Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

Введение в анализ.
Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Методическое пособие
для проведения практических занятий по высшей математике
для инженерно-технических специальностей
всех форм обучения

Минск БГУИР 2011

УДК [517.1+517.2](076.5)

ББК 22.161я73
В24

А в т о р ы :
В. В. Цегельник, Л. А. Конюх, Н. И. Кобринец,
Г. И. Амелькина, Л. К. Юхо

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой физико-математических дисциплин
Института информационных технологий Белорусского государственного
университета информатики и радиоэлектроники,
кандидат физико-математических наук, доцент Майсеня Л.И.

В24 **Введение** в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: метод. пособие для проведения практич. занятий по высшей математике для инженерно-технических специальностей всех форм обучения / В. В. Цегельник [и др.] – Минск : БГУИР, 2011. – 74 с.
ISBN 978-985-488-727-2

В пособии изложены методы решения задач математического анализа по разделам, традиционно изучаемым в 1-м семестре. Предлагаются контрольные работы и задачи для самостоятельного решения. Пособие входит в состав единого методического комплекса вместе со сборниками задач:

1. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч.3 : Введение в анализ / Н. Н. Третьякова, Т. М. Пушкарева, О. Н. Малышева. – Минск : БГУИР, 2005. – 116 с.

2. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч.4 : Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2006. – 106 с.

УДК [517.1+517.2](076.5)

ББК 22.161я73

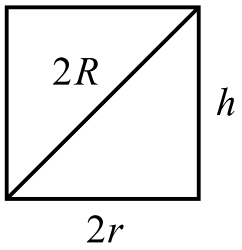
ISBN 978-985-488-727-2

Занятие 1

Функции и их графики. Метод математической индукции

Понятие функции, область определения и область изменения, ограниченность, монотонность, четность, нечетность, периодичность, суперпозиция, график функции. Метод математической индукции

Пример 1. Выразить объем цилиндра, вписанного в шар радиуса R, как функцию его высоты h. Найти область определения этой функции.



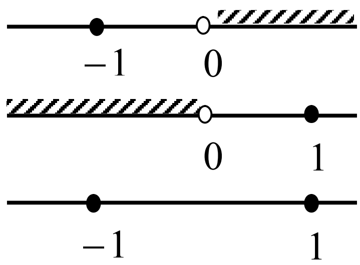
Δ Объем V цилиндра с радиусом основания r равен $\pi r^2 h$. По теореме Пифагора $h^2+4r^2=4R^2$, следовательно, $V(h)=\pi h\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)$. Из геометрического смысла задачи следует, что $0<h<2R$. ▲

Пример 2. Найти область определения функции $y=\log_3\log_4\log_5 x$.

Δ $\log_4\log_5 x>0 \Leftrightarrow \log_5 x>1 \Leftrightarrow x>5,\ \ x\in(5,+\infty)$. ▲

Пример 3. Найти область определения функции $y=\arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$.

$$\Delta\ \begin{cases}\dfrac{1+x^2}{2x}\ge -1,\\[2mm] \dfrac{1+x^2}{2x}\le 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1}{2x}\ge 0,\\[2mm] \dfrac{x^2-2x+1}{2x}\le 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{x}\ge 0,\\[2mm] \dfrac{(x-1)^2}{x}\le 0.\end{cases}$$



$x\in\{-1;1\}$, т. е. область определения функции состоит из двух точек: $x=-1$ и $x=1$. ▲

Пример 4. Найти область значений функции $y=3x^2+6x+7$.

Δ $3x^2+6x+7=3(x+1)^2+4$. Отсюда следует, что наименьшее значение данной функции равно 4, и принимается это значение в точке $x=-1$. Наибольшего значения функция не имеет. $y\in[4;+\infty)$. ▲

Пример 5. Найти область значений функции $y=1+\cos 2x+\sin x+\sin^2 x$.

Δ $1+\cos 2x+\sin x+\sin^2 x=2-2\sin^2 x+\sin x+\sin^2 x=2+\sin x-\sin^2 x=$ $=-\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$. Отсюда следует, что наименьшее значение данной функции равно 0 и оно достигается в тех точках x, где $\sin x=-1$. Наибольшее значение функции равно $\frac{9}{4}$ и оно достигается в тех точках, где $\sin x = \frac{1}{2}$, $y \in \left[0;\ \frac{9}{4}\right]$.

Пример 6. Найти область значений функции $y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$.

Δ Для каждого действительного a решим уравнение

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} = a \Leftrightarrow (a-1)\,x^2 + x + (a-2) = 0.$$

При $a = 1$ получаем, что $x = 1$, и тем самым $y(1) = 1$. При $a \neq 1$ $D = -4a^2 + 12a - 7 \geq 0$, откуда находим, что $\frac{3-\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. $y \in \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2};\ \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$. ▲

Пример 7. Доказать, что функция $y = 2^{\cos^2 x} + 3\sin x$ ограничена на множестве R.

Δ $\left|2^{\cos^2 x} + 3\sin x\right| \leq \left|2^{\cos^2 x}\right| + 3\left|\sin x\right| \leq 2 + 3 = 5$. Геометрически это означает, что график функции расположен внутри полосы $y = -5$ и $y = 5$. ▲

Пример 8. Доказать, что функция $y = x\sin x$ не является ограниченной на всей числовой прямой.

Δ Предположим, что функция $y = x\sin x$ ограничена на множестве всех действительных чисел. Тогда существует такое натуральное число c, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется $|x\sin x| \leq c$. Положим $x = x_0 = \left(c + \frac{1}{2}\right)\pi$. $|x_0 \sin x_0| = \pi\left(c + \frac{1}{2}\right)\left|\sin\left(\pi c + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \pi\left(c + \frac{1}{2}\right) > c$, что противоречит предположению. Таким образом, функция $y = x\sin x$ не является ограниченной на всей числовой прямой. ▲

Пример 9. Доказать, что функция $y = x^2$ не является ни убывающей, ни возрастающей на множестве R.

Δ Пусть $x_1 = -1, x_2 = 1$. Тогда $x_1 < x_2$, но $y(x_1) = y(x_2) = 1$. Поскольку не выполняются и неравенство $y(x_1) < y(x_2)$, и неравенство $y(x_1) > y(x_2)$, то данная функция не является ни возрастающей, ни убывающей на всей числовой оси. ▲

Пример 10. Доказать, что функция $y = \sqrt{x+1}$ является возрастающей.

Δ Область определения данной функции есть множество $[-1; +\infty)$. Пусть

$$-1 \le x_1 < x_2 . \quad y(x_2) - y(x_1) = \sqrt{x_2+1} - \sqrt{x_1+1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}} > 0 .$$

Следовательно, функция $y = \sqrt{x+1}$ является возрастающей на своей области определения. ▲

Пример 11. Является ли периодической функция $y = \sin \lg \sqrt{x+3}$?

Δ Если точка x_0 принадлежит области определения периодической функции $f(x)$ с периодом T, то ее области определения принадлежат и все точки $x_0 + nT$, где n – любое целое число. Следовательно, область определения периодической функции содержит положительные и отрицательные числа, сколь угодно большие по абсолютной величине. Так как это условие не выполняется $(x > -3)$, данная функция не является периодической. ▲

Пример 12. Найти период функции $y = |\cos x|$.

Δ $|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$. Функция $y = \cos 2x$ имеет период π, поэтому и заданная функция имеет тот же период. ▲

Пример 13. Суперпозицией каких простейших элементарных функций может быть получена функция $y = \cos^2 x^2$?

Δ Функция $y = f(x) = \cos^2 x^2$ представляется в виде $y = \varphi(\psi(u(z)))$, где $z = u(x) = x^2$, $t = \psi(z) = \cos z$, $y = \varphi(t) = t^2$. ▲

Пример 14. Найти $\varphi(\psi(x))$ и $\psi(\varphi(x))$, если $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$.

Δ $\varphi(\psi(x)) = (\psi(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$. $\psi(\varphi(x)) = 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}$. ▲

Пример 15. Исследовать следующие функции на четность:

а) $f(x) = \sin x + \cos x$; б) $f(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$; в) $f(x) = c$.

Δ а) $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, $f-(\pi/4) = 0$. Функция $f(x) = \sin x + \cos x$ является функцией общего вида.

б) $f(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$. Область определения функции симметрична относительно начала координат $x \in (-1; 1)$. При этом

$$f(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x} = -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

Следовательно, функция нечетная.

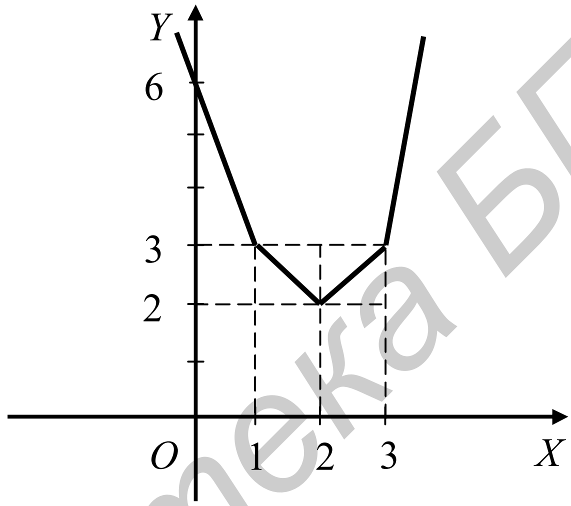
в) $f(x) = c$. Область определения симметрична относительно начала координат $x \in (-\infty; +\infty)$. При этом $f(-x) = c$. Следовательно, функция четная. ▲

Пример 16. Построить график функции $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

Δ Для построения графика данной функции рассмотрим четыре промежутка, на которые ось OX разбивают точки $1, 2$ и 3. Тогда

$$y = \begin{cases} -3x+6, & \text{при} \quad -\infty < x \le 1 \\ -x+4, & \text{при} \quad 1 \le x \le 2 \\ x, & \text{при} \quad 2 \le x \le 3 \\ 3x-6, & \text{при} \quad 3 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Построим на каждом промежутке график соответствующей линейной функции.



Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального числа n начиная с n_0, достаточно доказать, что:

а) это утверждение верно для $n = n_0$;

б) если данное утверждение справедливо для некоторого натурального числа $k \ge n_0$, то оно верно также и для следующего натурального числа $k+1$. Такой метод доказательства называется методом математической индукции.

Пример 17. Вывести формулу для суммы $S_n = -1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^n (2n-1)$.

Δ Имеем $S_1 = -1,\ S_2 = 2,\ S_3 = -3,\ S_4 = 4$. Рассмотренные частные случаи позволяют высказать предположение, что $S_n = (-1)^n n$.

а) Истинность равенства при $n = 1$ установлена.

б) Предположим, что $S_k = -1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^k (2k-1) = (-1)^k k$. Тогда $S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+1}(2k+1) = (-1)^k k + (-1)^{k+1}(2k+1) = (-1)^{k+1}(-k+2k+1) = (-1)^{k+1}(k+1)$. По принципу математической индукции заключаем, что наше предположение верно для любых $n \in \boldsymbol{N}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\arcsin\log_2 x}$.

Отв.: $1\le x\le 2$.

2. Найти область изменения функции $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Отв.: $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

3. Исследовать функцию на четность $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

Отв.: нечетная.

4. Показать, что функция $f(x)=x^3+3x+5$ возрастает для $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. Найти период и главный период функции Дирихле:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x-\text{рационально}\\ 0, & x-\text{иррационально.}\end{cases}$$

Отв.: периодом является любое рациональное число, главного периода нет.

6. Доказать методом математической индукции:

а) $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Занятие 2

Числовая последовательность

Числовые последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Пример 1. Записать формулу общего члена последовательности:

а) $\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{5},\dfrac{7}{10},\dfrac{9}{17},...$. **Отв.:** $x_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

б) $1,\dfrac{1}{2},3,\dfrac{1}{4},5,...$. **Отв.:** $x_n=n^{(-1)^{n+1}}$.

Пример 2. Найти наименьший и наибольший члены последовательности

$$x_n = \frac{3n-18}{3n-19}.$$

Δ $x_n = 1 + \frac{1}{3n-19}$. Выражение $\frac{1}{3n-19}$ принимает наименьшее значение -1 при $n=6$, а наибольшее значение $\frac{1}{2}$ при $n=7$. $x_6 = 0$ является наименьшим членом последовательности; $x_7 = \frac{3}{2}$ является наибольшим членом последовательности. ▲

Пример 3. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{100^n}{n!}$ является ограниченной.

Δ $x_n > 0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{100^{\,n+1}}{(n+1)!} : \frac{100^{\,n}}{n!} = \frac{100}{n+1}$. При $n+1 \geq 100$ члены последовательности не возрастают, при $n+1 \leq 100$ члены последовательности не убывают. Таким образом, $0 < x_n \leq \frac{100^{99}}{99!}$. ▲

Пример 4. Доказать, что последовательность $x_n = 2^{n(-1)^n}$ не ограничена.

Δ В силу определения нужно показать, что $\forall M > 0$ $\exists n \in \boldsymbol{N}$, для которого $|x_n| > M$.

Зададим произвольное $M > 0$ и возьмем любое четное $n > \log_2 M$. $x_n = 2^n > 2^{\log_2 M} = M$. ▲

Пример 5. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+4} = 3$.

Δ $\left|\frac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| < \varepsilon$. Преобразуем левую часть неравенства.

$$\left|\frac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| = \left|\frac{-11}{n^2+4}\right| = \frac{11}{n^2+4} < \frac{11}{n^2} \leq \frac{11}{n};$$

$\frac{11}{n} < \varepsilon$, $n > \frac{11}{\varepsilon}$, т. е. за число N можно взять, например, $\left[\frac{11}{\varepsilon}\right]$ (целая часть числа $\frac{11}{\varepsilon}$). ▲

Пример 6. Докажите, что последовательность $x_n = (1 + (-1)^n)\, n$ неограниченная, но не является бесконечно большой.

Δ Зададим произвольное $M > 0$. Для любого четного $n > \dfrac{M}{2}$ $x_n = 2n > M$. Последовательность неограниченная. Для любого нечетного n $x_n = 0$, следовательно, последовательность не является бесконечно большой. ▲

Пример 7. Доказать по определению, что последовательность $x_n = (-1)^n n$ является бесконечно большой.

Δ Возьмем произвольное число $M > 0$ и положим $N = [M]$. Тогда для любого $n > N$ справедливо $|x_n| = n > [M]$, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left|x^n\right| = +\infty$, т. е. последовательность $x_n = (-1)^n n$ является бесконечно большой. ▲

Пример 8. Доказать по определению, что последовательность $x_n = q^n$, $0 < q < 1$ является бесконечно малой.

Δ Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и решим относительно n неравенство $\left|q^n - 0\right| < \varepsilon$, $n > \log_q \varepsilon$. Положим $N(\varepsilon) = [\log_q \varepsilon]$. Тогда $\forall n > N$ и выполняется неравенство $q^n < \varepsilon$. ▲

Пример 9. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{1}{n+1} \sin \dfrac{\pi(n^2 + 4n)}{\sqrt{n+2}}$ является бесконечно малой.

Δ Последовательность $b_n = \sin \dfrac{\pi(n^2 + 4n)}{\sqrt{n+2}}$ является ограниченной, последовательность $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$ является бесконечно малой. Следовательно, последовательность $x_n = \alpha_n \cdot b_n$ так же является бесконечно малой. ▲

Пример 10. Найти пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(n+3)(3n+4)}{5n^3 + 2n + 1}$.

$$\Delta \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)(3n+4)}{5n^3 + 2n + 1} = \left|: n^3\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)}{5 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{5}. \ ▲$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}}$.

$$\Delta \ \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}} = \left| : n^2 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{1}{n^5}}+\sqrt[5]{32+\dfrac{1}{n^{10}}}}{\left(1+\sqrt[4]{\dfrac{1}{n^3}}\right)\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^3}}} = 2. \ \blacktriangle$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

$$\Delta \ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+n+1\right)-\left(n^2-n+1\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}} = 1. \ \blacktriangle$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$.

$$\Delta \ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)\left(\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^3\right)}{\sqrt[3]{n^4-2n^5+n^6}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^4-2n^5+n^6}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n}+1}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-1}+1} = \frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$.

$$\Delta \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)!\,(n^2+n-2)}{(n-2)!\,(n-1-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-2}{(n-2)\,(n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2} = 1. \ \blacktriangle$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$.

$$\Delta \quad 1+3+5+\ldots+(2n-1) = \frac{1+2n-1}{2}\cdot n = n^2.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n^2-3n-1}{2\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n-1}{2(n+1)} = -\frac{3}{2}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Найти наименьший член последовательности.

а) $x_n = n^2 - 9n - 100$. **Отв.:** $x_4 = x_5 = -120$.

б) $x_n = n + \frac{100}{n}$. **Отв.:** $x_{10} = 20$.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1}$. **Отв.:** 0.

3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. **Отв.:** 0.

4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+(n+2)!}{((n+1)!+n!)\cdot n}$. **Отв.:** 1.

5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n^6+3}+\sqrt[4]{16n^5-8}}{(n+\sin n^3)\,\sqrt[4]{n}}$. **Отв.:** 2.

6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+5)^4-(n-2)^4}{(n+2)^4-(n-1)^4}$. **Отв.:** $\frac{7}{3}$.

Занятие 3

Предел последовательности

Вычисление пределов последовательностей. Монотонные последовательности. Число e. Самостоятельная работа

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\,(n+1)}\right)$.

Δ Заметим, что $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$. ▲

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt{n^2-3n}\right)$.

$$\Delta\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt{n^2-3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)-\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{\sqrt[3]{(n^3+3n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}-\frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2}\right)=2{,}5.\ ▲$$

Пример 3. Записать по формуле бинома Ньютона $(x+2)^5$.

$\Delta\ (a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\,a^{n-k}\,b^k$.

$$(x+2)^5=C_5^0\,x^5+C_5'\,x^4\cdot 2+C_5^2\,x^3\cdot 2^2+C_5^3\,x^2\cdot 2^3+C_5^4\,x\cdot 2^4+C_5^5\,x^0\cdot 2^5=$$

$$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32.\ ▲$$

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$.

Δ Для любого $n\geq 2$ $\sqrt[n]{5}>1$, поэтому $\alpha_n=\sqrt[4]{5}-1>0$. Отсюда имеем $5=(1+\alpha_n)^n=1+n\,\alpha_n+\dfrac{n\,(n-1)}{2!}\,\alpha_n^2+\ldots+\alpha_n^n>n\,\alpha_n$, значит, $0<\alpha_n<\dfrac{5}{n}$ для всех $n\geq 2$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$. ▲

Пример 5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Δ При $n\geq 2$ число $\sqrt[n]{n}>1$. Поэтому $\forall n\geq 2\ \exists\ \beta_n>0$ такое, что

$\sqrt[n]{n} = 1+\beta_n$. $n = (1+\beta_n)^n = 1 + n\beta_n + \dfrac{n(n-1)}{2}\beta_n^2 + \ldots + \beta_n^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2}\beta_n^2$.

Отсюда находим, что $0 < \beta_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, $\forall n \geq 2$. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ▲

Пример 6. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$, $n \in \boldsymbol{N}$ имеет предел и найти его.

Δ Составим соотношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)!\cdot(2n+1)!!}{(2n+3)!!\cdot n!} = \dfrac{n+1}{2n+3} < \dfrac{n+1}{2n+2} = \dfrac{1}{2}$.

$x_{n+1} < \dfrac{1}{2}x_n < x_n$. Последовательность убывающая. Очевидно, $0 < x_n < x_1 = \dfrac{1}{3}$, т. е. последовательность ограничена, а значит, имеет предел. Перейдем к пределу в равенстве.

$x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n+1}{2n+3}$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3}$, $c = \dfrac{1}{2}c$, $c = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ▲

Пример 7. Доказать сходимость последовательности и найти ее предел.

$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots, x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}, \ldots$.

Δ Очевидно, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, т. е. наша последовательность возрастающая. Покажем, что эта последовательность ограничена. Так как $x_1 = \sqrt{2} < 2$, то $x_2 = \sqrt{2+x_1} < \sqrt{2+2} = 2, \ldots, x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} = \sqrt{2+2} = 2, \ldots$. Следовательно, она имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$, $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(2+x_{n-1})$, или $y^2 = 2+y$, $y_1 = 2$, $y_2 = -1$. Так как $x_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ▲

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{3n+1}$.

$$\Delta\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+5}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+5}\right)^{\frac{n+5}{-2}\cdot\frac{(-2)(3n+1)}{n+5}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n-2}{n+5}} = e^{-6}. \ ▲$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+3}\right)^{-n^2}$.

$$\Delta\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+3}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-4}{5n^2+2n+3}\right)^{-n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-4}{5n^2+2n+3}\right)^{\frac{5n^2+2n+3}{n-4}\cdot\frac{-(n-4)\,n^2}{5n^2+2n+3}}=e^{-\infty}=0.\ \blacktriangle$$

Самостоятельная работа (45 мин)

Вариант 1

1. Найти номер наибольшего члена последовательности $x_n=-3n^2+64n+356$.

   Отв.: 11.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+3n)(3+5n)(1+4n)}{7n^3+3n^2+8}$. **Отв.:** $\dfrac{60}{7}$.

3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^8}-\sqrt[4]{16n^{11}}}{(3n^2+\cos n^4)\cdot\sqrt[4]{3n^3}}$. **Отв.:** $-\dfrac{2}{3\sqrt[4]{3}}$.

4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\,(n+3)}-\sqrt{n^2-2n+4}\right)$. **Отв.:** $\dfrac{5}{2}$.

5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^4-(n-1)^4}{(n+2)^4-(n+1)^4}$. **Отв.:** 4.

6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n-3)!+(n-1)!}{5n\,(n-2)!+(n-1)!}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{3}$.

7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^{4n+1}$. **Отв.:** 0.

8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n+5}{2n^2+5n-4}\right)^{3n-2}$. **Отв.:** e^{-3}.

9.* Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2}-\sqrt{4n^2-n}\right)$. **Отв.:** $\dfrac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Найти номер наименьшего члена последовательности $x_n = 5n^2 - 127n + 245$. **Отв.:** 13.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3+2n)(4+5n)(1-6n)}{11n^2 - 3n + 4}$. **Отв.:** $-\dfrac{60}{11}$.

3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[6]{5n^{17}} + \sqrt[5]{10n^{14}}}{(2n^2 - \sin n^5)\cdot\sqrt[6]{2n^5}}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{2{,}5}$.

4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 5} - \sqrt{n\,(n-5)}\right)$. **Отв.:** $\dfrac{7}{2}$.

5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^4 - (n-2)^4}{(n+2)^4 - (n-1)^4}$. **Отв.:** $\dfrac{5}{3}$.

6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n-4)! + 5\,(n-2)!}{2n\,(n-3)! + 3\,(n-2)!}$. **Отв.:** $\dfrac{6}{5}$.

7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n-4}{4n+7}\right)^{3n+2}$. **Отв.:** ∞.

8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 2n + 4}{3n^2 + 2n + 3}\right)^{4n-1}$. **Отв.:** $e^{-\frac{16}{3}}$.

9.* Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2 - 2n} - \sqrt[3]{27n^3 + 9n^2}\right)$. **Отв.:** $-\dfrac{2}{3}$.

Занятие 4

Предел функции

Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пример 1. Доказать, используя определение предела функции по Коши, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2} = 2$.

Δ Рассмотрим данную функцию в некоторой проколотой окрестности точки $x = 1$, например, $x \in (0, 1) \bigcup (1, 2)$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выясним, при каких x заведомо выполняется неравенство $\left|f(x) - 2\right| < \varepsilon$. Оценим сверху величину $|f(x)-2|$:

$$|f(x)-2| = \left|\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}-2\right| = \left|\frac{x^2+4x-5-2x^2-2x+4}{x^2+x-2}\right| = \left|\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}\right| =$$

$$= \frac{|x-1|}{x+2} < \frac{|x-1|}{2}.$$

Таким образом, если $\frac{|x-1|}{2} < \varepsilon$, т. е. $|x-1| < 2\varepsilon = \delta(\varepsilon)$, то $|f(x)-2| < \varepsilon$. Нужное нам неравенство выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-1| < 2\varepsilon$. ▲

Пример 2. Доказать, используя определение предела функции по Гейне, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x$ не существует.

Δ Для доказательства достаточно выбрать две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ с пределами, равными ∞, для которых последовательности $\{\sin x'_n\}$ и $\{\sin x''_n\}$ сходились бы к разным пределам. В качестве таких последовательностей можно взять следующие: $x'_n = \pi n$ и $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Тогда, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не существует. ▲

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

$$\Delta \lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{15}{11}. \ ▲$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right)$.

$$\Delta \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}} = \frac{2}{9}. \ ▲$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Δ Разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1.\ \blacktriangle$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

$\Delta\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\dfrac{1}{4}.\ \blacktriangle$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

$$\Delta\ \lim_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4})(\sqrt{9+2x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\,(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4})}{(x-8)(\sqrt{2+9x}+5)}=\frac{12}{5}.\ \blacktriangle$$

Пример 8. Найти односторонние пределы функции

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{если } x\le1\\ 3x-5, & \text{если } x>1\end{cases}\quad\text{в точке } x=1.$$

Δ Пусть $x\le1$. Тогда $f(x)=-2x+3$. Следовательно, $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=1$ – предел слева. Если $x>1$, то $f(x)=3x-5$. Следовательно, $f(1+0)=$ $=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=-2$ – предел справа. $\blacktriangle$

Пример 9. Найти односторонние пределы функции $f(x)=3+\dfrac{1}{1+7^{1/1-x}}$ при $x\to1$.

Δ Выражение $\dfrac{1}{1-x}$ стремится к $+\infty$, когда $x\to1$, оставаясь меньше единицы, поэтому $\lim\limits_{x\to1-0}7^{\frac{1}{1-x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}=0$, $f(1-0)=3$. Далее, при $x \to 1+0$ имеем $\dfrac{1}{1-x} \to -\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to 1+0} 7^{\frac{1}{1-x}} = 0, \quad \lim_{x\to 1+0}\left(3+\frac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}\right) = 3+1 = 4, \quad f(1+0) = 4. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^3+3}$ является бесконечно малой при $x \to 3$.

Δ Достаточно вычислить $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^3+3} = 0$. ▲

Пример 11. Доказать, что функция $f(x) = (x-2)^2 \sin^4 \dfrac{1}{x-2}$ является бесконечно малой при $x \to 2$.

Δ Функция $\varphi(x) = (x-2)^2$ является бесконечно малой при $x \to 2$. Функция $\psi(x) = \sin^4 \dfrac{1}{x-2}$ является ограниченной $(x \neq 2)$. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая. ▲

Пример 12. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to \infty$.

$$\Delta \ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{1}{x}}{1} = \infty. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^{20}\cdot(2x+3)^{15}}{(3x\_+17)^{35}}$. **Отв.:** $\dfrac{2^{15}}{3^{35}}$.

2. Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+2)}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{5}$.

3. Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$. **Отв.:** -3.

4. Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt[3]{8x^3+3}}{\sqrt[4]{x^4+5}}$. **Отв.:** 3.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{3}$.

6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. **Отв.:** $-\dfrac{1}{16}$.

7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$. **Отв.:** $\dfrac{mn(n-m)}{2}$.

8. Для функции $f(x)=\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ вычислить $f(\pm 0)$. **Отв.:** $f(+0)=1$, $f(-0)=-1$.

Занятие 5

Непрерывность и точки разрыва функции

Непрерывность функции и их классификация. Замечательные пределы

Пример 1. С помощью «$\varepsilon-\delta$» рассуждений доказать непрерывность функции $f(x)=ax+b,\ a\neq 0,\ x\in \boldsymbol{R}$.

Δ Функция определена на всей числовой оси. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Для любого фиксированного $x_0\in\boldsymbol{R}$ имеем

$$|ax+b-ax_0-b|=|a|\cdot|x-x_0|<\varepsilon, \text{ если } |x-x_0|<\varepsilon/|a|=\delta. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Исследовать на непрерывность в точке $x_0=1$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{при } x\le 1\\ x+1, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Δ Функция определена в точке $x_0=1$ и в некоторой ее окрестности.

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=2,\quad \lim_{x\to 1+0}f(x)=2,\quad f(1)=2.$$

$f(1-0)=f(1+0)=f(1)$. В точке $x=1$ функция непрерывна. $\blacktriangle$

Пример 3. Функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ доопределить так, чтобы новая функция в точке $x_0=2$ была непрерывной.

Для непрерывности функции в точке $x_0=2$ необходимо положить $f_1(2)=4$, значит, новая функция будет выглядеть так: $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{при } x\neq 2\\ 4, & \text{при } x=2.\end{cases}$

Отметим, что для функции $f(x)$ точка $x_0 = 2$ является точкой устранимого разрыва.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{при} \quad x < -2; \\ x^2 + 1, & \text{при} \quad -2 \le x < -1; \\ x, & \text{при} \quad -1 \le x \le 0; \\ \ln x, & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Построить график этой функции.

Δ При различных значениях x функция задана различными формулами. В каждом из промежутков $(-\infty; -2), (-2; -1), (-1; 0), (0; +\infty)$ она непрерывна как элементарная, следовательно, разрыв может быть только в граничных точках промежутков, т. е. в точках $x = -2, x = -1, x = 0$. Вычислим значения функции в этих точках и ее односторонние пределы.

$$\lim_{x \to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} 5 = 5, \quad \lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} (x^2 + 1) = 5, \quad f(-2) = 5.$$

Функция непрерывна в точке $x = -2$.

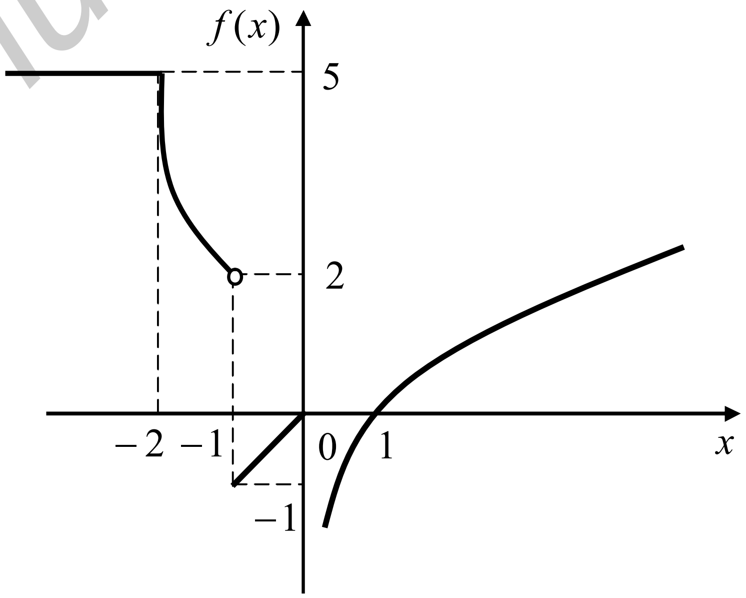
$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (x^2 + 1) = 2, \quad \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} x = -1, \quad f(-1) = -1.$$

Функция $f(x)$ в точке $x = -1$ терпит разрыв первого рода $(\delta = -3)$, причем в точке $x = -1$ она непрерывна справа, так как $f(-1+0) = f(-1)$.

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x = 0, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty, \quad f(0) = 0.$$

В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, причем в этой точке она непрерывна слева, так как $f(0-0) = f(0)$.

График функции имеет вид



Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$ в точках $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Начертить схематический график функции.

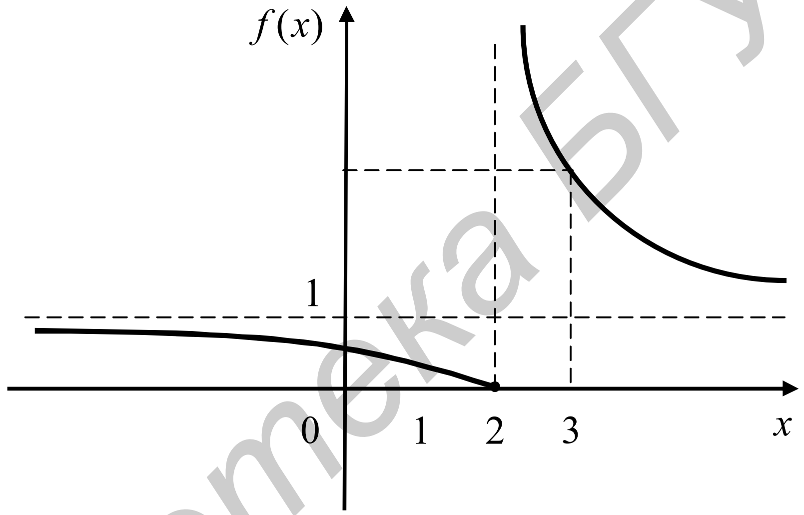
Δ Для точки $x_1 = 3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} f(x) = f(3) = 3.$$

Точка $x_1 = 3$ является точкой непрерывности функции. Для точки $x_2 = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = 3^{-\infty} = 0, \quad \lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}} = 3^{+\infty} = +\infty.$$

Значит $x = 2$ точка разрыва второго рода. Для построения схематического графика вычислим $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3^{\frac{1}{x-2}} = 1$.



При нахождении пределов функций используются так называемые замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0$; 4а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p - 1}{x} = p$.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

$$\Delta \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x \cdot 5x \cdot 7x}{5x \cdot \sin 7x \cdot 7x} = \frac{5}{7}. \quad \blacktriangle$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 5x}{\sin 4x}$.

Δ Введем новую переменную $t=\frac{\pi}{2}-x$ (при $x\to\frac{\pi}{2}$, $t\to 0$).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\sin 4x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-5t\right)}{\sin(2\pi-4t)}=\lim_{t\to 0}\ \frac{\sin 5t\cdot 5t\cdot 4t}{5t\cdot\sin 4t\cdot 4t}=\frac{5}{4}.\ \blacktriangle$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\sin\frac{2x+1}{x^2+4x^3}$.

Δ Заметив, что при $x\to\infty$ $\frac{2x+1}{x^2+4x^3}\to 0$, выделим первый замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty} x^2\sin\frac{2x+1}{x^2+4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2x+1}{x^2+4x^3}\cdot x^2\cdot\frac{2x+1}{x^2+4x^3}}{\frac{2x+1}{x^2+4x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{4x^3+x^2}=\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x+5}\right)^{2x+7}$.

Δ Поскольку $1-\frac{1}{3x+5}\to 1$ при $x\to\infty$, то имеем неопределенность типа 1^{∞}. Выделим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x+5}\right)^{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3x+5}\right)^{-(3x+5)\cdot\frac{2x+7}{-(3x+5)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+7}{-(3x+5)}}=e^{-\frac{2}{3}}.\ \blacktriangle$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{6x}$.

Δ Имеем неопределенность типа 1^{∞}. Выделим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+4}{x^2+3x+5}\right)^{\frac{x^2+3x+5}{x+4}\cdot\frac{6x(x+4)}{x^2+3x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+24x}{x^2+3x+5}}=e^{6}.\ \blacktriangle$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Δ Имеем неопределенность типа 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^{\frac{\operatorname{tg}x}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^{\frac{1}{-\cos^2 x}\cdot\frac{(-\cos^2 x)\cdot\sin x}{2\cos x}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sin x} = e^0 = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-5x+6}$.

$$\Delta \ \lim_{x\to 2}\frac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-x-2}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} = \ln 3\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = -3\ln 3. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+4x+1}-e^{x^2+5}}{x-1}$.

$$\Delta \ \lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2+4x+1}-e^{x^2+5}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2+5}(e^{4(x-1)}-1)\cdot 4}{4(x-1)} = 4e^6. \ \blacktriangle$$

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}$.

$$\Delta \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+(\sin x-1))}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+(\sin x-1))}{-(\sin x-1)(\sin x+1)} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+1} = -\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. При каких значениях a и b функция $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 & \text{при } x\le 0,\\ ax+b & \text{при } 0<x<1\\ \sqrt{x} & \text{при } x\ge 1\end{cases}$

будет непрерывной? **Отв.:** $a=2,\ b=-1$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^p-e^{\beta x}}{x}$. **Отв.:** $ap-\beta$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3-2^x)^{\frac{1}{x-1}}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{4}$.

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, $m, n\in \boldsymbol{Z}$. **Отв.:** $(-1)^{m-n}\cdot\dfrac{m}{n}$.

5. Определить точки разрыва функции и исследовать их характер

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}.$$

Отв.: $x=-1$ – точка разрыва второго рода, $x=0$ и $x=1$ – точки устранимого разрыва.

Занятие 6

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Символ «о малое» и его свойства. Порядок одной бесконечно малой относительно другой, эквивалентные бесконечно малые. Выделение главной части бесконечно малой и бесконечно большой функций. Вычисление пределов

Пример 1. Доказать, что $(x-1)(x^3+2x^2-3)=0\,(\sqrt{x}-1)$ при $x\to 1$.

Δ Записанное равенство следует из того, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+2x^2-3)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x^3+2x^2-3)}{\sqrt{x}-1}=0. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, что $x\sin\sqrt{x}=x^{3/2}+o(x^{3/2})$ при $x\to +0$.

Δ Так как $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=1$, следовательно, $x\sin\sqrt{x}=x^{3/2}+o(x^{3/2})$ при $x\to +0$. $\blacktriangle$

Пример 3. Сравнить бесконечно малые функции:

а) $\sqrt{2+x}-\sqrt{2}$ и x при $x\to 0$;

б) $1-\sin x$ и $\cos x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

Δ а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})\,x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Данные функции одного порядка малости. ▲

Δ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 0$.

Функция $1-\sin x$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\cos x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$. $1-\sin x = o\,(\cos x)$. А так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} =$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\sin x} = \dfrac{1}{2}$, то $1-\sin x$ есть бесконечно малая второго порядка относительно $\cos x$ при $x \to \pi/2$. ▲

Пример 4. Пусть $x \to 0$. Выделить главный член $c\,x^n$ и определить порядок малости относительно x следующих функций:

а) $f(x) = 3x^2 + 5x^3 + x^4$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

Δ а) так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5x^3+x^4}{3x^2} = 1$, следовательно, $3x^2+5x^3+x^4 =$ $= 3x^2 + 0\,(x^2)$. Порядок малости равен двум. ▲

Δ б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x \cdot x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \cdot 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^n} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \cdot 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}{x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4x^{n-3}} = \dfrac{1}{2}$ при $n = 3$. $\operatorname{tg} x - \sin x = \dfrac{1}{2}x^3 + o\,(x^3)$. Порядок малости равен трем. ▲

Пример 5. Выделить главную часть функции $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 3)$ вида $c\,(x-1)^n$ при $x \to 0$.

Δ Так как выражение, стоящее под знаком логарифма, стремится к единице при $x \to 0$, то его можно представить следующим образом: $x^3 - 3x + 3 = 1 + (x^3 - 3x + 2)$, где $x^3 - 3x + 2$ – бесконечно малая функция при $x \to 1$. Тогда

$$\ln(x^3 - 3x + 2) = \ln(1 + (x^3 - 3x + 2)) \sim x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \sim 3(x-1)^2$$

при $x \to 1$. Таким образом, $\ln(x^3 - 3x + 3) = 3(x-1)^2 + o(x-1)^2$ при $x \to 1$. ▲

Пример 6. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главную часть $\Gamma(x)$ вида $c\,x^n$ и определить порядок роста относительно x функции $f(x) = \sqrt[3]{8x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x+1}$.

Δ Так как $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$, главным является то слагаемое, порядок которого выше.

$$\sqrt[3]{8x^2 + 5x + 3} + \sqrt{4x+1} \sim \sqrt[3]{8x^2 + 5x + 3} = 2x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1 + \frac{5}{8x} + \frac{3}{8x^2}} \sim 2x^{\frac{2}{3}}.$$

$\Gamma(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$, $x \to +\infty$. Порядок роста относительно x равен $\dfrac{2}{3}$. ▲

Пример 7. Сравнить функции $f(x) = \ln\dfrac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}$ и $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x + 9}$ при $x \to +\infty$.

Δ $\ln\dfrac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} = \ln\left(e^x \cdot \dfrac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{-x}}\right) = x + \ln\left(\dfrac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{-x}}\right)$. $f(x) \sim x$ при $x \to +\infty$.

$\sqrt[3]{x^2 + 5x + 9} = x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{9}{x^2}}$. $\varphi(x) \sim x^{\frac{2}{3}}$ при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что $f(x) \sim (\varphi(x))^{\frac{3}{2}}$, т. е. функция $f(x)$ есть бесконечно большая порядка $3/2$ относительно бесконечно большой $\varphi(x)$. ▲

Пример 8. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\ln(1 + 3x)}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{5x} - 1}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 4x)}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x} - 1}{\sin^2 4x}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{3^x - 1}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-5^{-4x}}{3\operatorname{tg}2x-\arcsin 3x+\sin^3 x}$; з) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Δ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{e^{5x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}4x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin 3x}{\operatorname{tg}4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 3x}{4x}=\dfrac{3}{8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x}-1}{\sin^2 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+(\cos 2x-1))^{\frac{1}{3}}-1)}{16x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}(\cos 2x-1)}{16x^2}=-\dfrac{1}{24}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 2}{x\ln 3}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+(x^2+e^x-1))}{\ln(1+(x^4+e^{2x}-1))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+e^x-1}{x^4+e^{2x}-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+o(x)}{x^4+2x+o(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-5^{-4x}}{3\operatorname{tg}2x-\arcsin 3x+\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{-4x}(5^{6x}-1)}{6x-3x+x^3+o(x)+o(x)+o(x^3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x\ln 5}{3x}=2\ln 5$.

з) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\begin{vmatrix}x-7=t\\ t\to 0\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\dfrac{6}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\dfrac{t}{16}}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{9}\right)+o(t)-3\left(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t}{27}\right)+o(t)}{2\left(1+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{t}{16}\right)+o(t)-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{27}\right)t}{\dfrac{1}{32}t}=\dfrac{112}{27}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Доказать, что $\ln\cos x = o\,(\sqrt[3]{1+\sin 2x}-1)$ при $x\to 2\pi$.

2. Выделить главную часть функции $f(x)=3^{x^2-x-2}-1$ вида $c\,(x-2)^n$ при $x\to 2$.

Отв.: $f(x)=3\ln 3\,(x-2)+o\,(x-2)$ при $x\to 2$.

3. Определить порядок малости функции $f(x)=\ln\left(1+\sqrt[4]{2tgx^3\cdot\sqrt{5\sin x^{11}}}\right)$ по сравнению с x при $x\to 0$. **Отв.:** $\dfrac{17}{8}$.

4. Определить порядок роста бесконечно большой функции $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ по отношению к бесконечно большой функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$ при $x\to 1$. **Отв.:** $\dfrac{1}{3}$.

5. С помощью эквивалентных бесконечно малых вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{3x}-3^{5x}}{2e^{3x}-4\,\mathrm{tg}\,2x+5\sin^3 x-2}$. **Отв.:** $-\dfrac{1}{2}\ln 3$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin p\,x-\cos p\,x}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{p}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos a\,x}{\ln\cos b\,x}$. **Отв.:** $\dfrac{a^2}{b^2}$.

6. Выделить главную часть функции $f(x)=\dfrac{(5x^2+2)\,\mathrm{arctg}\,x}{8x^4+x+1}$ вида $c\,x^{\alpha}$ при $x\to+\infty$. **Отв.:** $f(x)=\dfrac{5\pi}{16}x^{-2}+o\,(x^{-2})$ при $x\to+\infty$, $A(x)=\dfrac{5\pi}{16}x^{-2}$.

Занятие 7

Непрерывность функции на отрезке

Раскрытие неопределенностей различных видов. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши. Контрольная работа (1 ч)

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\pi/3\right)}{1-2\cos x}$.

$$\Delta \lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin\left(x-\pi/3\right)}{1-2\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin\left(x-\pi/3\right)}{2\left(\cos\pi/3-\cos x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$.

$$\Delta \lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}-1\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x}{a}-1}{x-a}=\frac{1}{a}.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

Δ Неопределенность вида (0°) $(\ln x\to-\infty)$. Сначала находим

$$\lim_{x\to+0}\ln\left(x^{\frac{1}{1+\ln x}}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1+\ln x}=1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{1+\ln x}}=e$. ▲

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{(5^{7x}-8^{9x})\,x^3}{3\,e^{x^5}+(1-\cos 2x)^2+2x^4-3}$.

$$\Delta \lim_{x\to0}\frac{(5^{7x}-8^{9x})\,x^3}{3e^{x^5}+(1-\cos2x)^2+2x^4-3}=\lim_{x\to0}\frac{(7x\ln5+0(x)-9x\ln8+0(x)\cdot x^3}{3x^5+0(x^5)+4x^4+0(x^4)+2x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4(7\ln5-9\ln8)+0\,(x^4)}{6x^4+0\,(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{x^4(7\ln5-9\ln8)}{6x^4}=\frac{7\ln5-9\ln8}{6}.\ \blacktriangle$$

Пример 5. Показать, что уравнение x^3-3x+1 на отрезке $[1;\,2]$ имеет корень и вычислить его значение с точностью до $0{,}1$.

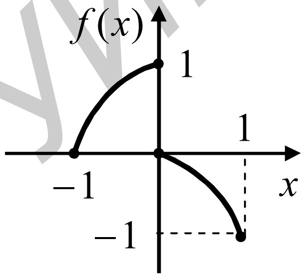
Δ $f(1)<0,\ f(2)>0$. Так как на отрезке $[1;\,2]$ функция $f(x)=x^3-3x+1$ непрерывна и на концах принимает значения разных знаков, то согласно первой теореме Больцано-Коши внутри этого отрезка есть по крайней мере одна точка, в которой функция обращается в нуль. Эта точка и есть действительный корень уравнения. Для его нахождения с заданной точностью отрезок $[1;2]$ разделим точками $1{,}1; 1{,}2; \dots 1{,}9$ и в каждой из них определим знак функции $f(1{,}1)<0,\ f(1{,}2)<0, \dots,\ f(1{,}5)<0,\ f(1{,}6)>0, \dots,\ f(1{,}9)>0$. Следовательно, $1{,}5<x_0<1{,}6$. ▲

Пример 6. Принимает ли функция $f(x)=\cos\pi x - x^5/27+1$ значение 5 внутри отрезка $[-3;3]$?

Δ Данная функция непрерывна на отрезке $[-3;3]$, $f(-3)=9$, $f(3)=-9$. Так как $-9<5<9$, то по второй теореме Больцано-Коши найдется хотя бы одно значение x такое, что $f(x)=5$. ▲

Пример 7. На отрезке $[-1;1]$ задана функция

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & \text{при } -1\le x\le 0\\ -x^2, & \text{при } \ 0<x\le 1.\end{cases}$$



Принимает ли функция наибольшее и наименьшее значения на заданном отрезке? Выполняются ли при этом условия теоремы Вейерштрасса?

Δ Функция достигает своего наибольшего значения 1 при $x=0$ и наименьшего значения -1 при $x=1$. Хотя условие непрерывности функции нарушается, функция принимает наибольшее и наименьшее значения. Таким образом, условие непрерывности в теоремах Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым. ▲

Дополнительные задачи

1. Доказать, что всякое алгебраическое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами $a_0x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+\dots+a_{2n-1}=0$ имеет по крайней мере один действительный корень.

2. Доказать, что уравнение $2^x=4x$ имеет по крайней мере два действительных корня.

3.* Построить график функции $y=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+x^n+\left(x^2/2\right)^n}$, $x\ge 0$.

Отв.: $y=\begin{cases} 1, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ x, & \text{если } 1<x<2,\\ x^2/2, & \text{если } 2\le x<\infty.\end{cases}$

Контрольная работа

Вариант 1

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{6-x-2x^2}{x^3+8}$. **Отв.:** $7/12$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$. **Отв.:** $-3/80$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^2+2}-\sqrt{x^4-3x^2-5})$. **Отв.:** $5/2$.

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 2x}$. **Отв.:** 1.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{4-x}{x+2}}$. **Отв.:** e^{12}.

6. Найти $f(2-0)$ и $f(2+0)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{2-x}}}$. **Отв.:** $f(2-0)=0$, $f(2+0)=1/2$.

7. Исследовать на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & x\in(-\infty;0)\\ x, & x\in[0;2)\\ -3, & x\in[2;+\infty).\end{cases}$$

Отв.: $x=0$ – точка разрыва II рода, $x=2$ – точка разрыва I рода, $\sigma=-5$.

8. Найти главную часть функции $f(x)=\sqrt[3]{1+3x^4}+4e^{3x^3}-2x^3-5$ при $x\to 0$.

Отв.: $f(x)=10x^3+0\,(x^3),\ x\to 0,\ \ f(x)\sim 10x^3$.

9. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[4]{x+10}-\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+3}-3}$. **Отв.:** $-5/16$.

Вариант 2

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-5x-2x^2}{x^3+27}$. **Отв.:** $7/27$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. **Отв.:** $-1/16$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2+5}-2x^2)$. **Отв.:** $13/4$.

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x-\cos 3x}{\cos 2x-\cos 4x}$. **Отв.:** $2/3$.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{1-x}{x-3}}$. **Отв.:** e^4.

6. Найти $f(3-0)$ и $f(3+0)$, если $f(x)=\dfrac{1}{2x+5^{\frac{1}{x-3}}}$. **Отв.:** $1/6; 0$.

7. Исследовать на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in(-\infty;0)\\ 1/x, & x\in[0;2)\\ -1, & x\in[2;+\infty).\end{cases}$$

Отв.: $x=0$ – точка разрыва II рода, $x=2$ – точка разрыва I рода, $\sigma=-1{,}5$.

8. Найти главную часть функции $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}+2e^{2x^2}+x^3-3$ вида $c\,x^{\alpha}$ при $x\to 0$.

Отв.: $f(x)=4\frac{1}{4}x^2+0\,(x^2),\ f(x)\sim 4\frac{1}{4}x^2$.

9. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt[4]{x+11}}{\sqrt[3]{x+59}-4}$. **Отв.:** $-21/2$.

Занятие 8

Производная функции

Производная функции. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Таблица производных. Логарифмическое дифференцирование

Пример 1. Исходя из определения, вычислить производную функции $f(x)=1/x^2$ в точке $x=1$.

$$\Delta\ f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x(1+\Delta x)^2}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x}{(1+\Delta x)^2}=-2.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Пользуясь определением, вычислить производную функции

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(2x-x^{3/2}\cdot\cos\dfrac{1}{2x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$ в точке $x=0$.

Δ $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(2x-x^{3/2}\cdot\cos\frac{1}{2x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-x^{3/2}\cdot\cos\frac{1}{2x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2-x^{1/2}\cdot\cos\frac{1}{2x}\right)=2.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Исследовать дифференцируемость функции $y=\sqrt{1-\cos 2x}$ в точке $x=0$.

Δ $$\Delta y=\sqrt{1-\cos 2\Delta x}-\sqrt{2\sin^2\Delta x}=\sqrt{2}\,|\sin\Delta x|=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\Delta x & \text{при } \Delta x\geq 0,\\ -\sqrt{2}\sin\Delta x & \text{при } \Delta x<0.\end{cases}$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\sqrt{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=\sqrt{2}.$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\sqrt{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=-\sqrt{2}.$$

Односторонние производные в точке $x=0$ не равны, следовательно, функция в этой точке не дифференцируема. $\blacktriangle$

Пример 4. Вычислить производные функций:

1) $y=1-\sqrt[3]{x^2}+16/x$.

Δ $y=1-x^{2/3}+16x^{-1}$; $\quad y'=-\dfrac{2}{3}-x^{1/3}-16x^{-2}=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\dfrac{16}{x^2}$. $\blacktriangle$

2) $y=e^{2x}\cdot\cos 3x$.

Δ $y'=2\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-3\cdot e^{2x}\sin 3x$. $\blacktriangle$

3) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$.

Δ $$y'=\frac{(2x-2)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-2x+3)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{3x^2-4x-5}{(x^2+x+1)^2}.\ \blacktriangle$$

4) $y=(3+2x^2)^4$.

Δ $y'=4\,(3+2x^2)^3\cdot 4x=16x\cdot(3+2x^2)^3$. $\blacktriangle$

5) $y=\sin^2 x^3$.

Δ $y' = 2 \cdot \sin^3 \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \sin 2x^3$. ▲

6) $y = \ln^3 x^3$.

Δ $y = 27 \cdot \ln^3 x$; $y' = 81 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{81 \cdot \ln^2 x}{x}$. ▲

7) $y = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x}$.

Δ $y = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = 1 - \text{ctg}^2 x$;

$y' = (1 - \text{ctg}^2 x)' = -2 \cdot \text{ctg}\, x \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right) = \frac{2\, \text{ctg}\, x}{\sin^2 x}$. ▲

8) $y = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$.

Δ $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. ▲

9) $y = \arcsin \sqrt{1 - e^x}$.

Δ $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^x}} \cdot (-e^x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}$. ▲

10) $y = \frac{x^2 \cdot \sin x}{\ln x}$.

Δ $y' = \frac{(2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x) \cdot \ln x - x^2 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$

$= \frac{x\,(x \cdot \cos x + 2 \sin x) \ln x - x \cdot \sin x}{\ln^2 x}$. ▲

11) $y = \text{sh}^2 x^3 + \text{ch}^3 x^2$.

Δ $y' = 2\, \text{sh}^3 \cdot \text{ch}\, x^3 \cdot 3x^2 + 3\, \text{ch}^2 x^2 \cdot \text{sh}\, x^2 \cdot 2x = 3x\,(x \cdot \text{sh}\, 2x^3 + \text{ch}\, x^2 \cdot \text{sh}\, 2x^2)$. ▲

12) $y = (1 + 4x)^{\text{ctg}\, x}$.

Δ Первый способ: $y = e^{\text{ctg}\, x \cdot \ln(1+4x)}$.

$$y' = e^{\text{ctg}\, x \cdot \ln(1+4x)} \cdot \left(-\frac{\ln(1 + 4x)}{\sin^2 x} + \frac{4\, \text{ctg}\, x}{1 + 4x} \right).$$

Второй способ: $\ln y = \text{ctg}\, x \cdot \ln(1 + 4x)$.

$$\frac{y'}{y}=\left(-\frac{\ln(1+4x)}{\sin^2 x}+\frac{4\operatorname{ctg} x}{1+4x}\right). \quad y'=e^{\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+4x)}\cdot\left(-\frac{\ln(1+4x)}{\sin^2 x}+\frac{4\operatorname{ctg} x}{1+4x}\right). \ \blacktriangle$$

13) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$.

Δ $\ln|y|=\ln|x|+\dfrac{1}{3}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{15}\ln|5-x|$.

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2x}{3(3x^2+1)}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{5-x}=\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)},$$

$$y'=\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\cdot\frac{24x^3-125x^2+14x-75}{15x(x^2+1)(x-5)}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Пользуясь определением, вычислить производную функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x=1$. **Отв.:** $0{,}5$.

2. Определить значения α и β, при которых функция

$$y=\begin{cases}(x+\alpha)\cdot e^{-\beta x}, & \text{если } x<0;\\ \alpha x^2+\beta x+1, & \text{если } x\ge 0\end{cases}$$

всюду дифференцируема. **Отв.:** $\alpha=1, \beta=1/2$.

3. Найти производную функции $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{при } x<0,\\ e^x & \text{при } x\ge 0\end{cases}$ и построить графики функций $f(x)$ и $f'(x)$.

Отв.: $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x<0,\\ e^x & \text{при } x>0.\end{cases}$ В точке $x=0$ производная не существует.

4. Найти левую $f'_-(0)$ и правую $f'_+(0)$ производные в точке $x=0$, если $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } x<0;\\ \ln(1+\sqrt[5]{x^7}), & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$ **Отв.:** $f'_-(0)=2$; $f'_+(0)=0$.

5. Найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{1}{4(1+x^4)}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$;

в) $y=\dfrac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arctg} x^6$; г) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Отв.: а) $\dfrac{x}{x^4-1}$; б) $\dfrac{1}{x\,(1+x^4)^2}$; в) $\dfrac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$; г) $\dfrac{x\cdot\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

6. Найти производные функций, используя метод логарифмического дифференцирования:

а) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$; б) $y=x^{\sin(x^2+1)}$.

Отв.: а) $\dfrac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$; б) $x^{\sin(x^2+1)}\cdot\left(2x\cdot\ln x\cdot\cos(x^2+1)+\dfrac{\sin^2(x^2+1)}{x}\right)$.

7. Решить уравнение $y'=0$, если $y(x)=\min\{x^2-x,\, x+8\}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{2}$.

Занятие 9

Дифференцируемость функций

Дифференцируемость и дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций. Приложение производной

Пример 1. Доказать дифференцируемость функции $y=3x^3+x-1$ в произвольной точке $x\in\boldsymbol{R}$. Найти приращение и дифференциал этой функции в точке $x=1$ при $\Delta x=0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Δ $\Delta y=(3\,(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)-1)-(3x^3+x-1)=9x^2\Delta x+9x\Delta x^2+3\Delta x^3+$ $+\Delta x=(9x^2+1)\Delta x+9x\Delta x^2+3\Delta x^3=(9x^2+1)\,\Delta x+o\,(\Delta x),\ \Delta x\to 0$;

$d\,y=(9x^2+1)\,\Delta x$, отсюда $\Delta y-dy=9x\Delta x^2+3\Delta x^3$. При $x=1$ и $\Delta x=0{,}1$ получим $\Delta y-dy=0{,}09+0{,}003=0{,}093$, $dy=1$, $\Delta y=1{,}093$. Абсолютная погрешность $|\Delta y-dy|=0{,}093$, относительная погрешность –

$$\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\frac{0{,}093}{1{,}093}\approx 0{,}085=8{,}5\%.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти $d\left(x\cdot e^{x^2}\right)$.

Δ Первый способ: $d\,(x\,e^{x^2})=(x\,e^{x^2})'dx=e^{x^2}\,(2x^2+1)\,dx$.

Второй способ: $d\,(x e^{x^2}) = e^{x^2}dx + x\,d\,(e^{x^2})$. Так как $d\,(e^{x^2}) = e^{x^2}\,2x\,dx$, то $d\,(x e^{x^2}) = e^{x^2}(2x^2+1)\,dx$. ▲

Пример 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{4{,}41}$.

Δ Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. В основе приближенного вычисления значений функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0 + \Delta x$ лежит формула $f(x_0 + \Delta x) \sim f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, которая для нашей функции имеет вид $\sqrt{x_0 + \Delta x} \sim \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$. Следовательно, $\sqrt{4{,}41} \sim \sqrt{4} + \dfrac{0{,}41}{2\sqrt{4}} = 2{,}1025$ (точное значение $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$). ▲

Пример 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sin 29°$.

Δ Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Приближенная формула имеет следующий вид: $\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \Delta x$. Тогда

$$\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{360} \approx 0{,}484.\ ▲$$

Пример 5. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти y'_x для функции $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Δ Обратная функция $x = \sin^2 y$ имеет производную $x'_y = 2\sin y \cdot \cos y$.

Следовательно, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{2\sin y\cdot\cos y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$. ▲

Пример 6. Найти y'_x для функции $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$, $t \in (0;\ \pi/2)$.

Δ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех t и $x'_t = -3a\cos^2 t\cdot\sin t \neq 0$ на интервале $(0;\ \pi/2)$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t,\quad t \in (0;\ \pi/2).\ ▲$$

Пример 7. Функция $y = y(t)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases},\quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Чему равна производная $\dfrac{dy}{dx}$ при $x = 0$?

Δ Очевидно, что $x=0$ при $t=-1$. $y'_x\big|_{x=0}=\left.\dfrac{y'_t}{x't}\right|_{t=-1}=\left.\dfrac{2t+1_t}{3t^2}\right|_{t=-1}=-\dfrac{1}{3}$. ▲

Пример 8. Найти производную неявно заданной функции $x^3+x^2y+y^2=0$.

Δ Имеем $\dfrac{d}{dx}(x^3+x^2y+y^2)=0$, $3x^2+2x\cdot y+x^2\cdot y'+2y\cdot y'=0$,

$y'=-\dfrac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$. ▲

Пример 9. Пусть $y=y(t)$, $x\in(-a;a)$ – положительная функция, заданная неявно уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Найти y'_x.

Δ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)=0$, $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\,y'=0$, $y'_x=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$, $x\in(-a;\,a)$, $y>0$. ▲

Пример 10. Под какими углами синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс?

Δ Синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x=k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$. $y'=\cos x$, $y'(\pi k)=(-1)^k=\begin{cases}1, & k=2n\\ -1, & k=2n+1\end{cases}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Следовательно, в точках $x=2\pi n$ синусоида пересекает ось абсцисс под углом $45°$ и в точках $x=(2n+1)\pi$ – под углом $135°$. ▲

Пример 11. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y=x^2-4x$ в точке $x_0=1$.

Δ Находим $y(1)=-3$, $y'=2x-4$, $y'(1)=-2$. Угловой коэффициент касательной равен -2, угловой коэффициент нормали равен $\dfrac{1}{2}$. Уравнение касательной $y+3=-2(x-1)$; $y=-2x-1$. Уравнение нормали $y+3=\dfrac{1}{2}(x-1)$ или $x-2y-7=0$. ▲

Пример 12. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=2+\sqrt[3]{x-3}$, проведенных в точке с абсциссой $x=3$.

Δ Находим

$$y(3)=2,\ \ y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}},\ \ y'(3)=+\infty.$$

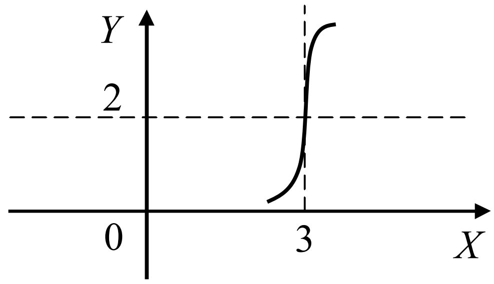


Рис. 1

Уравнение касательной $x=3$. Уравнение нормали $y=2$ (рис. 1).

Пример 13. В какой точке параболы $y^2 = 18x$ ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы?

Δ Считая x и y функциями времени t, дифференцируем обе части уравнения $y^2 = 18x$ по t. Получим $2y \cdot y'_t$.

$$\frac{y'_t}{x'_t} = 9/y = 2: \; y = 9/2, \; x = \frac{(9/2)^2}{18} = 9/8.$$

Следовательно, ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы в точке $M\left(9/8;\; 9/2\right)$. ▲

Пример 14. По оси OX движутся материальные точки, законы движения которых $x = 2t^2 - 10t + 5$ и $x = t^2 - 3t - 5$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

Δ Определим момент времени встречи точек: $2t^2 - 10t + 5 = t^2 - 3t - 5$; $t^2 - 7t + 10 = 0$; $t_1 = 2,\; t_2 = 5,\; V_1(2) = (2t^2 - 10t + 5)'\big|_{t=2} = (4t - 10)\big|_{t=2} = -2$;

$V_2(2) = (t^2 - 3t - 5)'\big|_{t=2} = (2t - 3)\big|_{t=2} = 1$. Аналогично $V_1(5) = (4t - 10)'\big|_{t=5} = 10$;

$V_2(5) = (2t - 3)'\big|_{t=5} = 7$. В момент времени $t = 2$ скорости точек противоположно направлены, поэтому скорость удаления точек друг от друга равна модулю суммы этих скоростей $V(2) = |-2 + 1| = 1$. В момент времени $t = 5$ скорость удаления точек друг от друга равна модулю разности их скоростей $V(5) = |10 - 7| = 3$. ▲

Пример 15. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до одного процента?

Δ Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. $\Delta V \approx dV = V'_R dR = 4\pi R^2 dR = 4\pi R^2 \cdot \Delta R$.

$\delta_V = \left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{4\pi R^2 dR}{4/3\; \pi R^3}\right| = 3\left|\frac{dR}{R}\right|$. $\delta_R = \left|\frac{dR}{R}\right|$. Следовательно, $\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V$.

При $\delta_V = 1\%$, $\delta_R = 1/3\%$. ▲

Пример 16. Тело движется по оси абсцисс, подчиняясь закону $x(t) = t + t^2$. С какой скоростью оно удаляется от точки $A(0;1)$ в момент времени $t = \frac{1}{2}$?

Δ Расстояние $S(t)$ тела от точки $A(0;1)$ в момент времени t равно $S(t)=\sqrt{1+(t+t^2)^2}$. Следовательно, тело удаляется от точки $A(0;1)$ со скоростью $S'(t)=\dfrac{2t+6t^2+4t^3}{2\sqrt{1+t^2+2t^3+t^4}}$. $S'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{6}{5}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Какой порядок при $\Delta x \to 0$ имеет бесконечно малая $\Delta y - dy$, если $y = x^3 - 3x$?

Отв.: второй, если $x \neq 0$; третий, если $x = 0$.

2. Вычислить приближенное значение с помощью дифференциала:

а) $\ln 1{,}01$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}98$.

Отв.: а) $\approx 0{,}01$; б) $\approx 0{,}775$.

3. Определить, насколько приблизительно увеличится объем шара, если его радиус $R = 15$ увеличить на $0{,}2$.

Отв.: 565.

4. Найти производные функций, заданных параметрически и неявно:

а) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 1 + e^{at} \\ y = at + e^{-at}; \end{cases}$ в) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$;

Отв.: а) $y'_x = \dfrac{2t - t^4}{1-2t^3}$; б) $y' = e^{-at} - e^{-2at}$; в) $y' = -\dfrac{2x+3y}{3x+2y}$.

5. Вычислить расстояние от начала координат до нормали к кривой $y = e^{2x} + x^2$, проведенной через точку с абсциссой $x = 0$. **Отв.:** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

6. Определить в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ и $f_2(x) = -x^2 + 6x - 4$.

Отв.: $M(1;1)$, $N(4;4)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{6}{7}$.

7. Составить уравнение касательной нормали к кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{2}$. **Отв.:** $x - y - \pi + 4 = 0$; $x + y = \pi$.

8. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $x^3+y^2+2x-6=0$ в точке $M\,(-1;\,3)$. **Отв.:** $5x+6y-13$; $6x-5y+21=0$.

9. В какой из точек x скорость изменения функции $y=3x^5-5x^3+5x-7$ наименьшая? **Отв.:** $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Занятие 10

Производные и дифференциалы высших порядков

Производные высших порядков. Формула Лейбница. Производные высших порядков функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциалы высших порядков. Самостоятельная работа

Пример 1. Найти $y''(x)$ для функции $y=x\sqrt{1+x^2}$.

$$\Delta\quad y'=\sqrt{1+x^2}+x\cdot\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{2\sqrt{1+x^2}};$$

$$y''=\frac{4x\cdot\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{4x+4x^3-x-2x^3}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)^{3/2}}.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Для функции $y=e^x\cdot\sin 2x$ найти $y'''(0)$.

Δ Последовательно находим $y'=e^x\cdot\sin 2x+2e^x\cdot\cos 2x$;

$y''=e^x\cdot\sin 2x+2e^x\cos 2x+2e^x\cos 2x-4e^x\cdot\sin 2x=4e^x\cos 2x-3e^x\cdot\sin 2x$;

$y'''=4e^x\cos 2x-8e^x\sin 2x-3e^x\sin 2x-6e^x\cos 2x=-2e^x\cos 2x-11e^x\sin 2x$;

$y'''(0)=-2$. $\blacktriangle$

Пример 3. Показать, что функция $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$ при любых постоянных c_1 и c_2 удовлетворяет уравнению $y''+3y'+2y=0$.

Δ $y'=-c_1e^{-x}-2c_2e^{-2x}$; $y''=c_1e^{-x}+4c_2e^{-2x}$.

$$c_1e^{-x}+4c_2e^{-2x}+3\,(-c_1e^{-x}-2c_2e^{-2x})+2\,(c_1e^{-x}+c_2e^{-2x})=$$
$$=e^{-x}(c_1-3c_1+2c_1)+e^{-2x}\,(4c_2-6c_2+2c_2)\equiv 0.\ \blacktriangle$$

Пример 4. Для функции $y=e^x\cdot(x^2-1)$ найти $y^{(24)}(x)$.

Δ Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(24)}(x)=(e^x(x^2-1))^{(24)}=C_{24}^0(e^x)^{(24)}\cdot(x^2-1)+C_{24}^1(e^x)^{(23)}(x^2-1)'+$$
$$+C_{24}^2(e^x)^{(22)}\cdot(x^2-1)''.$$

Все последующие слагаемые равны 0, так как все высшие производные от функции x^2-1, начиная с третьей, тождественно равны нулю.

$$y^{(24)}(x)=e^x(x^2-1)+24e^x\cdot 2x+\frac{24\cdot 23}{2}\cdot 1^x\cdot 2=e^x(x^2+48x+551). \ \blacktriangle$$

Пример 5. Для функции $y=x\cdot\operatorname{sh}x$ найти $(y(x))^{(100)}$.

Δ Применяя формулу Лейбница, получаем

$$(y(x))^{(100)}=(x\cdot\operatorname{sh}x)^{(100)}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k\cdot(x)^{(100-k)}\cdot(\operatorname{sh}x)^{(k)}=$$

$$=C_{100}^{99}\cdot x'\cdot(\operatorname{sh}x)^{(99)}+C_{100}^{100}\cdot x\cdot(\operatorname{sh}x)^{(100)}.$$

Все предыдущие слагаемые в формуле Лейбница равны нулю. $y^{(100)}=100\cdot\operatorname{ch}x+x\cdot\operatorname{sh}x$. $\blacktriangle$

Пример 6. Найти $y^{(n)}(x)$ для функции $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Δ $y=-\dfrac{-1-x}{1-x}=-\dfrac{1-x-2}{1-x}=-1+2(1-x)^{-1}$.

$y'=2\cdot 1\cdot(1-x)^{-2}$, $y''=2\cdot 1\cdot 2\,(1-x)^{-3}$, $y'''=2\cdot 3!\,(1-x)^{-4}$.

Естественно предположить, что $y^{(n)}=2\cdot n!\,(1-x)^{-(n+1)}$. Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции. При $n=1$ формула верна. Предположим, что она верна при $n=k$, т. е. $y^{(k)}=2\cdot k!\,(1-x)^{-(k+1)}$. Тогда $y^{(k+1)}=2\cdot k!\,(k+1)\cdot(1-x)^{-(k+2)}=2\cdot(k+1)!\cdot(1-x)^{-(k+2)}$. Следовательно, формула верна при $n=k+1$. Отсюда вытекает справедливость формулы при всех значениях n.

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Найти $y'''(x)$, если $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^3\end{cases}$, $t>0$.

Δ Последовательно находим

$$y'(x)=\frac{y'_t}{x't}=\frac{3t^2}{1/t}=3t^3,\quad y''(x)=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{9t^2}{1/t}=9t^3,$$

$$y'''(x)=\frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t}=\frac{27t^2}{1/t}=27t^3. \ \blacktriangle$$

Пример 8. Для функции $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ найти y''_{xx}.

Δ Производную второго порядка можно найти по формуле

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

$$x'_t = 3t^2 + 3,\ \ x''_{tt} = 6t,\ \ y'_t = 3t^2 - 3,\ \ y''_{tt} = 6t.$$

$$y''_{xx} = \frac{(3t^2+3)\cdot 6t - 6t\,(3t^2-3)}{(3t^2+3)^3} = \frac{36t}{(3t^2+3)^3} = \frac{4t}{3\,(t^2+1)^3}. \ ▲$$

Пример 9. Вычислить y'' в точке $M\ (1;1)$, если

$$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0.$$

Δ Дифференцируя равенство по x, получаем

$$2x + 5y + 5xy' + 2y\cdot y' - 2 + y' = 0,$$

откуда $y' = -\dfrac{2x+5y-2}{5x+2y+1}$ и $y'(M) = -\dfrac{2+5-2}{5+2+1} = -\dfrac{5}{8}$. Еще раз дифференцируем равенство по $x: 2 + 5y' + 5y' + 5x\cdot y'' + 2y\cdot y'' + 2y'\cdot y' + y'' = 0$. Найдем y'' из соотношения $y'' = -\dfrac{2+10y'+2y'^2}{5x+2y+1}$. Подставляя в последнее равенство $x = 1,\ \ y = 1,\ \ y' = -\dfrac{5}{8}$, получаем $y''(M) = \dfrac{111}{256}$. ▲

Пример 10. Найти d^2y, если $y = e^{-x^2}$ (x – независимая переменная).

Δ Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле $d^2y = y''(dx)^2 = (e^{-x^2})''\cdot(dx)^2$. $y' = (e^{-x^2})' = -2x\cdot e^{-x^2}$; $y'' = 2\cdot e^{-x^2}(2x^2-1)$. Следовательно, $d^2y = 2\cdot e^{-x^2}\cdot(2x^2-1)\cdot(dx)^2$. ▲

Пример 11. Найти d^ny, если $y = \sin(3x+5)$ (x – независимая переменная).

Δ Как известно, $d^ny = 3^n\cdot\sin\left(3x+5+n\cdot\pi/2\right)\cdot(dx)^n$. ▲

Пример 12. Найти d^2y, если $y = 4x^3 + 2x + 3$ и $x = x(t)$ – функция аргумента t.

Δ В силу свойства инвариантности $dy = y'dx = (12x^2+2)\,dx$.

$$d^2y = d\,(dy) = d\,((12x^2+2)\,dx) = d\,(12x^2+2)\cdot dx + (12x^2+2)\,d\,(dx) =$$
$$= 24x(dx)^2 + (12x^2+2)\,d^2x. \ ▲$$

Дополнительные задачи

1. Найти $y^{(8)}$ для функции $y=\dfrac{x^2}{1-x}$. **Отв.:** $y^{(8)}=8!\cdot(1-x)^{-9}$ $(x\neq 1)$.

2. Для функции $y=x^2\cdot e^{-x}$ найти d^3y. **Отв.:** $d^3y=-e^{-x}(x^2-6x+6)$.

3. Для функции $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ найти y''_{x^2} и y'''_{x^3}.

Отв.: $y''_{x^2}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{1-t}$, $y'''_{x^3}=\dfrac{3}{8}\dfrac{1}{(1-t)^3}$ $(t\neq 1)$.

4. Для функции, заданной неявно, $x^2+y^2=25$, найти y''_{x^2} и y'''_{x^3}.

Отв.: $y''_{x^2}=\dfrac{-25}{y^3}$, $y'''_{x^3}=\dfrac{-75x}{y^5}$.

5. Применяя формулу Лейбница для функции $y=e^x(3x^2-4)$, найти $y^{(20)}$.

Отв.: $y^{(20)}=e^x\cdot(3x^2+120x+1136)$.

6. Для следующих функций найти $y^{(n)}$.

а) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; б) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Отв.: а) $y^{(n)}=4^{n-1}\cdot\cos\left(4x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$; б) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\left(\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$.

Самостоятельная работа (45 мин)

В1

1. $y=\sin^3 2x$; $y'-?$ **Отв.:** $y'=6\cdot\sin^2 2x\cdot\cos 2x$.

2. $y=\dfrac{(5+2x)^4}{(4-3x)^3}$; $y'-?$ **Отв.:** $y'=\dfrac{(5+2x)^3\cdot(77-6x)}{(4-3x)^4}$.

3. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; $y'-?$ **Отв.:** $y'=\dfrac{x\cdot\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$.

4. $y=(\sin 2x)^{\frac{1}{x^2}}$; $y'-?$ **Отв.:** $y'=(\sin 2x)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(2\operatorname{ctg}2x\cdot\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln\sin 2x}{x^3}\right)$.

5. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; $y'_x-?$ **Отв.:** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

6. Вычислить приращение и дифференциал функции $y=x^2+2x+3$ в точке $x=1$ при $\Delta x=0{,}2$. Оценить погрешность при замене Δy на dy.

Отв.: $\Delta y\left|\begin{array}{l}x=1\\ \scriptstyle\Delta x=0,2\end{array}\right.=0{,}84;\quad \Delta y\left|\begin{array}{l}x=1\\ \scriptstyle\Delta x=0,2\end{array}\right.=0{,}8;\ |\Delta y-dy|=0{,}04$.

7. Найти расстояние между кривой $y=x^2+x+1$ и прямой $y=3x-10$.
Отв.: $\sqrt{10}$.

8. $\begin{cases}x(t)=e^t\cdot\cos t\\ y(t)=e^t\cdot\sin t;\end{cases}\quad y''_{xx}-?\quad$ **Отв.:** $y''_{xx}=\dfrac{2\cdot e^{-t}}{(\cos t-\sin t)^3}$.

9. $y=(x^2-95)\cdot\operatorname{sh}2x,\ \ y^{(20)}-?$ **Отв.:** $y^{(20)}=2^{20}\cdot x\,(x\cdot\operatorname{sh}2x+20\cdot\operatorname{ch}2x)$.

В2

1. $y=\operatorname{tg}^2 3x;\ \ y'-?$ **Отв.:** $y'=\dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$.

2. $y=\dfrac{(2+3x)^3}{(3-4x)^2};\ \ y'-?$ **Отв.:** $y'=\dfrac{(2+3x)^2\cdot(43-12x)}{(3-4x)^3}$.

3. $y=\dfrac{\text{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x};\ \ y'-?$ **Отв.:** $y'=\dfrac{x\cdot\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

4. $y=(\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}};\ \ y'-?$ **Отв.:** $y'=(\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}\cdot\left(-3\operatorname{tg}3x\cdot\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}\cdot\ln\cos 3x\right)$.

5. $y=x^3+y^3-3axy;\ \ y'_x-?$ **Отв.:** $y'=\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$.

6. Вычислить приращение и дифференциал функции $y=x-3x^2$ в точке $x=1$ при $\Delta x=0{,}1$. Оценить погрешность при замене Δy на dy.

Отв.: $\Delta y\left|\begin{array}{l}x=1\\ \scriptstyle\Delta x=0,1\end{array}\right.=-0{,}53;\quad \Delta y\left|\begin{array}{l}x=1\\ \scriptstyle\Delta x=0,1\end{array}\right.=-0{,}50;\ |\Delta y-dy|=0{,}03$.

7. Найти расстояние между кривой $y=x^2-2x+3$ и прямой $y=2x-6$.
Отв.: $\sqrt{5}$.

8. $\begin{cases}x(t)=\ln\cos t\\ y(t)=\ln\cos 2t;\end{cases}\quad y''_{xx}-?\quad$ **Отв.:** $y''_{xx}=\dfrac{-8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$.

9. $y=(x^2-60)\cdot\operatorname{ch}2x,\ \ y^{(16)}-?$ **Отв.:** $y^{(16)}=2^{16}\cdot x\,(x\cdot\operatorname{ch}2x+16\cdot\operatorname{sh}2x)$.

Занятие 11

Теоремы о среднем. Правило Лопиталя

Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа и Коши. Раскрытие неопределенностей различных видов с помощью правила Лопиталя

Пример 1. Методом выделения полного квадрата найти для функции $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$ точку, в которой она принимает наименьшее значение, и для этой точки проверить выполнение всех условий теоремы Ферма.

$$\Delta\ 2x^2 - 5x + 7 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right).$$

Функция принимает наименьшее значение при $x = \frac{5}{4}$. Функция определена на $(-\infty, \infty)$. В точке $x = \frac{5}{4}$ существует конечная производная. $f'\left(\frac{5}{4}\right) = (4x - 5)\Big|_{x=\frac{5}{4}} = 0.$

Производная в этой точке действительно равна нулю. ▲

Пример 2. Проверить выполнение всех условий теоремы Роля для функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, заданной на отрезке $[-1; 1]$.

Δ Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на $[-1; 1]$, ее значения $f(-1) = f(1) = 0$ на концах этого отрезка равны, ее производная $f'(x) = \dfrac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$ конечна во всех точках интервала $(-1; 1)$ кроме точки $x = 0$. Таким образом, одно из условий теоремы Роля не выполнено, и эта теорема не применима к данной функции (рис. 2). ▲

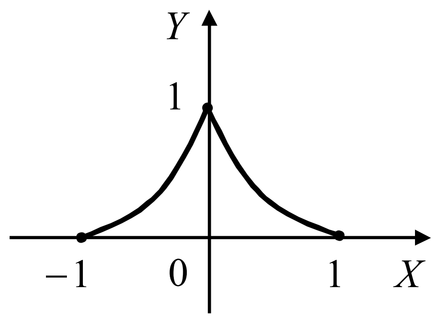


Рис. 2

Пример 3. Доказать, что $|\cos x - \cos y| \le |x - y|\ \ \forall x, y$.

Δ По формуле Лагранжа, $\cos x - \cos y = \sin\varsigma \cdot (x - y)$, $|\cos x - \cos y| = |\sin\varsigma| \cdot |x - y|$, где ς – некоторая точка из интервала $(x; y)$. Так как $|\sin\varsigma| \le 1$, то $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$. ▲

Пример 4. Доказать тождество $\operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Δ Обе функции определены на всей числовой прямой. Найдем производные этих функций.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

На основании следствия из теоремы Лагранжа можно сделать вывод, что сами функции отличаются на постоянную, т. е. $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$. Для определения постоянной c в этом равенстве положим, например, $x = 0$, тогда и $c = 0$. ▲

Пример 5. Проверить, что функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$ и $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1; 4]$ и найти соответствующее значение ξ.

Δ Данные функции непрерывны на $[1; 4]$, их производные $f'(x) = 2x - 2$ и $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$ конечны везде; кроме того, $g'(x)$ не обращается в нуль ни при одном значении x. Таким образом, формула Коши к заданным функциям применима.

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \frac{11-2}{27-9} = \frac{2\xi - 2}{3\xi^2 - 14\xi + 20} \quad (1 < \xi < 4).$$

Решая это уравнение, получим $\xi_1 = 2$ и $\xi_2 = 4$. Внутренней точкой является $\xi = 2$. ▲

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} \beta x}$.

Δ Данный предел является неопределенностью $\frac{0}{0}$. Проверим выполнение всех условий, позволяющих применять правило Лопиталя:

1) функции $y = \sin \alpha x$ и $y = \operatorname{tg} \beta x$ дифференцируемы в окрестности точки $x = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin \alpha x = \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} \beta x = 0$;

3) $(\operatorname{tg} \beta x)' = \frac{\beta}{\cos^2 \beta x} \neq 0$ в окрестности точки $x = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sin \alpha x)'}{(\operatorname{tg} \beta x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha \cdot \cos \alpha x \cdot \cos^2 \beta x}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$. ▲

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

Δ Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Все условия теоремы выполнены. Найдем предел отношения производных

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot 3x^2}.$$

Это выражение также является неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$. Можно опять находить предел отношения производных, но проще использовать первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$. ▲

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x^n}$ $(a>1,\ n\in N)$.

$$\Delta\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\cdot\ln a}{n\cdot x^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\cdot\ln^n a}{n!} = \infty.\ ▲$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Δ Неопределенность $(\infty-\infty)$ приводим к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$.

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}$. Дважды применяем правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} = \frac{1}{2}.\ ▲$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x$.

Δ Неопределенность $0\cdot(-\infty)$. Простое изменение записи позволяет получить неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ и применить правило Лопиталя

$$\lim_{x\to +0} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{(-1/x^2)} = 0.\ ▲$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Δ Представим $\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ в виде $e^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}$ и вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\sin^2 x}$. Предварительно произведем упрощение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-x}{x^3}=\frac{0}{0}.$$

Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{arctg} x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{-\frac{1}{3}}$. ▲

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{3x-\cos x}$.

Δ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+\sin x)'}{(3x-\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{3+\sin x}$. Этот предел не существует, т. е. правило Лопиталя применять нельзя. Покажем, что искомый предел существует. Действительно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{3x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x}}{3-\frac{\cos x}{x}}=\frac{2}{3}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Доказать, что корни производной многочлена

$$P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

действительные, простые и лежат на интервалах $(0;1),(1;2),(2;3),(3;4)$.

2. Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{при} \quad 0 \le x \le 1\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad 1 < x < +\infty\end{cases}$$

на отрезке $[0;\ 2]$. **Отв.:** $c_1=\dfrac{1}{2},\ c_2=\sqrt{2}$.

3. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать, что $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b| \le |a-b|$.

4. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$. **Отв.:** $\dfrac{49}{198}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$. **Отв.:** 2.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{x^2}}$. **Отв.:** $-\dfrac{2}{11}$.

г) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$. **Отв.:** $-\infty$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

е) $\lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)^{\frac{3}{1+2\ln(x-2)}}$. **Отв.:** $e^{3/2}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-1}{\ln x-x+1}$. **Отв.:** -2.

5. Установить эквивалентность функций $1-\cos x-\dfrac{x^2}{2}$ и $\dfrac{x^4}{24}$ при $x\to 0$.

6. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ не может быть вычислен по правилу Лопиталя, и найти его. **Отв.:** 0.

Занятие 12

Формула Тейлора

Многочлен Тейлора. Остаточные члены формулы Тейлора в форме Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Приложения формулы Тейлора

Пример 1. Разложить многочлен $P(x)=x^3-2x^2+3x+5$ по степеням $x-2$, пользуясь формулой Тейлора.

Δ Запишем формулу Тейлора при $x_0=2$.

$$P(x)=P(2)+\frac{P'(2)}{1!}(x-2)+\frac{P''(2)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+R_n.$$

$$P(2)=11;\ P'(x)=3x^2-4x+3;\ P'(2)=7;\ P''(x)=6x-4;\ P''(2)=8;$$

$$P'''(x)=6;\ P'''(2)=6.$$

Все остальные производные равны нулю. Подставляя найденные значения производных в формулу Тейлора, получаем $P(x)=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$. В данном случае $R_3=0$. ▲

Пример 2. Представить функцию $y=\operatorname{tg}x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 включительно с остаточным членом в форме Пеано.

Δ Найдем производные функции $f(x)=\operatorname{tg}x$ до третьего порядка включительно: $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x$; $f''(x)=2\cos^{-3}x\cdot\sin x$; $f'''(x)=6\cos^{-4}x\cdot\sin^2 x+$ $+2\cos^{-2}x$. Отсюда получаем $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=2$. По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеем $\operatorname{tg}x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. Заметим, что $f^{(4)}(0)=0$, так как функция $\operatorname{tg}x$ является нечетной. Поэтому можно записать $\operatorname{tg}x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$. ▲

Пример 3. Разложить по формуле Тейлора по степеням $(x-1)$ до $o((x-1)^n)$ функцию $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x-3}$.

Δ Как известно,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n),\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

Следовательно, $\dfrac{4}{x^2-2x-3}=\dfrac{4}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{(x-1)-2}-$

$$-\frac{1}{(x-1)+2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{2^n}\right)+$$

$$+o((x-1)^n)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}-\ldots+\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n}\right)+o((x-1)^n)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1+(-1)^k}{2^k}(x-1)^k+o((x-1)^n).\ \blacktriangle$$

Пример 4. Используя основные разложения, представить функцию $f(x)=\ln\cos x$ по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно.

Δ Пользуясь разложением косинуса, получим

$$\ln(\cos x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)=\ln(1+t),$$

где $t=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5)$. Теперь воспользуемся разложением логарифма

$$\ln\cos x=\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2+$$

$$+o(x^5)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^5)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5).$$ (Очевидно, что $\dfrac{t^3}{3}=o(x^5)$.) $\blacktriangle$

Пример 5. Вычислить приближенно $\cos 9°$, ограничившись тремя членами формулы Тейлора. Оценить допущенную при этом погрешность.

$$\Delta\ \cos 9°=\cos\frac{\pi}{20}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4+\frac{1}{6!}(\cos x)^{(6)}\bigg|_{x=\zeta}\left(\frac{\pi}{20}\right)^6.$$

$$\cos 9°\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4\approx 0{,}98769.$$

Оценим допущенную погрешность $|\alpha|=\dfrac{1}{6!}\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^6\cdot|\cos\zeta|<\dfrac{1}{6!}\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^6<10^{-5}$. $\blacktriangle$

Пример 6. Оценить погрешность приближенной формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ при } |x| \le 0{,}2.$$

Δ Остаточный член формулы Тейлора $R_3(x) = \dfrac{(-1)^3 \cdot x^4}{4(1+\theta x)^4}$, $0 < \theta < 1$. При $|x| \le 0{,}2$ найдем $|R_3(x)| \le \dfrac{0{,}2^4}{4} = 0{,}0004$. ▲

Пример 7. Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} = P_n(x)$ при $0 < x < 1$.

Δ Оценим $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$. $|R_n(x)| \le \dfrac{3}{(n+1)!}$. ▲

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \cdot \operatorname{tg} x}$.

Δ Исходя из вида знаменателя, можно предположить, что определяющую роль при вычислении этого предела должны играть члены четвертого порядка малости по сравнению с x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \cdot \operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^3 \cdot (x + o(x))} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4 + o(x)^4} = -\frac{1}{12}.$$

Заметим, что в числителе вместо $o(x^5)$ мы записали $o(x^4)$, что в нашем примере является допустимым. ▲

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x + \dfrac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x(\operatorname{tg} x - x)}}$.

Δ Обозначим выражение под знаком предела через y и прологарифмируем его.

$$\ln y = \frac{1}{x(\operatorname{tg} x - x)} \cdot \ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right); \quad \lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right)}{x(\operatorname{tg} x - x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}{x\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)-x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{\frac{x^4}{3}+o(x^5)} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{tg} x - x)}} = e^{\frac{1}{8}}. \quad \blacktriangle$$

Пример 10. Используя метод неопределенных коэффициентов, представить функцию $y = \operatorname{tg} x$ формулой Маклорена до члена с x^5.

Δ Поскольку функция $\operatorname{tg} x$ нечетная, то ее разложение в окрестности точки $x = 0$ имеет вид $\operatorname{tg} x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6)$. Так как

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)},$$

то

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6))\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right),$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = Ax + \left(B - \frac{A}{2}\right)x^3 + \left(C + \frac{A}{4!} - \frac{B}{2}\right)x^5 + o(x^6).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $A = 1,\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{2}{15}$.

Таким образом, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),\ x \to 0$. $\blacktriangle$

Дополнительные задачи

1. Многочлен $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ разложить по степеням $(x+1)$.

Отв.: $P_4(x) = 1 + 4(x+1) - 3(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + (x+1)^4$.

2. Применив непосредственно формулу Тейлора, разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням $(x-1)$ до $o((x-1)^2)$.

Отв.: $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

3. Вычислить приближенно (взяв два члена разложения в формуле Маклорена) $\sqrt[3]{10}$.

Отв.: $2{,}17$.

4. Функцию $f(x) = a \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $a > 0$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно заменить параболой второго порядка.

Отв.: $f(x) = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2)$, $x \to 0$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^4}$. **Отв.:** 0.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{\ln(1+\sin^4 x)}$. **Отв.:** $\frac{1}{3}$.

6. Известно, что $f(x)$ – многочлен четвертой степени, причем $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = f^{(4)}(1) = 12$. Найти $f''(2)$ и $f'''(0)$.

Отв.: $f''(2) = 18$, $f'''(0) = 0$.

7. Для функции $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ найти $f^{(10)}(0)$.

Отв.: -945.

Занятие 13

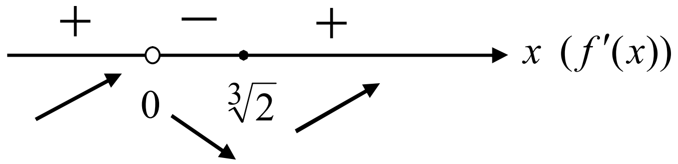
Исследование функций с помощью производных

Монотонность и экстремумы функций. Необходимые и достаточные условия экстремума

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ и точки экстремума.

Δ Область определения функции $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На каждом из бесконечных интервалов функция дифференцируема $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3}$.

$f'(x) = 0$ при $x_0 = \sqrt[3]{2}$. Точка $x_0 = \sqrt[3]{2}$ разбивает область определения данной функции на три интервала: $(-\infty; 0), (0; \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2}; +\infty)$. В каждом из интервалов производная сохраняет постоянный знак.

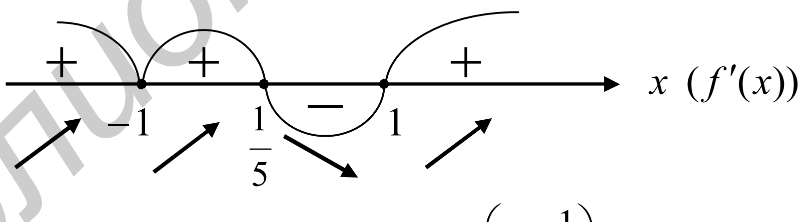


На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(\sqrt[3]{2}; +\infty)$ функция возрастает. На интервале $(0; \sqrt[3]{2})$ функция убывает. Точка $x = \sqrt[3]{2}$ является точкой минимума.

Замечание. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке $x = \sqrt[3]{2}$, то эту точку можно присоединить и к промежутку возрастания, и к промежутку убывания функции. Окончательно функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $[\sqrt[3]{2}; +\infty)$ и убывает на промежутке $(0; \sqrt[3]{2}]$. В точке $x = \sqrt[3]{2}$ функция достигает минимума. ▲

Пример 2. Найти промежутки возрастания, убывания и точки локальных экстремумов функции $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1)^3$.

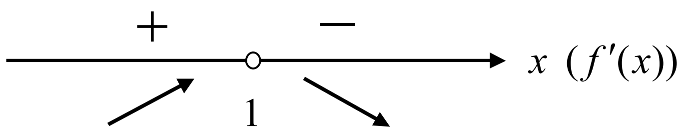
Δ Функция определена, непрерывна и дифференцируема на $(-\infty; +\infty)$. $f'(x) = (x-1) \cdot (x+1)^2 \cdot (5x-1)$. $f'(x) = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{1}{5}$. Определяем знаки производной на интервалах $(-\infty; -1)$, $\left(-1; \dfrac{1}{5}\right), \left(\dfrac{1}{5}; 1\right)$ и $(1; +\infty)$.



$f'(x) > 0$ на следующих промежутках: $(-\infty; -1)$; $\left(-1; \dfrac{1}{5}\right)$; $(1; +\infty)$. Так как точки $-1; \dfrac{1}{5}; 1$ являются точками непрерывности функции, то функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right]$ и $[1; +\infty)$. Функция убывает на промежутке $\left[\dfrac{1}{5}; 1\right]$. Точка $x = \dfrac{1}{5}$ является точкой максимума функции, точка $x = 1$ является точкой локального минимума. ▲

Пример 3. Найти промежутки возрастания, убывания и точки локальных экстремумов функции $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

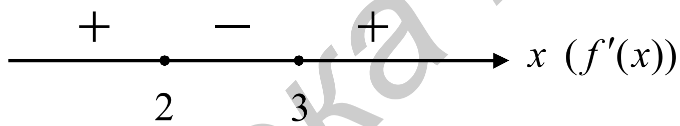
Δ Функция непрерывна при всех значениях x. $f'(x)=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.



В точке $x=1$ производная не существует. Но так как в этой точке функция непрерывна, то функция возрастает на промежутке $(-\infty;1]$, функция убывает на промежутке $[1;+\infty)$. Точка $x=1$ является точкой локального максимума (острый максимум). ▲

Пример 4. Найти экстремумы функции $f(x)=2x^3-15x^2+36x-10$.

Δ Находим производную функции $f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-2)(x-3)$, $f'(x)=0$ при $x_1=2, x_2=3$. Эти точки являются критическими. Экстремумы могут быть только в этих точках.



Так как в окрестности $x_1=2$ знак первой производной при увеличении x изменяется с «+» на «–», то $x_1=2$ является точкой максимума. Для точки $x_2=3$ знак первой производной изменяется с «–» на «+», т. е. $x_2=3$ – точка минимума. Тот же результат можно получить, используя вторую производную. Найдем вторую производную и вычислим значения второй производной в критических точках: $f''(x)=12x-30$, $f''(2)=-6<0$ и $f''(3)=6>0$, т. е. $x_1=2$ – точка максимума, а $x_2=3$ – точка минимума. Вычислив значения функции в точках $x_1=2$ и $x_2=3$, найдем экстремумы функции: максимум $f(2)=18$ и $f(3)=17$. ▲

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Δ Функция определена и непрерывна при всех $x\in R$.

$$f'(x)=\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}},\ x\neq 1,\ x\neq 2.$$

В точках $x=1$ и $x=2$ производная не существует. Таким образом, функция имеет три критические точки: $x_1=1$, $x_2=\dfrac{4}{3}$, $x_3=2$. При переходе через точку $x=1$ производная не меняет знака, поэтому критическая точка $x_1=1$ не является точкой экстремума. При переходе через точку $x_2 = \frac{4}{3}$ производная меняет знак с «–» на «+», поэтому в точке $x_2 = \frac{4}{3}$ функция имеет минимум. При переходе через точку $x_3 = 2$ производная меняет знак с «+» на «–», поэтому $x_3 = 2$ – точка острого максимума. Минимум функции равен $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, а максимум – $f(2) = 0$. ▲

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ в точке $x = 0$.

Δ Определим порядок первой отличной от нуля производной в точке $x = 0$: $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$, $f'(0) = 0$; $f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$, $f''(0) = 0$; $f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$, $f'''(0) = 0$; $f^{\mathrm{IV}}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$, $f^{\mathrm{IV}}(0) = 2 > 0$.

Так как первой отличной от нуля производной в точке $x = 0$ оказалась производная четного порядка, принимающая положительное значение, то в этой точке минимум: $f(0) = 2$. ▲

Пример 7. Построить график функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ с помощью производной первого порядка.

Δ 1. Функция определена $\forall x \in R$.

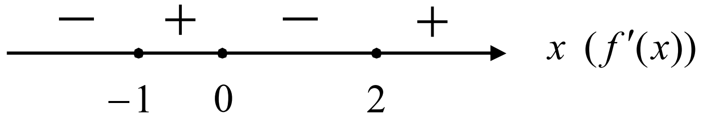
2. Данная функция – функция общего вида.

3. Найдем нули функции: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$, $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$, $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$, $x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0$, $x_{1,2} = 0, x_3 \approx -1{,}4$, $x_4 \approx 2{,}8$.

Возьмем также две дополнительные точки, например: $f(1) = -\frac{13}{12}$, $f(3) = \frac{9}{4}$.

4. Находим производную: $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$. Критическими точками функции являются точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

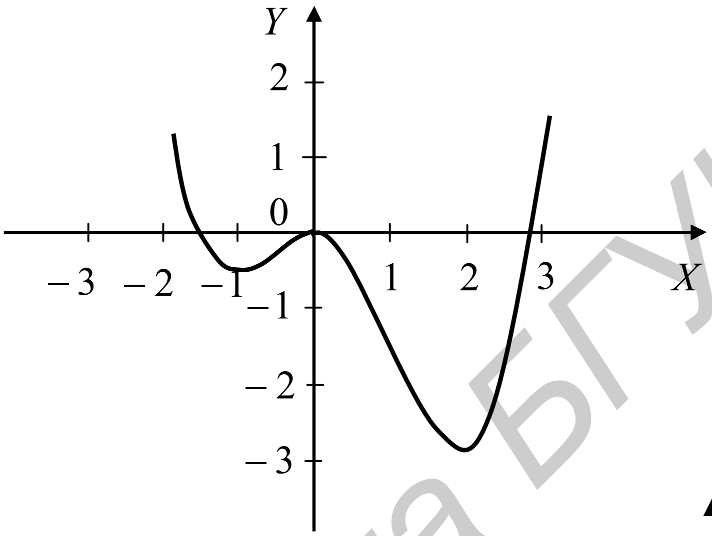
Найденные критические точки разбивают числовую прямую на четыре интервала. Находим знаки производной $f'(x)$ на этих промежутках



Результаты исследования заносим в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	min $-5/12$	↗	max 0	↘	min $-8/3$	↗

По этим данным строим график искомой функции:



▲

Дополнительные задачи

1. Определить интервалы монотонности функций:

а) $y = x^3 - 3x + 5$; б) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; в) $y = 2x^2 - \ln x$.

Отв.: а) на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, на $(-1; 1)$ – убывает; б) на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ – убывает; в) на $\left(0; 1/2\right)$ функция убывает, на $\left(1/2; +\infty\right)$ – возрастает.

2. Доказать, что $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, если $x > 0$.

3. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = (1 - x^2)^3$; б) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$; в) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Отв.: а) $y_{\max} = y(0) = 1$; б) $y_{\min} = y(\pm 2) = 4$; в) $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = \dfrac{4}{e^2}$.

4. Пользуясь второй производной, выяснить характер экстремумов функ-

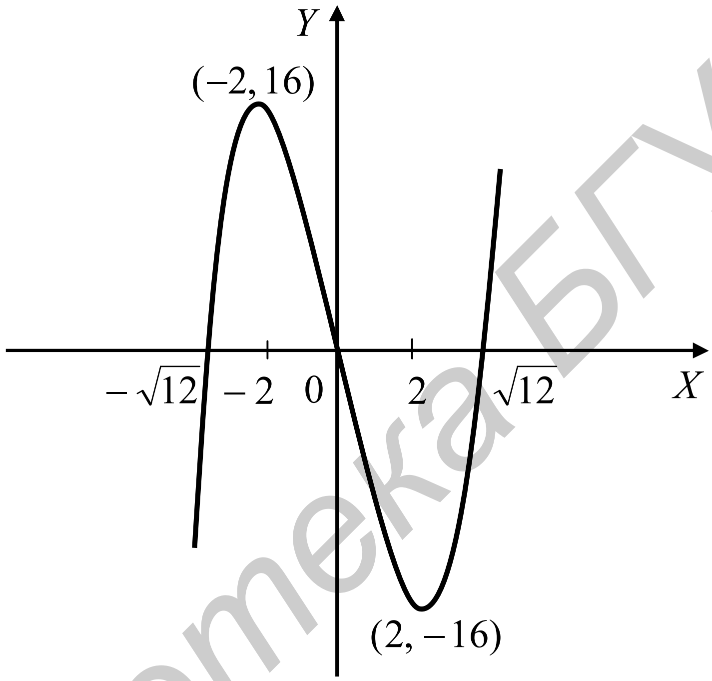
ции $y = 2\sin x + \cos 2x$.

Отв.: $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$ – точки максимума, $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ – точки минимума. $T = 2\pi$.

5. Исследовать на экстремум в точке $x = 0$ функцию $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$.

Отв.: точка $x = 0$ не является точкой экстремума.

6. Построить график функции $y = x^3 - 12x$ с помощью производной первого порядка.



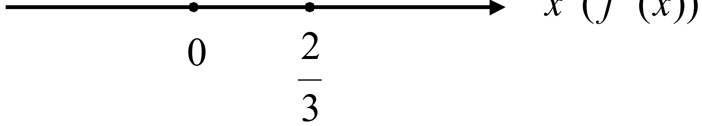
Занятие 14

Исследование функций и построение графиков

Выпуклость и точки перегиба функции. Асимптоты функции. Общая схема построения графика функции. Построение графиков.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

Δ Функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке числовой прямой, и $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x \cdot (x - 2/3)$.



Так как $f''(x)=0$ при $x=0$ и $x=2/3$, $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(0;\,2/3)$ и $f(x)$ непрерывна в точках $x=0$ и $x=2/3$, то функция $f(x)$ на промежутках $(-\infty;0)$ и $(2/3;+\infty)$ является выпуклой вниз, на промежутке $(0;\,2/3)$ – выпуклой вверх, а точки $x=0$ и $x=2/3$ являются точками перегиба этой функции. ▲

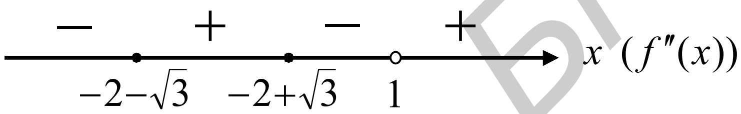
Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^3}.$$

Δ Функция дифференцируема при всех $x\in R$, кроме $x=1$, причем

$$f'(x)=-\frac{x(x+2)}{(x-1)^4},\ \ f''(x)=2\,\frac{x^2+4x+1}{(x-1)^5}=2\,\frac{(x-(-2-\sqrt{3}))\cdot(x-(-2+\sqrt{3}))}{(x-1)^5}.$$

В точках $x=-2\pm\sqrt{3}$ вторая производная равна нулю, а в точке $x=1$ она не существует.



На интервалах $(-\infty;-2-\sqrt{3})$ и $(-2-\sqrt{3};1)$ функция выпукла вверх, на интервалах $(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3})$ и $(1;+\infty)$ функция выпукла вниз. Точки $x=-2\pm\sqrt{3}$ являются точками перегиба функции. (В точке $x=1$ функция не определена, поэтому эта точка не является точкой перегиба функции). ▲

Пример 3. Определить, является ли точка $x=0$ точкой перегиба функции

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}.$$

Δ $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$, $\qquad f''(x)=-\sin x+x,\quad f''(0)=0;$

$f'''(x)=-\cos x+1,\quad f'''(0)=0;\qquad f^{(4)}(x)=\sin x,\quad f^{(4)}_{(0)}(0)=0;$

$f^{(5)}(x)=\cos x,\quad f^{(5)}(0)=1\neq 0.$

Так как 5 – нечетное число, точка $x=0$ является точкой перегиба для функции $f(x)$. ▲

Пример 4. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x}$.

Δ Функция определена для всех x, кроме $x=1$. Вычислим пределы

$$\lim_{x\to-0}\frac{x^2-2x+2}{x}=-\infty\ \text{ и }\ \lim_{x\to+0}\frac{x^2-2x+2}{x}=+\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ – двусторонняя вертикальная асимптота графика функции. Для нахождения наклонных асимптот графика представим данную функцию в виде

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x} = x - 2 + \frac{2}{x}.$$

Так как $\frac{2}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, то из определения наклонной асимптоты следует, что прямая $y = x - 2$ является двусторонней наклонной асимптотой графика указанной функции. Поскольку $\frac{2}{x} < 0$ при $x < 0$,

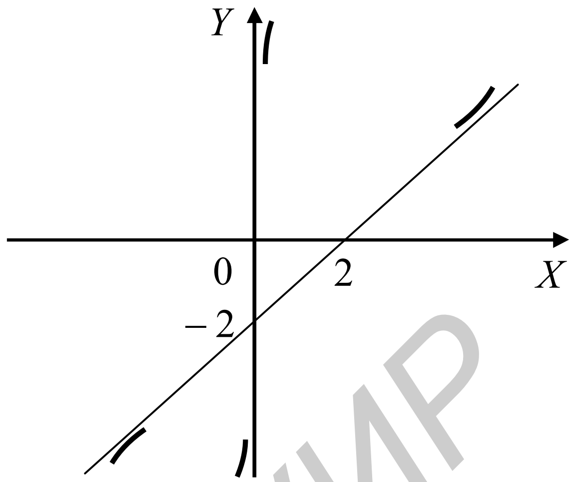


Рис. 3

кривая графика лежит выше асимптоты при $x \to +\infty$ и ниже ее – при $x \to -\infty$ (рис. 3). ▲

Пример 5. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

Δ Функция непрерывна на всей числовой прямой, поэтому вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты $y = k\,x + b$.

$$k_{1,2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} = 0.$$

$$b_{1,2} = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - k\,x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \begin{cases} 1 \text{ при } x \to +\infty \\ -1 \text{ при } x \to -\infty. \end{cases}$$

Следовательно, график функции имеет две наклонные (горизонтальные) асимптоты: правостороннюю – $y = 1$ и левостороннюю – $y = -1$. Так как $\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} > 1$, график функции расположен относительно своих асимптот следующим образом (рис. 4):

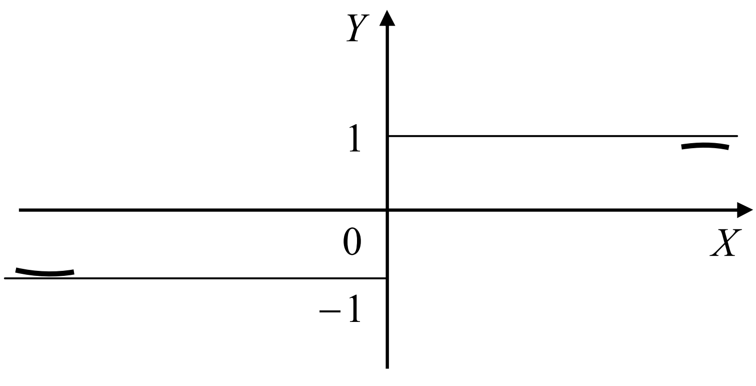


Рис. 4 ▲

Пример 6. Построить график функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x\,(x - 1)^2}.$$

Δ 1. Функция определена $\forall x \in R$.

2. Функция не является четной, нечетной или периодической (это

функция общего вида).

3. График функции проходит через начало координат, так как $f(0)=0$; кроме того, $f(1)=0$.

4. Производная функции $f'(x)=\dfrac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$. Критическими точками функции являются $x_1=\dfrac{1}{3}$ (в ней производная обращается в нуль) и точки $x_2=0$ и $x_3=1$ (в этих точках производная бесконечна). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;0)$, $(0;1/3)$, $(1/3;1)$ и $(1;+\infty)$. Исследуем знак производной на этих промежутках. Результаты исследования заносим в таблицу.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1/3)$	$1/3$	$(1/3;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	нет экст. 0	$\nearrow$	max $\approx 0{,}53$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$

5. Находим $f''(x)=\dfrac{-2}{9\cdot\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$. Вторая производная не обращается в нуль, а в точках $x_1=0$ и $x_2=1$ не существует. Эти точки являются точками возможного перегиба. Составим таблицу.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	не сущ.	$-$	не сущ.	$-$
$f(x)$	выпукла вниз	перегиб 0	выпукла вверх	нет перегиба 0	выпукла вверх

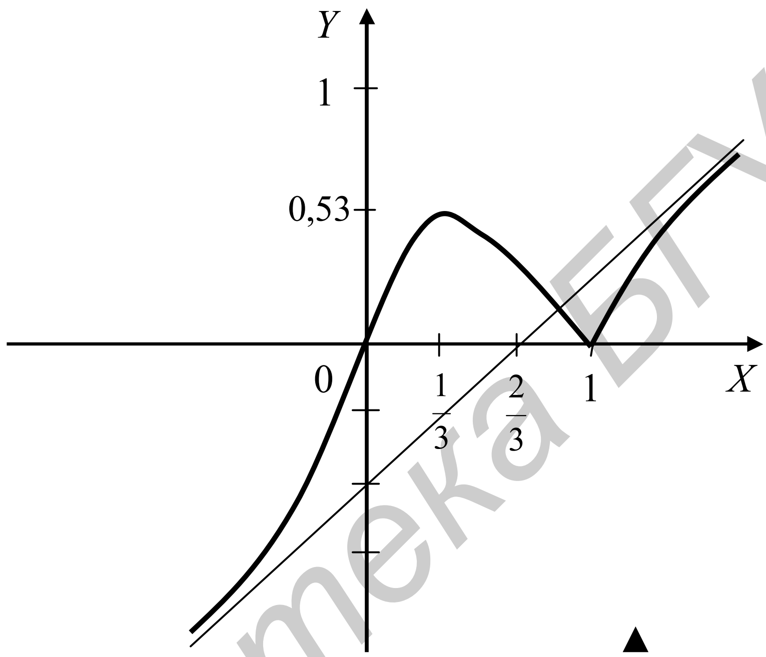
6. Ввиду непрерывности функции вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x}=\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1)^2-x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2}=-\frac{2}{3}.$$

График функции имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x-\dfrac{2}{3}$. Строим график функции.



▲

Дополнительные задачи

1. Найти интервалы выпуклости функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$.
Отв.: выпукла вверх при $x>0$ и выпукла вниз при $x<0$.

2. При каких a кривая $y=x^4+ax^3+\dfrac{3}{2}x^2+1$ выпукла вниз для всех $x\in R$.
Отв.: $a\le 2$.

3. Найти точки перегиба функций: а) $f(x)=4x^2+\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$.

Отв.: а) $x=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$; б) $x=-3$ и $x=-1$.

4. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b и c, чтобы функция $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ имела точки перегиба?

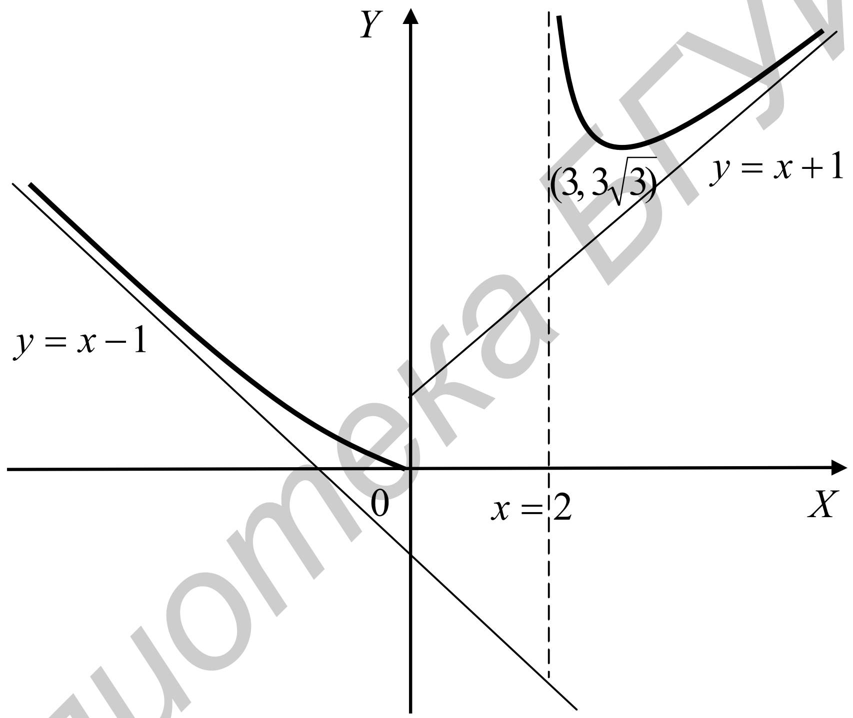
Отв.: $3b^2 > 8ac$.

5. Найти асимптоты графиков функций:

а) $f(x) = x + \dfrac{\ln|x|}{x}$; б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; в) $f(x) = x + 2\operatorname{arctg} x$.

Отв.: а) $x = 0$ и $y = x$; б) $x = 0$; $y = 1$ – правосторонняя асимптота, $y = -1$ – левосторонняя асимптота; в) $y = x$ – правосторонняя асимптота и $y = x + 2\pi$ – левосторонняя асимптота.

6. Исследовать функцию и построить ее график $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.



Занятие 15

Задачи на наименьшее и наибольшее значение функции

Глобальный экстремум функции. Прикладные задачи на экстремум

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - 4x$ на отрезке $[0; 2]$.

Δ Найдем критические точки функции. $f'(x) = 4x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 1$. Вычислим значения функций в критических точках, принадлежащих интервалу

$(0;\,2)$ и на концах отрезка. $f(1)=\frac{4}{3}-4=-\frac{8}{3}$, $f(0)=0$, $f(2)=\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}$.

Наименьшее значение функции $f(1)=-\frac{8}{3}$, наибольшее значение функции $f(2)=\frac{8}{3}$. ▲

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=-2x^3-3x^2+4$ на промежутке $[1;\,3)$.

Δ Находим критические точки функции: $y'(x)=-6x^2-6x=-6x(x+1)$. $y'=0$ $x_1=0,$ $x_2=-1$. В промежутке $[1;\,3)$ нет критических точек. В этом промежутке производная отрицательна, следовательно, функция строго убывающая. Наибольшее значение функции равно $y(1)=-1$. Наименьшего значения функции не существует (точка 3 не принадлежит промежутку). ▲

Пример 3. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Δ Из соображений геометрического характера можно утверждать, что задача имеет хотя бы одно решение. Пусть сторона основания x, а высота y. Тогда объем V бассейна будет равен $V=x^2\cdot y=32$, а облицовочная поверхность в бассейне равна $S=x^2+4xy$, или $S=x^2+\frac{128}{x}$.

Исследуем полученную функцию на минимумы в промежутке $(0;+\infty)$. $S'=2x-\frac{128}{x^2}$; $2x-\frac{128}{x^2}=0$; $x=4$. Найденная единственная точка дает наименьшее значение функции S (проверять не нужно). Высота бассейна равна $\frac{32}{16}=2$. Итак, искомые размеры бассейна $x=4$м и $y=2$м. ▲

Пример 4. Найти радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

Δ Пусть r и h – радиус основания и высота цилиндра, вписанного в шар радиуса R, V – объем цилиндра (рис. 5). Тогда $V=\pi r^2 h$, $\frac{h^2}{4}+r^2=R^2$, $V=2\pi r^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}$, где $0<r<R$. Обозначим $t=r^2$, тогда

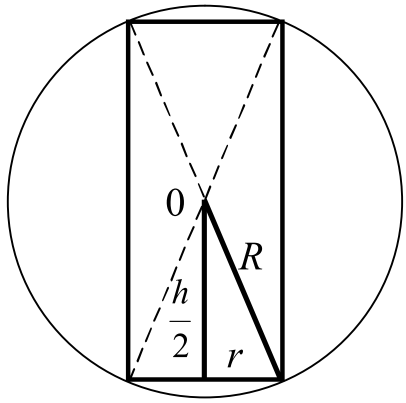


Рис. 5

$V = 2\pi t \cdot \sqrt{R^2 - t}$, $0 < t < R^2$. Рассмотрим функцию $V^2 = 4\pi^2 t^2 \cdot \left(R^2 - t\right)$, так как $V \ge 0$, то функция $V(t)$ имеет на интервале $(0;\, R^2)$ те же точки экстремума, что и функция $\dfrac{V^2}{4\pi^2} = t^2(R^2 - t) = R^2 t^2 - t^3 = f(t)$. Найдем критические точки функции $f(t)$: $f'(t) = 2R^2 \cdot t - 3t^2 = 3t\left(\dfrac{2}{3}R^2 - t\right) = 0$. Это уравнение на $(0;\, R^2)$ имеет единственное решение $t_0 = \dfrac{2R^2}{3}$, причем при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «–». Следовательно, точка t_0 является точкой максимума функции. Таким образом, при $r = \sqrt{t_0} = R\sqrt{2/3}$ функция V принимает наибольшее значение, т. е. радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольший объем, равен $R\sqrt{2/3}$. ▲

Пример 5. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью V км/ч, составляет $90 + 0{,}4V^2$ р./ч. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

Δ За время t катер пройдет путь $S = V \cdot t$, а суммарные затраты за это время составят $(90 + 0{,}4V^2) \cdot t$, $V \in (0;\, +\infty)$. Тогда удельные затраты на 1 км пути равны $\dfrac{(90+0{,}4V^2)\cdot t}{V \cdot t} = \dfrac{90}{V} + \dfrac{2}{5}V$. $y = \dfrac{90}{V} + \dfrac{2}{5}V$, $y' = -\dfrac{90}{V^2} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{2V^2 - 450}{5V^2}$.

На промежутке $(0;\, +\infty)$ функция y имеет единственную критическую точку $V = 15$. При переходе через эту точку производная меняет знак «–» на «+». Это точка минимума. Таким образом, стоимость одного км пути будет наименьшей, если катер будет плыть со скоростью 15 км/ч. ▲

Пример 6. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 м. (Освещенность точки обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Δ Пусть расстояние точки от более слабого источника равно x. Тогда расстояние точки от более сильного источника равно $(24 - x)$. Суммарная освещенность точки $E = \dfrac{k}{x^2} + \dfrac{8k}{(24 - x)^2}$. Тогда $E' = \dfrac{-2k}{x^3} + \dfrac{16k}{(24 - x)^3} =$

$$2k\,\frac{8x^3 - (24 - x)^3}{x^3 \cdot (24 - x)^3} = 2k \cdot \frac{(2x - 24 + x)\cdot(4x^2 + 2x\cdot(24 - x) + (24 - x)^2}{x^3(24 - x)^3}.$$

На интервале $(0;\, 24)$ существует единственная критическая точка $x = 8$. При переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+». Это точка минимума. Таким образом, искомая точка расположена на расстоянии 8 м от более слабого источника. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$, $x \in [0; 1]$. **Отв.:** $1, 3, 5$.

б) $y = \left| x^2 + 2x - 3 \right| + 1{,}5 \ln x$, $x \in \left[1/2; 2 \right]$. **Отв.:** $5 + 1{,}5 \ln 2; 0$.

в) $y = 2 \sin x + \sin 2x$, $x \in \left[0; 3\pi / 2 \right]$. **Отв.:** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; -2$.

2. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения будет наибольшей? **Отв.:** $2\pi / 3$.

3. Два корабля плывут с постоянными скоростями $V_1 = 20$ км/ч и $V_2 = 30$ км/ч по прямым, угол между которыми $60°$ в направлении точки пересечения этих прямых. Найдите наименьшее расстояние между кораблями, если в начальный момент времени расстояния кораблей от точки пересечения прямых были соответственно 10 и 20 км. **Отв.:** $\dfrac{5\sqrt{21}}{7}$ км.

4. К реке шириной a построен под прямым углом канал шириной b. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал? **Отв.:** $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

Занятие 16

Контрольная работа (2 ч)

В1

1. Вычислить по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot e^x + e^{-2x} - 3}{\ln(1 - x^2)}$. **Отв.:** -3.

б) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin 3x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **Отв.:** e.

2. Используя формулу Тейлора, вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - x^3) - 2\sin x + 2x \cdot \cos x^2}{\sin^3 x}$.

Отв.: $-2/3$.

3. Найти область возрастания функции $y = \dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$. **Отв.:** $x \in [1;\,3]$.

4. Найти точки экстремума функции $y = (2x+1)\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

Отв.: $x = 1$ – точка максимума, $x = 2$ – точка минимума.

5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

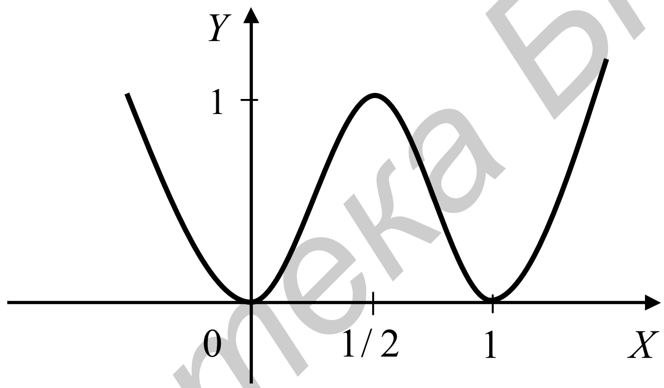
Отв.: $x \in \left(-\infty;\,1/2\right)$ – функция выпукла вниз, $x \in \left(1/2;\,+\infty\right)$ – функция выпукла вверх, $x = 1/2$ – точка перегиба.

6. Найти асимптоты графика функции:

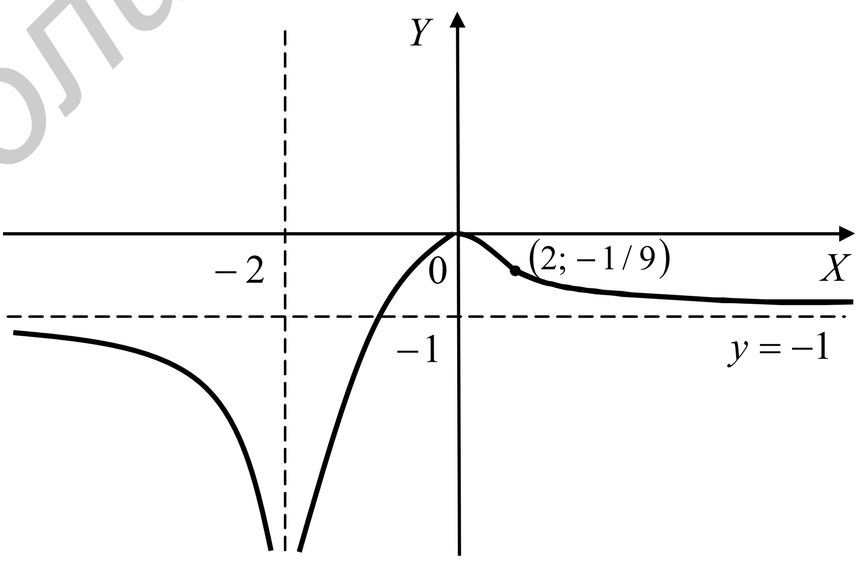
а) $y = \dfrac{2x^2+5x+3}{x+2}$. **Отв.:** $y = 2x+1$, $x = -2$.

б) $y = \sqrt{x^2+4x+3}$. **Отв.:** $y = x+2$, $y = -x-2$.

7. Построить график функции $y = 16x^2(x-1)^2$ с помощью производной первого порядка.



8. Провести полное исследование функции $y = -\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$ и построить ее график.



B2

1. Вычислить по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\ln \sin x}{(2x-\pi)^2}$. **Отв.:** $-\dfrac{1}{8}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$. **Отв.:** e^x.

2. Используя формулу Тейлора, вычислить

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 2x^2 \cos x - 1}{\ln^3(1-x)}$. **Отв.:** $-\dfrac{8}{3}$.

3. Найти область возрастания функции $y = \dfrac{x-3}{x^2-6x+10}$. **Отв.:** $x \in [2;\,4]$.

4. Найти точки экстремума функции $y = (2x-1)\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

Отв.: $x = 2$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума.

5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = e^{-x^2}$.

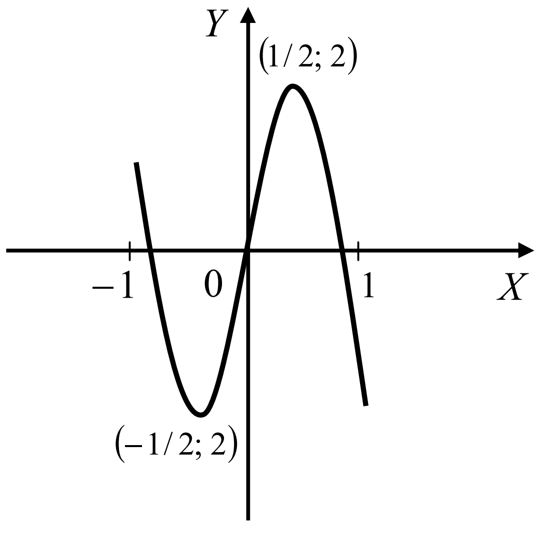
Отв.: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ – функция выпукла вниз, $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – функция выпукла вверх, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – точки перегиба.

6. Найти асимптоты графика функции

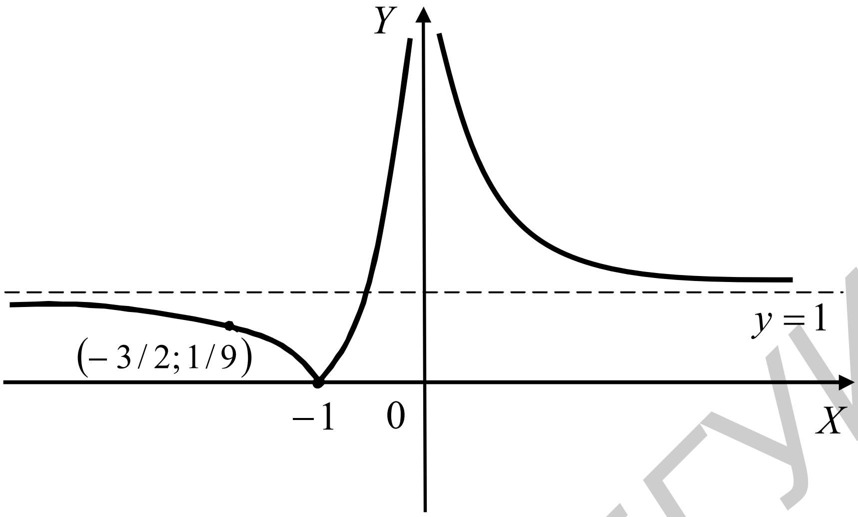
а) $y = \dfrac{2x^2+5x+5}{x+1}$. **Отв.:** $y = 2x+3$, $x = -1$.

б) $y = \sqrt{x^2+6x+2}$. **Отв.:** $y = x+3$, $y = -x-3$.

7. Построить график функции $y = 6x - 8x^3$ с помощью производной первого порядка.



8. Провести полное исследование функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ и построить ее график.



Содержание

Св. план 2011, поз. 64

Учебное издание

Введение в анализ.
Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Методическое пособие
для проведения практических занятий по высшей математике
для инженерно-технических специальностей
всех форм обучения

Кобринец Николай Иванович
Конюх Людмила Афанасьевна
Цегельник Владимир Владимирович
Амелькина Галина Ивановна
Юхо Людмила Константиновна

Редактор *Т. П. Андрейченко*

Корректор

Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 4,5.	Тираж 100 экз.	Заказ 234.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6