УДК 004.021+004.94

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАТТЕРНОВ СБОРКИ ОРИГАМИ И АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ИХ ПЛОСКОСКЛАДЫВАЕМОСТИ

Путято М.В., Парамонов А.И.
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
кафедра программного обеспечения информационных технологий
E-mail: a.paramonov@bsuir.by

Аннотация:
Путято М.В., Парамонов А.И. Моделирование паттернов сборки оригами и алгоритм оценки их плоскоскладываемости. *Рассматривается проблема подготовки паттернов сборки оригами. Для моделирования паттернов сборки чертежей оригами предложено использование правил Фудзиты. Приводится описание подхода к оценке плоскоскладываемости паттерна, в основе которого применение алгоритма для определения локальной плоскоскладываемости с помощью теоремы Кавасаки, теоремы Маэкавы и леммы «большой-маленький-большой». Приводятся доказательства линейной сложности для оценки плоскоскладывамости паттерна из единственной вершины.*
Annotation:
Putyato M.V., Paramonov A.I. Modeling crease patterns of origami plans and the algorithm to estimating their flat foldability. *The problem of preparing origami assembly patterns is considered. The use of Fujita's axioms for modeling crease patterns of origami plans is proposed. The description of the approach to estimating the flat foldability of a pattern is given which based on the algorithm of determining its local flat foldability using Kawasaki's theorem, Maekawa's theorem and the «big-little-big» lemma. Proofs of linear complexity for estimating the flat foldability of a pattern from a single vertex are given.*

Общая постановка проблемы

Паттерн сборки – один из видов диаграмм оригами, представляющий собой чертеж, на котором изображены все складки базовой формы модели. Являясь альтернативой стандартной пошаговой схеме складывания, паттерн намного компактнее и легче при описании сложных моделей, шаги сборки которых могут насчитывать несколько сотен. Паттерн дает не просто информацию «как сложить модель», но и сведения о том, как она была придумана. В настоящее время, автору не обязательно знать всю последовательность складывания (в виде пошаговой схемы), более того, ее просто может не существовать – в некоторых моделях все сгибы осуществляются одновременно, без промежуточных шагов.

Процесс складывания бумаги в оригами выполняется таким образом, чтобы, согласно определенным правилам, были совмещены ранее построенные или изначально имевшееся элементы фигуры. Другими словами, это пошаговый процесс. Чтобы формализовать эти правила можно использовать правила Фудзиты, которые определяют все возможные варианты построения новых складок на основе существующих [1]. Существуют семь правил, имеющих характер аксиом. Эти правила могут быть использованы в качестве возможных вариантов нанесения складок на паттерн и реализованы в программном средстве, которое манипулирует объектами паттерна: точками и прямыми линиями, – на некоторой конечной плоскости квадратного размера (в большинстве случаев классического оригами). Таким образом, представляя чертеж как некоторую евклидову плоскость конечного квадратного размера, можно пользоваться свойствами и законами обычной геометрии. Так, например, второе правило Фудзиты можно интерпретировать как задачу построения перпендикулярного разделителя между двумя точками, а третье правило – как задачу построения биссектрисы по двум прямым линиям.

Опираясь на правила Фудзиты, можно заранее сформировать некоторый набор точек и линий, а затем использовать его для решения различного рода задач по моделированию паттернов. Имея некоторый набор входных точек и линий, можно вычислить новый набор точек и линий с помощью заданных семи аксиом. Новый набор будет представлять из себя входные данные для следующей итерации. На рисунке 1 приведен квадрат, сформированный согласно описанному алгоритму с условием применения шести из семи аксиом и ограничением по количеству линий равному 500000.

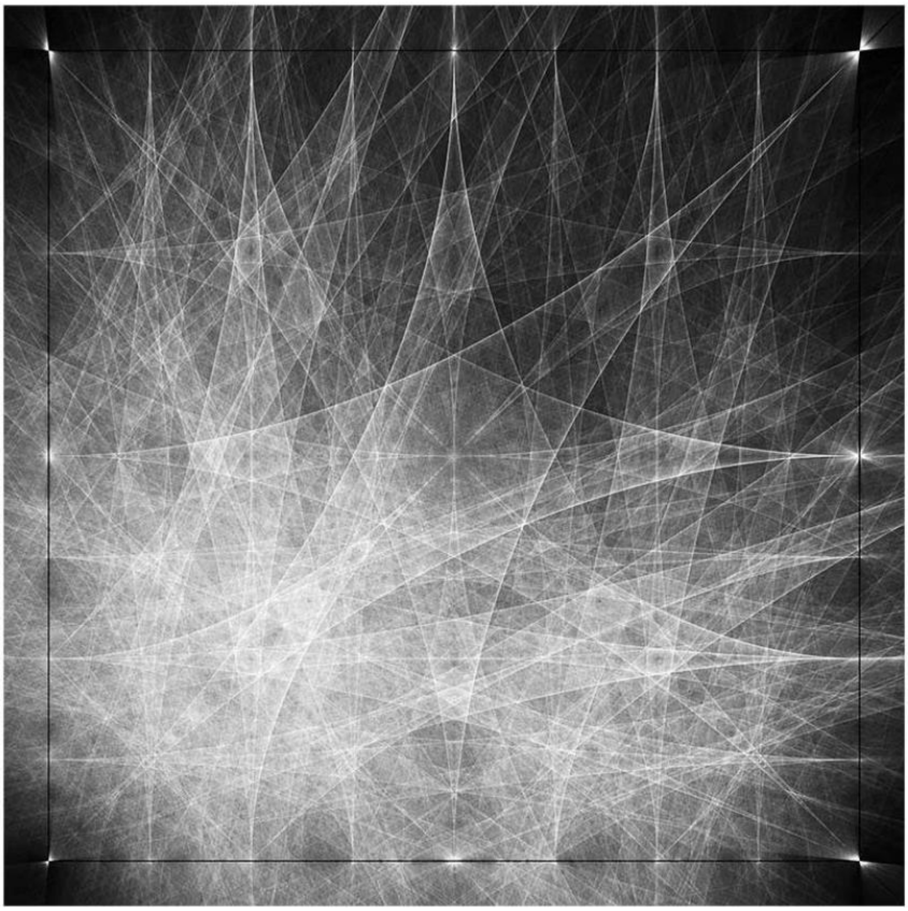

Рис. 1. Набор точек и линий, сформированный последовательным применением шести из семи аксиом Фудзиты

Получив подобный набор точек, можно для произвольной точки на квадрате определить набор складок, который к ней привел (с некоторой погрешностью).

В итоге, используя правила Фудзиты можно решать достаточно широкий спектр задач по разработке паттернов сборки планов оригами.

Исследования

Важным этапом при создании паттерна сборки является принципиальный вопрос о его складываемости в плоском виде. Когда складывание оригами позиционируется как геометрическая задача, то предполагается, что модель может быть сложена в плоском виде. Плоское складывание предполагает складывание модели таким образом, чтобы она была плоской (размещена на одной плоскости) и при этом ее целостность не была нарушена путем разрезания, склеивания и других манипуляций. Маршал Берн и Бэрри Хейс в 1996 доказали, что эта задача NP-трудна [2]. Это означает, что эффективного алгоритма для ее решения может не существовать. Они также доказали, что также NP-трудна более простая задача: для заданного плоскоскладываемого паттерна с указанными «горами» и «долинами» построить плоский результат сложения. NP-сложность сохраняется, даже если лист бумаги квадратный.

Ситуация, при которой случайным образом сформированный паттерн является плоскоскладываемым, достаточно редка. Однако зачастую в определении глобальной плоскоскладываемости паттерна нет необходимости, так как почти всегда автор проектирует паттерн на основе уже сложенной модели или на основе хорошо известных базовых форм. Тем не менее, корректность паттерна может быть оценена одним из необходимых условий глобальной плоскоскладываемости, а именно условием локальной плоскоскладываемости.

При локальной плоскоскладываемости идет рассмотрение складываемости каждой вершины паттерна в отрыве от всех остальных. Паттерн является локально плоскоскладываемым, если каждая его вершина является плоскоскладываемой. Поэтому можно выполнить рассмотрение этой проблемы для паттерна с единственной вершиной, формализовав его как циклическую последовательность углов $\theta_1,\ \theta_2, \dots, \theta_n$ между складками вокруг единственной вершины, сумма которых равна 360 градусов. Стоит отметить, что задача о плоскоскладываемости одной вершины поддается решению с помощью нескольких важнейший правил, которые можно учесть в программной реализации алгоритма.

Первым необходимым условием плоскоскладываемости паттерна с единственной вершиной является теорема Кавасаки, накладывающая ограничения на величины углов вокруг вершины. Теорема Кавасаки гласит, что сумма чередующихся углов, образованных складками вокруг вершины, должна быть равна 180 градусам (при общем четном количестве углов) для того, чтобы паттерн мог быть сложен в плоской форме [3].

Важно заметить, что данная теорема не учитывает тип складок, которые используются (называется «горы или долины»). Общая суть данной теоремы может быть выражена в виде следующей суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \theta_i = 0, \tag{1}$$

где θ_i – i-ый угол, образованный складками при вершине; n – количество углов при проверяемой вершине.

Вторым необходимым условием является теорема Маэкавы, накладывающая ограничения на присваивание складкам гор-долин. Теорема Маэкавы гласит, что количество складок-гор и количество складок-долин одной вершины должны отличаться на два, чтобы паттерн мог быть сложен в плоской форме [4]. Из формулировки нетрудно заметить, что при выполнении теоремы общее число складок (и углов) будет четным числом, что удовлетворяет одному из критериев теоремы Кавасаки и делает две теоремы непротиворечивыми.

Третье необходимое условие описано в лемме «большой-маленький-большой». Для этого введем понятие локального минимума. Будем считать некоторый угол θ_i локальным минимумом, если выполняется неравенство:

$$\theta_{i-1} > \theta_i < \theta_{i+1}. \tag{2}$$

Рассмотрим некоторый плоскоскладываемый паттерн из одной вершины и предположим, что он содержит k одинаковы углов, окруженных двумя строго большими углами. Данное условие можно выразить в следующем виде:

$$\theta_{i-1} > \ \theta_i = \theta_{i+1} = \dots = \theta_{i+k-1} < \theta_{i+k}. \tag{3}$$

Если условие (3) выполняется, то среди сгибов между двумя строго большими углами количество «гор» и количество «долин» отличаются на 0, если k нечетное, и на 1, если k четное. На рисунке 2 сверху ситуация с четным количеством сгибов, а снизу с нечетным. Легко заметить, что там, где количество сгибов – четное число, количество «гор и долин» различается на +/–1, а там, где количество сгибов – нечетное число, количество «гор и долин» одинаково.

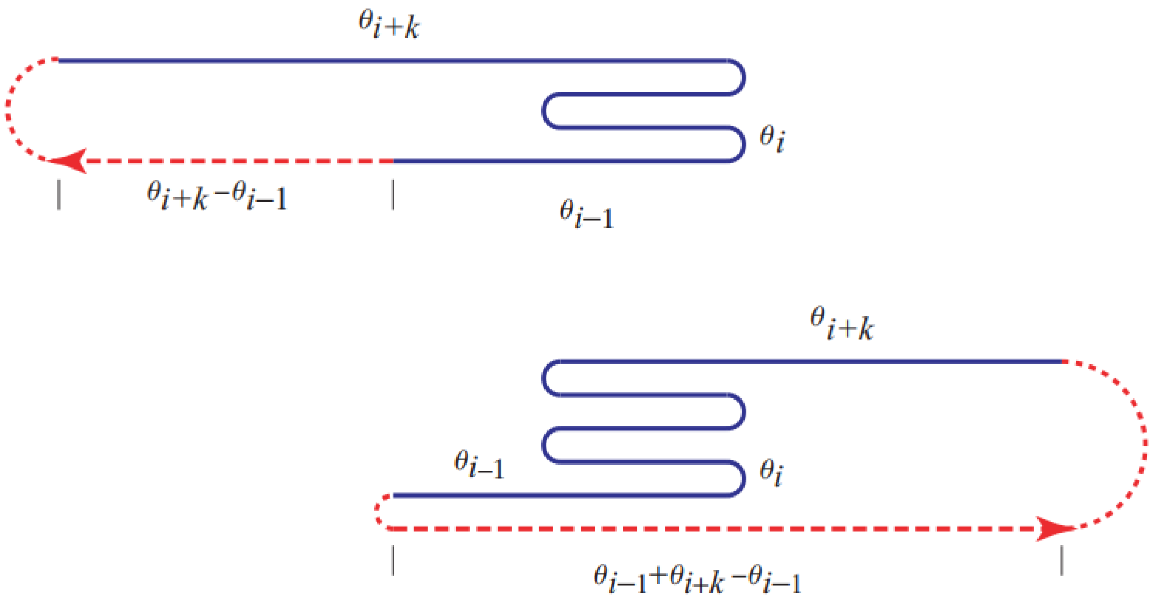

Рис. 2. Последовательность одинаковых углов окруженных строго большими углами

Характеритика плоскоскладываемого паттерна с единственной вершиной будет следующей: «Если все углы паттерна с единственной вершиной равны (теорема Кавасаки удовлетворена), тогда присваивание «гор-долин» должно соответствовать теореме Маэкавы. В противном случае, паттерн будет плоскосклаыдваемым тогда и только тогда, когда любая последовательность k одинаковых углов, окруженных строго большими углами, удовлетворяет лемме «большой-маленький-большой» и, если этот же паттерн будет плоскоскладываемым в случае складывания сгибов между этими k углами, за исключением последего сгиба, если количество углов k – четное».

В характеристике плоскоскладываемости было упомянуто «складывание» сгибов. Складывание можно представить как преобразование тройки углов в один новый угол (θ_{new}), который образуется согласно формуле (4).

$$\theta_{new} = \theta_{i-1} + \theta_{i+1} - \theta_i. \qquad (4)$$

Сложность проверки плоскоскладываемости единственной вершины является линейной, поскольку сложность каждого необходимого условия, описанного выше, определяется линейной величиной в отношении количества углов или количества сгибов относительно вершины.

Для обоснования утверждения о линейной сложности рассмотрим несколько случаев. Предположим, что количество углов и, соответственно, складок у вершины равно N, тогда:

– для теоремы Кавасаки достаточно один раз пройти по всем N углам и проверить выполнение теоремы;

– для теоремы Маэкавы достаточно один раз пройти по всем N складкам и проверить выполнение теоремы;

– для леммы «большой-маленький-большой» достаточно один раз пройти по всем N углам и определить все последовательности одинаковых строгих локальных минимумов, а затем пройти по всем последовательностям (в худшем случае $N-2$ вершинам) и проверить выполнение леммы;

– для складывания сгибов в сериях k одинаковых углов, окруженных строго большими углами, за линейное время можно определить кандидатов на сложение, а затем на каждой итерации убирать из списка углов по два элемента.

Если учесть, что количество складок, связанных с одной вершиной, фактически никогда не превышает сотни, то алгоритм выполняется достаточно быстро для одной вершины. В этом случае время работы для выполнения паттерна с множеством вершин зависит от количества вершин.

Для проведения компьютерного эксперимента по моделированию паттернов сборки и демонстрации процесса их реализации было разработано программное средство. При проектировании программного средства предусмотрены различные методы нанесения складок на паттерн, некоторые из них соответствуют правилам Фудзиты. Для удобства пользователей при конструировании паттерна была также добавлена поддержка зеркалирования складок, что позволяет ускорить создание паттернов, поскольку модели оригами в большинстве случаев симметричны. Помимо построения паттернов, в программе предусмотрена проверка на локальную плоскоскладываемость моделируемого паттерна на любом этапе его создания согласно описанному выше алгоритму.

Выводы

Проведенное в работе исследование проблемы построения паттернов сборки оригами позволяет создавать корректные, другими словами, плоскоскладываемые паттерны. Предложенный подход позволяет однозначно решать различные задачи по построению складок паттерна: от последовательного наложения новых прямых и точек согласно правилам Фудзиты до задания последовательности складок для достижения произвольной точки. Разработанное в рамках эксперимента программное средство позволяет облегчить и ускорить процессы обучения сборке моделей оригами на основе паттернов, повышает уровень квалификации людей, собирающих оригами, служит для демонстрации возможностей по использованию моделирования паттернов как одного из перспективных способов подготовки к сборке оригами.

Литература

1. Robert J. Lang. Huzita-justin axioms. Robert J. Lang Origami. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http: //www.langorigami.com/article/huzita-justin-axioms – Дата доступа: 10.05.2023.

2. Marshall Bern and Barry Hayes. The complexity of flat origami. In Proc. of the 7th annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 175-183, 1996.

3. Toshikazu Kawasaki. Roses, Origami & Math, pages 136-173. Japan Publications Trading Co., 1998.

4. Thomas C. Hull. The combinatorics of flat folds: a survey. In Origami. AK Peters, 2002. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1307.1065 – Дата доступа: 10.05.2023.

5. Erik D. Demaine. Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra / Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke // Single-vertex origami crease patterns. – 2007. – Vol. 12.2. – P. 198–212.