**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 217, № 2
ноябрь, 2023**

В. В. Цегельник*

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получены нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка (и соответствующие им преобразования Беклунда) с произвольной аналитической функцией независимой переменной. Указанные уравнения (не являющиеся в общем случае уравнениями типа Пенлеве) при определенных ограничениях на произвольную аналитическую функцию сводятся, в частности, ко второму, третьему или четвертому уравнению Пенлеве. Рассмотрены свойства преобразований Беклунда нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, порождаемых двумя системами двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с квадратичными нелинейностями производных неизвестных функций.

Ключевые слова: свойство Пенлеве, уравнения Пенлеве, прямое и обратное преобразования Беклунда.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10538

1. ВВЕДЕНИЕ

В обзорной статье [1] (см. также [2]) указаны некоторые актуальные направления исследования свойств решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Пенлеве – уравнений, общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек. Указанные уравнения принято называть уравнениями с P-свойством решений или уравнениями P-типа. Не претендуя на полноту изложения, отметим также продолжающиеся в последние годы исследования различных свойств решений уравнений, представляющих высшие аналоги уравнений типа Пенлеве [3]–[7], и инициированные работой [8] исследования неабелевых уравнений типа Пенлеве [9]–[13].

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. E-mail: tsegvv@bsuir.by

Целью работы является исследование аналитических свойств решений дифференциальных уравнений

$$w_\alpha'' = 2w_\alpha^3 + \varphi w_\alpha + \alpha\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w_\alpha' - 2\varepsilon w_\alpha^2 - \varepsilon\varphi), \tag{1}$$

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{\varphi'}{\varphi}w - \frac{1}{w} + \frac{1}{\varphi}(w^2 + \beta\varphi') + \frac{\varepsilon - \beta}{\varepsilon}\frac{\varphi''}{\varphi}w, \tag{2}$$

$$\varphi w w'' = \varphi w'^2 - \varphi' w w' + (\alpha + \varphi'\varepsilon - \varepsilon)w^3 + (\beta + \varphi'\sigma - \sigma)w + \varphi w^4 - \varphi, \tag{3}$$

$$2ww'' = w'^2 + 3w^4 + 8\varphi w^3 + 4\left(\varphi^2 + \varepsilon\left(\varphi' + p + \frac{q}{2}\right)\right)w^2 - q^2, \tag{4}$$

а также систем

$$y = -w + \varphi + \frac{[w' + (b-1)\varphi']^2}{2w^2}, \tag{5а}$$

$$w = -y + \varphi + \frac{[y' - b\varphi']^2}{2y^2} \tag{5б}$$

и

$$y + \frac{M(z)(-2z + M(z))w}{M(z)(-2z + M(z)) + 2z(2 + \beta + \alpha\varepsilon)w - (4 + 2\alpha\varepsilon)M(z)w} = 0, \tag{6а}$$

$$w + \frac{N(z)(-2z + N(z))y}{N(z)(-2z + N(z)) + 2z(-2 + \beta - 2\varepsilon)y + (4 + 2\alpha\varepsilon)N(z)y} = 0. \tag{6б}$$

В уравнениях (1)–(4) $\varphi = \varphi(z)$ – произвольная аналитическая функция независимой переменной z; b, α, β – произвольные параметры, $\varepsilon^2 = \sigma^2 = 1$, $q^2 + 2\beta = 0$, $p = -1 - 2\varepsilon - q/2$. В системе (6) $M(z) = zw' + \varepsilon z w^2 + (\alpha\varepsilon + 1)w + z$, $N(z) = zy' - \varepsilon z y^2 - (\alpha\varepsilon + 3)y + z$.

2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (1)

Уравнение (1) представимо в виде системы уравнений

$$w_\alpha = -w_{\alpha-\varepsilon} - \varepsilon\frac{(2\alpha - \varepsilon)\varphi'}{2w_{\alpha-\varepsilon}' + 2\varepsilon w_{\alpha-\varepsilon}^2 + \varepsilon\varphi}, \tag{7а}$$

$$w_{\alpha-\varepsilon} = -w_\alpha + \varepsilon\frac{(2\alpha - \varepsilon)\varphi'}{2w_\alpha' - 2\varepsilon w_\alpha^2 - \varepsilon\varphi} \tag{7б}$$

с неизвестными функциями w_α, $w_{\alpha-\varepsilon}$ независимой переменной z и произвольной аналитической функцией $\varphi(z)$ $(\varphi'(z) \not\equiv 0)$. Из системы (7) при условии

$$(2\alpha - \varepsilon)\varphi' \neq 0 \tag{8}$$

следует, что

$$w_\alpha' - \varepsilon w_\alpha^2 + w_{\alpha-\varepsilon}' + \varepsilon w_{\alpha-\varepsilon}^2 = 0. \tag{9}$$

Исключая из (9) при условии (8) неизвестную функцию w_α, получим уравнение

$$w_{\alpha-\varepsilon}'' = 2w_{\alpha-\varepsilon}^3 + \varphi w_{\alpha-\varepsilon} + (\alpha - \varepsilon)\varphi' + \frac{\varphi''}{2\varphi'}(2w_{\alpha-\varepsilon}' + 2\varepsilon w_{\alpha+\varepsilon}^2 + \varepsilon\varphi). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть* $w_\alpha = w(z, \alpha, \varepsilon)$ – *решение уравнения* (1) *при фиксированных значениях* α, $\varepsilon^2 = 1$ *и условии* (8). *Тогда функция* $w_{\alpha-\varepsilon} = w(z, \alpha - \varepsilon)$, *определяемая соотношением* (7б), *является решением уравнения* (10).

Теорема 2. *Пусть* $w_{\alpha-\varepsilon} = w(z, \alpha-\varepsilon)$ – *решение уравнения* (10) *при фиксированных значениях* α, $\varepsilon^2 = 1$ *и условии* (8). *Тогда функция* $w_\alpha = w(z, \alpha, \varepsilon)$, *определяемая соотношением* (7а), *является решением уравнения* (1).

Легко видеть, что уравнение (10) получается из (1) заменой $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\alpha \to \alpha - \varepsilon$ и наоборот. Это справедливо и по отношению к формулам (7а), (7б). Таким образом, формулы (7а), (7б) определяют прямое и обратное преобразования Беклунда уравнения (1).

Полагая $\varphi(z) = z$, из (1) получаем второе уравнение Пенлеве

$$w_\alpha'' = 2w_\alpha^3 + zw_\alpha + \alpha. \tag{11}$$

Формулы (7а), (7б) в этом случае имеют вид

$$w_\alpha = -w_{\alpha-\varepsilon} - \varepsilon \frac{2\alpha - \varepsilon}{2w_{\alpha-\varepsilon}' + 2\varepsilon w_{\alpha-\varepsilon}^2 + \varepsilon z}, \tag{12}$$

$$w_{\alpha-\varepsilon} = -w_\alpha + \varepsilon \frac{2\alpha - \varepsilon}{2w_\alpha' - 2\varepsilon w_\alpha^2 - \varepsilon z}. \tag{13}$$

Преобразования (12), (13) для уравнения (11) в случае $\varepsilon = 1$ получены в [14].

Нетрудно убедиться, что все решения уравнения Риккати

$$2w_\alpha' = 2\varepsilon w_\alpha^2 + \varepsilon\varphi \tag{14}$$

являются решениями уравнения (1) при $2\alpha = \varepsilon$.

Пример 1. Уравнение (14) при $\varepsilon = -1$, $\varphi = -2(z^2 + a)$ (a – произвольный параметр), $w_\alpha = y_a$ принимает вид

$$y_a' + y_a^2 = z^2 + a \tag{15}$$

и при $a = 1$ имеет частное решение $y_1 = z$. В силу этого общее решение уравнения (15) при $a = 1$ имеет вид

$$y_1 = z + \frac{e^{-z^2}}{C + \int e^{-z^2}\,dz},$$

где C – произвольная постоянная.

Рассмотрим уравнение

$$y_{a+2}' + y_{a+2}^2 = z^2 + a + 2. \tag{16}$$

Несложно проверить, что если $y_a = y(z, a)$ – решение уравнения (15), то

$$y_{a+2} = y(z, a+2) = z + \frac{a+1}{z + y_a}, \qquad a \neq -1, \tag{17}$$

есть решение уравнения (16).

Отметим также, что если $y_a = y(z, a)$ – решение уравнения (15), то функция $\tilde{y}_a = -iy(iz, -a)$, $i^2 + 1 = 0$, также есть решение уравнения (15). Приведенное свойство, а также соотношение (17) позволяют сделать вывод об интегрируемости уравнения (15) в квадратурах при $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Соотношение (17) представимо в виде $(y_{a+2} - z)(y_a + z) = a + 1$, и его можно рассматривать как дискретный аналог уравнения (15).

Отметим, что уравнение (1) в случае $\varphi''(z) \not\equiv 0$ не является уравнением типа Пенлеве.

3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (2)

Уравнение (2) можно записать в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \varphi w' &= \varepsilon\varphi + (1 - \varepsilon\beta)\varphi' w - \varepsilon y w^2, \\ \varphi y' &= -\varepsilon\varphi - (1 - \varepsilon\beta)\varphi' y + \varepsilon y^2 w. \end{aligned} \tag{18}$$

Исключая из (18) неизвестную функцию w, относительно y получим уравнение

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{\varphi'}{\varphi} y' - \frac{1}{y} + \frac{1}{\varphi}\left(y^2 + (\beta - 2\varepsilon)\varphi'\right) - \frac{\varepsilon - \beta}{\varepsilon} \cdot \frac{\varphi''}{\varphi} y. \tag{19}$$

Уравнение (19) получается из (2) преобразованием $y = w$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\beta \to \beta - 2\varepsilon$ и наоборот. Таким образом, формулы

$$y = \frac{-\varepsilon\varphi w' + (\varepsilon - \beta)\varphi' w + \varphi}{w^2}, \tag{20}$$

$$w = \frac{\varepsilon\varphi y' + (\varepsilon - \beta)\varphi' y + \varphi}{y^2} \tag{21}$$

определяют прямое и обратное преобразования Беклунда уравнения (2).

Рассмотрим два случая.

1. $\varphi = c = \mathrm{const} \neq 0$. Уравнение (2) принимает вид

$$ww'' - w'^2 - c^{-1} w^3 + 1 = 0$$

и имеет первый интеграл

$$w'^2 - 2c^{-1} w^3 - 1 = H w^2, \tag{22}$$

где H – произвольная постоянная. Уравнение (22) интегрируется [15] в эллиптических функциях.

2. $\varphi = z$. В этом случае уравнение (2) приводится к виду

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(w^2 + \beta) - \frac{1}{w} \tag{23}$$

и является частным случаем третьего уравнения Пенлеве

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w} \tag{24}$$

при значениях α, β, $\gamma = 0$, $\delta = -1$.

Можно проверить, что при $\varphi = az + b$, $a \neq 0$ уравнение (2) масштабным преобразованием неизвестной функции и независимой переменной также сводится к уравнению (23).

Формулы (20), (21) при $\varphi = z$ получены в работе [16].

Теорема 3. *Уравнение* (2) *при* $\varphi = c = \mathrm{const} \neq 0$ *либо* $\varphi = az + b$ $(a \neq 0)$ *является уравнением типа Пенлеве.*

Сравнение уравнения (2) со списком уравнений из [17] позволяет сделать вывод, что при $\varphi''(z) \not\equiv 0$ оно не является уравнением P-типа.

4. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (3)

Система уравнений

$$\varphi w' - \varepsilon\varphi w^2 - (\alpha\varepsilon - 1)w - \sigma\varphi = \frac{\varepsilon\sigma(\sigma\beta + \alpha\varepsilon - 2)w}{yw - \varepsilon\sigma}, \tag{25}$$

$$\varphi y' + \varepsilon\varphi y^2 + (\alpha\varepsilon - 1)y + \sigma\varphi = \frac{-\varepsilon\sigma(\sigma\beta + \alpha\varepsilon - 2)y}{yw - \varepsilon\sigma} \tag{26}$$

при условии $\sigma\beta + \alpha\varepsilon - 2 \neq 0$ эквивалентна уравнению (3). Если из (25), (26) при условии $\sigma\beta+\alpha\varepsilon-2 \neq 0$ исключить функцию w, то относительно y получим уравнение

$$\varphi y y'' = \varphi y'^2 - \varphi' y y' + (\alpha - \varphi'\varepsilon - \varepsilon)y^3 + (\beta - \varphi'\sigma - \sigma)y + \varphi y^4 - \varphi. \tag{27}$$

Уравнение (27) получается из (3) с помощью преобразования $w = y$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\alpha \to \alpha - 2\varepsilon$, $\sigma \to -\sigma$, $\beta \to \beta - 2\sigma$, и наоборот. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $w = w(z, \alpha, \beta, \varepsilon, \sigma)$ *– решение уравнения* (3) *при фиксированных значениях параметров* α, β, $\varepsilon^2 = 1$, $\sigma^2 = 1$. *Тогда функция*

$$y = \frac{\varepsilon\sigma}{w} + \frac{\varepsilon\sigma(\sigma\beta + \alpha\varepsilon - 2)}{\varphi w' - \varepsilon\varphi w^2 - (\alpha\varepsilon - 1)w - \sigma\varphi} \tag{28}$$

при $\sigma\beta + \alpha\varepsilon - 2 \neq 0$ *является решением уравнения* (27).

Теорема 5. *Пусть* $y = y(z, \alpha, \beta, \varepsilon, \sigma)$ *– решение уравнения* (27) *при фиксированных значениях параметров* α, β, $\varepsilon^2 = 1$, $\sigma^2 = 1$ *такое, что* $\sigma\beta + \alpha\varepsilon - 2 \neq 0$. *Тогда функция*

$$w = \frac{\varepsilon\sigma}{y} - \frac{\varepsilon\sigma(\sigma\beta + \alpha\varepsilon - 2)}{\varphi y' + \varepsilon\varphi y^2 + (\alpha\varepsilon - 1)y + \sigma\varphi} \tag{29}$$

является решением уравнения (3).

Таким образом, соотношения (28), (29) определяют прямое и обратное преобразования Беклунда уравнения (3).

Рассмотрим два случая.

1. $\varphi = c = \mathrm{const} \neq 0$. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$cww'' = cw'^2 + (\alpha - \varepsilon)w^3 + (\beta - \sigma)w + cw^4 - c. \tag{30}$$

Это уравнение является уравнением типа Пенлеве и интегрируется [15] в эллиптических функциях. Уравнение (27) имеет вид

$$cyy'' = cy'^2 + (\alpha - \varepsilon)y^3 + (\beta - \sigma)y + cy^4 - c \tag{31}$$

и с точностью до обозначений совпадает с уравнением (30).

Таким образом, при выполнении условий теоремы 4 формула (28), в которой $\varphi = c = \mathrm{const} \neq 0$, определяет автопреобразование Беклунда уравнения (30).

2. $\varphi = z$. Уравнение (3) имеет вид

$$zww'' = zw'^2 - ww' + \alpha w^3 + \beta w + zw^4 - z. \tag{32}$$

Уравнение (32) есть частный случай третьего уравнения Пенлеве (24) при значениях параметров α, β, $\gamma = 1$, $\delta = -1$. Уравнение (27) представимо в данном случае в виде

$$zyy'' = zy'^2 - yy' + (\alpha - 2\varepsilon)y^3 + (\beta - 2\sigma)y + zy^4 - z. \tag{33}$$

Как отмечалось выше, уравнение (33) получается из (32) с помощью преобразования $w = y$, $\alpha \to \alpha - 2\varepsilon$, $\beta \to \beta - 2\sigma$, а уравнение (32) – из (33) с помощью преобразования $y = w$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\alpha \to \alpha - 2\varepsilon$, $\sigma \to -\sigma$, $\beta \to \beta - 2\sigma$. Таким образом, при выполнении условий теоремы 4 по решению (24) с набором параметров $(\alpha, \beta, 1, -1)$ с помощью преобразования (28) (в котором $\varphi = z$) получается новое решение уравнения (24) с набором параметров $(\alpha - 2\varepsilon, \beta - 2\sigma, 1, -1)$, $\varepsilon^2 = \sigma^2 = 1$.

Если $\varphi = az + b$, $a \neq 0$, то уравнение (3) масштабным преобразованием неизвестной функции и независимой переменной сводится к (24) при $\gamma = 1$, $\delta = -1$. Система уравнений (25), (26) в случае $\varphi = z$ получена в работе [18].

Теорема 6. *Уравнение (3) в случае $\varphi = c = \mathrm{const} \neq 0$ либо $\varphi = az + b$ $(a \neq 0)$ является уравнением типа Пенлеве.*

Сравнение уравнения (3) со списком уравнений из [17] позволяет сделать вывод, что при $\varphi''(z) \not\equiv 0$ оно не является уравнением P-типа.

5. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (4)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} w' &= q + 2\varepsilon\varphi w + \varepsilon w^2 + 2\varepsilon wu, \\ u' &= p - 2\varepsilon\varphi u - \varepsilon u^2 - 2\varepsilon wu, \end{aligned} \tag{34}$$

эквивалентную по w уравнению (4). Если из (34) исключить неизвестную функцию w, то относительно u получим уравнение

$$2uu'' = u'^2 + 3u^4 + 8\varphi u^3 + 4\left(\varphi^2 + \varepsilon\left(\varphi' + q + \frac{p}{2}\right)\right)u^2 - p^2. \tag{35}$$

Теорема 7. *Пусть $w = w(z, p, q, \varepsilon)$ – решение уравнения (4) при фиксированных значениях p, q, $\varepsilon^2 = 1$. Тогда функция*

$$u = (w' - q - 2\varepsilon\varphi w - \varepsilon w^2)(2\varepsilon w)^{-1} \tag{36}$$

является решением уравнения (35).

Теорема 8. *Пусть* $u = u(z, p, q, \varepsilon)$ – *решение уравнения* (35) *при фиксированных значениях* p, q, $\varepsilon^2 = 1$. *Тогда функция*

$$w = -(u' - p + 2\varepsilon\varphi u + \varepsilon u^2)(2\varepsilon u)^{-1} \tag{37}$$

является решением уравнения (4).

Легко видеть, что уравнение (35) получается из (4) преобразованиями $w = u$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, $p \to q$, $q \to p$. Таким образом, соотношения (36), (37) определяют преобразования Беклунда (прямое и обратное) уравнения (4).

Рассмотрим два случая.

1. $\varphi(z) = z$. Уравнение (4) есть четвертое уравнение Пенлеве [17]

$$2ww'' = w'^2 + 3w^4 + 8zw^3 + 4(z^2 - \alpha)w^2 + 2\beta, \tag{38}$$

общее решение которого не имеет подвижных критических особых точек. Соотношения (36), (37) при $\varphi = z$ приведены в [14], [19].

Если $\varphi(z) = az + b$, a, b – постоянные, причем $a(a-1) \neq 0$, то уравнение (4) с помощью масштабных преобразований $w = \lambda y$, $az + b = \mu\tau$ приводится [20] к уравнению (38), в котором параметры α, β зависят от a.

2. $\varphi(z) = c = \mathrm{const}$. В данном случае уравнения (4), (35) принимают соответственно вид

$$2ww'' = w'^2 + 3w^4 + 8c^2w^3 + 4\left(c^2 + \varepsilon\left(p + \frac{q}{2}\right)\right)w^2 - q^2, \tag{39}$$

$$2uu'' = u'^2 + 3u^4 + 8c^2u^3 + 4\left(c^2 - \varepsilon\left(q + \frac{p}{2}\right)\right)u^2 - p^2. \tag{40}$$

Уравнение (40) получается из (39) заменой $u \to w$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, $q \to p$, $p \to q$. Уравнения (39) и (40) интегрируются в эллиптических функциях [15].

Таким образом, формулы

$$u = \frac{w' - q - 2\varepsilon cw - \varepsilon w^2}{2\varepsilon w}, \tag{41}$$

$$w = \frac{-(u' - p + 2\varepsilon cu + \varepsilon u^2)}{2\varepsilon u} \tag{42}$$

определяют преобразования Беклунда (прямое и обратное) уравнения (39), интегрируемого в эллиптических функциях.

Сравнение уравнения (4) со списком уравнений из [17] позволяет сделать вывод, что в случае $\varphi''(z) \not\equiv 0$ оно не является уравнением P-типа.

Легко проверить, что все решения уравнения Риккати

$$w' = q + 2\varepsilon\varphi w + \varepsilon w^2 \tag{43}$$

являются одновременно решениями уравнения (4) при

$$\beta = -2(1 + \alpha\varepsilon)^2. \tag{44}$$

Из (43) с учетом (44) следует, что при $\varphi = z$ все решения уравнения

$$w' = w^2 + 2zw - 2(1 + \alpha) \tag{45}$$

являются одновременно решениями уравнения (38), если $\beta + 2(1+\alpha)^2 = 0$, и все решения уравнения

$$w' = -w^2 - 2zw + 2(\alpha - 1) \tag{46}$$

являются одновременно решениями уравнения (38), если $\beta + 2(\alpha-1)^2 = 0$.

Уравнение (45) заменой [21] $w = -2(\alpha+1)v^{-1}$ $(\alpha \neq -1)$ преобразуется в уравнение

$$v' = -v^2 - 2zv + 2(\alpha + 1). \tag{47}$$

Сравнение (46) и (47) показывает, что решение $w = w_\alpha$ $(\alpha \neq -1)$ уравнения (45) порождает решение $w_{\alpha+2} = -2(\alpha+1)w_\alpha^{-1}$ уравнения (46) при значении $\alpha_1 = \alpha + 2$ и наоборот. Полагая в (45) $w = -y_a - z$, $2\alpha + 1 = a$, относительно y_a получим уравнение (15).

6. АНАЛИЗ СИСТЕМ (5), (6)

6.1. Решения системы (5) подчинены одному из условий: либо

$$[w' + (b-1)\varphi']y + [y' - b\varphi']w = 0, \tag{48}$$

либо

$$[w' + (b-1)\varphi']y - [y' - b\varphi']w = 0. \tag{49}$$

При выполнении условия (48) система (5) эквивалентна по y $(y' - b\varphi' \neq 0)$ уравнению

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2\varphi y^2 + 2b\varphi'' y - b^2\varphi'^2, \tag{50}$$

а по w $(w' + (b-1)\varphi' \neq 0)$ – уравнению

$$2ww'' = w'^2 + 4w^3 - 2\varphi w^2 - 2(b-1)\varphi'' w - (b-1)\varphi'^2. \tag{51}$$

Теорема 9. *Пусть $y_b = y(z,b) \not\equiv 0$ – решение уравнения (50) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция w, определяемая соотношением (5б), является решением уравнения (51).*

Легко видеть, что уравнение (51) получается из (50) заменой $y = w$, $b \to 1 - b$.

Теорема 10. *Пусть $w_{b-1} = w(z, b-1) \not\equiv 0$ – решение уравнения (51) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция y, определяемая соотношением (5а), является решением уравнения (50).*

При выполнении условия (49) система (5) эквивалентна по y $(y' - b\varphi' \neq 0)$ уравнению

$$2yy'' = 3y'^2 - 4b\varphi' y' + 2\varphi y^2 + 2b\varphi'' y + b^2\varphi'^2, \tag{52}$$

а по w $(w' + (b-1)\varphi' \neq 0)$ – уравнению

$$2ww'' = 3w'^2 + 4(b-1)\varphi' w' + 2\varphi w^2 - 2(b-1)\varphi'' w + (1-b)^2\varphi'^2. \tag{53}$$

Теорема 11. *Пусть $y_b = y(z,b) \not\equiv 0$ – решение уравнения (52) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция w, определяемая соотношением (5б), является решением уравнения (53).*

Теорема 12. *Пусть* $w_{b-1} = w(z, b-1) \not\equiv 0$ – *решение уравнения* (53) *при фиксированном значении параметра* b. *Тогда функция* y, *определяемая соотношением* (5а), *является решением уравнения* (52).

Уравнение (53) получается из (52) преобразованием $y = w$, $b \to 1 - b$.

Таким образом, формулы (5а), (5б) определяют, с одной стороны, преобразования Беклунда (прямое и обратное) для уравнения (50), а с другой стороны – преобразования Беклунда (прямое и обратное) для уравнения (52).

Пусть $\varphi(z) = c = \text{const}$. Тогда уравнения (50), (52) принимают соответственно вид

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2cy^2, \tag{54}$$

$$2yy'' = 3y'^2 + 2cy^2. \tag{55}$$

Уравнение (52) имеет первый интеграл

$$y'^2 - 2y^3 + 2cy^2 = Hy, \tag{56}$$

где H – произвольная постоянная. Уравнение (56) интегрируется в эллиптических функциях [15].

Уравнение (55) заменой

$$y = p^{-2}(z) \tag{57}$$

сводится к линейному уравнению $p'' = -(c/2)p$. Таким образом, доказана

Теорема 13. *Уравнения* (50), (52) *при* $\varphi(z) = c = \text{const}$ *являются уравнениями* P-*типа*.

Отметим, что уравнение (50) при $\varphi(z) = z$ есть уравнение XXXIV из списка [17].

Теорема 14. *Уравнение* (52) *при* $b = 0$ *либо при* $\varphi(z) = z$ *является уравнением типа Пенлеве*.

Доказательство. Если в (52) положить $b = 0$, то преобразованием (57) оно сводится к уравнению Эйри $p'' = -(\varphi/2)p$.

При $\varphi(z) = z$ уравнение (52) принимает вид

$$2yy'' = 3y'^2 - 4by' + 2zy^2 + b^2. \tag{58}$$

Пусть $b \neq 0$. Заменой $y \to by^{-1}$ от уравнения (58) перейдем к уравнению

$$2yy'' = y'^2 - 4y^2y' - y^4 - 2zy^2. \tag{59}$$

Наряду с (59) рассмотрим более общее уравнение

$$2vv'' = v'^2 - 4v^2v' - v^4 + 2F(z)v^2 - \delta, \tag{60}$$

в котором $F(z)$ – произвольная аналитическая функция, δ – параметр. Уравнение (60) с точностью до обозначений совпадает с (59) при $F(z) = -z$, $\delta = 0$. В работе [22] (где использовалось преобразование из [17], см. с. 454 в [17]) показано, что уравнение (60) является уравнением P-типа. А именно, общее решение уравнения (60) есть рациональная функция постоянных интегрирования. Теорема доказана.

Замечание 1. Уравнение (60) при $\delta = 1$ есть каноническое уравнение XXVII из списка [17]. Преобразование Беклунда для уравнения (60) в случае $F(z) = 2(z^2+\alpha)$, $\delta = -2\beta$ (α, β – произвольные параметры) получено в [23].

Следствие 1. *Уравнение* (50) *при* $\varphi''(z) \not\equiv 0$ *и уравнение* (52) *при* $b \neq 0$ *и* $\varphi''(z) \not\equiv 0$ *не являются уравнениями типа Пенлеве.*

Система (5) в случае $\varphi(z) = z$ приведена в [22].

6.2. При рассмотрении системы (6) будем исключать случай

$$M(z)(-2z + M(z)) \not\equiv 0, \tag{61}$$

$$N(z)(-2z + N(z)) \not\equiv 0 \tag{62}$$

при

$$\alpha + 2\varepsilon = \beta = 0. \tag{63}$$

Это связано с тем, что при выполнении условий (61)–(63) уравнения системы (6) вырождаются в соотношение $y + w = 0$.

Исключая из системы (6) неизвестную функцию y, приходим к заключению, что функция w удовлетворяет следующей совокупности дифференциальных уравнений:

- либо уравнению (32), т. е. третьему уравнению Пенлеве (24) в случае $\gamma = -\delta = 1$;
- либо уравнению

$$P(z, w, w', w'', \varepsilon, \alpha, \beta) = 0, \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned} P(z, w, w', w'', \varepsilon, \alpha, \beta) = {} & z^4w^8 + 2\alpha z^3w^7 + 2z^2(\alpha(\alpha+6)+1)w^6 + \\ & + 2z(\beta z^2 + 6\varepsilon + \alpha(\alpha^2 + 5\alpha\varepsilon + 10))w^5 + \\ & + (-2z^4 - 4\beta\varepsilon z^2 + \alpha^4 + 22\alpha^2 + 8\alpha(\alpha^2+3)\varepsilon + 9)w^4 - \\ & - 2z(\alpha z^2 + \beta(\alpha^2 + 5\alpha\varepsilon + 4))w^3 + 2z^2(\beta^2 + \alpha\varepsilon + 1)w^2 - 2\beta z^3 w + z^4 + \\ & + z(z^3w'^4 + 2wz^2(2wz + \alpha)\varepsilon w'^3 + \\ & + 2z(3z^2w^4 + (\alpha - 4\varepsilon)zw^3 - (2\alpha\varepsilon+1)w^3 + \beta zw - z^2)w'^2 + \\ & + 2w(2\varepsilon z^3w^5 + (2\varepsilon - 4)z^2w^4 - (7\alpha z + z(\alpha^2+4)\varepsilon)w^3 + \\ & + (4\beta\varepsilon z^2 + \alpha^2 + 5\alpha\varepsilon + 4)w^2 - z(2\varepsilon z^2 + \beta - \alpha\beta\varepsilon)w - \\ & - z^2(\alpha\varepsilon + 2)w''w - \alpha\varepsilon z^2)w' - 2zw^2(z(\alpha + 2\varepsilon)w^2 + \\ & + (\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + 2)w - \beta z)w''); \end{aligned}$$

- либо уравнению

$$Q(z, w, w', \varepsilon, \alpha, \beta) = 0, \tag{65}$$

где

$$\begin{aligned} Q(z, w, w', \varepsilon, \alpha, \beta) = (\alpha\varepsilon + 2)\{[zw' + \varepsilon zw^2 + (\alpha\varepsilon+1)w]^2 + z^2\} - \\ - 2\beta z[zw' + \varepsilon zw^2 + (\alpha\varepsilon+1)w]. \end{aligned}$$

Если из системы (6) исключить неизвестную функцию w, то приходим к заключению, что функция y удовлетворяет следующей совокупности дифференциальных уравнений:

- либо
$$zyy'' = zy'^2 - yy' + (\alpha + 4\varepsilon)y^3 + \beta y + zy^4 - z; \tag{66}$$
- либо
$$P(z, y, y', y'', -\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon, \beta) = 0; \tag{67}$$
- либо
$$Q(z, y, y', -\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon, \beta) = 0. \tag{68}$$

Легко проверить, что соотношение (6а) получается из (6б) по схеме $y \to w$, $w \to y$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, $\alpha \to \alpha+4\varepsilon$, $\beta = \beta$ и наоборот. В силу этого по такой же схеме уравнение (66) получается из (32), уравнение (67) – из (64), а уравнение (68) – из (65).

Наличие в уравнении (64) слагаемого $z^4w'^4$, а также одного из коэффициентов $-z^3(2\varepsilon + 2)ww'$ при w'' не позволяет представить его в виде
$$w'' = L(z, w)w'^2 + S(z, w)w' + T(z, w), \tag{69}$$
где L, S, T – рациональные функции w с аналитическими по z коэффициентами. Согласно [17] (см. стр. 437 в [17]) необходимым условием отсутствия у общего решения уравнения
$$w'' = R(z, w, w'), \tag{70}$$
где R – рациональная функция относительно w, w' с аналитическими по z коэффициентами, подвижных критических точек (т. е. наличия свойства Пенлеве) является представление (70) в виде (69). Таким образом, уравнение (64) не является уравнением типа Пенлеве. В этом нетрудно убедиться, например, при $\alpha = -2\varepsilon$, $\beta \neq 0$. А именно, при указанных значениях параметров уравнение (64) не удовлетворяет тесту Пенлеве [24], не имеет (согласно [25]) целых трансцендентных решений (в силу наличия одного доминирующего члена z^4w^8) и полиномиальных решений, отличных от $w = 0$. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 15. *Пусть $w = w(z, \alpha, \beta)$ – решение уравнения (32) при фиксированных значениях параметров α, β, $\varepsilon^2 = 1$ такое, что $M(z)(-2z+M(z)) \not\equiv 0$, $|\alpha+2\varepsilon|+|\beta| \neq 0$. Тогда функция y, определяемая соотношением (6а), является решением уравнения (64).*

Теорема 16. *Пусть $y = y(z, \alpha, \beta, \varepsilon)$ – решение уравнения (64) при фиксированных значениях параметров α, β, $\varepsilon^2 = 1$ такое, что $N(z)(-2z + N(z)) \not\equiv 0$, $|\alpha + 2\varepsilon| + |\beta| \neq 0$. Тогда функция w, определяемая соотношением (6б), является решением уравнения (32).*

Следовательно, при выполнении условий теорем 15, 16 соотношения (6а), (6б) при фиксированных значениях α, β, $\varepsilon^2 = 1$ устанавливают взаимнооднозначное соответствие (определяют прямое и обратное преобразования Беклунда) между решениями третьего уравнения Пенлеве (24) с набором параметров $(\alpha, \beta, 1, -1)$, $(\alpha+4\varepsilon, \beta, 1, -1)$ соответственно. С другой стороны, формулы (6а), (6б) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между решениями уравнений (64), (67) при фиксированных значениях α, β, $\varepsilon^2 = 1$.

Поскольку левая часть уравнения (65) при $\sigma\beta = \alpha\varepsilon + 2 \neq 0$, $\sigma^2 = 1$ есть точный квадрат, то оно равносильно уравнению

$$zw' + \varepsilon z w^2 + (\alpha\varepsilon + 1)w - \sigma z = 0, \tag{71}$$

все решения которого являются [14] одновременно решениями уравнения (24) при $\sigma\beta - \alpha\varepsilon - 2 = 0$.

Система (6) приведена в работе [26].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы некоторые аналитические свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка специального вида с произвольной аналитической функцией. Для каждого из приведенных уравнений получены преобразования Беклунда (прямое и обратное). Доказано существование у данных уравнений (за исключением одного) однопараметрических семейств решений, порождаемых решениями уравнения Риккати с произвольной аналитической функцией. Рассмотренные уравнения (не являющиеся в общем случае уравнениями типа Пенлеве) при определенных ограничениях на аналитическую функцию сводятся, в частности, ко второму, третьему (случаи: $\gamma = 0$, $\alpha = -\delta = 1$ и $\gamma = -\delta = 1$) или четвертому уравнению Пенлеве.

Рассмотрены свойства преобразований Беклунда нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, порождаемых двумя системами двух нелинейных уравнений первого порядка с квадратичными нелинейностями производных неизвестных функций.

Важный вопрос связан с конечностью или бесконечностью групп преобразований, допускаемых рассмотренными уравнениями. Для ответа на него, на мой взгляд, необходимо выполнить следующие исследования:

- найти дополнительные симметрии решений (если они есть) приведенных уравнений при произвольной функции φ (для уравнений Пенлеве такие имеются) или другие преобразования Беклунда, как это имеет место [23] для уравнения (24) в случае $\gamma = 1$, $\delta = -1$ или уравнения (38);
- исследовать характер подвижных особых точек решений приведенных уравнений;
- найти (по возможности) точные решения каждого из уравнений и попытаться их тиражировать с помощью преобразований Беклунда.

Благодарности. Автор благодарит рецензента за внимание к работе и конструктивные рекомендации.

Конфликт интересов. Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] P. A. Clarkson, “Open problems for Painlevé equations”, *SIGMA*, **15** (2019), 006, 20 pp.

[2] P. Deift, “Some open problems in random matrix theory and the theory of integrable system. II”, *SIGMA*, **13** (2017), 016, 23 pp.

[3] N. A. Kudryashov, “Rational and special solutions for some Painlevé hierarchies”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **24**:1 (2019), 90–100.

[4] В. И. Громак, "Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве", *Дифференц. уравнения*, **56**:8 (2020), 1017–1033.

[5] N. Kudryashov, "Lax pairs and rational solutions of similarity reductions for Kupershmidt and Sawada–Kotera hierarchies", *Regul. Chaotic Dyn.*, **26**:3 (2021), 271–292.

[6] И. А. Боброва, "Симметрии нестационарной иерархии $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(n)}$ и их приложения", *ТМФ*, **213**:1 (2022), 65–94.

[7] В. И. Громак, "О свойствах решений обобщенной иерархии уравнения P_{34}", *Дифференц. уравнения*, **58**:2 (2022), 153–163.

[8] S. P. Balandin, V. V. Sokolov, "On the Painlevé test for non-Abelian equations", *Phys. Lett. A*, **243**:3–4 (1998), 267–272.

[9] V. E. Adler, "Painlevé type reductions for the non-Abelian Volterra latties", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **54**:3 (14), 035204.

[10] В. Э. Адлер, В. В. Соколов, "О матричных уравнениях Пенлеве PII", *ТМФ*, **207**:2 (2021), 188–201.

[11] V. E. Adler, M. P. Kolesnikov, "Non-Abelian Toda lattice and analogs of Painlevé III equation", *J. Math. Phys.*, **63**:10 (2022), 103504, 11 pp.

[12] I. A. Bobrova, V. V. Sokolov, "On matrix Painlevé-4 equations", *Nonlinearity*, **35**:12 (2022), 6528–6556.

[13] I. Bobrova, V. Retakh, V. Rubtsov, G. Sharygin, "A fully noncommutative analog of the Painlevé IV equation and a structure of its solutions", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **55**:47 (2022), 475205, 30 pp.

[14] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве*, "Университетское", Минск, 1990.

[15] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976.

[16] В. И. Громак, "О решениях третьего уравнения Пенлеве", *Дифференц. уравнения*, **9**:11 (1973), 2082–2083.

[17] Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ОНТИ, Харьков, 1939.

[18] В. В. Цегельник, "Об одном соотношении между решениями третьего уравнения Пенлеве", *ТМФ*, **102**:3 (1995), 364–366.

[19] Н. А. Лукашевич, "К теории четвертого уравнения Пенлеве", *Дифференц. уравнения*, **3**:5 (1967), 771–780.

[20] A. N. W. Hone, F. Zullo, "A Hirota bilinear equations for Painlevé thranscendents P_{IV}, P_{II} and P_I", *Random Matrices Theory Appl.*, **7**:4 (2018), 184001, 15 pp.

[21] Н. А. Лукашевич, "Элементарные решения некоторых уравнений Пенлеве", *Дифференц. уравнения*, **1**:6 (1965), 731–735.

[22] В. В. Цегельник, "О свойствах решений двух дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве", *ТМФ*, **206**:3 (2021), 361–367.

[23] В. В. Цегельник, *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа*, Издательский центр БГУ, Минск, 2007.

[24] Н. А. Кудряшов, *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004.

[25] Г. Виттих, *Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям*, Физматгиз, М., 1960.

[26] В. В. Цегельник, "О решениях системы дифференциальных уравнений, связанной с третьим уравнением Пенлеве", *Доклады БГУИР*, 2008, № 2(32), 137–139.

Поступила в редакцию 16.05.2023,
после доработки 27.06.2023,
принята к публикации 30.06.2023