ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБКИ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВЫБОРКИ ЧИСЛОМ ВП

Кобяк И. П.
Кафедра электронных вычислительных машин,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлекторoники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: ipkobyak2012@mail.ru

В представляемой работе на основе конечных разностей получено численное значение, характеризующее нижнюю границу энумератора для вероятности пропуска ошибки при наблюдении векторов переходов в последовательностях со случайной природой. Рассмотрен частный случай производящей функции для одной переменной, характеризующей близкое к точному значение параметра в асимптотике. Получено соотношение, характеризующее точку моды в функции плотности распределения вероятностей ошибки при регистрации сложных событий или обектов на основе векторов переходов.

Введение

Многомерные векторы переходов (ВП) заданного вида формируются поразрядным дифференцированием статических векторов случайного процесса с последующим поразрядным однополупериодным сглаживанием отрицательных событий. Для регистрации схемами наблюдения каналов связи выбираются однотипные ВП, образующие лебеговскую меру событий во множестве всех векторов переходов. Основным достоинством принципа формирования точечных оценок из таких субдинамических объектов является низкая вероятность пропуска ошибки, что следует из факта сложности самих объектов и невозможности (при объединении вероятностей) получения полной группы событий. Особый интерес при сравнении данного метода с классическими алгоритмами свертки вызывает механизм вычисления площади под кривой графика плотности распределения вероятностей при наблюдении ВП. Поставленная задача в данной работе решается путем суммирования факториальных моментов, входящих в состав перечисляющей проиводящей функции, на основе алгоритма конечных разностей.

I. Вероятность пропуска ошибки и производящая функция

Из результатов работы [1] следует, что гладкая часть функции нормированной мощности классов эквивалентности (МКЭ), соответствующей вероятности пропуска ошибки при регистрации ВП в частном случае при $j = 1$ может быть представлена соотношением вида:

$$P_{ifc}\left(gl\right) = \sum_{g} \pi\left(g\right) \sum_{n-g} \tfrac{1}{m^n}\left(3^{r-\mu}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n-4} k_{1,i}+k_{1,n-2}} \times$$
$$\times m^{\sum\limits_{i=1}^{n-4} ik_{1,i}+(n-2)k_{1,n-2}} \times \prod_{i=2}^{n-4}\left(\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_{1,i}\right)^{k_{1,i}} \times$$
$$\times\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\beta_{1,n-2}\right)^{k_{1,n-2}} \tfrac{(n-g)!}{k_{1,1}!k_{1,2}!\ldots k_{1,n-4}!k_{1,n-2}!},$$

где ортонормирующие значения $g = 1 + i$ берутся из разбиений параметра

$$n = \sum_{i=1}^{n-4}(2+i)k_{1,i} + nk_{1,n-2}$$

на целые части вида $2 + i$, при $k_{1,n-3} = 0$; $\pi(g) = \pi(n)$ – это композиция текущего разбиения числа n. Причем $n - g = \sum\limits_{i=1}^{n-4} k_{1,i} + k_{1,n-2}$, а параметр

$$\beta_{1,i} = \tfrac{1}{\xi}\left[(1+\xi)^{i+1} - (1-\xi)^{i+1}\right]$$
$$\xi = \sqrt{1-4p}.$$

Значение вероятности p в данном равенстве определено как

$$p = \frac{3^{r-\mu}}{m^2}.$$

Производящая функция для вероятности ошибки $P_{ifc}\,(gl)$ может быть получена путем преобразования соответствующего произведения факториальных моментов в сумму с использованием полиномиального закона. При этом имеем:

$$P_{ifc}(gl) = \sum_{g} \pi\left(g\right)\left(k_{1,1}pe^t x_1^1 + \sum_{i=2}^{n-4} k_{1,i}\tfrac{pe^t x_1^i}{2^{i+1}}\beta_{1,i} + \right.$$
$$\left. + k_{1,n-2}\tfrac{pe^t x_1^{n-2}}{2^{n-1}}\beta_{1,n-2}\right)^{n-g}.$$

С учетом моды данное равенство представимо в виде

$$P_{ifc} = \frac{1}{2^{n+1}}\beta_n + P_{ifc}(gl).$$

Используя алгоритм конечных разностей определим частное значение площади под кривой распределения функции вероятности ошибки при наблюдении лебеговской меры ВП.

II. Нижняя граница для интеграла вероятностей ошибки

Достаточно просто показать, что максимальное значение вероятности p для всех значений $r > 1$ равно $\frac{3}{16}$, что следует из тривиальных подстановок параметров r и μ. Использование данного значения в последующих вычислениях обусловлено тем фактом, что для различных значений p конечные соотношения в процессе вывода представляются множеством разветвленных и трудно формализуемых равенств. В связи с этим рассмотрим разность двух аппроксимированных факториальных моментов $\beta_{1,j}$ и $\beta_{1,j+1}$, определяющих функцию правдоподобию в вероятности ошибки, при $j = 1$ и произвольных значениях i:

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_{1,i} - \tfrac{1}{2^{i+2}}\beta_{1,i+1}\right) = \\ &\quad = \tfrac{1}{2^{i+1}}\tfrac{1}{\xi}\left[(1+\xi)^{i+1} - (1-\xi)^{i+1}\right] - \\ &\qquad - \tfrac{1}{2^{i+2}}\tfrac{1}{\xi}\left[(1+\xi)^{i+2} - (1-\xi)^{i+2}\right].\end{aligned}$$

Данная разность достаточно просто преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\xi}\left[A^{i+1}(1-A) - B^{i+1}(1-B)\right] = \\ &= 2\left(A^{i+1}\tfrac{1}{4} - B^{i+1}\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{i+1}\left(3^i - 1\right),\end{aligned}$$

где

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\right), \quad B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi\right).$$

Для формирования интегральной суммы будем использовать концепцию суммирования вероятностей с одномоментным их представлением в интеграле, то есть при $\pi(g) = 1$. При этом необходимо решать задачу суммирования рядов, что предполагает введение нового параметра для длины фрагмента выборки $n_1 >> 1$, но $n_1 \ll n$.

Рассмотрим теперь полученную выше производящую функцию в виде

$$\begin{aligned}P_{ifc} = Mo + \Bigg[p\Bigg(1 + &\sum_{i=2}^{n_1-4}\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_{1,i} + \\ &+ \tfrac{1}{2^{n_1-1}}\beta_{1,n_1-2}\Bigg)\Bigg]^n.\end{aligned}$$

В приведенном соотношении сумма элементов в скобках, выраженная с использованием полученнх выше разностей, может быть преобразована в соотношение:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=2}^{n_1-4}\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_{1,i} = (n_1-5)\tfrac{1}{2^{2+1}}\beta_{1,2} - \\ &-\tfrac{n_1-3}{2}\sum_{i=3}^{n_1-4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^i + \tfrac{1}{2}\sum_{i=3}^{n_1-4} i\left(\tfrac{3}{4}\right)^i + \\ &+\tfrac{3}{2}(n_1-3)\sum_{i=3}^{n_1-4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^i - \tfrac{3}{2}\sum_{i=3}^{n_1-4} i\left(\tfrac{1}{4}\right)^i.\end{aligned}$$

Для решения поставленной задачи выполним суммирование дробей в данном соотношении при $n_1 - 4 \gg 1$. Тогда для простых рядов имеем:

$$\sum_{i=3}^{n_1-4}\left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{27}{16}, \quad \sum_{i=3}^{n_1-4}\left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{48}.$$

Для сложных рядов будем использовать интегрально-дифференциальные преобразования. При этом:

$$\sum_{i=3}^{n_1-4} i\left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} - \frac{15}{8}.$$

Интегрируя сумму ряда в данном равенстве, имеем:

$$\int\sum_{i=3}^{n_1-4} i\left(\frac{3}{4}\right)^i di = \frac{3}{4}\int\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-1}.$$

Продифференцируем полученное значение в виде:

$$\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial t}(1-t)^{-1} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-2}.$$

Отсюда окончательно имеем:

$$\sum_{i=3}^{n_1-4} i\left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-2} - \frac{15}{8} = \frac{81}{8}.$$

Аналогично можно вычислить сумму и оставшихся членов ряда:

$$\sum_{i=3}^{n_1-4} i\left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-2} - \frac{3}{8} = \frac{15}{72}.$$

Тогда используемый фрагмент прозводящей функции может быть представлен в виде:

$$P_{ifc} = Mo + \left[p\left(1 - \frac{13}{8} + \frac{81}{16} - \frac{45}{144} + \frac{3^{n_1-1}}{4^{n_1-1}}\right)\right]^{n>>n_1}$$

или

$$P_{ifc} = Mo + \left(p\frac{33}{8}\right)^{n>>n_1} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{99}{128}\right)^n.$$

В асимптотике дроби в степени n очевидно представляют собой весьма малые значения. Таким образом, метод идентификации последовательностей с помощью точечных оценок вероятности наблюдения ВП следует считать наиболее предпочтительным из всех известных.

III. Выводы

Классические алгоритмы свертки цифровых последовательностей, как правило, основываются на функции суммирования выбранных элементарных событий в пересылаемых сообщениях. При этом площадь под огибающей кривой плотности распределения вероятностей принципиально равна единице, что следует из факта полной группы событий для вероятностей наблюдаемых объектов. Рассматриваемый же в данной работе алгоритм являет собой методологию особого вида, основанную на переключении технических систем из состояния в состояние под действием синхроимпульсов. Соответственно задача наблюдения лебеговской меры ВП не определяет возможности построения графика вероятностей ошибки для полной группы событий, что и определяет эффективность метода.

1. И.П.Кобяк. Производящая функция для вероятности пропуска ошибки при наблюдении векторов переходов // В сб. науч. статей IX Международной науч.-практич. конференции «BIG DATA and Advanced Analytics», Минск, 17-18 мая 2023 г. Часть 2. – Минск : Беспринт, 2023. – С. 16–23.