АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ЧЕТЫРЬМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Цегельник В. В.
Кафедра высшей математики,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: tsegvv@bsuir.by

Исследован характер возможных подвижных особых точек решений семейства трехмерных пятиэлементных динамических систем с одной квадратичной нелинейностью и четырьмя линейными элементами.

Введение

В работе [1] выполнено качественное исследование решений трехмерных пятиэлементных систем с одной квадратичной нелинейностью с произвольным параметром A и параметром $\varepsilon^2 = 1$. В системах указанного семейства параметр A входит как множитель при линейном элементе, либо как отдельный элемент (константа).

I. Постановка задачи

Целью настоящей работы является исследование характера подвижных особых точек (т.е. точек, положение которых зависит от начальных условий) решений систем [1] с одной квадратичной нелинейностью и четырьмя линейными элементами

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x + Az,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = y. \tag{1}$$

$$\dot{x} = y^2 + Ax + z,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{2}$$

$$\dot{x} = y^2 + Ay + z,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{3}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x + Ay,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = x. \tag{4}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x + Az,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = x. \tag{5}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x + Ay,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = x. \tag{6}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + y + Az,\ \dot{y} = x^2,\ \dot{z} = x. \tag{7}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + y + Az,\ \dot{y} = x^2,\ \dot{z} = y. \tag{8}$$

$$\dot{x} = Ax + y + z,\ \dot{y} = x^2,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{9}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + y + Az,\ \dot{y} = z^2,\ \dot{z} = x. \tag{10}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + y + Az,\ \dot{y} = xz,\ \dot{z} = y. \tag{11}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + Az,\ \dot{z} = x. \tag{12}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + Az,\ \dot{z} = y. \tag{13}$$

$$\dot{x} = y^2 + Ax,\ \dot{y} = x + z,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{14}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x,\ \dot{y} = Ay + z,\ \dot{z} = x. \tag{15}$$

$$\dot{x} = y^2 + Ay,\ \dot{y} = x + z,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{16}$$

$$\dot{x} = y^2 + Ay,\ \dot{y} = \varepsilon y + z,\ \dot{z} = x. \tag{17}$$

$$\dot{x} = y^2 + Ay,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = x. \tag{18}$$

$$\dot{x} = y^2 + Az,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = y. \tag{19}$$

$$\dot{x} = y^2 + z,\ \dot{y} = x + Ay,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{20}$$

$$\dot{x} = y^2 + Az,\ \dot{y} = x + z,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{21}$$

$$\dot{x} = y^2 + Az,\ \dot{y} = \varepsilon y + z,\ \dot{z} = x. \tag{22}$$

$$\dot{x} = z^2 + Ax,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = y. \tag{23}$$

$$\dot{x} = z^2 + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + Az,\ \dot{z} = y. \tag{24}$$

$$\dot{x} = z^2 + Ay,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = x. \tag{25}$$

$$\dot{x} = z^2 + Ay,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = y. \tag{26}$$

$$\dot{x} = z^2 + Ay,\ \dot{y} = \varepsilon y + z,\ \dot{z} = x. \tag{27}$$

$$\dot{x} = z^2 + Az,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = y. \tag{28}$$

$$\dot{x} = yz + Ax,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = x. \tag{29}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + Az,\ \dot{z} = x. \tag{30}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x, \ \dot{y} = x + Az, \ \dot{z} = y. \qquad (31)$$

$$\dot{x} = yz + Ax, \ \dot{y} = \varepsilon y + z, \ \dot{z} = x. \qquad (32)$$

$$\dot{x} = yz + Ay, \ \dot{y} = x + \varepsilon y, \ \dot{z} = x. \qquad (33)$$

$$\dot{x} = yz + Ay, \ \dot{y} = \varepsilon y + z, \ \dot{z} = x. \qquad (34)$$

$$\dot{x} = yz + Ay, \ \dot{y} = x + \varepsilon y, \ \dot{z} = x. \qquad (35)$$

$$\dot{x} = yz + Az, \ \dot{y} = x + \varepsilon y, \ \dot{z} = y. \qquad (36)$$

$$\dot{x} = yz + Az, \ \dot{y} = \varepsilon y + z, \ \dot{z} = x. \qquad (37)$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + Ay, \ \dot{y} = x + z, \ \dot{z} = x^2. \qquad (38)$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + y, \ \dot{y} = Ay + z, \ \dot{z} = x^2. \qquad (39)$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + Ay, \ \dot{y} = x + z, \ \dot{z} = y^2. \qquad (40)$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + Az, \ \dot{y} = x + z, \ \dot{z} = y^2. \qquad (41)$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + Ay, \ \dot{y} = x + z, \ \dot{z} = xy. \qquad (42)$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + y, \ \dot{y} = Ay + z, \ \dot{z} = xy. \qquad (43)$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + z, \ \dot{y} = Ay + z, \ \dot{z} = xy. \qquad (44)$$

с неизвестными функциями x, y, z в предположении, что неизвестная переменная t является комплексной; $\varepsilon^2 = 1$, A – произвольный постоянный параметр.

Системы (2), (9), (14), (15), (20), (23), (29), (32), (39), (43), (44) являются диссипативными, если $A + \varepsilon < 0$. Остальные системы из данного списка являются таковыми, если $\varepsilon = -1$.

Системы (уравнения), общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек называют системами (уравнениями) Пенлеве-типа или P-типа.

II. Алгоритм

Для решения поставленной задачи использован тест Пенлеве [2], представляющий набор условий, необходимых для отсутствия у общего решения системы дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек (свойство Пенлеве).

Для анализа решений систем (1) – (44) использован также подход, заключающийся в замене каждой из них эквивалентным уравнением третьего порядка (или второго порядка с произвольной постоянной) и сравнением его с известными уравнениями Пенлеве-типа.

III. Выводы

Теорема 1. Системы (2), (3), (9), (14), (16), (20), (21) не являются системами Пенлеве -типа

Доказательство. Третья компонента перечисленных выше систем имеет вид $z = Ce^{\varepsilon t}$, где C – произвольная постоянная. В силу этого системы (2), (3), (9), (14), (16), (20), (21) эквивалентны неавтономным уравнениям второго порядка [1]

$$\ddot{y} - y^2 - A\dot{y} = Ce^{\varepsilon t}, \qquad (45)$$

$$\ddot{y} - y^2 - Ay = Ce^{\varepsilon t}, \qquad (46)$$

$$\ddot{x} - x^2 - Ax = \varepsilon Ce^{\varepsilon t}, \qquad (47)$$

$$\ddot{y} - y^2 - A\dot{y} = (\varepsilon A - A^2)Ce^{\varepsilon t}, \qquad (48)$$

$$\ddot{y} - y^2 - Ay = \varepsilon Ce^{\varepsilon t}, \qquad (49)$$

$$\ddot{y} - y^2 = (A+1)Ce^{\varepsilon t}, \qquad (50)$$

$$\ddot{y} - y^2 = (A+\varepsilon)Ce^{\varepsilon t} \qquad (51)$$

соответственно. Сравнение уравнений (45)–(51) с уравнениями из списка [3] показывает, что они не являются уравнениями Пенлеве-типа.

Теорема 2. Системы (4), (5), (8), (10), (12), (15), (17), (23), (25)–(30), (32), (38)–(43) не являются системами Пенлеве-типа.

Проведен Пенлеве-анализ уравнения третьего порядка, отличного от уравнения

$$\dddot{u} = P(u, \dot{u}, \ddot{u}),$$

где P – полином относительно u, $\dot{u}$, $\ddot{u}$ с постоянными коэффициентами, которому эквивалентна система (33).

Система (7) эквивалентна системе

$$\ddot{x} = \varepsilon\dot{x} + x^2 + Ax, \ \dot{z} = x. \qquad (52)$$

Она не является системой Пенлеве-типа, т.к. общее решение ее первого уравнения согласно [4] содержит подвижные критические особые точки.

Выполнен Пенлеве-анализ систем (1), (6), (19), (35), (36) демонстрирующих, согласно [1], хаотическое поведение.

IV. Список литературы

1. Zhang, Fu. Chaotic and nonchaotic behavior in three -dimensional quadratic system: 5 –1 dissipative cases / Fu Zhang, J. Heidel // Inter. Journal of Bif. and Chaos. – 2012. – Vol. 22, № 1. – P. 1250010.
2. Грицук, Е. В. К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.–мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 25–30.
3. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс // Харьков: ОНТИ, 1939. – 720с.
4. Cosgrove, C. M. Chazy classes IX -XI of third -order differential equations / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 2001. – Vol. 104, № 3. – P. 171 -228.