УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

В работе рассматриваются трехмерные симметрические однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. Цель работы – описание всех таких пространств, не допускающих инвариантных эквиаффинных связностей. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, симметрическое пространство, каноническое разложение, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная связность. В основной части работы для трехмерных симметрических однородных пространств неразрешимых групп Ли определено, при каких условиях пространство не допускает эквиаффинных связностей. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах. Исследования основаны на применении свойств однородных пространств и структур на них и носят в основном локальный характер. Особенностью представленных методов является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них.

Ключевые слова: эквиаффинная связность, группа преобразований, симметрическое пространство, тензор кручения.

Для цитирования: Можей Н. П. Симметрические пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 20–23. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-4.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

SYMMETRIC SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS THAT DO NOT ADMIT EQUIAFFINE CONNECTIONS

The paper considers three-dimensional symmetric homogeneous spaces on which an unsolvable group of transformations with an unsolvable stabilizer acts. The purpose of this work is to describe all such spaces that do not admit invariant equiaffine connections. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, symmetric space, canonical decomposition, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. In the main part of the work for three-dimensional symmetric homogeneous spaces of unsolvable Lie groups, it is determined under what conditions the space does not admit equiaffine connections. The results can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are connected with the study of in-variant objects on homogeneous spaces. Studies are based on the application of properties of the homogeneous spaces and structures on them and they mainly have local character. The peculiarity of presented techniques is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and connections on them.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, symmetric space, torsion tensor.

For citation: Mozhey N. P. Symmetric spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 20–23. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-4 (In Russian).

Введение. Цель работы – описать трехмерные симметрические однородные пространства, не допускающие эквиаффинных связностей. Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении (см. [1]). Геодезическая симметрия относительно любой точки такого пространства есть автоморфизм, причем аффинная связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [2]. Трехмерные симметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором изучались в работе [3], разумеется, такое пространство всегда допускает аффинную связность. Аффинная связность является эквиаффинной, если позволяет параллельную форму объема (см. [4]). В данной работе определено, при каких условиях указанные пространства не допускают эквиаффинных связностей.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M,\ \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. *Симметрическое* пространство есть тройка ($\bar{G}$, G, σ), где σ – инволютивный автоморфизм, такой, что $\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}$, $g\in \bar{G}$, s_o – симметрия M, o – неподвижная точка s_o. Поскольку $M = \bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$ транзитивна), все симметрические пространства являются изотропно-точными. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Если $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1, то разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}+\mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для симметрической алгебры Ли ($\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$, σ), причем $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset \mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, такое, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, инвариантные аффинные связности на $(M,\bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [5]) со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если G эффективна на $\bar{G}/G$ [6], соответственно, симметрическое пространство всегда допускает аффинную связность. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. *Тензоры кручения* $T\in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R\in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])$$

для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T=0$. Определим тензор Риччи $Ric\in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y,z)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}])\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна [4].

Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\in\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\ldots,e_n,$ $u_1,u_2,u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n=\dim\mathfrak{g})$, причем алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\ldots,e_n$, а $\{u_1,u_2,u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в источнике [3], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Поскольку ограничение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Будем говорить, что связность *нулевая*, если $\Lambda(u_1)=$ $=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$. Тривиальную пару типа $d.n$ обозначаем $d.n.1$.

Теорема*. А) Любое трехмерное симметрическое тривиальное однородное пространство* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *такое, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *и* $\mathfrak{g}$ *неразрешимы, не допускающее эквиаффинных связностей, локально имеет вид* $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$, *где* $\mathfrak{g}$ *(подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$*) сопряжена только одной из следующих подалгебр:*

$$4.1.\ \boxed{\begin{matrix} x & z & \\ u & y & \\ & & \end{matrix}};\ 4.2.\ \boxed{\begin{matrix} \lambda x+y & z & \\ u & \lambda x-y & \\ & & x \end{matrix}},\ \lambda\neq-1/2;$$

$$4.3.\ \boxed{\begin{matrix} x+y & z & \\ u & x & z \\ & u & x-y \end{matrix}};\ 4.5.\ \boxed{\begin{matrix} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{matrix}};$$

$$5.1.\ \boxed{\begin{matrix} x & u & \\ v & y & \\ & & z \end{matrix}};\ 6.1.\ \boxed{\begin{matrix} x & z & w \\ u & y & v \\ & & \end{matrix}};$$

$$6.2.\ \boxed{\begin{matrix} \lambda x+y & z & w \\ u & \lambda x-y & v \\ & & x \end{matrix}},\ \lambda\neq-1/2;$$

$$6.3.\ \boxed{\begin{matrix} & v & w \\ & x & z \\ & y & u \end{matrix}};\ 6.4.\ \boxed{\begin{matrix} x & v & w \\ & \lambda x+y & z \\ & u & \lambda x-y \end{matrix}},\ \lambda\neq-1/2;$$

$$7.1.\ \boxed{\begin{matrix} x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \end{matrix}};\ 7.2.\ \boxed{\begin{matrix} x & w & t \\ & y & u \\ & v & z \end{matrix}}.$$

Также при $\dim\mathfrak{g}=9$ *подалгебра* $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$.

Б) Любое трехмерное симметрическое нетривиальное однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *такое, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *и* $\mathfrak{g}$ *неразрешимы, не допускающее эквиаффинных связностей, локально эквивалентно одному и только одному из следующих пространств:*

6.1.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_5
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	e_6
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_5$	$-e_6$	0

,

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

.

Здесь подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра λ не сопряжены друг другу; если на параметры не накладываются дополнительные условия, то предполагается, что они пробегают все $\mathbb{R}$, также предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

В работе [3] приведен список трехмерных симметрических однородных пространств, таких, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, соответственно, для доказательства этой теоремы достаточно выбрать из них пары, не допускающее эквиаффинных связностей.

Рассмотрим, например, $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – трехмерное симметрическое однородное пространство 6.1.1 (или 6.1.2, 6.1.3), тогда инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j}\in\mathbb{R}$ $(i,j=1,2,3)$. В случае 6.1.2 тензор кривизны примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^{\ 2}-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^{\ 2}-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

А в случае 6.1.3 – вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^{\ 2}+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^{\ 2}+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения –

$$(0,0,0),\left(-p_{1,3}+r_{1,1},0,0\right),\left(0,-p_{1,3}+r_{1,1},0\right).$$

Алгебра голономии инвариантной связности на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\,|\,x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$. Алгебры голономии указанных связностей в случаях 6.1.2 при $p_{1,3}^{\ 2}\neq1$ (при $p_{1,3}^{\ 2}=1$ алгебра голономии нулевая) и 6.1.3 имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $T=0$ (Λ является связностью без кручения), то $r_{1,1}=p_{1,3}$. Имеем $\operatorname{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$, тензор Риччи является симметрическим, то есть связность вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$$

является локально эквиаффинной. Однако, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda(e_4) \neq 0$, то есть $\Lambda(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$, связность не является эквиаффинной.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. В случаях 4.2.1, 4.3.1, 4.5.1, 5.1.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1, 7.1.1, 7.2.1, 9.1.1 локально эквиаффинная связность (без кручения) тривиальная, а в случае 4.1.1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, в случаях 4.2.1 ($\lambda = -1 / 2$), 6.2.1 ($\lambda = -1 / 2$), 6.4.1 ($\lambda = -1 / 2$) эквиаффинная связность тривиальная, в остальных случаях, приведенных в теореме, пространство не допускает эквиаффинных связностей, поскольку даже $\Lambda(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Заключение. Таким образом, для всех трехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором определено, при каких условиях пространство не допускает эквиаффинных связностей. Полученные результаты могут найти приложение в общей теории относительности (которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств), в ядерной физике и физике элементарных частиц, а также при конструировании математических моделей реальных процессов.

Список литературы

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Моск. ун-т, 1960. 307 с.
2. Широков П. А. Симметрические пространства первого класса // Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. С. 366–383.
3. Можей Н. П. Симметрические однородные пространства неразрешимых групп Ли и связности на них // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя B, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. 2018. № 2 (52). С. 15–23.
4. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry.Cambidge: Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76, no. 1. P. 33–65.
6. Kobayashi S. Transformation groups in differential geometry. Berlin; Heidelberg; New York: Springer: Verlag, 1972. 182 p.

References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p. (In Russian).
2. Shirokov P.A. Symmetric spaces of the first class. *Izbrannyye raboty po geometrii* [Selected works on geometry]. Kazan, Kazanskiy universitet Publ., 1966, pp. 366–383 (In Russian).
3. Mozhey N. P. Symmetric homogeneous spaces of unsolvable Lie groups and connections on them. [Bulletin of the Mogilev State University named A. A. Kuleshov], series B, Natural sciences: mathematics, physics, biology, 2018, no. 2 (52), pp. 15–23 (In Russian).
4. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math.*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.
6. Kobayashi S. Transformation groups in differential geometry. Berlin; Heidelberg; New York, Springer: Verlag Publ., 1972. 182 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 27.12.2022