УДК 378.147

ВЫБОР ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Капанов Н.А.

Институт информационных технологий БГУИР, г. Минск, Республика Беларусь

kapanov@bsuir.by

В статье рассматривается проблема задания целевых функций, применяемых для решения задач оптимизации при проектировании систем адаптивного образования. На примере демонстрируется задание функции цели двух переменных и ограничений по ресурсам и затратам для задачи оптимальной организации обучающего курса. Приводится графическая интерпретация решения.

Ключевые слова: целевая функция; оптимизация образовательного процесса; линейное математическое программирование.

Многие задачи оптимизации сводятся к поиску экстремума заданной целевой функции. Определение целевой функции как некого критерия оптимальности для неинженерных областей, таких как, например, образование, является не такой уж простой задачей, как может показаться. Для адаптивной образовательной системы зачастую требуется некая эталонная, оптимальная структура, соответствующая требуемому ее поведению. Настройка на оптимум может производиться путем варьирования структурных переменных входящих в функцию цели. Однако для поиска оптимального решения необходимо решать задачу математического программирования. Как известно, в зависимости от функции цели задачи математического программирования бывают линейными и нелинейными.

Задачи линейного математического программирования требуют задания ограничений, иначе они не имеют смысла. При канонической форме задания ограничений они представимы в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{B}, \tag{1}$$

в которой $x = col[x_1, x_2, \dots, x_n], \mathbf{A}[m \times \mathrm{n}], \mathbf{B} = col[b_1, b_2, \dots, b_n]$. Задача линейного программирования имеет смысл только при n>m, т.е. когда общее число неизвестных больше числа ограничений.

Представляется, что для оптимизационных задач в сфере образования может подойти линейная функция цели, вида:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i . \tag{2}$$

В выражении (2) $x_i, i = \overline{1,n}$ – изучаемые дисциплины в часах, $k_i, i = \overline{1,n}$ – весовые вклады дисциплины в общую компетентностную характеристику специальности. Коэффициенты можно задавать, исходя из меры "профильности" предмета.

Ограничения можно задавать по допустимым затратам и имеющимся ресурсам:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le d. \tag{3}$$

Решение можно искать с помощью симплекс-метода [1]. Рассмотрим изложенное на примере. Пусть для организации нового 20-часового обучающего курса в целях повышения квалификации сотрудников предприятия-заказчика планируется понести затраты в размере 72 единиц. Курс должен состоять из 2-х профильных дисциплин.

Планируется провести: 1) 5 занятий по дисциплине1 с затратами в 6 единиц за час занятий с высчитанным вкладом в общую компетенцию обучающегося – 8 единиц и 2) 2 занятия по дисциплине2 с затратами 12 единиц за час занятий с вкладом в компетенцию – 4 единицы. Найти оптимальный вариант организации обучения.

Обозначим неизвестное количество часов первой и второй дисциплины через x_1 и x_2 соответственно. Функция цели может быть записана следующим образом $F(x) = 8x_1 + 4x_2(\max)$. Ограничения по затратам: $6x_1 + 12x_2 \le 72$; ограничения по часам: $5x_1 + 2x_2 \le 20$; ограничения на знак переменных $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$.

Разделим коэффициенты первого из ограничений на 6 и приведем ограничения к виду равенств, вводя дополнительные переменные x_3 и x_4:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \tag{4}$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20. \tag{5}$$

Таким образом, ограничения задачи приведены к системе из двух алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Процедура решения задачи следующая:

1-й шаг. Выберем в качестве базисных переменных (БП) x_2 и x_4, так как определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных в ограничениях задачи отличен от нуля $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$.

Тогда x_1 и x_3 будут небазисными переменными (НП). Выразим БП и $F(x)$ через небазисные. Из (4) следует:

$$x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3. \tag{6}$$

Из (5) следует, что $x_4 = 20 - 2x_2 - 5x_1$. С учетом (6) получим

$$x_4 = 8 - 4x_1 + x_3. \tag{7}$$

Тогда

$$F(x) = 8x_1 + 4x_2 = 24 + 6x_1 - 2x_3. \tag{8}$$

На каждом шаге решения задачи НП приравниваются к нулю, следовательно, БП и $F(x)$ будут равны свободным членам в соответствующих выражениях:

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = 6,\ x_4 = 8,\ F(x) = 24.$$

Это решение соответствует координатам вершины *A* ОДЗП на рис. 1. Оптимальность решения проверяется по выражению (8) для функции цели. Переменная x_3 входит в (8) с отрицательным коэффициентом; если вводить x_3 в базис на следующем шаге, то она примет положительное значение, и от числа 24 некоторая величина будет вычитаться, т.е. значение $F(x)$ уменьшится. Если же вводить в базис на следующем шаге x_1, то значение функции цели увеличится, т.е. улучшится.

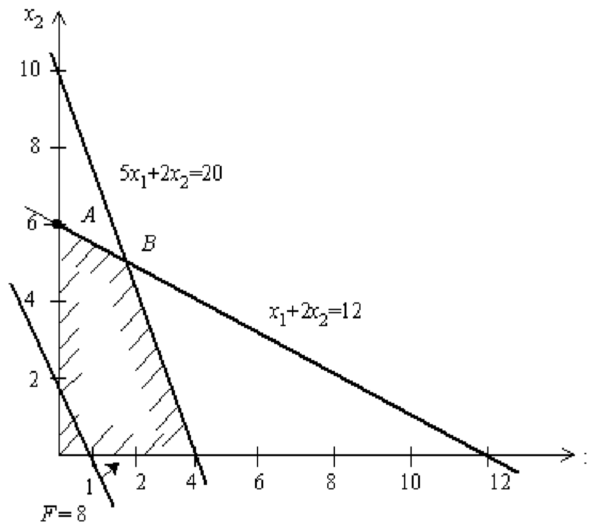

Рисунок 1 – Графическая интерпретация к примеру

Из базиса исключают ту переменную, которая раньше обратиться в нуль при введении в базис x_1. Анализируя (6) и (7), определяем, что из базиса следует исключить x_4. На следующем шаге местами поменяются переменные x_1 и x_4.

2-й шаг. x_1 и x_2 – базисные переменные, x_3 и x_4 – небазисные. Выразим БП и $F(x)$ через НП. Из (7) следует:

$$x_1 = 2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \cdot \qquad (9)$$

Подставив (9) в (6), получим

$$x_2 = 5 - \frac{5}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \cdot$$

Тогда $F(x) = 8x_1 + 4x_2 = 36 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4$. В результате $x_3 = x_4 = 0$ (как небазисные), $x_1 = 2,\ \ x_2 = 5,\ \ F = 36$. Это решение соответствует координатам вершины B на рис. 1. Найденное решение будет оптимальным, улучшить значение $F(x)$ нельзя, так как переменные x_3 и x_4 входят в выражение для функции цели с отрицательными коэффициентами.

Дополнительные переменные x_3 и x_4 имеют смысл неиспользованных ресурсов. В данном примере все ресурсы по площади и по стоимости использованы полностью $(x_3 = x_4 = 0)$.

Литература

1. Галеев, Э. М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи : учебное пособие. – М.: Эдиториал УРСС – 2010. – 336 с.

SELECTION OF OBJECTIVE FUNCTION IN OPTIMIZATION PROBLEMS IN EDUCATION

Kapanov N.A.

Institute of information technologies BSUIR, Minsk, Republic of Belarus

This paper discusses the problem of specifying target functions used to solve optimization problems when designing adaptive education systems. The example demonstrates setting the target function of two variables and restrictions on resources and costs for the problem of optimal organization of a training course. A graphical interpretation of the solution is provided.

Keywords: target function; optimization of the educational process; linear mathematical programming.