 2.21 представлены результаты расчетов по формуле (2.125).

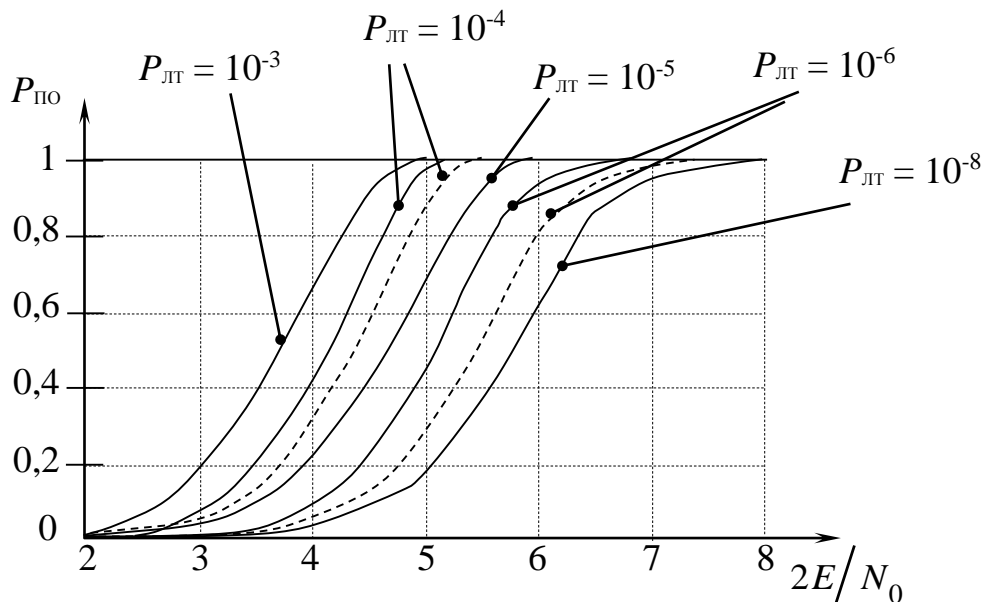


Рисунок 2.21 – Характеристики обнаружения радиосигнала с неизвестной начальной фазой

Основные выводы:

1. Платой за незнание начальной фазы при обнаружении радиосигнала является усложнение структуры обнаружителя и увеличение энергии сигнала.
2. Структуры оптимальных обнаружителей радиосигналов с неизвестными начальными фазами можно рассматривать как некогерентный оптимальный прием.
3. При обнаружении сложного радиосигнала с неизвестной начальной фазой входное отношение сигнал/шум улучшается в базу раз.

2.5.3 Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой и флюктуирующей амплитудой

В большинстве практических применений при обнаружении радиосигнала помимо неизвестной начальной фазы флюктуирует его амплитуда. Рассмотрим оптимальное обнаружение на фоне белого гауссова шума радиосигнала с неизвестной начальной фазой и случайной амплитудой:

$$x(t) = \lambda S(t, \varphi, A) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.126)$$

где $S(t, \varphi, A) = AS_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi]$ – обнаруживаемый сигнал с неизвестными амплитудой A и фазой φ ; $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $N_0/2$.

Будем считать амплитуду и фазу независимыми случайными величинами с рэлеевским и равномерным законом распределения плотностей вероятности:

$$P(A) = 2A \exp(-A^2), \quad P(\varphi) = 1/2\pi,$$

$$P(A, \varphi) = P(A) \cdot P(\varphi).$$

С учетом выражения (2.113) условное отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} \Lambda(A, \varphi) &= \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} + \frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) S_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} + \frac{2AZ}{N_0} \cos(\varphi + \psi) \right], \end{aligned} \quad (2.127)$$

где $E_0 = \frac{1}{2} \int_0^T S_0^2(t) dt$ – средняя энергия сигнала.

После усреднения по φ имеем

$$\Lambda(A) = \int_0^{2\pi} \Lambda(A, \varphi) P(\varphi) d\varphi = \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} \right] \cdot I_0 \left(\frac{2AZ}{N_0} \right). \quad (2.128)$$

Безусловное отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(A) P(A) dA = \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} \right] \cdot I_0 \left(\frac{2AZ}{N_0} \right) 2A e^{-A^2} dA = \\ &= 2 \int_0^{\infty} I_0 \left(\frac{2AZ}{N_0} \right) \exp \left[-\left(1 + \frac{E_0}{N_0} \right) A^2 \right] A dA. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} I_0(\mu, x) e^{-\nu x^2} x dx = \frac{1}{2\nu} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}},$$

то (2.129) принимает вид

$$\Lambda = \frac{N_0}{N_0 + E_0} \exp \left[\frac{Z^2}{N_0(N_0 + E_0)} \right]. \quad (2.130)$$

Алгоритм обнаружения

$$\frac{N_0}{N_0 + E_0} \exp \left[\frac{Z^2}{N_0(N_0 + E_0)} \right] \geq h_0$$

или

$$Z^2 \geq N_0 \cdot (N_0 + E_0) \ln \left[h_0 \left(1 + \frac{E_0}{N_0} \right) \right] = h \quad (2.131)$$

сводится к вычислению величины Z^2 (соотношения (2.113)), являющейся квадратом огибающей функции взаимной корреляции принимаемой смеси (2.125) и опорного сигнала $S_0(t)$, и ее сравнения с порогом h . Следовательно, структура оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестными начальной фазой и амплитудой (рисунок 2.22) отличается от структуры (рисунок 2.16) отсутствием устройства вычисления квадратного корня из суммы квадратурных составляющих $X^2 + Y^2$.

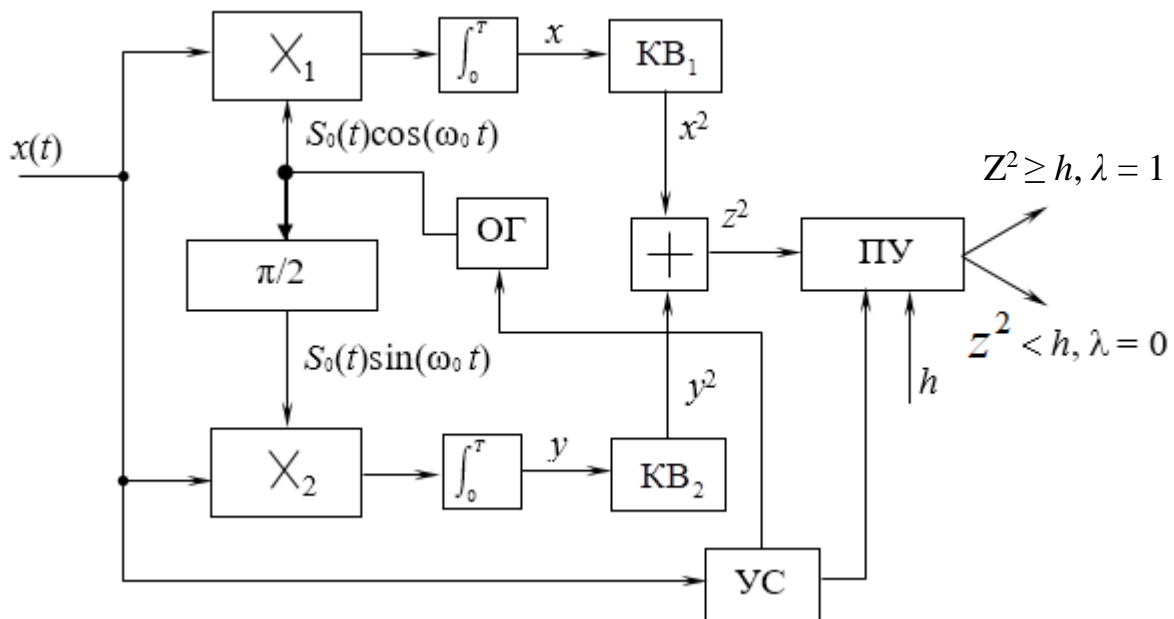


Рисунок 2.22 – Оптимальный обнаружитель радиосигнала с неизвестными фазой и амплитудой

В структуре обнаружителя радиосигнала со случайными начальной фазой и амплитудой на СФ (рисунок 2.23) вместо линейного детектора применяется квадратичный детектор (КД).

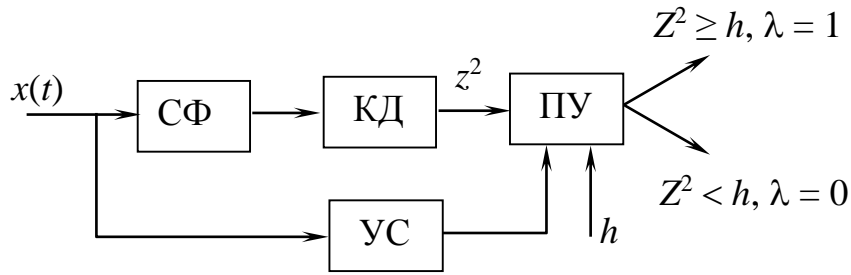


Рисунок 2.23 – Обнаружитель сигнала с неизвестными фазой и амплитудой на СФ

При анализе характеристик обнаружения (рисунки 2.22 и 2.23) следует иметь в виду, что сигнальные компоненты, как и шумовые, величин X и Y являются нормальными независимыми случайными процессами, поэтому обнаружение радиосигнала с неизвестными начальными фазой и амплитудой на фоне аддитивного белого шума можно рассматривать как обнаружение известного сигнала при совместном действии модулирующего и аддитивного шумов.

Если $X = X_c + X_{ш}$, а $Y = Y_c + Y_{ш}$, то математические ожидания сигнальных компонент $\langle X_c \rangle = \langle AE_0 \cos \varphi \rangle = E_0 \langle A \rangle \langle \cos \varphi \rangle = 0$,

$$\langle Y_c \rangle = \langle AE_0 \sin \varphi \rangle = E_0 \langle A \rangle \langle \sin \varphi \rangle = 0, \quad (2.132)$$

а их дисперсии $\sigma_{cx}^2 = \sigma_{cy}^2 = \sigma = \langle Y_c^2 \rangle = \langle X_c^2 \rangle = E_0^2 \langle A^2 \rangle \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{E_0^2}{2}$. (2.133)

Дисперсия аддитивной смеси сигнала и шума на выходе коррелятора

$$\sigma_{сш}^2 = \sigma_{ш}^2 + \sigma_c^2 = \sigma_{ш}^2(1 + q), \quad (2.134)$$

где $\sigma_{ш}^2 = \frac{N_0 E_0}{2}$ – дисперсия шумовой компоненты на выходе коррелятора, а

$q = \sigma_c^2 / \sigma_{ш}^2 = E_0 / N_0$ – отношение сигнал/шум по мощности на выходе коррелятора. Отсюда очевидность (2.132) закона распределения плотности вероятности величины Z^2 , близкого к экспоненциальному:

$$P_1(Z^2) = \frac{1}{(2\sigma_{сш}^2)} \exp \left[-\frac{Z^2}{(\sigma_{сш}^2)} \right] \quad (2.135)$$

для смеси сигнала с шумом и

$$P_0(Z^2) = \frac{1}{(2\sigma_{ш}^2)} \exp \left[-\frac{Z^2}{(\sigma_{ш}^2)} \right] \quad (2.136)$$

для чисто шумового процесса на входе обнаружителя.

На рисунке 2.24 приведены зависимости, рассчитанные по формулам (2.135) и (2.136) для $q = 3$.

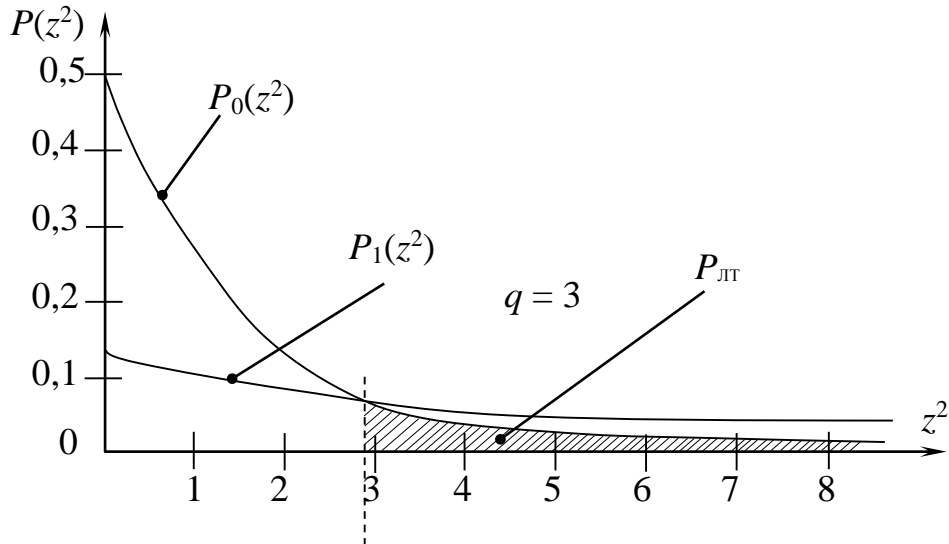


Рисунок 2.24 – Плотности распределения для обнаружителя радиосигнала с неизвестными фазой и амплитудой

Вероятность правильного обнаружения

$$\begin{aligned}
 P_{\text{по}} &= \int_h^{\infty} P_1(z^2) dz = \int_h^{\infty} \frac{1}{2\sigma_{\text{сш}}^2} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_{\text{сш}}^2}\right] dz = \\
 &= \exp\left[-\frac{h}{2\sigma_{\text{сш}}^2}\right] = \exp\left[-\frac{h}{N_0 E_0 (1 + E_0 / N_0)}\right].
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

Вероятность ложной тревоги

$$\begin{aligned}
 P_{\text{лт}} &= \int_h^{\infty} P_0(z^2) dz = \int_h^{\infty} \frac{1}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right] dz = \\
 &= \exp\left[-\frac{h}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right] = \exp\left[-\frac{h}{N_0 E_0}\right].
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

Из (2.137) и (2.138) следует

$$P_{\text{по}} = P_{\text{лт}}^{\frac{1}{1+E_0/N_0}}, \tag{2.139}$$

откуда пороговое значение отношения сигнал/шум равно

$$E_0 / N_0 = \frac{\lg P_{\text{лт}}}{\lg P_{\text{по}}} - 1. \tag{2.140}$$

На рисунке 2.25 приведено семейство характеристик обнаружения сигналов со случайной фазой и рэлеевскими флуктуациями амплитуды, рассчитанные по формуле (2.139).

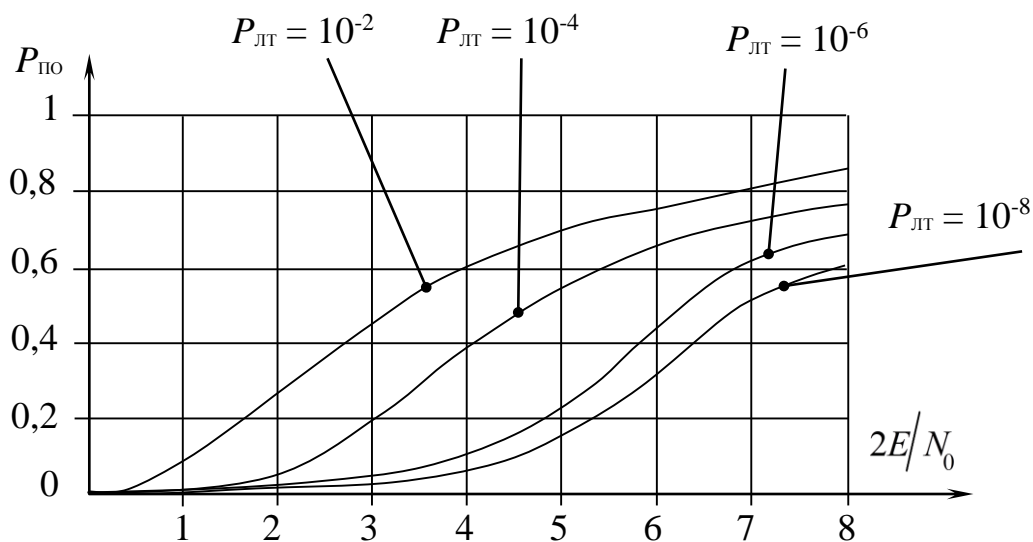


Рисунок 2.25 – Характеристики обнаружения радиосигнала с неизвестными фазой и амплитудой

Их особенность состоит в том, что с ростом отношения сигнал/шум вероятность правильного обнаружения сначала возрастает быстро, ориентировочно до $P_{по} = 0,6$, а затем этот процесс в области больших отношений сигнал/шум замедляется, так как изменяются лишь параметры распределения величины Z^2 (ее дисперсии), растягивая распределение по оси абсцисс.

Энергетические потери в различных оптимальных обнаружителях радиосигналов удобно проследить на характеристиках обнаружения (рисунок 2.26), где зависимости 1, 2 и 3 соответственно отражают обнаружения известного сигнала, сигнала с неизвестной начальной фазой и сигнала с неизвестными фазой и амплитудой, построенных для случая $P_{лт} = 10^{-4}$. Например, для обеспечения вероятности правильного обнаружения $P_{по} = 0,9$ относительно приема известного сигнала требуется в 1,2 раза увеличить энергию сигнала, если неизвестна его фаза, и в 3,44 раза, если неизвестны фаза и амплитуда обнаруживаемого сигнала.

Основные выводы:

1. Незнание фазы и амплитуды обнаруживаемого радиосигнала приводит к существенным энергетическим потерям, особенно при $P_{по} > 0,9$.
2. Структура оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестными начальной фазой и амплитудой по сложности не отличается от структуры обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой и характерна для оптимального некогерентного приема радиосигнала, прошедшего через реальный канал – канал с переменными параметрами.

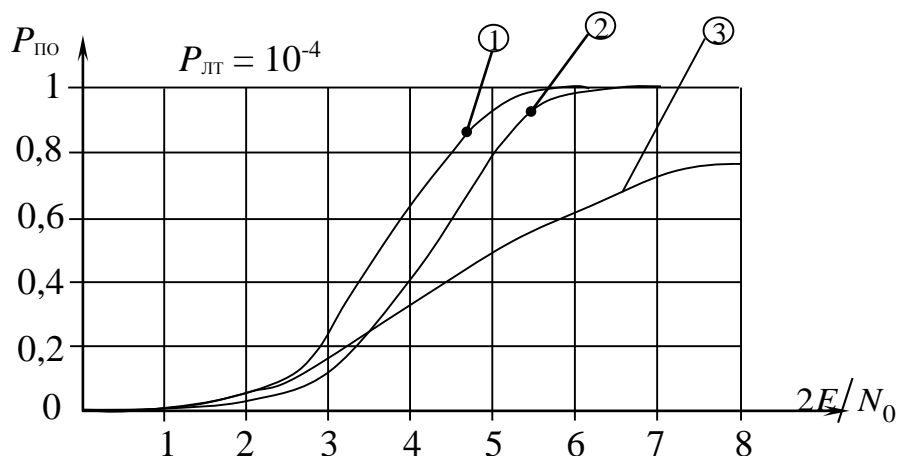


Рисунок 2.26 – Сравнительные характеристики обнаружения

3. При обнаружении сложного сигнала входное отношение сигнал/шум улучшается в базу раз.

В инженерной практике всегда есть потребность в простых, удобных соотношениях, позволяющих с минимальными временными затратами производить оценку параметров обнаружения. В частности, это касается определения значений пороговых отношений сигнал/шум. Для обнаружения радиосигнала с неизвестными начальной фазой и амплитудой пороговое отношение сигнал/шум (q_n) определяется удобной формулой (2.140).

Пороговые значения отношения сигнал/шум в обнаружителях радиосигнала с известными параметрами и неизвестной начальной фазой находят в результате решения системы двух уравнений (2.108) и (2.109) или (2.123) и (2.124). В [5] предложены для простых сигналов инженерные формулы для оценки этого параметра, погрешность которых не превосходит 15 %, если $P_{по} \geq 0,9$, $P_{лт} \leq 0,1$.

Пороговое отношение сигнал/шум в обнаружителях известного сигнала

$$q_n \cong 2 \left(\sqrt{\ln \frac{1}{P_{лт}} - 1,4} + \sqrt{\ln \frac{1}{(1 - P_{по})} - 1,4} \right)^2. \quad (2.141)$$

Пороговое отношение сигнал/шум в обнаружителях сигнала с неизвестной начальной фазой

$$q_n \cong 2 \left(\sqrt{\ln \frac{1}{P_{лт}}} + \sqrt{\ln \frac{1}{(1 - P_{по})} - 1,4} \right)^2. \quad (2.142)$$

2.5.4 Обнаружение пачки радиоимпульсов

В импульсных радиолокационных системах задачу обнаружения решают по приему пачки N радиоимпульсов с периодом T_n , отраженных от наблюдаемого объекта за время радиоконтакта с ним. Для этого случая модель действующего полезного сигнала

$$S(t, \{A_j\}, \{\varphi\}) = \sum_{i=1}^N A_i S_0(t - (i-1)T_n) \cos[\omega_0 t + \varphi_i], \quad (2.143)$$

$0 \leq t \leq NT_n$, $j = \overline{1, N}$, $\{A_j\}$ и $\{\varphi_j\}$ – случайные значения амплитуд и фаз. Если фазы радиоимпульсов пачки одинаковы ($\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = \varphi$) или изменяются от импульса к импульсу по заранее известному закону, то такая пачка называется когерентной.

Если начальные фазы радиоимпульсов пачки случайны и независимы – пачка называется некогерентной.

Обнаружение когерентной пачки радиоимпульсов

Аддитивная смесь на входе обнаружителя

$$x(t) = \lambda S[t, \{A_j\}, \varphi] + n(t), \quad 0 \leq t \leq NT_n, \quad \lambda = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

где

$$S[t, \{A_j\}, \varphi] = \sum_{i=1}^N A_i S_0(t - (i-1)T_n) \cos[\omega_0 t + \varphi], \quad (2.144)$$

$n(t)$ – белый гауссов шум с $F_n(\omega) = N_0/2$.

В общем случае для всех импульсов пачки начальная фаза может быть случайной и подчиняться равномерному закону распределения $P(\varphi) = 1/2\pi$, а амплитуды $\{A_j\}$ флюктуировать по рэлеевскому закону $P(A_j) = 2A_j \exp[-A_j^2]$. Воспользовавшись алгоритмом вычисления отношения правдоподобия, получим правила обнаружения когерентной пачки радиоимпульсов с неизвестной начальной фазой и флюктуирующей амплитудой:

$$Z^2 = \left[\sum_{i=1}^N x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^N y_i \right]^2 \geq h, \quad (2.145)$$

где

$$x_i = \int_0^T X(t) \cdot S_0[t - (i-1)T_n] \cos \omega_0 t dt,$$

$$y_i = \int_0^T X(t) \cdot S_0[t - (i-1)T_n] \sin \omega_0 t dt.$$

Структурная схема обнаружителя приведена на рисунке 2.27, в которой когерентный накопитель (КН) размещается между согласованным фильтром одиночного радиоимпульса (СФ) и квадратичным детектором (КД).

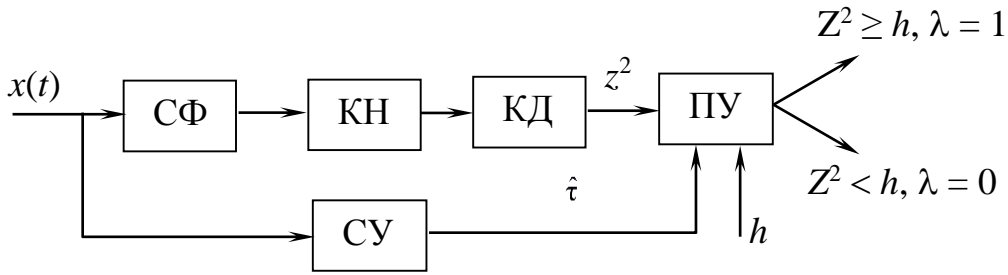


Рисунок 2.27 – Обнаружитель когерентной пачки радиоимпульсов с неизвестной амплитудой

Так как при когерентном суммировании амплитуда сигнальной составляющей увеличивается в количество импульсов в пачке и во столько же раз увеличивается дисперсия шума (значения складываемых шумовых составляющих некоррелированы), то выигрыш в отношении сигнал/шум по мощности на входе порогового устройства при обнаружении когерентной пачки радиоимпульсов возрастет в N раз по сравнению с обнаружением одиночного радиоимпульса. При построении характеристик обнаружителя это и нужно учесть. При обнаружении когерентной пачки радиоимпульсов с неизвестной начальной фазой в структуре (рисунок 2.27) вместо квадратичного детектора применяется линейный детектор. На рисунке 2.28, а приведены структурные схемы накопителя на линии задержки и многократного накопителя-рециркулятора ((рисунок 2.28, б), а также временные диаграммы ((рисунок 2.28, в), поясняющие процесс накопления. С целью упрощения временные диаграммы построены для пачки прямоугольных видеоимпульсов (нулевая несущая частота).

Обнаружение некогерентной пачки радиоимпульсов

Для общего случая аддитивная смесь на входе обнаружителя

$$x(t) = \lambda S[t, \{A_j\}, \{\varphi\}] + n(t), \quad 0 \leq t \leq NT_n, \quad (2.146)$$

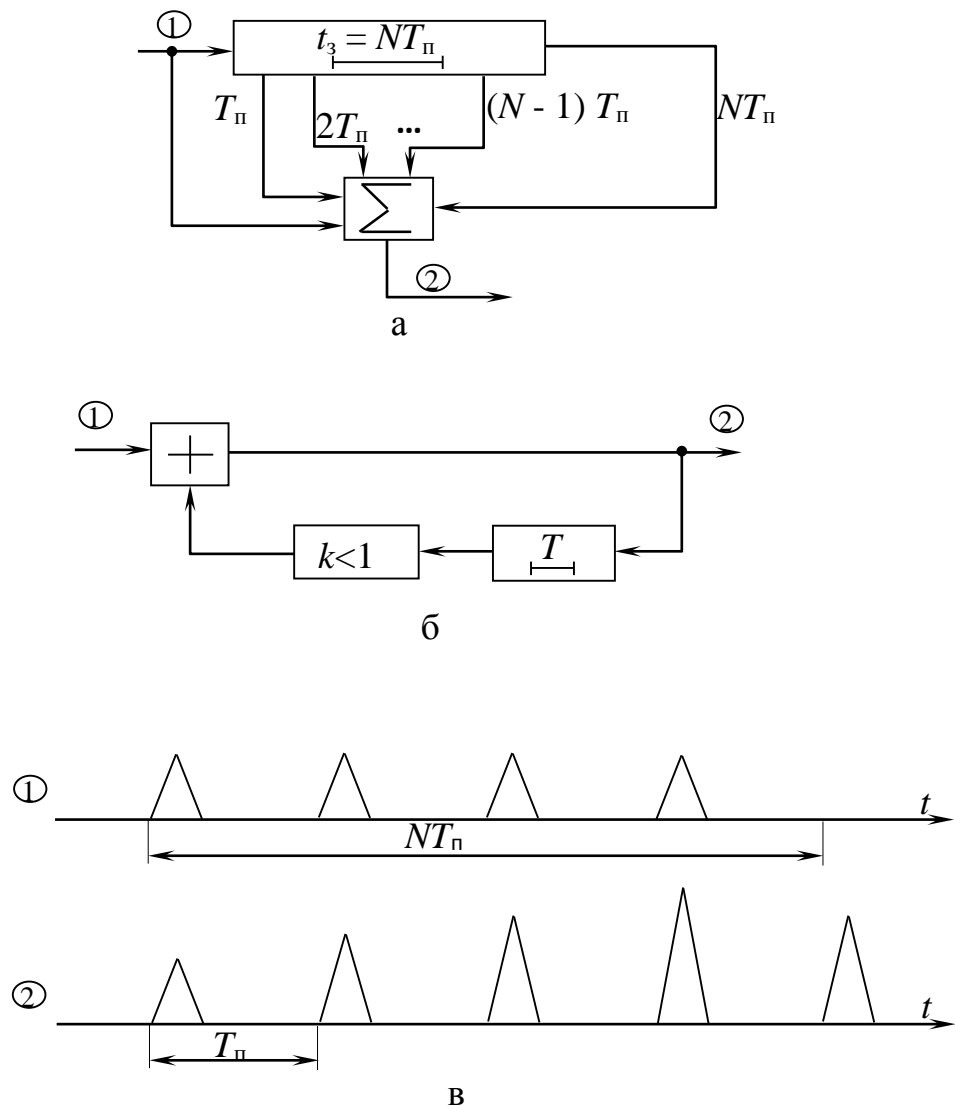
$$\text{где } S[t, \{A_j\}, \{\varphi\}] = \sum_{i=1}^N A_i S_0[t - (i-1)T_n] \cos[\omega_0 t + \varphi_i], \quad \lambda = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

а фазы и амплитуды по-прежнему подчиняются равномерному и рэлеевскому законам распределения соответственно.

Правило принятия решения для этого случая

$$Z^2 = \sum_{i=1}^N z_i^2 \geq h, \quad (2.147)$$

$$\text{где } z_i = x_i^2 + y_i^2.$$



а – структурная схема накопителя на линии задержки; б – структурная схема накопителя на рециркуляторе; в – временные диаграммы

Рисунок 2.28 – Когерентный накопитель

Структурная схема (рисунок 2.29), реализующая правило (2.147), содержит накопитель (сумматор) после квадратичного детектора. Если отсутствует флюктуация амплитуды в пакете, то вместо квадратичного детектора (КД) ставится детектор огибающей (ДО).

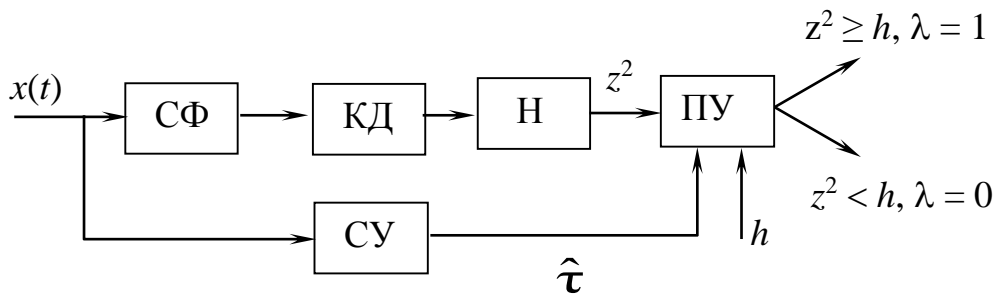


Рисунок 2.29 – Обнаружитель некогерентной пачки радиоимпульсов с неизвестной амплитудой

Следует иметь в виду, что эффективность некогерентного накопителя будет незначительно уступать когерентному, если отношение сигнал/шум по мощности на входе детектора значительно превышает 1. При малых отношениях сигнал/шум на входе детектора ($q_{\text{вх}} \ll 1$) на его выходе $q_{\text{вых}} \approx q_{\text{вх}}^2$ и для достижения тех же характеристик обнаружения потребуется большая энергия пачки. Например, при $q_{\text{вх}} = 10$ $q_{\text{вых}} \approx 5$, а при $q_{\text{вх}} = 0,1$ $q_{\text{вых}} \approx 0,01$.

В последнем случае для реализации одинаковых характеристик обнаружения потребуется не в 100, а в 500 раз увеличить время накопления (увеличить число импульсов в пачке). Это означает, что некогерентная обработка пачки слабых радиоимпульсов нецелесообразна и нужно стремиться к когерентной обработке.

2.5.5 Обнаружение случайного сигнала

Пусть в принимаемой смеси

$$x(t) = \lambda S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.148)$$

где λ принимает значения 1 или 0; $n(t)$ – белый гауссов шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0 / 2$, а полезный сигнал $S(t)$ – нормальный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $F_s(\omega)$, некоррелированный с $n(t)$. При этом $x(t)$ – нормальный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией, равной сумме дисперсий процессов $S(t)$ и $n(t)$. Если эффективная полоса частот сигнала равна $\Delta F = f_2 - f_1$, то функционал правдоподобия гипотезы $\lambda = 1$ определяется выражением

$$F(1) = C_1 \exp \left[\left(\left(-N_0 + \frac{1}{2\pi\Delta F} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F(\omega) d\omega \right)^{-1} \int_0^T x^2(t) dt \right) \right], \quad (2.149)$$

а функционал правдоподобия гипотезы $\lambda = 0$ примет вид

$$F(0) = C_0 \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right]. \quad (2.150)$$

Взяв отношение функционалов правдоподобия (2.149) и (2.150), выполнив соответствующие преобразования и логарифмирование, получим правило обнаружения случайного сигнала:

$$\frac{\frac{1}{2\pi\Delta F} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F_s(\omega) d\omega}{N_0 \left[N_0 + \frac{1}{2\pi\Delta F} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F_s(\omega) d\omega \right]} \cdot \int_0^T x^2(t) dt \geq h_0 \quad (2.151)$$

или

$$Z = \int_0^T x_{\Phi}^2(t) dt \geq h_0, \quad (2.152)$$

где $x_{\Phi}(t)$ – входная смесь, прошедшая через фильтр с полосой ΔF .

Оптимальное правило принятия решения включает фильтрацию входной смеси в диапазоне частот от f_1 до f_2 , возведение ее в квадрат, интегрирование в пределах времени анализа (от 0 до T) и сравнение с порогом h . Структурная схема, реализующая это правило, показана на рисунке 2.30.

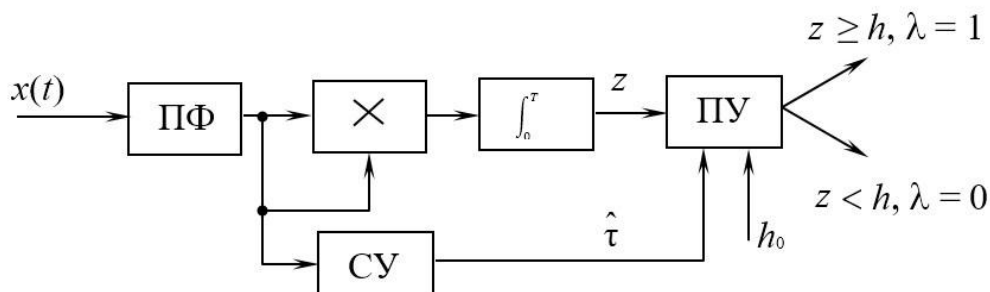


Рисунок 2.30 – Структура обнаружителя случайного сигнала

Оптимальным приемником является энергетический приемник смеси, пропущенной через полосовой фильтр (ПФ).

Определим характеристики обнаружения энергетического приемника.

Величина Z является случайной и подчиняется нормальному закону распределения, так как база случайного сигнала $x(t)$ $\mathbf{B} = \Delta F \cdot T \gg 1$, то сумму множества независимых случайных величин x_i за время наблюдения T можно считать нормальной. Матожидание и дисперсия случайной величины Z_1 (в смеси присутствует случайный сигнал)

$$m_1 = \langle z_1 \rangle = \left\langle \int_0^T [S_\Phi(t) + n_\Phi(t)]^2 dt \right\rangle = \Delta F \cdot T (P_{s\Phi} + P_{n\Phi});$$

$$\sigma_1^2 = \langle z_1^2 \rangle - m_1^2 = 2\Delta F \cdot T \cdot (P_{s\Phi} + P_{n\Phi})^2. \quad (2.153)$$

Матожидание и дисперсия случайной величины z_0 (в смеси отсутствует случайный сигнал)

$$m_0 = \langle z_0 \rangle = \Delta F \cdot T \cdot P_{n\Phi}, \quad \sigma_0^2 = \langle z_0^2 \rangle - m_0^2 = 2\Delta F \cdot T \cdot P_{n\Phi}^2. \quad (2.154)$$

В (2.153) и (2.154)

$$P_{s\Phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F_s(\omega) d\omega, \quad P_{n\Phi} = N_0 \cdot \Delta F \quad (2.155)$$

соответствует мощности сигнальной и шумовой составляющих на выходе полосового фильтра.

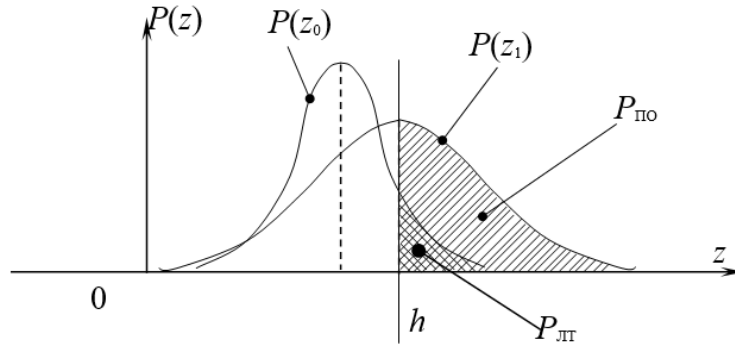


Рисунок 2.31 – Плотности распределения нормальных случайных величин

На рисунке 2.31 приведены зависимости плотностей распределения нормальных случайных величин z_1 и z_2 , а вероятности $P_{пт}$ и $P_{по}$ определяются следующими выражениями:

$$P_{пт} = \int_h^{\infty} P(z_0) dz_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \int_h^{\infty} \exp\left[-\frac{(z_0 - m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] dz_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{h-m_0}{\sigma_0}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{h-m_0}{\sigma_0}\right), \quad (2.156)$$

$$P_{по} = \int_h^{\infty} P(z_1) dz_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \int_h^{\infty} \exp\left[-\frac{(z_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] dz_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{h-m_1}{\sigma_1}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{h-m_1}{\sigma_1}\right), \quad (2.157)$$

Подставив в (2.156) и (2.157) значения (2.153) и (2.154), получим

$$P_{\text{лт}} = 1 - \Phi \left[\frac{2h - (\Delta F)^2 TN_0}{N_0 \Delta F \sqrt{2\Delta FT}} \right],$$

$$P_{\text{по}} = 1 - \Phi \left[\frac{2h - (\Delta F)^2 TN_0(1+q)}{N_0 \Delta F(1+q) \sqrt{2\Delta FT}} \right],$$
(2.158)

где $q = \frac{P_{s\phi}}{P_{n\phi}}$ – отношение сигнал/шум (по мощности) на выходе полосового фильтра.

Из (2.159) следует, что увеличение отношения сигнал/шум в обнаружителе для неизменного интервала наблюдения приводит к увеличению $P_{\text{по}}$ без изменения $P_{\text{лт}}$.

2.6 Оптимальное различение радиосигналов

Ранее в разделе 1 указывалось, что задача различения заключается в оптимальном принятии решения о присутствии в принятой реализации $x(t)$ одного из m информационных сигналов ($m = 2, 3, 4, \dots$):

$$x(t) = S_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $i = \overline{1, m}$, $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0/2$; $S_i(t)$ – информационные сигналы. К априорным данным относятся и вероятности появления сигналов $P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_m)$.

Задача различения характерна для систем передачи информации и управления. Ниже рассматриваются два случая оптимального различения: различение известных (детерминированных) сигналов и различение сигналов с неизвестными начальными фазами.

2.6.1 Оптимальное различение известных радиосигналов

Первоначально рассмотрим различение двух информационных сигналов ($m = 2$):

$$x(t) = \lambda \cdot S_1(t) + (1 - \lambda) \cdot S_2(t) + n(t); \quad 0 \leq t \leq \tau; \quad (2.159)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{в смеси } S_1(t), \\ 0, & \text{в смеси } S_2(t), \end{cases}$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – известные сигналы с априорными вероятностями $P(S_1)$ и $P(S_2)$.

Для синтеза оптимальной структуры различителя воспользуемся критерием максимума отношения апостериорных вероятностей.

Апостериорные вероятности:

$$P_{PS}(S_1) = K \cdot P(S_1) \cdot \exp \left[-\frac{E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt \right],$$

$$P_{PS}(S_2) = K \cdot P(S_1) \cdot \exp \left[-\frac{E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt \right].$$

Отношение апостериорных вероятностей для $\lambda = 1$:

$$\frac{P_{PS}(S_1)}{P_{PS}(S_2)} = \frac{P(S_1)}{P(S_2)} \cdot \frac{\exp \left[-\frac{E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt \right]}{\exp \left[-\frac{E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt \right]} =$$

$$= \frac{P(S_1)}{P(S_2)} \cdot \exp \left[-\frac{E_1 - E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt \right] \geq 1. \quad (2.160)$$

Прологарифмировав обе части неравенства (2.160), получим алгоритм оптимальной процедуры различения:

$$y = \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt \geq \frac{E_1 - E_2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)} = h, \quad (2.161)$$

где E_1 и E_2 энергии сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$; h – порог различения.

На рисунке 2.32 приведена структурная схема оптимального различителя двух известных сигналов в соответствии с алгоритмом (2.161).

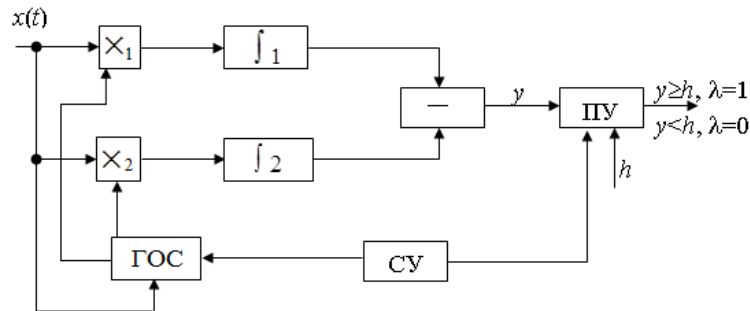


Рисунок 2.32 – Оптимальный различитель двух известных сигналов

В схеме (рисунок 2.32) генератор опорного сигнала (ГОС) формирует копии полезных сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, а синхронизирующее устройство (СУ) оценивает временное положение различаемых сигналов (простое различение).

Если одинаковы энергии сигналов ($E_1 = E_2 = E$) и их априорные вероятности [$P(S_1) = P(S_2) = 0,5$], то

$$y = \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt \geq h = 0. \quad (2.162)$$

Из (2.162) следует, что для положительных значений y применяется решение о наличии сигнала $S_1(t)$ в принимаемой смеси, а для отрицательных – присутствие в смеси сигнала $S_2(t)$.

Для простоты анализа в полученных алгоритмах коэффициент отношения полезных сигналов на входе к опорным принят равным 1, коэффициент передачи перемножителей – также равным 1.

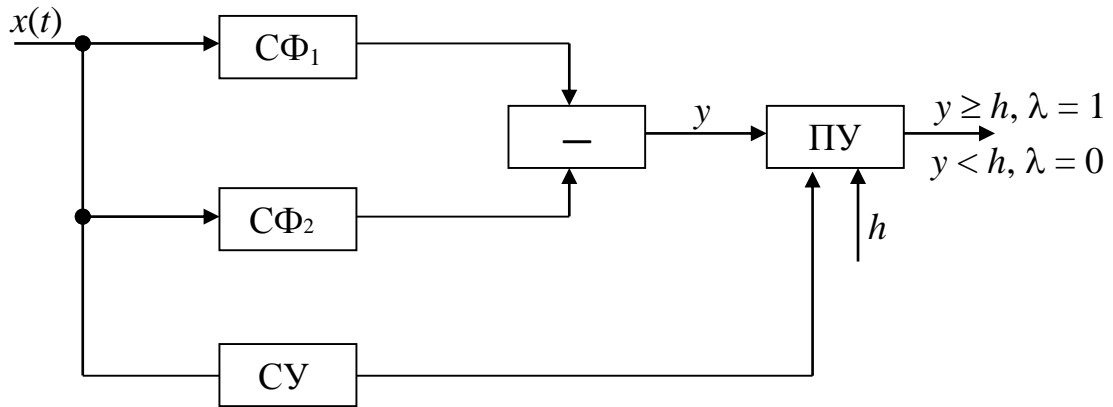


Рисунок 2.33 – Различитель двух известных сигналов на СФ

На рисунке 2.33 приведена фильтровая структура оптимального различителя двух известных сигналов, являющаяся аналогом корреляционной структуры (рисунок 2.32). Согласованные фильтры ($СФ_1$ и $СФ_2$) имеют коэффициенты передачи, равные соответственно

$$K_1(j\omega) = C \cdot S_1^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} \quad \text{и} \quad K_2(j\omega) = C \cdot S_2^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega T},$$

где $S_1^*(j\omega)$ и $S_2^*(j\omega)$ – функции, комплексно-сопряженные со спектральными функциями сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

Произведем количественную оценку качества различения синтезированных структур различителей. Случайная величина y согласно (2.161) может принимать два вида: y_1 и y_2 . Если в принимаемой смеси присутствует сигнал $S_1(t)$, то

$$y_1 = \int_0^T [S_1(t) + n(t)] \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt,$$

а если в смеси присутствует сигнал $S_2(t)$, то

$$y_2 = \int_0^T [S_2(t) + n(t)] \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt.$$

Случайные величины y_1 и y_2 подчиняются нормальному закону распределения, так как они формируются в результате линейных преобразований над входной смесью, являющейся нормальным случайным

процессом. Поэтому для нахождения законов распределения величин y_1 и y_2 достаточно найти их матожидания (m_1 и m_2) и дисперсии (σ_1^2 и σ_2^2):

$$m_1 = \langle y_1 \rangle = \int_0^T S_1^2(t) dt + \int_0^T \langle n(t) \rangle \cdot S_1(t) dt - \int_0^T \langle n(t) \rangle \cdot S_2(t) dt - \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t) dt = E_1 - R_{1,2};$$

$$\sigma_1^2 = \langle y_1^2 \rangle - m_1^2 = (E_1 - R_{1,2})^2 + 2 \int_0^T \langle n(t) \rangle [S_1(t) - S_2(t)] dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) \cdot n(t_2) \rangle [S_1(t_1) - S_2(t_1)] \cdot [S_1(t_2) - S_2(t_2)] dt_1 dt_2 - (E_1 - R_{1,2})^2 =$$

$$= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} S(t_1 - t_2) [S_1(t_1) - S_2(t_1)] \cdot [S_1(t_2) - S_2(t_2)] dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = N_0 \left(\frac{E_1 + E_2}{2} - R_{1,2} \right);$$

$$m_2 = \langle y_2 \rangle = -E_2 + R_{1,2},$$

$$\sigma_2^2 = \langle y_2^2 \rangle - m_2^2 = N_0 \left(\frac{E_1 + E_2}{2} - R_{1,2} \right) = \sigma_1^2 = \sigma^2. \quad (2.163)$$

В (2.164) с учетом нулевого матожидания белого шума ($\langle n(t) \rangle = 0$), корреляционной функции белого шума как дельта-функции [$r(t_1 - t_2) = N_0/2\delta(t_1 - t_2)$] и фильтрующего свойства дельта-функции законы плотности распределения случайных величин y_1 и y_2 имеют вид

$$P(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma^2} \right],$$

$$P(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (2.164)$$

На рисунке 2.34 приведены графики распределений (2.164). Для указанного на графике порога h условная вероятность ошибки приема сигнала $S_1(t)$ численно определяется заштрихованной площадкой слева от порога, а условная вероятность ошибки приема сигнала $S_2(t)$ – заштрихованной площадкой справа от порога. Общая вероятность ошибочного приема информационных сигналов определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) + P(S_2) \cdot P(S_1/S_2), \quad (2.165)$$

где $P(S_2/S_1)$ и $P(S_1/S_2)$ – условные вероятности ошибок при приеме $S_1(t)$ и $S_2(t)$ соответственно. Найдем значения $P(S_2/S_1)$ и $P(S_1/S_2)$ (рисунок 2.34):

$$P(S_2/S_1) = \int_{-\infty}^h P(y_1) dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^h \exp\left[-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma^2}\right] dy_1 = \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma}\right). \quad (2.166)$$

$$P(S_1/S_2) = \int_{-\infty}^h P(y_2) dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^h \exp\left[-\frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma^2}\right] dy_2 = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_2}{\sigma}\right). \quad (2.167)$$

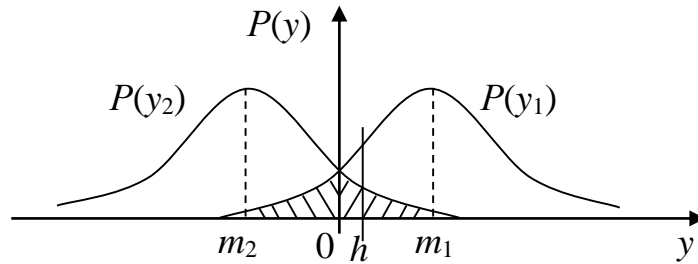


Рисунок 2.34 – Графики распределений различителя известных сигналов

С учетом (2.166) и (2.167) выражение (2.165) примет вид

$$P_{\text{ош}} = P(S_1) \left[\Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma}\right) \right] + P(S_2) \left[1 - \Phi\left(\frac{h - m_2}{\sigma}\right) \right]. \quad (2.168)$$

Если энергии сигналов и их априорные вероятности равны, то $h = 0$, $m_1 = E(1 - \rho_{1,2})$, $\rho_{1,2} = R_{1,2}/E$, $\sigma^2 = N_0 E(1 - \rho_{1,2})$, а вероятность ошибочного приема оценивается следующим выражением:

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}(1 - \rho_{1,2})\right). \quad (2.169)$$

Если цифровая информация передается с помощью АМ с пассивной паузой ($S_2(t) = 0$), то

$$P_{\text{ошАМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right). \quad (2.170)$$

Для сигналов с ЧМ ($\rho_{1,2} = 0$) и ФМ ($\rho_{1,2} = -1$) соответственно

$$P_{\text{ошЧМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right), \quad (2.171)$$

$$P_{\text{ошФМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right). \quad (2.172)$$

На рисунке 2.35 приведены зависимости потенциальной помехоустойчивости оптимального различителя двух известных сигналов с АМ, ЧМ и ФМ, из которых следует вывод о наибольшей помехоустойчивости фазоманипулированных сигналов.

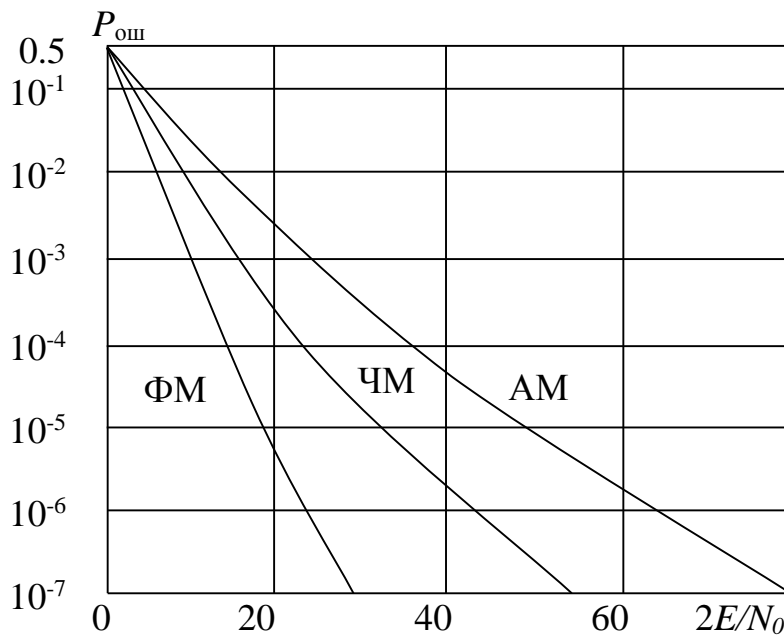


Рисунок 2.35 – Зависимости потенциальной помехоустойчивости двух известных сигналов

При различении m известных сигналов ($m > 2$)

$$x(t) = S_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.173)$$

где $i = \overline{1, m}$, $S_i(t)$ – известные сигналы с априорными вероятностями их появления $P(S_i)$.

Если в принимаемой реализации присутствует j -й сигнал, то его апостериорная вероятность будет максимальной, т. е.

$$P_{PS}(S_j) \geq P_{PS}(S_i), \quad I \neq j.$$

Следовательно, алгоритм различения m сигналов, минимизирующий вероятность ошибки, должен обеспечивать сравнение апостериорных вероятностей различаемых сигналов с принятием решения о наличии в принимаемой смеси сигнала с максимальной апостериорной вероятностью:

$$P(S_j) \cdot \exp \left[-\frac{E_j}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_j(t) dt \right] \gg P(S_i) \cdot \exp \left[-\frac{E_i}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_i(t) dt \right]. \quad (2.174)$$

При равенстве энергий различаемых сигналов ($E_1 = E_2 = \dots = E_m = E$) и их априорных вероятностей [$P(S_1) = P(S_2) = \dots = P(S_k)$], алгоритм различения m известных сигналов примет вид

$$y_j = \int_0^T x(t) \cdot S_j(t) dt \gg \int_0^T x(t) \cdot S_i(t) dt = y_i. \quad (2.175)$$

На рисунке 2.36 в соответствии с алгоритмом (2.175) приведена структурная схема оптимального корреляционного различителя m известных сигналов. В этой схеме ГОС – генератор опорных сигналов, формирующий копии различаемых сигналов, а УС – устройство сравнения, выполняющее функцию устройства принятия решения.

Различитель содержит m одинаковых каналов, в каждом из которых определяется корреляционный интеграл входной смеси $x(t)$ с соответствующим опорным сигналом $S_j(t)$, $j = \overline{1, m}$.

В устройстве сравнения определяется канал с максимальным корреляционным интегралом, и если это i -й канал, то принимается решение о наличии во входной смеси на интервале наблюдения $0 \leq t \leq T$ сигнала $S_i(t)$.

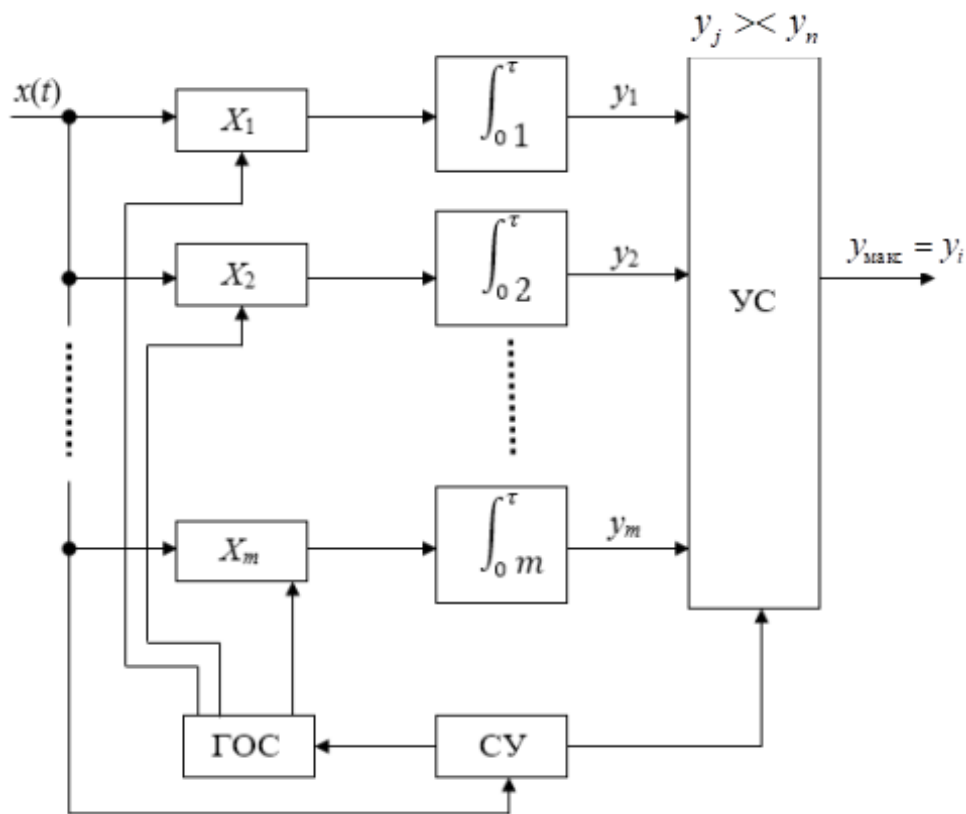


Рисунок 2.36 – Оптимальный различитель m известных сигналов

На рисунке 2.37 изображена структурная схема фильтрового различителя m известных сигналов. Напряжение y_i на выходе каждого согласованного фильтра является сверткой между входной смесью $x(t)$ и импульсным откликом ($g_i(t) = c \cdot S_i(T - t)$) соответствующего фильтра. Процесс сравнения и принятия решения осуществляется в конце времени анализа.

Вероятность ошибки при различении (рисунки 2.36, 2.37) определяется следующим выражением:

$$P_{\text{ош}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dy_i \int_{-\infty}^{y_i} \dots \int P\left(\frac{y_1, \dots, y_m}{S_i}\right) dy_1 \dots dy_i \dots dy_m, \quad (2.176)$$

где $P(y_1, \dots, y_m/S_i)$ – совместная условная плотность вероятности выходных напряжений отдельных каналов различителя в момент времени $t = T$ при условии, что во входной смеси присутствует сигнал $S_i(t)$.

Выражение (2.176) легко получается в частном случае, когда сигналы $\{S_i(t)\}$, $i = \overline{1, m}$, имеющие одинаковую энергию E , равновероятны и ортогональны. При этом случайные величины y_i являются совместно гауссовыми и имеют следующие характеристики.

Матожидание и дисперсия:

$$m_j = \langle y_j \rangle = \int_0^T S_i(t) \cdot S_j(t) dt = \begin{cases} E, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

$$\sigma_j^2 = \langle (y_j - m_j)^2 \rangle = \int_0^T \langle n(t_1)n(t_2) \rangle S_i(t_1) \cdot S_j(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{EN_0}{2} = \sigma^2. \quad (2.177)$$

Следовательно,

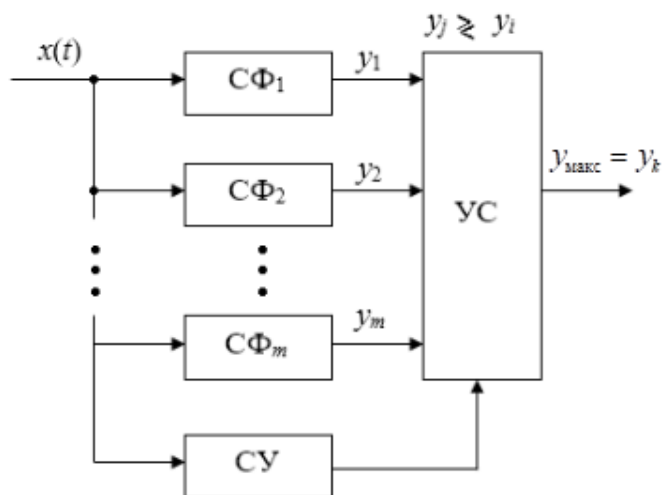


Рисунок 2.37 – Различитель m известных сигналов на СФ

$$P\left(\frac{y_1, \dots, y_m}{S_i}\right) = (2\pi\sigma^2)^{-m/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m y_j^2\right] \exp\left[-\frac{(y_i - E)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.178)$$

Подставив (2.179) в (2.177), получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right)^2 \right] \Phi^{m-1}(x) dx. \quad (2.179)$$

Полная вероятность ошибки при различении равновероятных сигналов определяется выражением

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &= P(S_1) \cdot P_0 + P(S_2) \cdot P_0 + \dots P(S_m) \cdot P_0 = \frac{1}{m} \cdot mP_0 = P_0 = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right)^2 \right] \Phi^{m-1}(x) dx, \end{aligned} \quad (2.180)$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности.

Анализ выражения (2.180) показывает, что для ортогональных сигналов и $P_{\text{ош}} \leq 10^{-3}$ полная вероятность ошибки аппроксимируется формулой

$$P_{\text{ош}} \cong (m-1) \cdot \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right]. \quad (2.181)$$

Рассмотренные структуры оптимальных различителей известных сигналов являются структурами оптимального когерентного приема информационных сигналов.

2.6.2 Различение радиосигналов с неизвестными начальными фазами

При различии двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами ($m = 2$) имеем

$$x(t) = \lambda S_1(t, \varphi) + (1-\lambda) S_2(t, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.182)$$

где $S_1(t, \varphi)$ и $S_2(t, \varphi)$ – различаемые сигналы с неизвестными начальными фазами; $\lambda \in (0, 1)$, $P(\varphi) = 1/2\pi$, определяемые по формуле

$$S_i(t) = S_{0i}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_i).$$

Апостериорные вероятности сигналов (2.114):

$$\begin{aligned} P_{PS}(S_1) &= K \cdot P(S_1) \cdot e^{-E_1/N_0} \cdot I_0 \left(\frac{2Z_1}{N_0} \right); \\ P_{PS}(S_2) &= K \cdot P(S_2) \cdot e^{-E_2/N_0} \cdot I_0 \left(\frac{2Z_2}{N_0} \right); \end{aligned}$$

где $P(S_1)$ и $P(S_2)$ – априорные вероятности, Z_1 и Z_2 – корреляционные огибающие сигналов, определяемые по формулам

$$Z_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}; \quad Z_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2};$$

$$X_1 = \int_0^T x(t) \cdot S_{01}(t) \cdot \cos \omega_1 t dt;$$

$$X_2 = \int_0^T x(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \cos \omega_2 t dt;$$

$$Y_1 = \int_0^T x(t) \cdot S_{01}(t) \cdot \sin \omega_1 t dt;$$

$$Y_2 = \int_0^T x(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \sin \omega_2 t dt.$$

Отношение апостериорных вероятностей при $\lambda = 1$:

$$\frac{P_{PS}(S_1)}{P_{PS}(S_2)} = \frac{K \cdot P(S_1) \cdot e^{-E_1/N_0} \cdot I_0\left(\frac{2Z_1}{N_0}\right)}{K \cdot P(S_2) \cdot e^{-E_2/N_0} \cdot I_0\left(\frac{2Z_2}{N_0}\right)} \geq 1,$$

откуда
$$\ln I_0\left(\frac{2Z_1}{N_0}\right) - \ln I_0\left(\frac{2Z_2}{N_0}\right) \geq \frac{E_1 - E_2}{N_0} + \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)}; \quad (2.183)$$

$$Z_1 - Z_2 \geq \frac{E_1 - E_2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)} = h. \quad (2.184)$$

На рисунке 2.38 приведена структурная схема различителя в соответствии с алгоритмом (2.184). Структурная схема различителя двух сигналов с неизвестными начальными фазами фильтрового типа изображена на рисунке 2.39. Принимаемая смесь (2.182) воздействует на согласованные фильтры $СФ_1$ и $СФ_2$ с импульсными характеристиками $g_1(t) = c \cdot S_1(T-t)$ и $g_2(t) = c \cdot S_2(T-t)$. Детекторы огибающих $ДО_1$ и $ДО_2$ на выходе каждого фильтра формируют напряжения, которые вычитаются, и результат сравнивается с порогом h . Если разностное напряжение y не меньше порога h , то принимается решение о присутствии в смеси $x(t)$ сигнала $S_1(t)$, в противном случае в смеси $x(t)$ – сигнал $S_2(t)$.

Произведем оценку потенциальной помехоустойчивости синтезированных структур (рисунки 2.38, 2.39). Вероятность общей ошибки

$$P_{\text{ош}} = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) + P(S_2) \cdot P(S_1/S_2)$$

в рассматриваемом случае по-прежнему зависит от априорных вероятностей сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ и от их условных вероятностей ошибки.

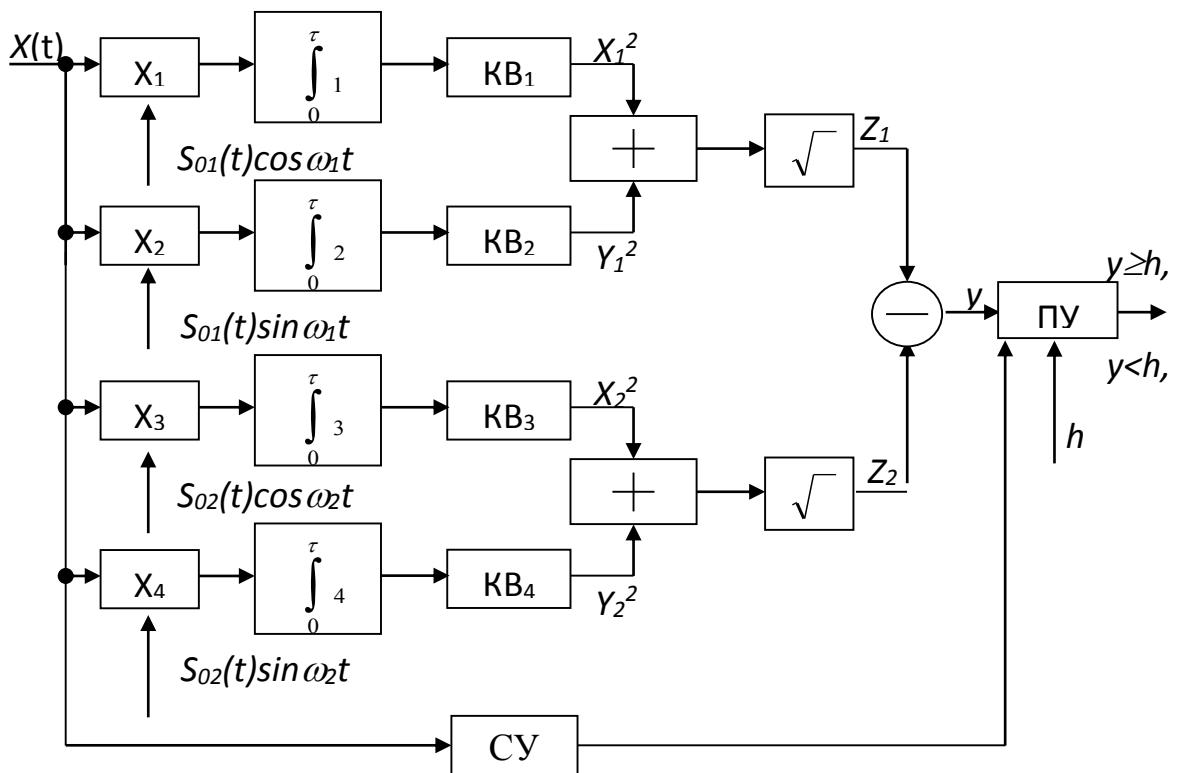


Рисунок 2.38 – Оптимальный различитель двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами

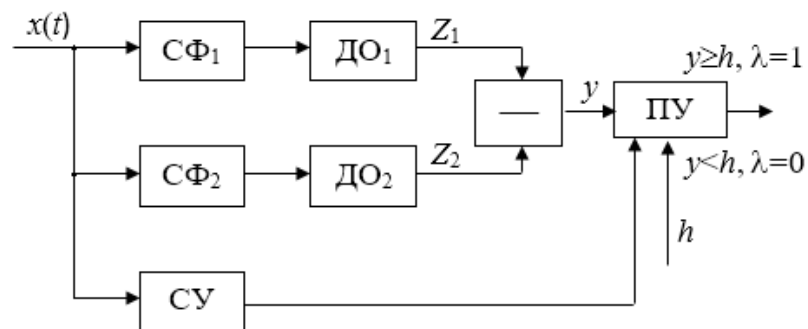


Рисунок 2.39 – Различитель двух сигналов с неизвестными начальными фазами на СФ

Если каналы обработки сигналов симметричны ($E_1 = E_2 = E$, $P(S_1) = P(S_2) = 0,5$), то $P(S_2/S_1) = P(S_1/S_2)$ и

$$P_{\text{ош}} = P(S_1 / S_2) = \int_0^{\infty} P(Z_2) \cdot P(Z_1 \geq Z_2 / S_2) dZ_2, \quad (2.185)$$

где

$$P(Z_1 \geq Z / S_2) = \int_{Z_2}^{\infty} P(Z_1) dZ_1,$$

вероятность превышения уровнем огибающей Z_1 уровня огибающей Z_2 при условии наличия во входной смеси сигнала $S_2(t)$. Плотности распределения вероятностей случайных величин Z_1 и Z_2 ($P(Z_1)$ и $P(Z_2)$), как отмечалось ранее в задаче обнаружения сигнала с неизвестной начальной фазой, подчиняются закону Райса. Для рассматриваемого случая эти плотности распределения имеют вид

$$P(Z_2) = \frac{2Z_2}{N_0E} \cdot \exp\left[-\frac{Z_2^2 + E^2}{N_0E}\right] I_0\left(\frac{2Z_2}{N_0}\right),$$

$$P(Z_1) = \frac{2Z_1}{N_0E} \cdot \exp\left[-\frac{Z_1^2 + E^2 \rho_{1,2}^2}{N_0E}\right] I_0\left(\frac{2Z_1 \cdot \rho_{1,2}}{N_0}\right). \quad (2.186)$$

Подставив (2.186) в (2.185) и произведя достаточно громоздкие вычисления, получим следующий результат:

$$P_{\text{ош}} = Q\left[0,5\sqrt{\frac{2E}{N_0}(1-\sqrt{1-\rho_{1,2}^2})}, 0,5\sqrt{\frac{2E}{N_0}(1+\sqrt{1-\rho_{1,2}^2})}\right] - 0,5\exp\left(-0,5\frac{E}{N_0}\right) I_0\left(0,5\frac{E\rho_{1,2}}{N_0}\right), \quad (2.186a)$$

где $Q[\alpha, \beta] = \int_{\rho}^{\infty} x \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}\right] I_0(x\alpha) dx$ – табулированная функция;

$\rho_{1,2} = 1 / E \sqrt{R_C^2 + R_S^2}$ – коэффициент взаимной корреляции сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, $0 \leq \rho_{1,2} < 1$.

Величины R_C и R_S определяются следующими выражениями:

$$R_C = 0,5 \int_0^T S_{01}(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] dt,$$

$$R_S = 0,5 \int_0^T S_{01}(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \sin[(\omega_2 - \omega_1)t] dt.$$

Анализ выражения (2.186a) показывает, что при заданном значении E/N_0 вероятность ошибки минимальна для ортогональных сигналов ($\rho_{1,2} = 0$). Для этого случая $Q[0, \beta] = \exp[-\beta^2/2]$ и выражение (2.187) принимает вид

$$P_{\text{ош}} = 0,5 \exp[-E/2N_0]. \quad (2.187)$$

На рисунке 2.40 приведено семейство кривых, характеризующих потенциальную помехоустойчивость оптимального различителя двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами в зависимости от отношения сигнал/шум и значений коэффициента корреляции.

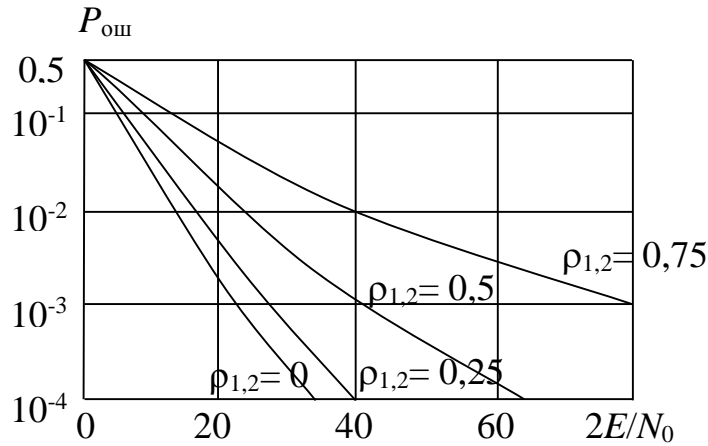


Рисунок 2.40 – Зависимости потенциальной помехоустойчивости различителя двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами

При различении m сигналов с неизвестными начальными фазами ($m > 2$)

$$x(t) = S_i(t, \varphi_i) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.188)$$

где $i = \overline{1, m}$, $S_i(t, \varphi)$ – сигналы с неизвестными начальными фазами и априорными вероятностями $P(S_i)$.

В соответствии с критерием сравнения апостериорных вероятностей получим

$$P_{PS}[S_i(t, \varphi_i)] \gg P_{PS}[S_j(t, \varphi_j)], \quad i \neq j;$$

$$P[S_i(t, \varphi_i)] e^{-\frac{E_i}{N_0}} I_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right) \gg P[S_j(t, \varphi_j)] e^{-\frac{E_j}{N_0}} I_0\left(\frac{2Z_j}{N_0}\right). \quad (2.189)$$

Если энергии и априорные вероятности различаемых сигналов соответственно равны, то (2.189) примет вид

$$Z_i \gg Z_j. \quad (2.190)$$

На рисунке 2.41 приведена структурная схема различителя в соответствии с алгоритмом (2.190). Фильтровый вариант различителя представлен на рисунке 2.42. Устройство сравнения (УС) выбирает один из m каналов с максимальным значением на выходе, которому и соответствует различаемый сигнал, присутствующий во входной смеси (2.188).

Потенциальная помехоустойчивость синтезированных структур различителей определяется следующим образом:

$$P_{\text{ош}}(Z_i) = 1 - \int_0^{\infty} dZ_i \int_0^{Z_i} \dots \int_0^{Z_i} P(Z_1, \dots, Z_m / S_i) dZ_1, \dots, dZ_m,$$

где $P(Z_1 \dots Z_m / S_i)$ – совместная условная плотность вероятности случайных величин при условии, что в принятом колебании $x(t)$ присутствует сигнал $S_i(t)$.

Если

$$Z_i = (X_i^2 + Y_i^2)^{1/2} = \sqrt{\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_{0i}(t) \cdot \cos \omega t dt \right]^2 + \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_{0i}(t) \cdot \sin \omega t dt \right]^2}, \quad (2.191)$$

сигналы взаимно ортогональны, равновероятны и имеют одинаковые энергии

$$\int_0^T S_i(t) \cdot S_j(t) dt = \begin{cases} E, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

то верхняя граница для вероятности ошибки имеет вид

$$P_{\text{ош}} = (m-1)0,5 \exp[-E/2N_0]. \quad (2.192)$$

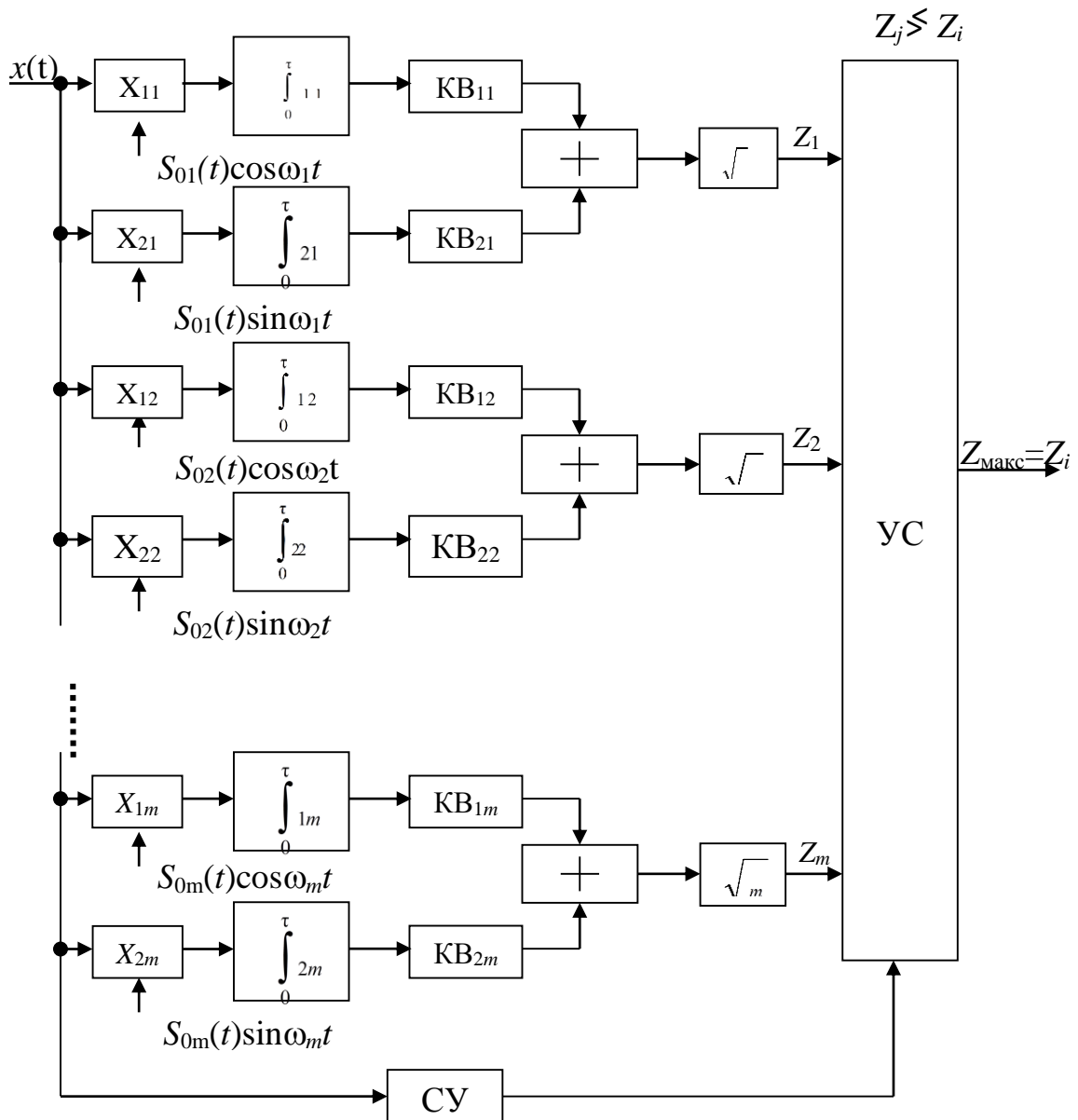


Рисунок 2.41 – Оптимальный различитель m радиосигналов с неизвестными начальными фазами

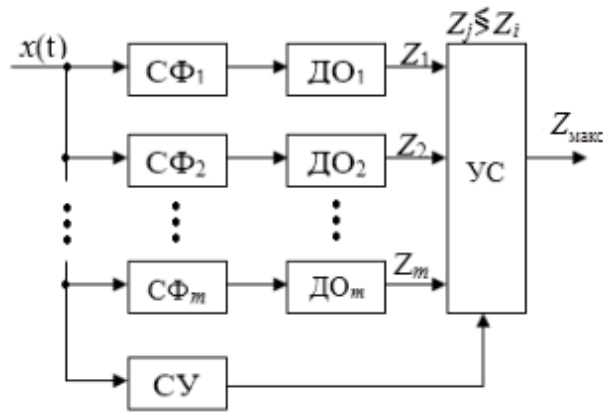


Рисунок 2.42 – Различитель m радиосигналов с неизвестными фазами на СФ

Основные выводы:

1. Незнание фазы различаемых сигналов приводит к энергетическим потерям при обработке, что снижает потенциальную помехоустойчивость приема.
2. Структуры оптимальных различителей радиосигналов с неизвестными начальными фазами характерны для оптимального некогерентного приема.
3. Потенциальная помехоустойчивость различаемых сигналов зависит от их коэффициента взаимной корреляции. Наименьшие ошибки – у симплексных и ортогональных сигналов.
4. Вероятность ошибки различаемых сигналов при $m > 2$ прямо пропорциональна количеству различаемых сигналов.

2.7 Оценка параметров радиосигнала

Как указывалось ранее, оптимальная оценка параметров радиосигнала заключается в синтезе структуры, наилучшим образом выделяющей информационный параметр (или несколько параметров), и количественной характеристике качества работы синтезированной структуры.

В принимаемой смеси

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

полагаются известными характеристики белого шума, форма сигнала $S(t, \lambda)$ и (точно или ориентировочно) априорная плотность вероятности $P(\lambda)$ информационного параметра λ . Сам параметр на интервале $[0, T]$ является постоянной величиной. Так как $x(t)$ – случайный процесс, то можно указать лишь приближенную оценку $\lambda = f[x(t)]$. В общем случае $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$.

Вся информация об интересующем нас параметре заключена в апостериорной вероятности $P_{PS}(\lambda)$. На основании анализа апостериорного распределения принимается то или иное решение об оцениваемом параметре.

В основном применяются следующие критерии оценки параметров:

- оценка по максимуму апостериорной вероятности ($P_{PS}(\hat{\lambda})_{\max} \rightarrow \lambda = \lambda_m$);

- оценка по максимуму функционала правдоподобия $(F(\hat{\lambda}))_{\text{макс}} \rightarrow \lambda = \lambda_m$.

Важным достоинством указанных критериев является то, что точка максимума не изменяется при произвольном взаимно однозначном преобразовании апостериорного распределения. Поэтому удобно брать

$$\frac{d}{d\lambda} \ln P_{PS}(\lambda) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\lambda} \ln F(\lambda) = 0$$

для оптимальной оценки параметра.

Параметры радиосигнала можно разделить на энергетические (амплитуда, длительность) и неэнергетические (фаза, частота, время запаздывания).

2.7.1 Оценка амплитуды известного радиосигнала

Пусть в принимаемой смеси

$$x(t) = S(t, A) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

информационный сигнал описывается следующим выражением:

$$S(t, A) = A \cdot S_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = A S_1(t),$$

где $S_0(t)$ – огибающая сигнала единичной амплитуды:

$$\int_0^T S_0^2(t) dt = E_0,$$

где E_0 – энергия единичной огибающей радиосигнала; $n(t)$ – белый шум с постоянной спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0/2$; T – длительность сигнала (интервал наблюдения).

Функционал правдоподобия параметра (2.24)

$$F(A) = \exp \left[-1/N_0 \int_0^T [x(t) - A S_1(t)]^2 dt \right].$$

Уравнение правдоподобия

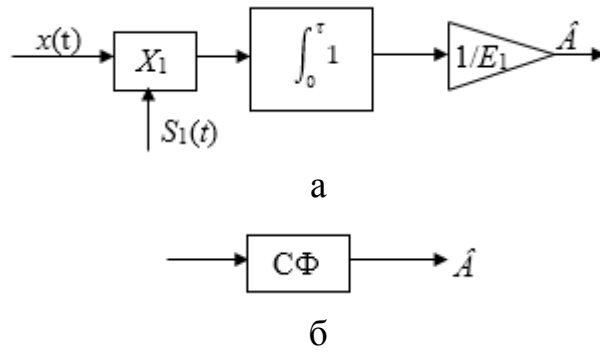
$$\frac{d \ln F(\hat{A})}{d \hat{A}} = \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - \hat{A} S_1(t)] \cdot S_1(t) dt = 0,$$

откуда

$$\hat{A} = \frac{\int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt}{\int_0^T S_1^2(t) dt} = \frac{1}{E_1} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt, \quad (2.193)$$

где E_1 – энергия радиоимпульса единичной амплитуды.

Выражение (2.193) определяет структуру оптимального приемника оценки амплитуды.



а – корреляционная структура оценки; б – фильтровая структура оценки
 Рисунок 2.43 – Структурные схемы оптимальной оценки амплитуды известного сигнала

На рисунке 2.43 приведены корреляционная и фильтровая схемы оценки амплитуды. Импульсный отклик согласованного фильтра при этом определяется выражением

$$g(t) = CS_1(T-t)1/E_1. \quad (2.194)$$

Если истинное значение амплитуды – A_0 , то среднее значение оценки

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{E_1} \int_0^T [A_0 S_1(t) + \langle n(t) \rangle] \cdot S_1(t) dt = A_0. \quad (2.195)$$

Дисперсия оценки амплитуды

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle \hat{A} \rangle}^2 &= \left\langle (\hat{A} - A_0)^2 \right\rangle = \frac{1}{E_1^2} \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) \cdot n(t_2) \rangle S_1(t_1) \cdot S_1(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{E_1} \cdot \frac{N_0}{2} \int_0^T S_1^2(t_1) dt_1 = \frac{N_0}{2E_1} = \frac{N_0}{E_0}. \end{aligned} \quad (2.196)$$

Из (2.196) следует, что потенциальная ошибка при оценке амплитуды зависит только от соотношения спектральной плотности шума и энергии единичной огибающей радиосигнала.

2.7.2 Оценка амплитуды радиосигнала с неизвестной начальной фазой

Для смеси на входе

$$x(t) = S(t, A, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$S(t, A, \varphi) = A \cdot S_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi],$$

где φ – случайная фаза; $P(\varphi) = 1/2\pi$, $n(t)$ – белый шум с $F_n(\omega) = N_0/2$.

Функционал правдоподобия параметра A примет вид (2.129)

$$F(A) = \text{const} \cdot \exp\left[-\frac{A^2 E_0}{2N_0}\right] \cdot I_0\left(\frac{2AZ}{N_0}\right), \quad (2.197)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; Z – огибающая корреляционной функции:

$$Z = \sqrt{\left[\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \cos \omega_0 t dt \right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \sin \omega_0 t dt \right]^2}. \quad (2.198)$$

Уравнение правдоподобия:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln F(\hat{A})}{d \hat{A}} = & \exp \left[-\frac{\hat{A}^2 E_0}{2N_0} \right] \cdot \left(-\frac{\hat{A}^2 E_0}{2N_0} \right) \cdot I_0 \left(\frac{2\hat{A}Z}{N_0} \right) + \\ & + \exp \left[-\frac{\hat{A}^2 E_0}{2N_0} \right] \cdot I_0 \left(-\frac{2\hat{A}Z}{N_0} \right) \cdot \frac{2\hat{A}Z}{N_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.199)$$

$$S(t) = A(t) \cdot \cos [\omega(t) \cdot t + \varphi(t)].$$

В (2.199) $I_0' \left(-\frac{2\hat{A}Z}{N_0} \right) = I_1 \left(\frac{2\hat{A}Z}{N_0} \right)$ – модифицированная функция Бесселя

первого рода первого порядка.

На рисунке 2.44 представлены графики функций $I_0(x)$ и $I_1(x)$.

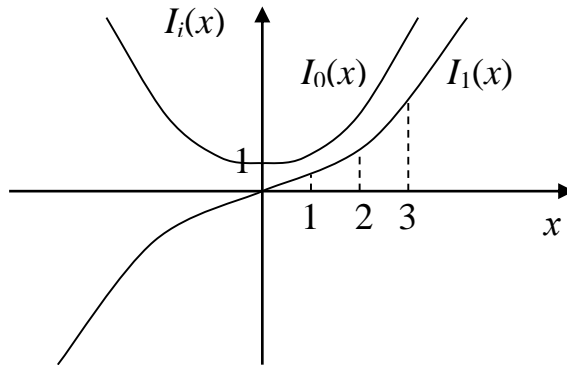


Рисунок 2.44 – Графики функций Бесселя

Из (2.200) определяется оценка амплитуды:

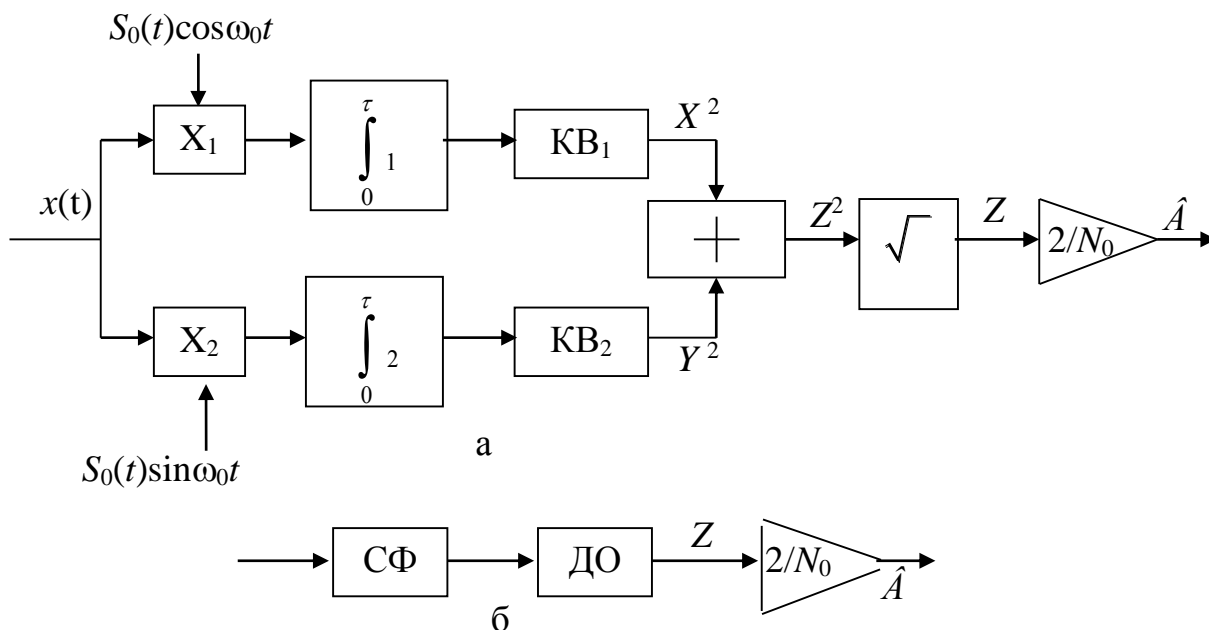
$$\hat{A} = \frac{\frac{2Z}{N_0} \cdot I_1 \left(\frac{2\hat{A}Z}{N_0} \right)}{\frac{E_0}{N_0} \cdot I_0 \left(\frac{2\hat{A}Z}{N_0} \right)}. \quad (2.200)$$

Множитель $I_1(x)/I_0(x)$ нелинейно зависит от x и изменяется от 0 до 1 при изменении x от 0 до ∞ . Однако уже при $x \geq 3$ $I_1(x)/I_0(x) \approx 1$, поэтому из (2.200) справедливо равенство

$$\hat{A} = 2Z / N_0. \quad (2.201)$$

На рисунке 2.45 в соответствии с (2.201) приведены корреляционная и фильтровая структуры оптимальной оценки амплитуды радиосигнала с неиз-

вестной начальной фазой. Согласованный фильтр (СФ) имеет импульсный отклик $g(t) = CS_1(T-t)$.



а – корреляционная структура оценки; б – фильтровая структура оценки

Рисунок 2.45 – Структуры оптимальной оценки амплитуды радиосигнала с неизвестной начальной фазой

Дисперсию оценки амплитуды можно получить из анализа структуры апостериорной вероятности, если воспользоваться асимптотическим разложением модифицированной функции Бесселя первого рода нулевого порядка.

$$P_{PS}(A) = \text{const} \cdot F(\lambda) = \text{const} \exp\left[-\frac{A^2 E_0}{2N_0}\right] I_0\left(\frac{2AZ}{N_0}\right) \cong$$

$$\cong \text{const} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2AZ}{N_0}\right)^{-1/\lambda} e^{-\left(\frac{A^2 E_0}{2N_0} - \frac{2AZ}{N_0}\right)} \cong \text{const} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{A^2}}} e^{-\left(\frac{(A-\hat{A})^2}{2\sigma_{A^2}^2}\right)},$$

где дисперсия оценки амплитуды радиосигнала с неизвестной фазой имеет вид $\sigma_{A^2} = N_0/E_0$. (2.202)

Сравнение (2.196) и (2.202) показывает, что дисперсии оценки амплитуд радиосигналов с известной и с неизвестной начальной фазой одинаковы. Этот вывод справедлив для больших входных отношений сигнал/шум ($q \gg 1$).

2.7.3 Оценка неэнергетических параметров радиосигналов

Для известного сигнала функционал правдоподобия имеет вид

$$F(\lambda) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right].$$

Если оцениваемые параметры неэнергетические, функционал правдоподобия упростится:

$$F(\lambda) = \text{const} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot s(t, \lambda) dt \right]. \quad (2.203)$$

Максимизируя натуральный логарифм выражения (2.203), можно синтезировать обобщенную структурную схему оценки неэнергетического параметра радиосигнала (рисунок 2.46).

$$\ln F(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t, \hat{\lambda}) dt + \text{const}.$$

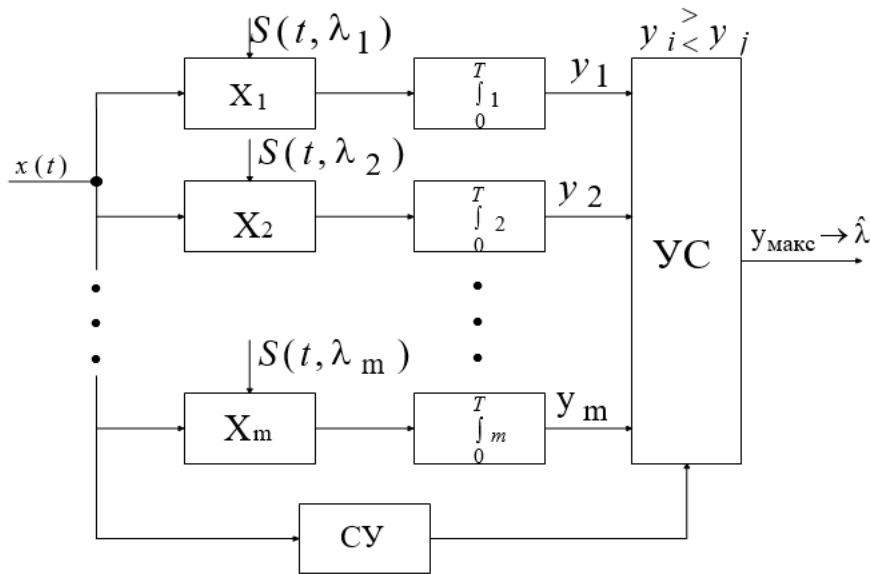


Рисунок 2.46 – Обобщенная структурная схема оптимальной оценки неэнергетического параметра радиосигнала

Откуда решающее правило:

$$y_i = \int_0^T x(t) \cdot S(t, \hat{\lambda}_i) dt \geq \int_0^T x(t) S(t, \hat{\lambda}_j) dt = y_j. \quad (2.204)$$

Структурная схема представляет многоканальный коррелятор. Опорный сигнал для каждого из каналов формируется с учетом конкретного значения параметра из диапазона его возможных значений. Весь диапазон возможных значений измеряемого параметра разбивается на m дискретных величин:

$$m = \frac{\lambda_{\text{макс}} - \lambda_{\text{мин}}}{\Delta\lambda},$$

где $\Delta\lambda$ – необходимая точность оценки параметра.

Представим функцию $y(\lambda)$ через сигнальную и шумовую составляющие:

$$y(\lambda) = \frac{2}{N_0} \left[\int_0^T S(t, \lambda) \cdot S(t, \hat{\lambda}) dt + \int_0^T S(t, \hat{\lambda}) \cdot n(t) dt \right] = y_c(\lambda, \hat{\lambda}) + y_u(\hat{\lambda}). \quad (2.205)$$

Так как измерения происходят при отношении сигнал/шум $q \gg 1$, то вторым интегралом ($y_u(\hat{\lambda})$) можно пренебречь.

Разложим сигнальную функцию $y_c(t, \hat{\lambda})$ в ряд Тейлора в точке $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 – истинное значение оцениваемого параметра) и ограничимся тремя первыми членами [17]:

$$y_c(\lambda, \hat{\lambda}) = y_c(\lambda_0) + y'_c(\lambda_0)(\hat{\lambda} - \lambda_0) + \left(\frac{1}{2}\right) y''_c(\lambda_0)(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2. \quad (2.206)$$

Первый член (2.206) не содержит ошибки измерения. Второй член равен нулю, так как производная $y'_c(\lambda_0)$ в точке $\lambda = \lambda_0$ равна нулю (максимум корреляционной функции). Следовательно, функция правдоподобия для оптимальной оценки неэнергетического параметра имеет вид

$$F(\lambda) = \text{const} \exp \left[\frac{1}{2} y''_c(\lambda_0)(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \right] = \text{const} \exp \left[\frac{(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2}{2 \cdot \frac{1}{y''_c(\lambda_0)}} \right] = \text{const} \exp \left[-\frac{(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2}{2\sigma_\lambda^2} \right]. \quad (2.207)$$

$$\text{В (2.207)} \quad \sigma_\lambda^2 = -\frac{1}{y''_c} = \frac{N_0}{2R''(\lambda_0)} = -\frac{N_0}{2E \cdot \rho''(\lambda_0)}. \quad (2.208)$$

В выражениях (2.206), (2.207) и (2.208) $y''_c(\lambda_0)$ – вторая производная от сигнальной функции для значения $\lambda = \lambda_0$, $R''(\lambda_0)$ – вторая производная корреляционной функции информационного сигнала в точке $\lambda = \lambda_0$.

Таким образом, дисперсия оценки неэнергетического параметра λ обратно пропорциональна кривизне функции автокорреляции сигнала на выходе приемника в ее максимуме.

Оценка фазы радиосигнала

Пусть на вход приемника поступает аддитивная смесь сигнала с белым шумом:

$$x(t) = S(t, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $S(t, \varphi) = S_0(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $F_t(\omega) = \frac{N_0}{2}$ – спектральная плотность белого шума $n(t)$.

Синтез оптимальной структуры оценки фазы радиосигнала проведем по критерию максимума логарифма функционала правдоподобия.

$$F(\varphi) = \text{const} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t, \varphi) dt \right];$$

$$\frac{d \ln F(\varphi)}{d\varphi} = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \sin(\omega t + \hat{\varphi}) dt = 0. \quad (2.209)$$

Уравнение (2.210) моделируется структурной схемой на рисунке 2.47.

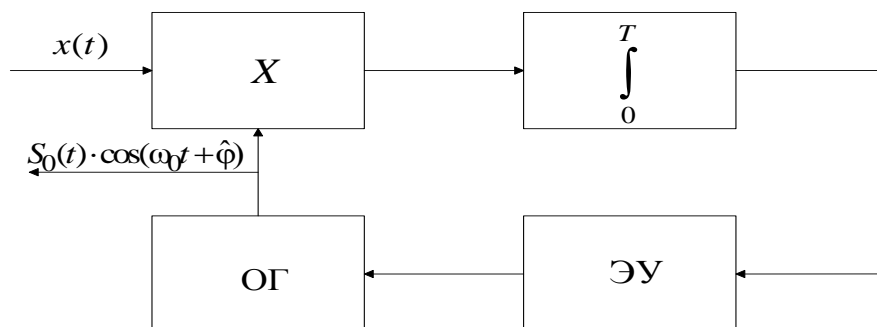


Рисунок 2.47 – Структура оптимальной следящей оценки фазы радиосигнала

Опорный генератор (ОГ) формирует гармоническое колебание с оценочной фазой, а элемент управления преобразует напряжение рассогласования в фазовую подстройку частоты. Возможен и другой вариант оптимальной оценки фазы, вытекающий из выражения

$$\hat{\varphi} = -\text{arctg} \frac{\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \sin \omega_0 t dt}{\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \cos \omega_0 t dt}. \quad (2.210)$$

Выражение (2.210) моделируется структурой на рисунке 2.48.

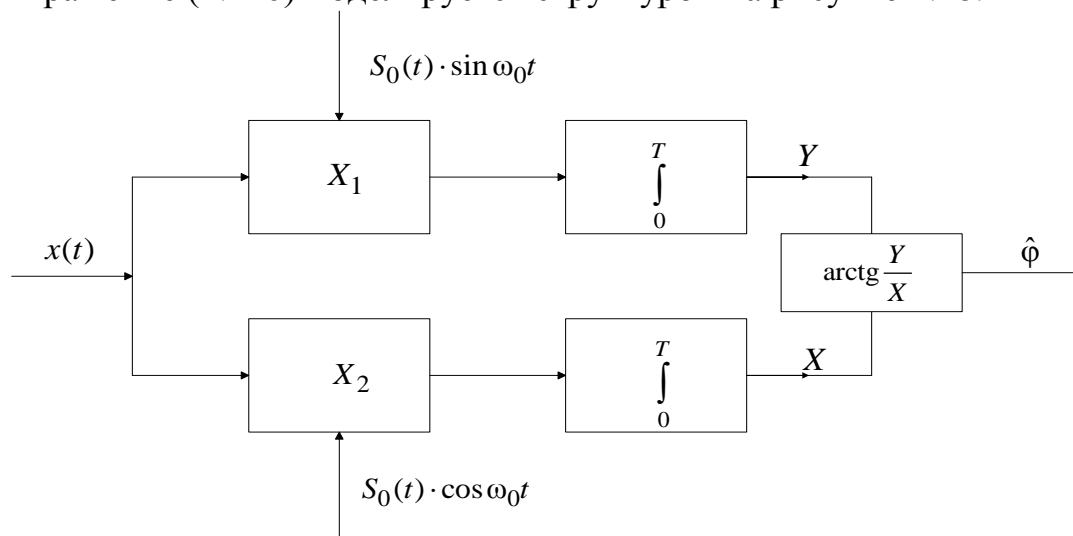


Рисунок 2.48 – Структура оптимальной оценки фазы радиосигнала

Произведем количественную оценку качества выделения фазы:

$$\sigma_{\varphi}^2 = -1/y_c''(\varphi_0).$$

Сигнальная функция имеет вид

$$y_c(\varphi) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0^2(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{2E}{N_0} \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Первая и вторая производные от сигнальной функции

$$y_c'(\varphi) = -\frac{2E}{N_0} \sin(\varphi - \varphi_0),$$

$$y_c''(\varphi) = -\frac{2E}{N_0} \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Следовательно, дисперсия оценки фазы примет вид

$$\sigma_{\varphi}^2 = \frac{N_0}{2E}. \quad (2.211)$$

Дисперсия оценки фазы не зависит ни от формы сигнала, ни от вида модуляции и определяется только отношением спектральной плотности шума к энергии радиосигнала.

Оценка временного положения радиосигнала

В колебании $x(t) = S(t, \tau) + n(t)$, $0 \leq t \leq T$, полезный сигнал $S(t, \tau) = S_0(t - \tau) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ является функцией от временного положения τ . Так как огибающая сигнала – медленно изменяющаяся функция по сравнению с несущей частотой ω_0 , то оценку временного положения сигнала можно проводить, анализируя сигнальную функцию огибающих сигналов:

$$y_c(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0(t - \tau_0) \cdot S_0(t - \tau) dt, \quad (2.212)$$

где τ_0 – истинное значение временного положения сигнала.

Вторая производная сигнальной функции (2.212) по информационному параметру τ при $\tau = \tau_0$

$$y_c''(\tau_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0(t - \tau_0) \cdot \left[\frac{d^2 S_0(t - \tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=\tau_0} dt. \quad (2.213)$$

Выразим $y_c''(\tau_0)$ через параметры спектральной функции огибающей, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье:

$$S_0'(t - \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t - \tau_0)} d\omega,$$

$$\begin{aligned}
S_0''(t - \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\Omega) e^{j\Omega(t-\tau)} d\Omega, \\
\frac{d^2 S_0(t - \tau)}{d\tau^2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\Omega) e^{j\Omega(t-\tau)} d\Omega, \\
y_c''(\tau_0) &= -\frac{2}{N_0} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\omega) \cdot S(j\Omega) e^{j\omega(t-\tau_0)} e^{j\Omega(t-\tau)} d\omega d\Omega = \\
&= -\frac{2}{N_0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\omega) \cdot S(j\Omega) e^{-j(\omega+\Omega)\tau_0} d\omega d\Omega \int_0^T e^{j(\omega+\Omega)t} dt = \\
&= -\frac{2}{N_0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\omega) \cdot S(j\Omega) e^{-j(\omega+\Omega)\tau_0} \delta(\omega + \Omega) d\omega d\Omega = \\
&= -\frac{2}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |S(j\Omega)|^2 d\Omega = -\frac{2E}{N_0} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |S(j\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\Omega)|^2 d\Omega} = -\frac{2E}{N_0} \cdot F_{\text{ЭК}}^2. \quad (2.214)
\end{aligned}$$

где $S(j\Omega)$ – спектральная функция огибающей сигнала; E – энергия огибающей сигнала; $F_{\text{ЭК}}^2$ – квадрат эквивалентной полосы частот, занимаемой огибающей радиосигнала.

Из (2.208) и (2.214) следует

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot F_{\text{ЭК}}^2}. \quad (2.215)$$

Эквивалентная полоса частот сигнала $F_{\text{ЭК}}$ вычисляется по формуле

$$F_{\text{ЭК}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |S(j\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\Omega)|^2 d\Omega}} \quad (2.216)$$

и ее величина мало чем отличается от эффективной полосы частот, занимаемой сигналом, поэтому на практике обычно принимают $F_{\text{ЭК}} = F_{\text{эф}}$. Точность оценки временного положения сигнала тем выше, чем шире полоса частот сигнала и больше отношение сигнал/шум на входе приемника.

Структурная схема, представленная на рисунке 2.46, оптимально оценивает временную задержку ($\lambda_i = \tau_i$). Можно синтезировать и следящую оценку

временного положения, если приравнять к нулю производную от натурального логарифма функционала правдоподобия по измеряемому параметру:

$$\frac{d\text{Ln}F(\hat{\tau})}{d\hat{\tau}} = \int_0^T x(t) \frac{ds(t - \hat{\tau})}{d\hat{\tau}} dt = 0$$

или

$$\int_0^T x(t) \cdot [S(t - \hat{\tau} + \Delta) - S(t - \hat{\tau} - \Delta)] dt = 0. \quad (2.217)$$

Временное смещение Δ в (2.217) выбирается равным или длительности элементарного дискрета, или его половине, если сигнал цифровой. Для непрерывного сигнала Δ равно интервалу дискретизации или половине этого интервала.

На рисунке 2.49 приведена структура следящего измерителя временного положения сигнала, моделирующее уравнение (2.217).

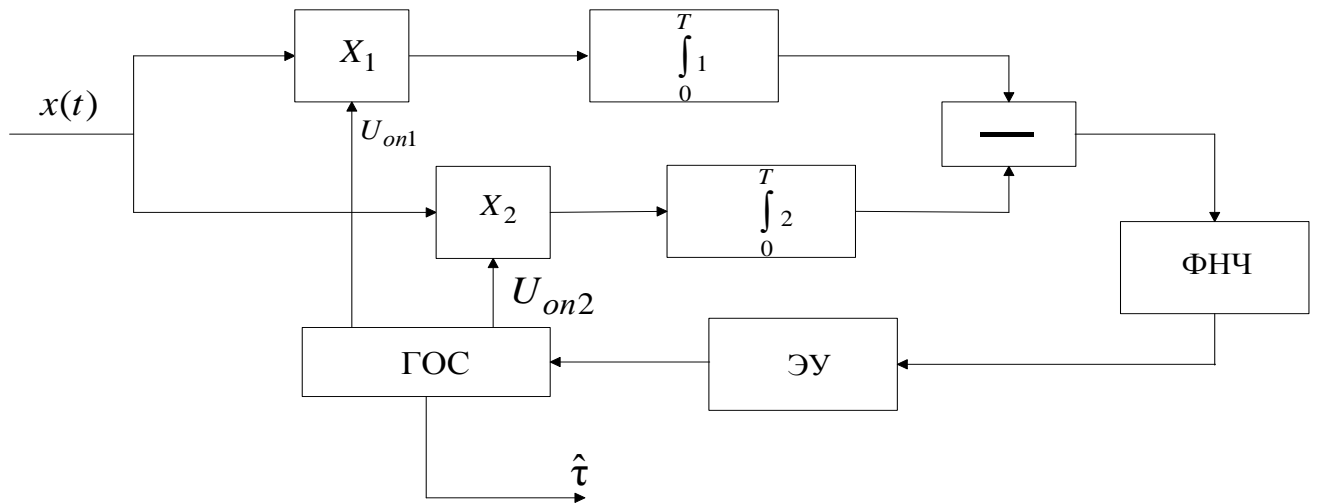


Рисунок 2.49 – Структура следящего измерителя временного положения сигнала

Генератор опорного сигнала (ГОС) формирует опорные колебания:

$$U_{оп1} = S(t - \hat{\tau} + \Delta),$$

$$U_{оп2} = S(t - \hat{\tau} - \Delta).$$

Элемент управления (ЭУ) преобразует напряжение рассогласования во временную задержку опорных колебаний.

Синтезированные структуры и оценочная характеристика временной задержки составляют основу при проектировании синхронизирующих устройств в системах обработки информационных сигналов.

Оценка смещения частоты радиосигнала

Полезный сигнал

$$S(t, \Omega) = S_0(t) \cdot \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi], \quad 0 \leq t \leq T,$$

в принимаемой смеси

$$x(t) = S(t, \Omega) + n(t)$$

содержит информацию о смещении частоты Ω . Для этого случая сигнальная функция примет вид

$$\begin{aligned} y_c(\Omega) &= \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0^2(t) \cdot \cos[(\omega_0 - \Omega_0)t + \varphi] \cos[(\omega - \Omega)t + \varphi] dt = \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^T S_0^2(t) \cos(\Omega - \Omega_0)t dt. \end{aligned} \quad (2.218)$$

Первая и вторая производная (2.218):

$$y'_c(\Omega) = -\frac{1}{N_0} \int_0^T t S_0^2(t) \sin(\Omega - \Omega_0)t dt,$$

$$y''_c(\Omega) = -\frac{1}{N_0} \int_0^T t^2 S_0^2(t) \cos(\Omega - \Omega_0)t dt.$$

При $\Omega = \Omega_0$, где Ω_0 – истинное значение смещения частоты,

$$y''_c(\Omega) = -\frac{1}{N_0} \int_0^T t^2 S_0^2(t) dt = -\frac{2E}{N_0} \cdot \frac{\int_0^T t^2 S_0^2(t) dt}{\int_0^T S_0^2(t) dt} = -\frac{2E}{N_0} \cdot \alpha^2.$$

Здесь $\int_0^T S_0^2(t) dt = 2E$; $\alpha^2 = \frac{\int_0^T t^2 S_0^2(t) dt}{\int_0^T S_0^2(t) dt}$, размерность круговой частоты в

квадрате.

Следовательно, дисперсия оценки смещения круговой частоты примет вид

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \alpha^2}. \quad (2.219)$$

Из (2.219) получим дисперсию оценки смещения действительной частоты:

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{\sigma_{\hat{\Omega}}^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \alpha^2 (2\pi)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) T_{\text{эк}}^2}, \quad (2.220)$$

где $T_{\text{эк}} = 2\pi\alpha$ – эквивалентная длительность сигнала.

Например, для прямоугольного импульса длительностью T_c эквивалентная длительность $T_{\text{эк}} = \frac{\pi T_c}{3}$, а для гауссова импульса $S_0(t) = \exp\left[\frac{-2,8t^2}{T_{\text{эф}}^2}\right]$;

$T_{\text{эк}} = \frac{\pi T_{\text{эф}}}{2,8}$, где $T_{\text{эф}}$ – эффективная длительность сигнала, определяемая на уровне 0,5 от максимальной амплитуды.

Из (2.220) следует: потенциальная точность оценки смещения частоты тем выше, чем больше отношение энергии сигнала к спектральной плотности шума и эквивалентная длительность.

Многоканальный вариант структурной схемы оптимальной оценки частоты представлен на рисунке 2.46 ($\lambda_i = f_i$). Следящий измеритель смещения частоты вытекает из анализа функционала правдоподобия:

$$F(f) = \text{const} \exp\left[-\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t, f) dt\right],$$

$$\frac{d \ln F(f)}{df} = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \times \frac{dS(t, \hat{f})}{df} dt = 0. \quad (2.221)$$

На рисунке 2.50 приведена структурная схема следящего измерителя смещения частоты, моделирующего выражение (2.221).

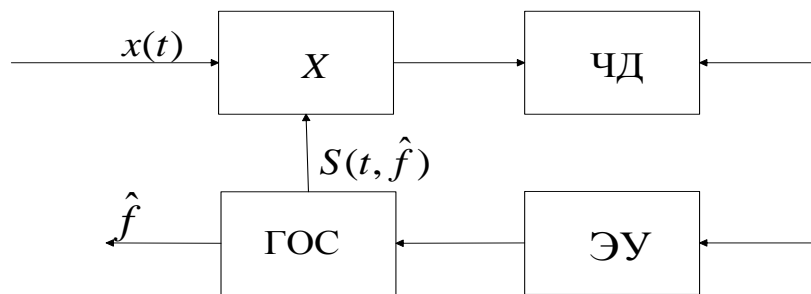


Рисунок 2.50 – Структурная схема следящего измерителя смещения частоты радиосигнала

Частотный дискриминатор (ЧД) вырабатывает напряжение, пропорциональное величине рассогласования между частотой опорного сигнала и информационного входного сигнала, которое через элемент управления (ЭУ) сводит к минимуму рассогласование частот, давая оценку смещения частоты на выходе генератора опорного сигнала в соответствии с выражением (2.220).

Совместная оценка временного запаздывания и смещения частоты

Часто встречающийся на практике случай требует совместной оценки временного запаздывания τ и доплеровского смещения частоты f . Пусть на вход приемника поступает смесь

$$x(t) = S(t, \tau, f) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.222)$$

где $S(t, \tau, f)$ – полезный информационный сигнал

$$S(t, \tau, f) = S_0(t - \tau) \cdot \cos[(\omega_0 - 2\pi f)t + \psi(t)]. \quad (2.223)$$

Сигнальная функция для случая (2.223) примет вид

$$y_c(\tau, f) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \tau_0, f_0) \cdot S(t, \tau, f) dt. \quad (2.224)$$

Произведем нормировку сигнальной функции по энергии полезного сигнала:

$$\overline{y_c(\tau, f)} = \frac{\int_0^T S(t, \tau_0, f_0) \cdot S(t, \tau, f) dt}{\int_0^T S^2(t, \tau, f) dt}. \quad (2.225)$$

Далее, если сделать следующие обозначения:

$$I_{\tau, f} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau, f)}}{\partial \tau \partial f} \right]_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}}, \quad I_{\tau, \tau} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau, f)}}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=\tau_0},$$

$$I_{f, f} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau, f)}}{\partial f^2} \right]_{f=f_0}, \quad I_{f, \tau} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau, f)}}{\partial f \partial \tau} \right]_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}},$$

$\Delta = I_{\tau, \tau} \cdot I_{f, f} - I_{\tau, f} \cdot I_{f, \tau}$, то выполняются следующие соотношения при совместной оценке τ и f :

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{I_{f, f}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \Delta}; \quad \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{I_{\tau, \tau}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \Delta}; \quad R_{\hat{\tau}, \hat{f}} = \frac{I_{\tau, f}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \Delta}. \quad (2.226)$$

В (2.226) $I_{\tau, \tau} = F_{\text{ЭК}}^2 = F_{\text{ЭФ}}^2$, $I_{f, f} = T_{\text{ЭК}}^2$ – соответственно эквивалентные полоса и длительность сигнала в квадрате.

$$I_{\tau, f} = I_{f, \tau} = \overline{(\omega t)} = \int_0^T t \frac{d\psi(t)}{dt} S_0^2(t) dt. \quad (2.227)$$

Последнее выражение (2.228) справедливо, если вторая производная по τ и f непрерывна в точках $\tau = \tau_0$ и $f = f_0$, что на практике всегда выполняется. При $\overline{\omega t} = 0$ оценки по τ и f некоррелированы: отсутствует угловая модуляция или сигнальная функция $y_c(\tau, f)$ является четной функцией относительно точки (τ_0, f_0) по τ или по f . С учетом (2.227) соотношения (2.226) запишутся в следующем виде:

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{T_{\text{ЭК}}^2}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \left[F_{\text{ЭК}}^2 \cdot T_{\text{ЭК}}^2 - (\overline{\omega t})^2\right]}; \quad \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{F_{\text{ЭК}}^2}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \left[F_{\text{ЭК}}^2 \cdot T_{\text{ЭК}}^2 - (\overline{\omega t})^2\right]};$$

$$R_{\hat{\tau}\hat{f}} = \frac{\overline{(\omega t)}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \left[F_{\text{ЭК}}^2 \cdot T_{\text{ЭК}}^2 - (\overline{\omega t})^2\right]}. \quad (2.228)$$

В (2.227) и (2.228) $\overline{(\omega t)}$ – среднее значение произведения частоты на длительность, $R_{\hat{\tau}\hat{f}}$ – корреляция между оценками частоты и временной задержкой.

При отсутствии корреляции между $\hat{\tau}$ и \hat{f} дисперсии оценок этих параметров совпадают с выражениями (2.215) и (2.220) соответственно.

Анализ выражений (2.228) показывает, что при совместной оценке смещения частоты и временной задержки требования к сигналам противоречивы. Это наглядно наблюдается для простых сигналов. Для получения высокой точности оценки по временной задержке необходимо расширять эффективную полосу сигнала, т. е. уменьшать ее длительность. Точность оценки смещения частоты наоборот возрастает с увеличением длительности сигнала. Для любого сигнала при неизменном отношении мощности сигнала к мощности шума выполняется следующее равенство $\sigma_{\hat{\tau}} \cdot \sigma_{\hat{f}} = \text{const}$, которое в свою очередь связано с равенством $T_{\text{ЭК}} \cdot T_{\text{ЭФ}} = \text{const}$. Эти равенства и отражают «принцип неопределенности» в радиолокации, не позволяющий при совместной оценке $\hat{\tau}$ и \hat{f} одновременно получать высокие точные значения, если применяются простые сигналы. При использовании сложных сигналов ($B \gg 1$) возможно получение необходимых значений точности при совместном измерении τ и f , если длительность сигнала выбирается исходя из заданной точности оценки частоты, а желаемая точность оценки временной задержки определяется выбором эффективной полосы частот сигнала за счет введения внутрисигнальной модуляции (частотной, временной, фазовой).

Структурные схемы рисунков 2.46, 2.49, 2.50 справедливы и при совместном измерении τ и f .

2.8 Оптимальная фильтрация сообщений

Наблюдение ведется за случайным процессом

$$X[t] = S[t, \lambda(t)] + n(t), 0 \leq t \leq T, \quad (2.229)$$

где $S[t, \lambda(t)]$ – полезный сигнал (известная функция), один из параметров которого несет информацию о сообщении $\lambda(t)$, причем в отличие от задачи оценки параметров сообщение $\lambda(t)$ может меняться за время наблюдения T . Как правило, известны все необходимые вероятностные характеристики процессов $\lambda(t)$ и $n(t)$.

Пусть передаваемое информационное сообщение описывается заданным стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = K_1(t, \lambda) + n_\lambda(t), \quad (2.230)$$

где $K_1(t, \lambda)$ – известная функция аргументов t и λ , $n_\lambda(t)$ – нормальный белый шум с нулевым математическим ожиданием и односторонней спектральной плотностью N_λ (формирующий белый шум).

В зависимости от вида уравнения наблюдения (2.229) и уравнения сообщения (2.230) различают две задачи фильтрации:

1. Линейная фильтрация – уравнения (2.229) и (2.230) являются линейными относительно $\lambda(t)$.
2. Нелинейная фильтрация – уравнение (2.229) или (2.230) содержит нелинейные функции сообщения $\lambda(t)$.

Процесс $\lambda(t)$, описываемый (2.230), является диффузионным марковским процессом, априорная плотность вероятности которого определяется уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова:

$$\frac{\partial P_{pr}(t, \lambda)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(t, \lambda) \cdot P_{pr}(t, \lambda)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(t, \lambda) \cdot P_{pr}(t, \lambda)], \quad (2.231)$$

где $K_1(t, \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [\lambda(t - \tau) - \lambda(t)] \rangle}{\tau}$ – средняя скорость систематического изменения; $K_2(t, \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [\lambda(t - \tau) - \lambda(t)]^2 \rangle}{\tau}$ – случайный разброс относительной средней скорости.

Если в качестве критерия оптимальности при фильтрации использовать критерий максимума апостериорной вероятности, то от уравнения для априорной плотности вероятности можно перейти к уравнению для финальной апостериорной плотности вероятности параметра $\lambda(t)$:

$$\frac{\partial P_{ps}(t, \lambda)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(t, \lambda) \cdot P_{ps}'(t, \lambda)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(t, \lambda) \cdot P_{ps}(t, \lambda)] + [V(t, \lambda) - \langle V(t, \lambda) \rangle] P_{ps}'(t, \lambda), \quad (2.232)$$

где $V(t, \lambda) = -\frac{1}{N_0} [X(t) - S[t, \lambda(t)]]^2$ – производная по времени от логарифма

функционала правдоподобия $V[t, \lambda] = \frac{\partial \ln F(t, \lambda)}{\partial t}$;

$$\langle V(t, \lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V(t, \lambda) \cdot P_{ps}(t, \lambda) d\lambda.$$

Начальные условия для уравнения (2.232) определяются априорной плотностью вероятности $P_{pr}(t, \lambda)$ начальной координаты $\lambda(0) = \lambda_0$.

Для гауссовой аппроксимации апостериорной плотности вероятности

$$P_{ps}'(t, \hat{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}} \exp\left[-\frac{[\hat{\lambda}(t) - \lambda_0(t)]^2}{2\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}\right],$$

где $\lambda_0(t)$ – матожидание процесса $\lambda(t)$, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = K_1(\hat{\lambda}, t) + \sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) \frac{\partial V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}}; \\ \frac{d\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = K_2(\hat{\lambda}, t) + 2K_1'(\hat{\lambda}, t)\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) + \sigma_{\hat{\lambda}}^4(t) \frac{\partial^2 V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}^2}. \end{cases} \quad (2.233)$$

Система уравнений (2.233) позволяет синтезировать структуру оптимальной фильтрации сообщения $\lambda(t)$ и оценить потенциальные возможности этой структуры.

2.8.1 Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана – Бьюси

Пусть наблюдается смесь

$$x(t) = \lambda(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.234)$$

где $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$, а сообщение

$\lambda(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением (уравнением Ланжевена) вида

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + n_{\lambda}(t), \quad (2.235)$$

где α – постоянный коэффициент, определяющий ширину спектра сообщения $\lambda(t)$; $n_\lambda(t)$ – другой белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = \frac{N_\lambda}{2}$.

Если пропустить белый шум $n_\lambda(t)$ через RC -цепочку с постоянной времени $\tau_{RC} = \frac{1}{\alpha}$, то получится $\lambda(t)$.

Уравнения (2.234) и (2.235) являются линейными относительно $\lambda(t)$.

Система уравнений фильтрации (2.233) для рассматриваемого случая примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha\hat{\lambda}(t) + \sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) \frac{\partial V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}}; \\ \frac{d\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) + \sigma_{\hat{\lambda}}^4(t) \frac{\partial^2 V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}^2}. \end{cases} \quad (2.236)$$

$$\text{В (2.236) } K_1(\hat{\lambda}, t) = -\alpha\hat{\lambda}(t), \quad K_2(\hat{\lambda}, t) = \frac{N_\lambda}{2}, \quad K_1'(\hat{\lambda}, t) = \frac{\partial K_1(\hat{\lambda}, t)}{\partial \hat{\lambda}},$$

$$V(t, \hat{\lambda}) = -\frac{1}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)]^2,$$

$$\frac{\partial V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}} = \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)],$$

$$\frac{\partial^2 V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}^2} = -\frac{2}{N_0}.$$

Окончательный вид уравнений фильтрации с учетом полученных значений

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha\hat{\lambda}(t) + \sigma_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)]; \\ \frac{d\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) - \sigma_{\hat{\lambda}}^4(t) \frac{2}{N_0}. \end{cases} \quad (2.237)$$

Эти уравнения описывают фильтр Калмана. Первое уравнение используется для построения фильтра. Воспользуемся следующим преобразованием:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} + \alpha\hat{\lambda}(t) &= \sigma_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)], \\ \hat{\lambda}(t) \left[\frac{d}{dt} + \alpha \right] &= \sigma_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)], \quad \frac{d}{dt} = P, \\ \hat{\lambda}(t) &= \frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)]}{P + \alpha}. \end{aligned} \quad (2.238)$$

На рисунке 2.51 приведена структура фильтра Калмана, построенная в соответствии с выражением (2.238).

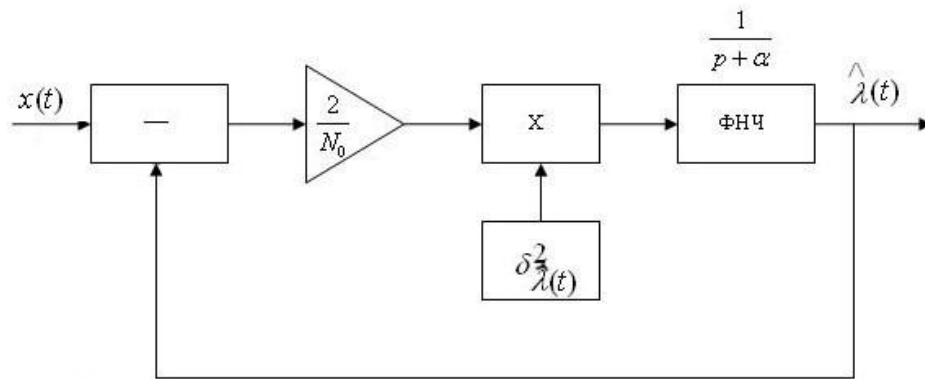


Рисунок 2.51 – Структурная схема фильтра Калмана

Этот фильтр является фильтром с переменными параметрами.

Второе уравнение фильтрации используется для оценки потенциальной точности выделяемого сообщения.

Если $\sigma_{\lambda}^2 = \frac{N_{\lambda}}{4\alpha}$ – дисперсия сообщения на входе фильтра, то $\frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{\sigma_{\lambda}^2(t)} = \text{const}$

в установившемся режиме (рисунок 2.52).

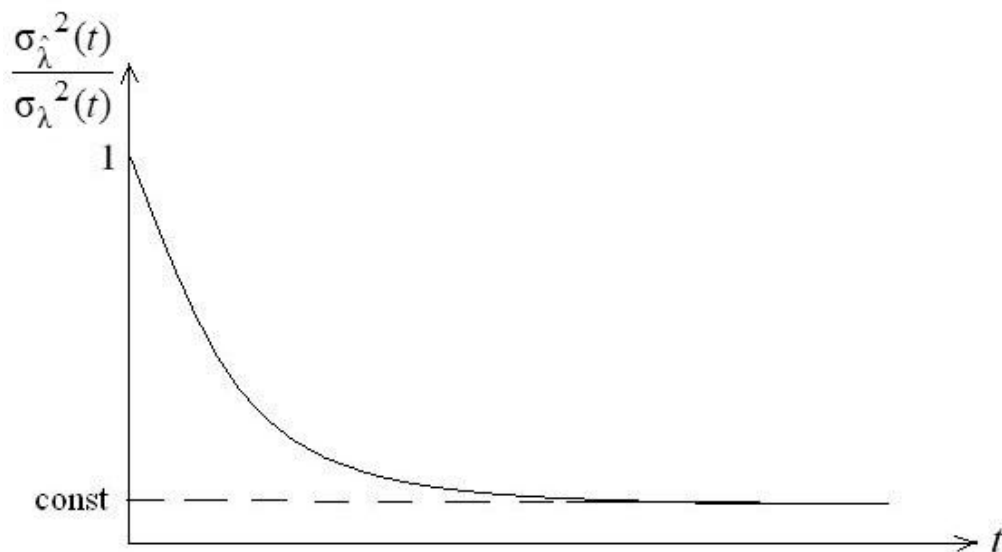


Рисунок 2.52 – Дисперсия ошибки сообщения

Фильтр Калмана обеспечивает минимум среднего квадрата ошибки как в переходном, так и в установившемся режиме. Стационарный режим предпола-

гает $\frac{d\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = 0$, поэтому стационарную дисперсию выделенного сообщения находят из второго уравнения фильтрации (2.237):

$$\frac{2}{N_0} \sigma_{\hat{\lambda}}^4(t) + 2\alpha \sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) - \frac{N_\lambda}{2} = 0, \quad \sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) = \frac{N_0 \alpha}{2} + \sqrt{\frac{N_0^2 \alpha^2 + N_0 N_\lambda}{4}}. \quad (2.239)$$

Следовательно, в стационарном режиме устройство формирования дисперсии $[\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)]$ не нужно.

Важным параметром в фильтре Калмана является чувствительность фильтра к отклонению его параметров.

Рассмотрим, как будет изменяться дисперсия ошибки от коэффициента передачи фильтра при стационарной фильтрации.

Первое уравнение фильтрации (2.237) можно записать в таком виде:

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha \hat{\lambda}(t) + K[x(t) - \hat{\lambda}(t)], \quad (2.240)$$

где $K = \sigma_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0}$ – коэффициент передачи фильтра.

Если априорное отклонение $\lambda(t)$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha \lambda(t) + n_\lambda(t),$$

то ошибку за счет изменения K можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t).$$

Уравнение для ошибки при этом примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= -\alpha \varepsilon(t) + n_\lambda(t) - Kx(t) + K\lambda(t) - K\varepsilon(t) = \\ &= -(\alpha + K)\varepsilon(t) + n_\lambda(t) - Kn(t). \end{aligned} \quad (2.241)$$

Дисперсия ошибки $\varepsilon(t)$ в (2.241) для стационарного режима

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{(N_\lambda + N_0 \cdot K^2)}{4(\alpha + K)}. \quad (2.242)$$

При $K = K_{\text{опт}}$, которое находится из уравнения $\frac{d\sigma_\varepsilon^2(t)}{dK} = 0$, σ_ε^2 будет минимальна.

На рисунке 2.53 приведен график зависимости дисперсии ошибки от коэффициента передачи фильтра.

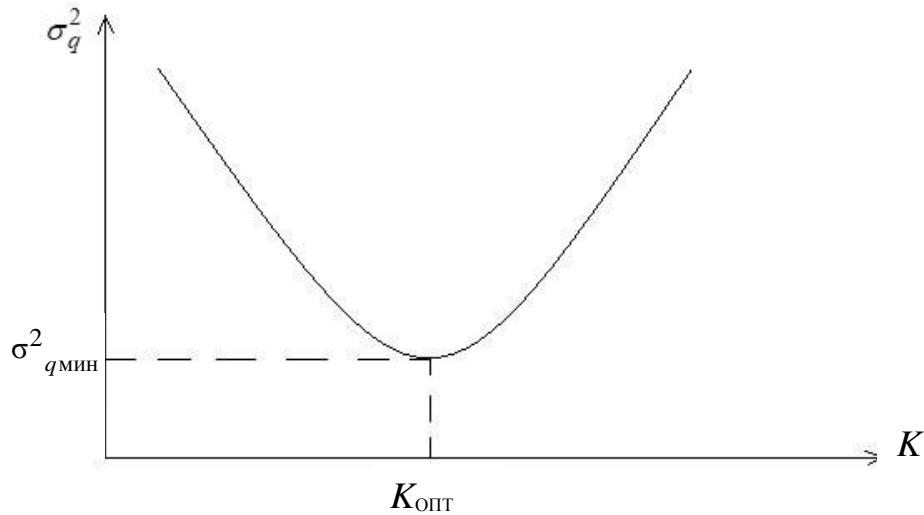


Рисунок 2.53 – График зависимости дисперсии ошибки от коэффициента передачи фильтра

Минимальное значение дисперсии соответствует $K_{\text{опт}}$.

Найдем выражение для вычисления оптимального коэффициента передачи:

$$\frac{d\sigma_{\varepsilon}^2}{dK} = \frac{4(\alpha + K_{\text{опт}}) \cdot 2N_0K_{\text{опт}} - (N_{\lambda} + N_0K_{\text{опт}}^2)4}{[4(\alpha + K_{\text{опт}})]^2} = 0,$$

$$K_{\text{опт}}^2 + 2\alpha K_{\text{опт}} - \frac{N_{\lambda}}{N_0} = 0,$$

$$K_{\text{опт}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{N_{\lambda}}{N_0}}. \quad (2.243)$$

Если за время наблюдения T сообщение мало изменяется, т. е. $\frac{d\lambda(t)}{dt} \approx 0$, то фильтр Калмана сводится к обычному полосовому фильтру, синтезированному по критерию минимума среднего квадрата ошибки.

При оптимальной линейной фильтрации сообщения из входной смеси определяются выражением $x[t] = S[t, \lambda(t)] + n(t), 0 \leq t \leq T$, где $S[t, \lambda(t)] = \lambda(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$; $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$; $\lambda(t)$ – диффузионный марковский процесс типа (2.235).

Первое уравнение фильтрации примет вид

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\left(\alpha + \frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{N_0}\right)\hat{\lambda}(t) + 2\frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{N_0}x(t) \cdot \sin \omega_0 t. \quad (2.244)$$

Уравнение (2.244) можно моделировать фильтром разомкнутого типа (рис. 2.54), в котором перемножитель и RC-фильтр выполняют функцию синхронного детектора, причем интегрирующая цепочка RC имеет постоянную

$$\text{времени } \tau_{RC} = \frac{1}{\left(\alpha + \frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2}{N_0} \right)}.$$

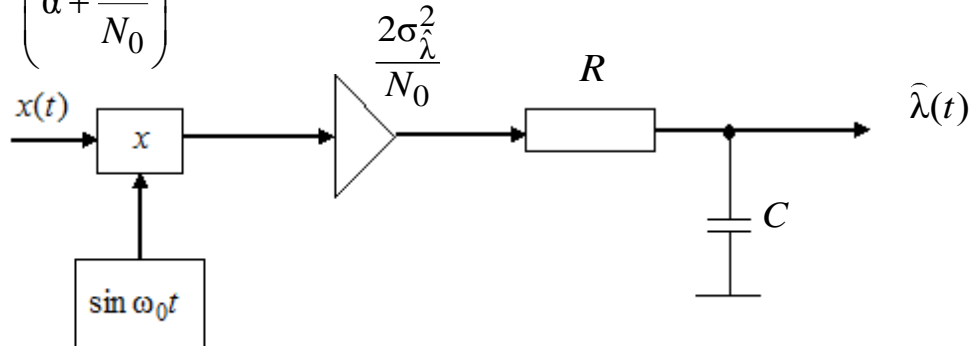


Рисунок 2.54 – Структурная схема оптимального линейного фильтра разомкнутого типа

2.8.2 Оптимальная нелинейная фильтрация

Если в наблюдаемой смеси

$$x(t) = S[t, \lambda(t)] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.245)$$

сообщение $\lambda(t)$ моделирует неэнергетический параметр сигнала $S[t, \lambda(t)]$ (нелинейная связь), $n(t)$ – белый шум с постоянной спектральной плотностью

$F_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$ в полосе приемника, а само сообщение $\lambda(t)$ является марковским

процессом и описывается дифференциальным уравнением типа (2.235), то система уравнений фильтрации примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha\hat{\lambda}(t) + \frac{2}{N_0} \cdot \sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) \cdot x(t) \frac{\partial S[t, \hat{\lambda}(t)]}{\partial \hat{\lambda}}, \\ \frac{d\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = \frac{N_{\lambda}}{2} - 2\alpha\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) + \frac{2}{N_0} \cdot \sigma_{\hat{\lambda}}^4(t) \cdot x(t) \cdot \frac{\partial^2 S[t, \hat{\lambda}(t)]}{\partial \hat{\lambda}^2}. \end{cases} \quad (2.246)$$

Уравнения (2.246) оптимальной нелинейной фильтрации получаются из уравнения (2.236) при $V(t, \hat{\lambda}) = \frac{2}{N_0} \cdot x(t) \cdot S[t, \hat{\lambda}(t)]$, так как $\hat{\lambda}(t)$ – неэнергетический параметр.

Эта схема отражает оптимальную схему фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Нижняя часть схемы, обведенная пунктиром, является схемой АРУ, регулирующей коэффициент усиления входного усилителя ($K_1 = K_2 = 2/N_0$).

В стационарном режиме работы при больших отношениях сигнал/шум второе уравнение фильтрации (2.249) $\frac{d\sigma_{\hat{\phi}}^2}{dt} \approx 0$ и дисперсия оценки фильтрации фазы не зависит от времени, принимая значение

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = \sqrt{\frac{N_0 N_{\phi}}{2A_0^2}}. \quad (2.250)$$

При этом схему на рисунке 2.55 можно упростить до схемы ФАПЧ (рисунок 2.56), считая ее как квазиоптимальное приближение устройства слежения за случайной фазой узкополосного радиосигнала.

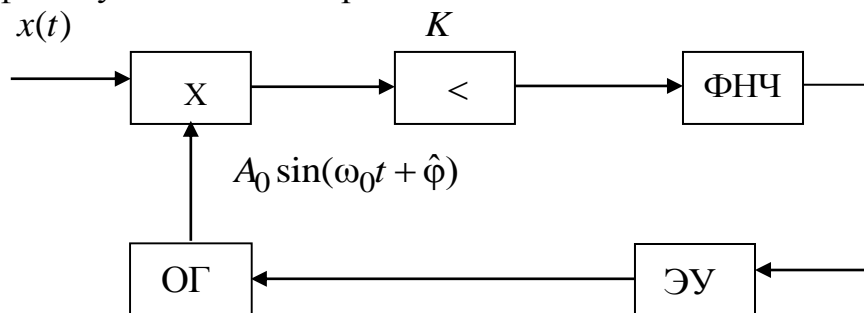


Рисунок 2.56 – Структура квазиоптимального приближения устройства слежения за случайной фазой узкополосного радиосигнала

На рисунке 2.56 коэффициент усиления усилителя $K = \sqrt{\frac{2N_{\phi}}{2A_0^2 N_0}}$, а элемент управления (ЭУ) преобразует напряжение рассогласования фаз в смещение частоты опорного генератора (ОГ).

2.9 Оптимальное разрешение радиосигналов

Как отмечалось ранее (раздел 1), при оптимальном разрешении принимается реализация

$$X(t) = \sum_{i=1}^k S_i(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где в общем случае параметр $\lambda = f(\lambda_i, j)$, $j = \overline{1, m}$, а $n(t)$ по-прежнему белый шум с постоянной спектральной плотностью $F_u(\omega) = N_0/2$.

Задачу разрешения можно представить как две частные задачи: разрешение – разделение, разрешение – измерение.

В задаче разрешения – разделение принимаемую реализацию можно записать в следующем виде:

$$X(t) = \sum_{l=1}^k \lambda_l s_l(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.251)$$

где λ_i принимает значение 1 или 0. Ансамбль принимаемых сигналов

$$\{S_i(t)\}, \quad i = \overline{1, k},$$

характеризуется коэффициентами взаимной корреляции $\rho_{j,i}, j = \overline{1, k}, \quad l = \overline{1, k}, \quad j \neq l$. Каждый из сигналов ансамбля несет свою информацию о передаваемом сообщении. Требуется синтезировать оптимальную структуру различения сигналов $S_i(t)$ для любых сочетаний λ_i из заданных значений. Задача оптимального разрешения – разделения отличается от задачи оптимального различения тем, что на входе приемника одновременно может присутствовать несколько полезных сигналов или отсутствовать все.

Рассмотрим эту задачу для случая разрешения – разделения двух сигналов ($k = 2$):

$$X(t) = \lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.252)$$

Естественно предположить, что λ_1 и λ_2 независимые случайные величины, принимающие значения 1 или 0, а $S_1(t)$ и $S_2(t)$ полностью известные функции времени с одинаковыми энергиями $E_1 = E_2 = E$ и коэффициентами

взаимной корреляции $\rho_{1,2} = \frac{1}{E_0} \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t) dt$. В качестве критерия оптимизации воспользуемся максимизацией логарифма функционала правдоподобия

(2.38):

$$\ln F(\lambda_1, \lambda_2) = \text{макс}. \quad (2.253)$$

Для нашего случая функционал правдоподобия примет вид

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \lambda_1, \lambda_2)]^2 dt \right\}, \quad (2.254)$$

где $S(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t)$.

С учетом (2.254) найдем значение (2.253):

$$\begin{aligned}
\ln F(\lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T x^2(t) dt - 2 \int_0^T x(t) \cdot S(t, \lambda_1, \lambda_2) dt + \int_0^T S^2(t, \lambda_1, \lambda_2) dt \right] = \\
&= -\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T x^2(t) dt - 2\lambda_1 \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt - 2\lambda_2 \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt + \lambda_1^2 \int_0^T S_1^2(t) dt + 2\lambda_1 \lambda_2 \int_0^T S_1'(t) \cdot S_2(t) dt + \lambda_2^2 \int_0^T S_2'^2(t) dt \right] = \\
&= -\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T x^2(t) dt - 2\lambda_1 \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt - 2\lambda_2 \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt + \lambda_1^2 E + 2\lambda_1 \lambda_2 E \rho_{1,2} + \lambda_2^2 E \right]. \quad (2.255)
\end{aligned}$$

Выражение (2.255) принимает максимальное значение, когда имеется минимальная ошибка оцениваемых параметров $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$. Оцениваемые параметры можно найти, решив следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d \ln F(\lambda_1, \lambda_2)}{d \lambda_1} = 0, \quad \frac{d \ln F(\lambda_1, \lambda_2)}{d \lambda_2} = 0. \quad (2.256)$$

Дифференциальные уравнения (2.256) дадут систему уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt - \hat{\lambda}_1 E - \hat{\lambda}_2 E \rho_{1,2} = 0, \\ \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt - \hat{\lambda}_2 E - \hat{\lambda}_1 E \rho_{1,2} = 0. \end{cases} \quad (2.257)$$

Решая систему (2.257), получим

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{E(1 - \rho_{1,2}^2)} \cdot \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - \rho_{1,2} S_2(t)] dt, \\
\hat{\lambda}_2 &= \frac{1}{E(1 - \rho_{1,2}^2)} \cdot \int_0^T x(t) \cdot [S_2(t) - \rho_{1,2} S_1(t)] dt. \quad (2.258)
\end{aligned}$$

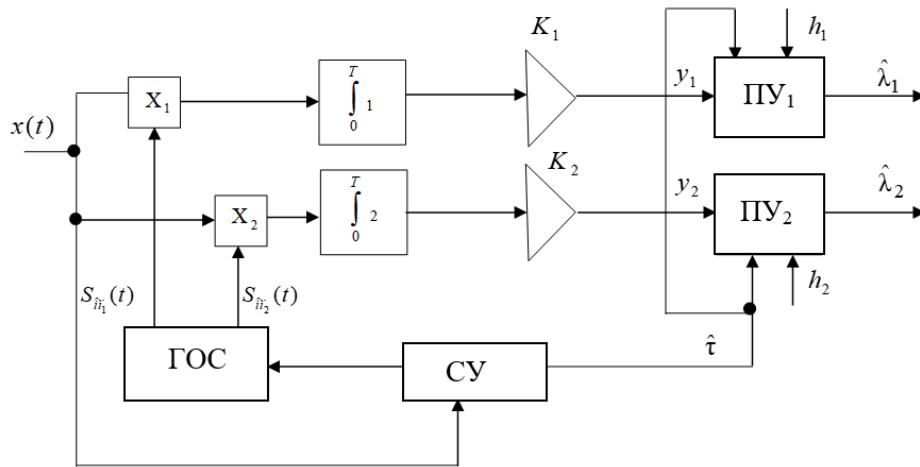


Рисунок 2.57 – Структура оптимального разрешения – разделения двух известных сигналов

На рисунке 2.57 приведена оптимальная структура приемника, реализующая алгоритмы (2.258). Генератор опорных сигналов (ГОС) формирует сигналы

$$\begin{aligned} S_{\text{оп1}}(t) &= S_1(t) - \rho_{1,2} S_2(t), \\ S_{\text{оп2}}(t) &= S_2(t) - \rho_{1,2} S_1(t). \end{aligned}$$

Коэффициенты усилителей $K_1 = K_2 = 1/E(1 - \rho_{1,2})$, а пороговые устройства (ПУ₁ и ПУ₂) выполняют функции устройств принятия решений. Синхронизирующее устройство (СУ) дает оценку временного положения приходящих сигналов. Если принимаемые сигналы ортогональны ($\rho_{1,2} = 0$), то структура приемника ничем не отличается от обнаружителей двух известных сигналов. Поэтому качество работы приемника можно оценить по характеристикам обнаружения.

Так как $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ – случайные величины с нормальным законом распределения, то матожидания и дисперсии этих величин принимают значения

$$m_{\hat{\lambda}_i} = \begin{cases} 1, & \lambda_i = 1, \\ 0, & \lambda_i = 0, \end{cases} \quad \sigma_{\hat{\lambda}_i}^2 = \frac{N_0}{2E(1 - \rho_{1,2}^2)} = \sigma_{\hat{\lambda}}^2. \quad (2.259)$$

По аналогии с (2.109) и (2.110) получим выражения для вероятности правильного разрешения – разделения и вероятности ложной тревоги:

$$\begin{cases} P_{\text{по}} = 1 - \Phi\left(\frac{h-1}{\sigma_{\hat{\lambda}}}\right); \\ P_{\text{лт}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_{\hat{\lambda}}}\right). \end{cases} \quad (2.260)$$

Если порог h выбрать оптимальным (минимизируется общая ошибка), а следовательно, $h = h_{\text{опт}} = 1/2$, то характеристики разрешения – разделения примут вид

$$\begin{cases} P_{\text{по}} = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{\lambda}}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2\sigma_{\hat{\lambda}}}\right); \\ P_{\text{лт}} = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2\sigma_{\hat{\lambda}}}\right). \end{cases} \quad (2.261)$$

С учетом (2.259) характеристики (2.261) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} P_{\text{по}} = \Phi\left[\frac{E}{N_0}(1 - \rho_{1,2}^2)\right]; \\ P_{\text{лт}} = 1 - \Phi\left[\frac{E}{N_0}(1 - \rho_{1,2}^2)\right]. \end{cases} \quad (2.262)$$

Из (2.262) следует, что наилучшие результаты при разрешении – разделении получаются, когда разрешаемые сигналы ортогональны ($\rho_{1,2} = 0$). При разрешении k сигналов ($k > 2$) структура приемника – многоканальна (рисунок 2.58), и наилучшие качественные показатели разрешения – разделения получаются для взаимно ортогональных разрешаемых сигналов ($\rho_{ij} = 0; i \neq j; i, j = \overline{1, k}$). Характеристики разрешения (2.262) справедливы и для $k > 2$, если $\rho_{1,2}$ заменить ρ_{ij} , а пороги обнаружения в каждом канале (рисунок 2.58) взять оптимальными.

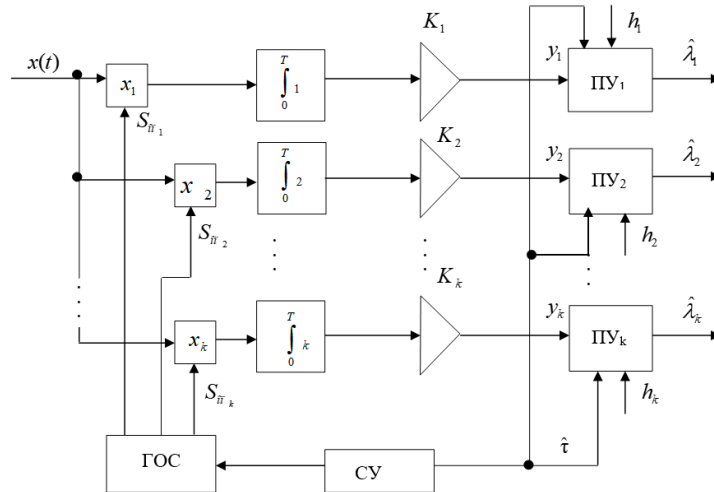


Рисунок 2.58 – Структура оптимального разрешения – разделения k известных сигналов

Структуры (рисунки 2.57, 2.58) получены для разрешения известных сигналов. При разрешении сигналов с неизвестными начальными фазами структура обработки соответствует рисунку 2.59.

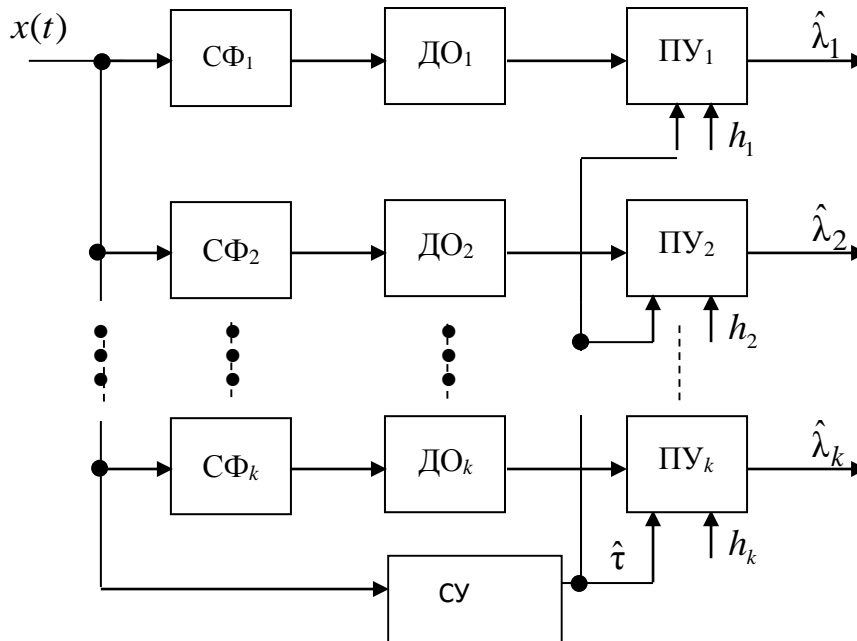


Рисунок 2.59 – Структура оптимального разрешения – разделения k радиосигналов с неизвестными начальными фазами

Если разрешаемые сигналы взаимно ортогональны и имеют одинаковые энергии, то импульсный отклик каждого согласованного фильтра имеет вид

$$g_i(t) = c \frac{S_i(T-t)}{E}, \quad (2.263)$$

а характеристики обнаружения строятся исходя из выражения

$$P_{\text{по}} = \Phi\left[\sqrt{\frac{2E}{N_0}} - \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{P_{\text{лт}}}\right)}\right]. \quad (2.264)$$

Задача разрешения – измерения характерна для радиолокационных систем, когда отраженные сигналы от множества объектов наблюдения требуется разрешить по одному или нескольким параметрам: дальности, радиальной скорости, угловым координатам.

При разрешении по дальности отраженные сигналы имеют одинаковые формы и отличаются временной задержкой. Пусть $S(t)$ и $S(t-\tau)$ – сигналы, отраженные от двух объектов, находящихся на разных дальностях от точки наблюдения. Воспользуемся геометрической интерпретацией расстояния между этими сигналами для гильбертова пространства:

$$d = \sqrt{\int_0^T [S(t) - S(t-\tau)]^2 df} = \sqrt{2E[1 - \rho(\tau)]}, \quad (2.265)$$

где E – энергия сигнала; $\rho(\tau) = 1/E \int_0^T S(t) \cdot S(t-\tau) dt$ – нормированная автокорреляционная функция сигнала.

Выражение (2.265) удобно представить в следующем виде:

$$d^2 = 2E[1 - \rho(\tau)]. \quad (2.266)$$

Из (2.266) следует, что разрешение по времени зависит от вида автокорреляционной функции (АКФ) сигнала и, в частности, определяется шириной основного пика АКФ или временем корреляции (τ_k).

Интервал времени, в пределах которого сигналы считаются неразрешенными, называют интервалом неопределенности – τ_H :

$$\tau_H = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) d\tau = \tau_k. \quad (2.267)$$

Наименьшим интервалом неопределенности, а следовательно, наилучшей разрешающей способностью по временной задержке обладают сложные сигналы.

Аналогичным образом можно показать, что интервал неопределенности смещения частоты определяется выражением

$$\Omega_H = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\Omega) d\Omega, \quad (2.268)$$

где $\rho(\Omega) = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot S[j(\omega - \Omega)] d\omega$ – нормированная функция частотной корреляции; $S(j\omega)$ – спектральная функция принимаемого сигнала.

Из (2.268) следует, что наилучшей разрешающей способностью по смещению частоты обладают протяженные сигналы.

При совместной оценке разрешения сигналов по временной задержке и смещению частоты

$$S_1(t) = S(t) = S_0(t) \exp(j\omega_0 t),$$

$$S_2(t) = S(t, \tau, \Omega) = S_0(t - \tau) \exp[j(\omega_0 - \Omega)t]$$

эквивалентный интервал неопределенности Δ_n определяется следующим выражением:

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau, \Omega) d\tau d\Omega, \quad (2.269)$$

где

$$|\rho(\tau, \Omega)| = \frac{1}{2E} \left| \int_0^1 S_0(t) \cdot S_0(t - \tau) \exp(-j\Omega t) dt \right| \quad (2.270)$$

функция неопределенности сигнала (модуль нормированной двумерной автокорреляционной функции).

Эквивалентный интервал неопределенности (2.269) – это сечение тела неопределенности (2.270) горизонтальной плоскостью на уровне 0,5. Он соответствует области сильной корреляции и называется диаграммой неопределенности (ДН). Вид ДН сигнала позволяет дать оценку разрешений по временной задержке и смещению частоты, а следовательно, определить разрешающие способности по дальности и радиальной скорости.

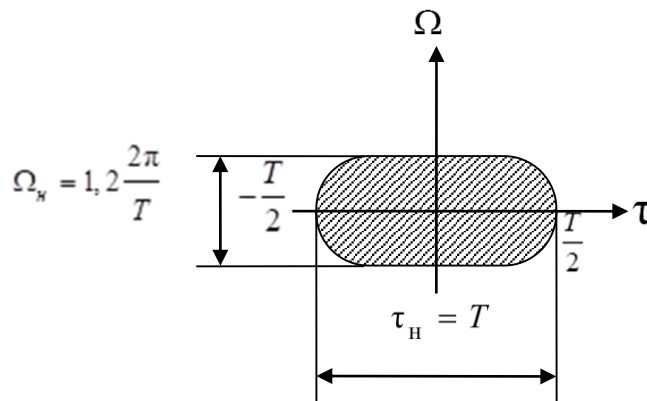


Рисунок 2.60 – Диаграмма неопределенности прямоугольного импульса

На рисунке 2.60 приведена ДН прямоугольного импульса длительностью T . Вид ДН вытекает из аналитического описания функции неопределенности прямоугольного импульса:

$$|\rho(\tau, \Omega)| = \left| \frac{\sin \left[\frac{\Omega}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) T \right]}{\frac{\Omega T}{2}} \right|, \quad |\tau| \leq T. \quad (2.271)$$

Из рисунка 2.60 можно получить потенциальные разрешающие способности по дальности и радиальной скорости:

$$\begin{aligned} \delta D &= 0,5c \cdot \tau_H = 0,5 \cdot c \cdot T, \\ \delta V_r &= 0,5 \cdot \frac{c}{f_0} \cdot \frac{\Omega_H}{2\pi} = 0,6 \cdot \frac{\lambda}{T}, \end{aligned} \quad (2.272)$$

где c – скорость распространения электромагнитных колебаний; $\lambda = \frac{c}{f_0}$ – длина волны электромагнитного колебания.

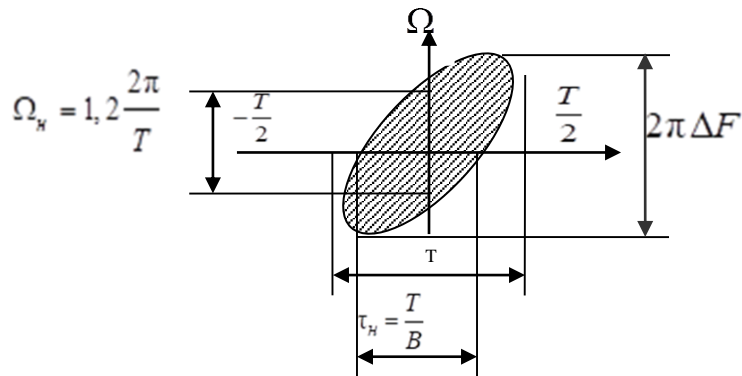


Рисунок 2.61 – Диаграмма неопределенности ЛЧМ-сигнала

На рисунке 2.61 представлена ДН сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигнала). Аналитическое описание функции неопределенности ЛЧМ-сигнала с девиацией частоты ΔF [9]

$$|\rho(\tau, \Omega)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) \frac{\sin 0,5 \left(\frac{2\pi\Delta F}{T} - \Omega \right) (T - |\tau|)}{0,5 \left(\frac{2\pi\Delta F\tau}{T} - \Omega \right) (T - |\tau|)} \right|. \quad (2.273)$$

Из рисунка 2.61 следует: интервал неопределенности по времени $\tau_H = T/B$, где $B = \Delta F \cdot T$ – база ЛЧМ-сигнала, интервал неопределенности по частоте $\Omega_H = 1,2 \cdot \frac{2\pi}{T}$. Соответственно, разрешающие способности по дальности и радиальной скорости для сложного сигнала

$$\delta D = 0,5 \cdot cT/B,$$

$$\delta V_r = 0,6 \cdot \lambda / T. \quad (2.274)$$

Следовательно, применение сложных сигналов в базу раз улучшает разрешающую способность по дальности, не ухудшая разрешение по радиальной скорости.

В радиолокации решение часто принимается по анализу пачки отраженных импульсов длительностью T с периодом следования T_{Π} .

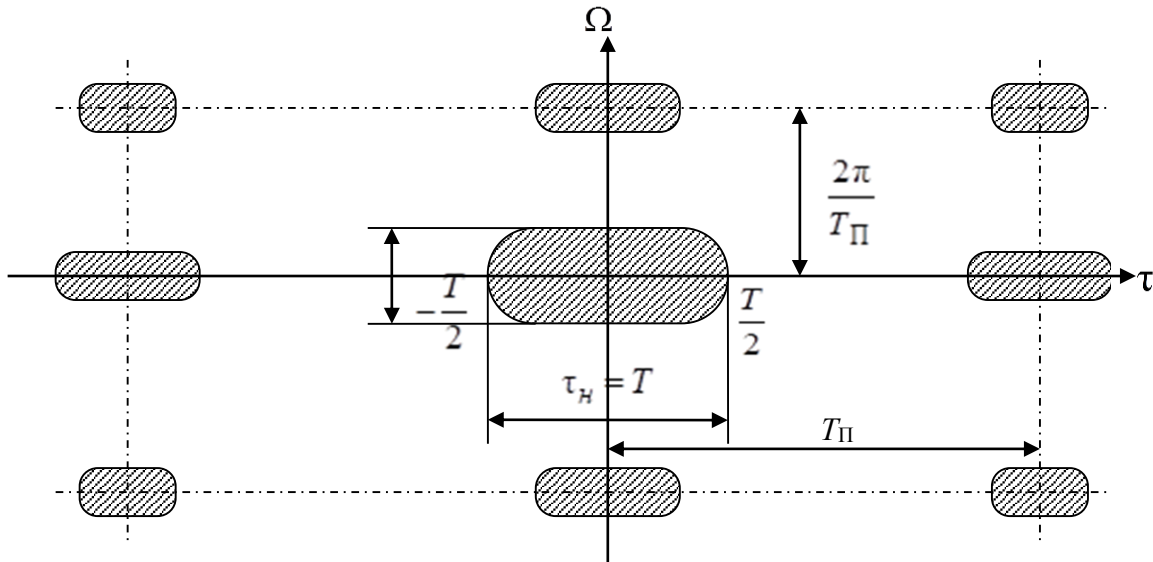


Рисунок 2.62 – Диаграмма неопределенности для пачки из N импульсов

На рисунке 2.62 приведена ДН для пачки из N импульсов. Из него следует: интервал неопределенности по времени $\tau_H = T$, интервал неопределенности

по частоте $\Omega_H = 1,2 \cdot \frac{2\pi}{NT_{\Pi}}$. Выражения для разрешения по дальности и радиальной скорости при обработке пакета из N импульсов с периодом следования T_{Π} примут вид $\delta D = 0,5 \cdot T \cdot C$,

$$\delta V_r = 0,6 \cdot \frac{\lambda}{NT_{\Pi}}. \quad (2.275)$$

Анализ (2.275) показывает, что обработка пакета из N импульсов может существенно повысить разрешающую способность по радиальной скорости, не ухудшая разрешение по дальности. Однако следует учесть, что при обработке пакета из N импульсов возможна неоднозначность в оценках дальности и радиальной скорости.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Перечислите основные задачи оптимальных методов приема радиосигналов.
2. Дайте определение апостериорной вероятности.
3. Приведите критерии оптимального радиоприема.
4. Дайте определение оптимальному линейному фильтру (критерий минимума среднеквадратичной ошибки).
5. Дайте определение оптимальному согласованному фильтру.
6. Дайте сравнительную характеристику коррелятору и согласованному фильтру.
7. Приведите примеры реализации согласованных фильтров (СФ) для видеоимпульса и радиоимпульса.
8. Приведите примеры реализации согласованных фильтров (СФ) для цифрового видеосигнала.
9. Приведите структурную схему обнаружителя известного сигнала.
10. Каковы характеристики обнаружителя известного сигнала?
11. Приведите структурную схему обнаружителя сигнала с неизвестной начальной фазой.
12. Каковы характеристики обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой?
13. Приведите структурную схему обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой и флюктуирующей амплитудой.
14. Каковы характеристики обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой и флюктуирующей амплитудой?
15. Приведите структуры обнаружителей радиосигналов на согласованных фильтрах. Дайте сравнительную характеристику структур.
16. Приведите структурную схему обнаружителя когерентной пачки радиоимпульсов.
17. Каковы характеристики обнаружителя когерентной пачки радиоимпульсов?
18. Приведите структурную схему обнаружителя некогерентной пачки радиоимпульсов.
19. Каковы характеристики обнаружителя некогерентной пачки радиоимпульсов?
20. Каковы особенности обнаружения сложного радиосигнала?
21. Приведите структурную схему оптимального различителя двух известных радиосигналов.
22. Какова количественная оценка качества различения двух известных радиосигналов?
23. Приведите структурную схему оптимального различителя m известных радиосигналов.
24. Какова количественная оценка качества различения m известных радиосигналов?

25. Приведите структурную схему оптимального различения двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами.
26. Какова количественная оценка качества различения двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами?
27. Приведите структурную схему оптимального различения m радиосигналов с неизвестными начальными фазами.
28. Какова количественная оценка качества различения m радиосигналов с неизвестными начальными фазами?
29. Структуры оптимальных различителей радиосигналов на согласованных фильтрах. Дайте сравнительную характеристику структурам.
30. Приведите структурную схему оптимальной оценки амплитуды известного радиосигнала. Какова ошибка измерения?
31. Приведите структурную схему оптимальной оценки амплитуды радиосигнала с неизвестной начальной фазой. Какова ошибка измерения?
32. Каковы особенности оптимальной оценки неэнергетических параметров радиосигнала?
33. Приведите структурную схему оптимальной оценки фазы радиосигнала. Какова ошибка измерения?
34. Приведите структурную схему оптимальной оценки временной задержки радиосигнала. Какова ошибка измерения?
35. Приведите структурную схему оптимальной оценки смещения частоты радиосигнала. Какова ошибка измерения?
36. Особенности оптимальной оценки параметров сложного сигнала.
37. Особенности совместной оценки временной задержки и смещения частоты.
38. Оптимальная фильтрация сообщений. Постановка задачи. Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова. Уравнения фильтрации.
39. Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана (синтез фильтра).
40. Фильтр Калмана. Дисперсия ошибки измерения фильтром.
41. Оптимальный линейный фильтр амплитудно-модулированного радиосигнала.
42. Оптимальная нелинейная фильтрация. Фильтрация фазы узкополосного сигнала.
43. Оптимальное разрешение сигналов. Постановка задачи разрешение – разделение.
44. Оптимальное разрешение – измерение. Раздельная и совместная разрешающие способности по времени и частоте.
45. Разрешающая способность по угловым координатам.
46. Роль функции неопределенности в задачах разрешения – измерения.
47. Сложные сигналы в задачах разрешения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТИ $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$

Таблица А.1 – Интеграл вероятности

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5795	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7323	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8921
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9065	0,9082	0,9099	0,9114	0,9130	0,9146	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9250	0,9264	0,9278	0,9292	0,9305	0,9318
1,5	0,9331	0,9344	0,9357	0,9369	0,9382	0,9394	0,9406	0,9317	0,9429	0,9440
1,6	0,9452	0,9463	0,9573	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9544
1,7	0,9554	0,9563	0,9572	0,9581	0,9590	0,9599	0,9608	0,9616	0,9624	0,9632
1,8	0,9640	0,9648	0,9656	0,9663	0,9671	0,9678	0,9685	0,9692	0,9655	0,9706
1,9	0,9712	0,9719	0,9725	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9755	0,9751	0,9767
2,0	0,9772	0,9777	0,9783	0,9782	0,9793	0,9798	0,9803	0,9807	0,9812	0,9816
2,1	0,9821	0,9825	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9853	0,9857
2,2	0,9861	0,8964	0,9867	0,9871	0,9874	0,9877	0,9880	0,9884	0,9887	0,9889
2,3	0,9892	0,9895	0,9898	0,9 ² 00	0,9 ² 03	0,9 ² 06	0,9 ² 08	0,9 ² 11	0,9 ² 13	0,9 ² 15
2,4	0,9 ² 18	0,9 ² 20	0,9 ² 22	0,9 ² 24	0,9 ² 26	0,9 ² 28	0,9 ² 30	0,9 ² 32	0,9 ² 34	0,9 ² 36
2,5	0,9 ² 37	0,9 ² 39	0,9 ² 41	0,9 ² 42	0,9 ² 44	0,9 ² 46	0,9 ² 47	0,9 ² 49	0,9 ² 50	0,9 ² 52
2,6	0,9 ² 53	0,9 ² 54	0,9 ² 56	0,9 ² 57	0,9 ² 58	0,9 ² 59	0,9 ² 60	0,9 ² 62	0,9 ² 63	0,9 ² 64
2,7	0,9 ² 65	0,9 ² 66	0,9 ² 67	0,9 ² 68	0,9 ² 69	0,9 ² 70	0,9 ² 71	0,9 ² 71	0,9 ² 72	0,9 ² 73
2,8	0,9 ² 74	0,9 ² 75	0,9 ² 75	0,9 ² 76	0,9 ² 77	0,9 ² 78	0,9 ² 78	0,9 ² 79	0,9 ² 80	0,9 ² 80
2,9	0,9 ² 81	0,9 ² 81	0,9 ² 82	0,9 ² 83	0,9 ² 83	0,9 ² 84	0,9 ² 84	0,9 ² 85	0,9 ² 85	0,9 ² 86
3,0	0,9 ² 86	0,9 ² 86	0,9 ² 87	0,9 ² 87	0,9 ² 88	0,9 ² 88	0,9 ² 88	0,9 ² 89	0,9 ² 89	0,9 ² 89
3,1	0,9 ³ 03	0,9 ³ 06	0,9 ³ 09	0,9 ³ 12	0,9 ³ 15	0,9 ³ 18	0,9 ³ 21	0,9 ³ 23	0,9 ³ 26	0,9 ³ 28
3,2	0,9 ³ 31	0,9 ³ 33	0,9 ³ 35	0,9 ³ 38	0,9 ³ 40	0,9 ³ 42	0,9 ³ 44	0,9 ³ 46	0,9 ³ 48	0,9 ³ 49
3,3	0,9 ³ 51	0,9 ³ 53	0,9 ³ 54	0,9 ³ 56	0,9 ³ 58	0,9 ³ 59	0,9 ³ 61	0,9 ³ 62	0,9 ³ 63	0,9 ³ 65
3,4	0,9 ³ 66	0,9 ³ 67	0,9 ³ 68	0,9 ³ 69	0,9 ³ 70	0,9 ³ 71	0,9 ³ 72	0,9 ³ 73	0,9 ³ 74	0,9 ³ 75
3,5	0,9 ³ 76	0,9 ³ 77	0,9 ³ 78	0,9 ³ 79	0,9 ³ 79	0,9 ³ 80	0,9 ³ 81	0,9 ³ 82	0,9 ³ 82	0,9 ³ 83
3,6	0,9 ³ 84	0,9 ³ 84	0,9 ³ 85	0,9 ³ 85	0,9 ³ 86	0,9 ³ 86	0,9 ³ 87	0,9 ³ 87	0,9 ³ 88	0,9 ³ 88
3,7	0,9 ³ 89	0,9 ³ 89	0,9 ⁴ 00	0,9 ⁴ 04	0,9 ⁴ 07	0,9 ⁴ 11	0,9 ⁴ 15	0,9 ⁴ 18	0,9 ⁴ 21	0,9 ⁴ 24
3,8	0,9 ⁴ 27	0,9 ⁴ 30	0,9 ⁴ 33	0,9 ⁴ 35	0,9 ⁴ 38	0,9 ⁴ 40	0,9 ⁴ 43	0,9 ⁴ 45	0,9 ⁴ 47	0,9 ⁴ 49
3,9	0,9 ⁴ 51	0,9 ⁴ 53	0,9 ⁴ 55	0,9 ⁴ 57	0,9 ⁴ 59	0,9 ⁴ 60	0,9 ⁴ 62	0,9 ⁴ 64	0,9 ⁴ 65	0,9 ⁴ 66
4,0	0,9 ⁴ 68	0,9 ⁴ 69	0,9 ⁴ 70	0,9 ⁴ 72	0,9 ⁴ 73	0,9 ⁴ 74	0,9 ⁴ 75	0,9 ⁴ 76	0,9 ⁴ 77	0,9 ⁴ 78
4,1	0,9 ⁴ 79	0,9 ⁴ 80	0,9 ⁴ 81	0,9 ⁴ 81	0,9 ⁴ 82	0,9 ⁴ 83	0,9 ⁴ 84	0,9 ⁴ 84	0,9 ⁴ 85	0,9 ⁴ 86
4,2	0,9 ⁴ 86	0,9 ⁴ 87	0,9 ⁴ 87	0,9 ⁴ 88	0,9 ⁴ 88	0,9 ⁴ 89	0,9 ⁴ 89	0,9 ⁵ 02	0,9 ⁵ 06	0,9 ⁵ 10
4,3	0,9 ⁵ 14	0,9 ⁵ 18	0,9 ⁵ 21	0,9 ⁵ 25	0,9 ⁵ 28	0,9 ⁵ 31	0,9 ⁵ 34	0,9 ⁵ 37	0,9 ⁵ 40	0,9 ⁵ 43

Продолжение таблицы А.1

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,4	0,9 ⁵ 45	0,9 ⁵ 48	0,9 ⁵ 50	0,9 ⁵ 52	0,9 ⁵ 55	0,9 ⁵ 57	0,9 ⁵ 59	0,9 ⁵ 60	0,9 ⁵ 62	0,9 ⁵ 64
4,5	0,9 ⁵ 66	0,9 ⁵ 67	0,9 ⁵ 69	0,9 ⁵ 70	0,9 ⁵ 71	0,9 ⁵ 73	0,9 ⁵ 74	0,9 ⁵ 75	0,9 ⁵ 76	0,9 ⁵ 77
4,6	0,9 ⁵ 78	0,9 ⁵ 79	0,9 ⁵ 80	0,9 ⁵ 81	0,9 ⁵ 82	0,9 ⁵ 83	0,9 ⁵ 84	0,9 ⁵ 84	0,9 ⁵ 85	0,9 ⁵ 86
4,7	0,9 ⁵ 86	0,9 ⁵ 87	0,9 ⁵ 88	0,9 ⁵ 88	0,9 ⁵ 89	0,9 ⁵ 89	0,9 ⁶ 03	0,9 ⁶ 07	0,9 ⁶ 12	0,9 ⁶ 16
4,8	0,9 ⁶ 20	0,9 ⁶ 24	0,9 ⁶ 28	0,9 ⁶ 31	0,9 ⁶ 35	0,9 ⁶ 38	0,9 ⁶ 41	0,9 ⁶ 44	0,9 ⁶ 46	0,9 ⁶ 49
4,9	0,9 ⁶ 52	0,9 ⁶ 54	0,9 ⁶ 56	0,9 ⁶ 58	0,9 ⁶ 60	0,9 ⁶ 62	0,9 ⁶ 64	0,9 ⁶ 66	0,9 ⁶ 68	0,9 ⁶ 69

Перечень сокращений

АКФ – автокорреляционная функция
АИМ – амплитудно-импульсная модуляция
АМ – амплитудная модуляция
В – база сигнала
БМ – балансный модулятор
ГТИ – генератор тактовых импульсов
ГПСП – генератор ПС
ОГ – опорный генератор
ДФМ – дискретная фазовая модуляция
ЛРП – линейная рекуррентная последовательность
ЧКП – четверично-кодированная последовательность
ФТИ – формирова́тель тактовых импульсов
ДСЧ – двоичный счетчик
СЧ – синтезатор частот
ФНП – формирова́тель нулевой последовательности
КН – коммутатор номера
ПС- – псевдослучайный сигнал
ЛФ – линейный фильтр
ПСП – псевдослучайная последовательность
РС ПИ – радиосистема передачи информации
СФ – согласованный фильтр
УМ – угловая модуляция
ФНЧ – фильтр нижних частот
АИМ – амплитудно-импульсная модуляция
ШИМ – широтно-импульсная модуляция
ФИМ – фазоимпульсная модуляция
КИМ – кодоимпульсная модуляция
ЧИМ – частотно-импульсная модуляция
ЗИМ – зигзагообразная модуляция
РС – радиосистема
ЧМ – частотная модуляция
ФМ – фазовая модуляция
ВКФ – функция взаимной корреляции
ФН – функция неопределенности
ОУ – операционный усилитель
УС – устройство сравнения
СУ – синхронизирующее устройство
ПУ – пороговое устройство
ОГ – опорный генератор
ДО – детектор огибающей
КВ – квадратор
РИ – радиоинтегратор

КД – квадратичный детектор
КН – когерентный накопитель
Н – накопитель
ПФ – полосовой фильтр
ЭУ– элемент управления
ЧД– частотный дискриминатор
НФ– нелинейный фильтр
ДН– диаграмма неопределенности

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лезин, Ю. С. Введение в теорию и технику радиотехнических систем : учеб. пособие / Ю. С. Лезин. – М. : Радио и связь, 1986.
2. Тузов, Г. И. Статистическая теория приема сложных сигналов / Г. И. Тузов – М. : Сов. радио, 1977.
3. Кук, Ч. Радиолокационные сигналы / Ч. Кук, М. Бернфельд. – М. : Сов. радио, 1971.
4. Теория и применение псевдослучайных сигналов / А. И. Алексеев [и др.] – М. : Наука, 1969.
5. Карпушкин, Э. М. Генерирование четверичных последовательностей / Э. М. Карпушкин // Известия АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. – 1975.– № 3.
6. Карпушкин, Э. М. Анализ автокорреляционных функций Д-кодов / Э. М. Карпушкин // Известия АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. – 1973.– № 3.
7. Карпушкин, Э. М. Особенности функции неопределенности четверично-кодированных сигналов / Э. М. Карпушкин // Межвузовский тематический сборник научных трудов: сб. тр. / МЭИ. – 1986. – № 107.
8. Котельников, В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости / В. А. Котельников. – М. : Госэнергоиздат, 1958.
9. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника : учеб. пособие / В. И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982.
10. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов : учеб. пособие / В. И. Тихонов.– М. : Радио и связь, 1983.
11. Радиотехнические системы : учеб. пособие / Ю. М. Казаринов [и др.] ; под ред. Ю. М. Казаринова. – М. : Высш. шк., 1990.
12. Чердынцев, В. А. Радиотехнические системы : учеб. пособие / В. А. Чердынцев. – Минск : Выш. шк., 1988.
13. Тихонов, В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем : учеб. пособ / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. – М. : Радио и связь, 1991.
14. Охрименко, А. Е. Основы извлечения, обработки и передачи информации : учеб. пособие. Ч. 1 – 3 / А. Е. Охрименко. – Минск : БГУИР, 1994, 1995.
15. Информационные технологии в радиотехнических системах : учеб. пособие / под ред. И. Б. Фёдорова. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.
16. Карпушкин, Э. М. Основы теории радиотехнических систем : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. Ч. 1 / Э. М. Карпушкин. – Минск : МРТИ, 1993.
17. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн ; пер. с англ. – М. : Наука, 1968.

Учебное издание

Карпушкин Эдуард Михайлович

ТЕОРИЯ РАДИОСИСТЕМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 18.09.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 10,12. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ 30.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск