УДК 514.76

ТРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С НЕСОВЕРШЕННОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ

Н. П. Можей
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники

Целью данной работы является описание несовершенных алгебр голономии аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах, а также самих однородных пространств, допускающих алгебры голономии указанного вида. Для трехмерных однородных пространств определено, при каких условиях алгебра голономии нетривиальной аффинной связности с нулевым кручением не является совершенной. Также найдены и выписаны в явном виде сами аффинные связности, тензоры кривизны и алгебры голономии, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств. Исследования основаны на применении свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят в основном локальный характер. Полученные в работе результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики.

Ключевые слова: аффинная связность, однородное пространство, тензор кривизны, алгебра голономии, тензор кручения.

Введение

Трехмерными геометриями занимались еще Г. Риман, Ф. Клейн, Н. И. Лобачевский и др., последние годы интерес к этой тематике возобновился в связи с развитием других областей науки, например, общей теории относительности и трехмерной топологии. После работ Э. Картана (например, [1]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии является понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии, которая может быть описана через группу Ли – группу голономии. Первое упоминание о голономии (в классической механике) датируется 1895 годом и принадлежит Г. Герцу, в математических работах понятие голономии возникло в 1923 году у Э. Картана применительно к римановым многообразиям, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная геометрия. Анализ групп голономии и их приводимости для естественно редуктивных однородных пространств и произвольных римановых однородных пространств проведен Б. Костантом, например, в [2]. Исследования структуры кривизны многообразий с совершенной группой голономии (т.е. вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны) проводились, например, в работе [3] и других работах этого автора. Алгебры голономии нетривиальных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах исследовались в [4], в данной работе изучается, при каких условиях группа голономии не является совершенной, рассматривается случай инвариантных аффинных связностей без кручения.

Основная часть

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – *однородное пространство*, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [5]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии (например, [6]) с аффинными связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). *Тензоры кручения* $T \in InvT_2^{\ 1}(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R \in InvT_3^{\ 1}(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Тензор Риччи имеет вид $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\ \mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$.

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [7] об алгебре группы голономии инвариантной связности: *алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x); x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Основное свойство $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ таково: пусть $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, тогда $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

Многообразие обладает *совершенной группой голономии*, если алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны. В противном случае будем называть группу голономии *несовершенной*.

Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись *d.n*, а для нумерации пар – запись *d.n.m*, соответствующие приведенным в [4], где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары. Связность называется *тривиальной*, если $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$, в противном случае связность *нетривиальная*. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Предполагается, что параметры обозначены греческими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Трехмерные однородные пространства, допускающие нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и несовершенной алгеброй голономии, локально имеют следующий вид:*

2.8.7, λ=1/2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/2)e_1$	e_1	0	u_1
e_2	$-(1/2)e_1$	0	0	u_2	$(1/2)u_3$
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-(1/2)u_3$	$-u_3$	0	0

3.13.6, μ=1/2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_2$	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$(1/2)e_2$	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-(1/2)u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

4.21.11, μ=1/2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-(1/2)e_3$	$(1/2)e_4$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	e_2+u_1	0
e_3	$(1/2)e_3$	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2
e_4	$-(1/2)e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	e_2+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-e_2-u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_2$	$-e_2-u_1$	0	$2u_3$	0

3.20.27	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

Замечание. В случае 3.20.27 $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, а в остальных случаях нет.

Действительно, заметим, что если кривизна нулевая, то алгебра голономии также нулевая, т.е. будем рассматривать случай ненулевой кривизны. Случай алгебр голономии тривиальных связностей изучался в работах [8, 9], поэтому рассматриваем только нетривиальные связности. Для каждой подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ найдены изотропно-точные пары, инвариантные аффинные связности на них и определены пары, допускающие нетривиальную аффинную связность с несовершенной алгеброй голономии (причем только с нулевым кручением).

Рассмотрим, например, локально однородное пространство 3.13.6 при $\mu = 1/2$, тогда

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны $R(u_1,u_2)=R(u_1,u_3)=0$,

$$R(u_2,u_3)=\left[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)\right]-\Lambda(\left[u_2,u_3\right])=\begin{pmatrix}0&0&-3r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения получился нулевым, как и тензор Риччи.

Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$, при $r_{1,3}\neq 0$ $\mathfrak{h}^*$ не совпадает с алгеброй, порожденной множеством $V=\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$ (т. е. алгебра голономии не является совершенной), $\mathfrak{h}^*=\begin{pmatrix}0&p_1&p_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $p_1,p_2\in\mathbb{R}$. При $r_{1,3}\neq 0$ алгебра голономии нулевая.

Для остальных трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением (кривизна которой не только нулевая), рассуждения аналогичны.

Получаем, что аффинные связности имеют вид, указанный в таблице 1.

Таблица 1. – Аффинные связности

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Аффинная связность
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны найденных связностей имеют вид, приведенный в таблице 2.

Таблица 2. – Тензоры кривизны

Пара	Тензор кривизны
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3r_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Прямыми вычислениями получаем, что во всех указанных случаях тензоры Риччи нулевые. При этом тензоры кручения T также нулевые.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – *трехмерное однородное пространство, допускающее нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и несовершенной алгеброй голономии. Нссовершенные алгебры голономии инвариантных связностей на указанных пространствах имеют вид, приведенный в таблице 3.*

Таблица 3. – Совершенные алгебры голономии

Пара	Алгебра голономии ($p_1, p_2 \in \mathbb{R}$)
4.21.11, $\mu = 1/2$ и 3.13.6, $\mu = 1/2$ при $r_{1,3} \neq 0$, 3.20.27	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1/2$ при $r_{2,3} \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В случаях 4.21.11, $\mu = 1/2$, 3.13.6, $\mu = 1/2$ при $r_{1,3} = 0$, а в случае 2.8.7, $\lambda = 1/2$ при $r_{2,3} = 0$ алгебра голономии нулевая.

Заключение

Для трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность без кручения, определено, при каких условиях алгебра голономии не является совершенной, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств, отдельно выделены случаи неразрешимой и разрешимой группы преобразований. Исследования основаны на применении свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, в основном, локальный характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Cartan, E.*** La geometrie des espaces de Riemann / E. Cartan // Memorial des Sciences Math. – 1923. – V. 9. – 457 p.
2. ***Kostant, B.*** On differential geometry and homogeneous spaces / B. Kostant // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1956. – V. 42 (5). – P. 258–261.
3. ***Кайгородов, В. Р.*** Римановы пространства. Структура кривизны пространств типа A / В. Р. Кайгородов // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 117–127.
4. ***Можей, Н. П.*** Алгебры голономии нетривиальных связностей без кручения на трехмерных однородных пространствах / Н. П. Можей // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 13–22.

5. ***Kobayashi, S.*** Foundations of Differential Geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York–London, 1969. – Vol. 2. – 488 p

6. ***Nomizu, K.*** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.

7. ***Wang, H. C.*** On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No 3. – P. 1–19.

8. ***Можей, Н. П.*** Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 81–88.

9. ***Можей, Н. П.*** Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с разрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (114). – С. 170–177.

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.
Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. P. **THREE-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES WITH IMPERFECT HOLONOMY ALGEBRA**

The purpose of the work is the description of imperfect holonomy algebras of affine connections on three-dimensional homogeneous spaces, as well as the homogeneous spaces that admit connections of the specified type. For three-dimensional homogeneous spaces, it is determined under what conditions the holonomy algebra of nontrivial affine connection with zero torsion is not perfect. The affine connections, curvature tensors, and holonomy algebras are also found and written out explicitly, and the local classification of the corresponding three-dimensional homogeneous spaces is given. The studies are based on the application of properties of Lie algebras, Lie groups, and homogeneous spaces and they mainly have local character. The results obtained in this study can be applied in works on differential geometry, differential equations, topology, as well as in other areas of mathematics and physics.

Keywords: affine connection, homogeneous space, curvature tensor, holonomy algebra, torsion tensor.