

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информатики

В. Я. Анисимов, Л. И. Минченко

КРАТКИЙ КУРС ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие
по курсу «Методы численного анализа»
для студентов специальности «Информатика»
всех форм обучения

В 2-х частях

Часть 2

Минск 2008

УДК 518.1 (075.8)
ББК 22.19 я 73
А 67

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. Н. Роговцов

Анисимов, В. Я.

А 67 Краткий курс численного анализа: учеб.-метод. пособие по курсу «Методы численного анализа» для студ. спец. «Информатика» всех форм обуч. В 2 ч. Ч. 2 / В. Я. Анисимов, Л. И. Минченко. – Минск : БГУИР, 2008. – 52 с. : ил.

ISBN 978-985-488-230-7 (ч. 2)

Во второй части настоящего пособия рассмотрены методы конечных элементов, вариационного исчисления, численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных.

Пособие содержит три лабораторные работы и варианты заданий к ним. Предназначено для студентов специальности «Информатика» всех форм обучения.

УДК 518.1 (075.8)
ББК 22.19 я 73

Часть 1 была издана в БГУИР в 2006 г.

ISBN 978-985-488-230-7 (ч. 2)
ISBN 978-985 444-930-2
ISBN 985-444-930-0

© Анисимов В. Я, Минченко Л. И., 2008
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	5
1.1. Связь метода конечных элементов и метода конечных разностей.....	5
1.2. Пример решения одномерной задачи.....	6
1.3. Конечные элементы для многомерных областей	8
1.4. Аппроксимирующие функции элементов.....	15
1.5. Объединение конечных элементов в ансамбль.	18
1.6. Определение вектора узловых значений функций.	20
1.7. Двухмерные финитные функции на треугольной сетке.....	24
1.8. Решение двухмерной задачи Дирихле на треугольной сетке	25
2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ	28
2.1. Теоретические основы вариационных методов.....	28
2.2. Примеры решения задач методом Галеркина.....	31
2.2.1. Одномерная краевая задача Дирихле	31
2.2.2. Двухмерная краевая задача Дирихле.....	32
2.2.3. Сведение задачи для ДУ в частных производных к решению задачи для системы ОДУ методом Канторовича.....	33
Лабораторная работа «Решение краевых задач. Методы коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина».....	34
Лабораторная работа «Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций».....	40
Лабораторная работа «Метод сеток для решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности».....	42
ЛИТЕРАТУРА.....	51

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Методы численного анализа» предполагает освоение методов решения классических задач вычислительной математики с помощью компьютерной техники.

В первой части пособия изложены основные понятия, определения и алгоритмы методов численного анализа, рассмотрены основные методы решения систем линейных уравнений, нахождения собственных значений и собственных векторов, численного решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, а также излагаются основные методы аппроксимации и интерполяции функций, методы численного дифференцирования и интегрирования функций, численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных.

Во второй части пособия рассмотрены методы конечных элементов, вариационного исчисления, численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных.

Пособие содержит три лабораторные работы, выполнение которых преследует цель научить студентов численному решению типичных задач вычислительной математики, достаточно сложных в вычислительном отношении и требующих применения ПЭВМ, а также варианты заданий к ним.

1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1. Связь метода конечных элементов и метода конечных разностей

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области – узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка в свою очередь является дискретной моделью области определения искомой функции.

Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе нелинейных в общем случае алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функций.

В общем случае алгоритм метода сеток состоит из трех этапов.

Шаг 1. Построение сетки в заданной области (дискретизация задачи).

Шаг 2. Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи).

Шаг 3. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

Метод сеток разделяется на два метода: 1) **метод конечных элементов (МКЭ)**; 2) **метод конечных разностей (МКР)**. Эти методы отличаются друг от друга на шагах 1 и 2 алгоритма. На шаге 3 методы практически идентичны.

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в САПР. В математическом отношении метод относится к группе вариационно-разностных. Строгое доказательство таких важных свойств, как устойчивость, сходимость и точность метода, проводится в соответствующих разделах математики и часто представляет собой непростую проблему. Тем не менее МКЭ активно развивается, с его помощью и без строгого математического обоснования используемых приемов успешно решаются сложные технические проблемы. Правильность же работы созданных алгоритмов и программ, реализующих МКЭ, проверяют на известных точных решениях. Начав развиваться как метод решения задач строительной механики, МКЭ быстро завоевал такие сферы инженерной деятельности, как проектирование самолетов и автомобилей, космических ракет, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

Теоретическое обоснование этого метода было в основном завершено в 70-е годы прошлого столетия, а с появлением высокопроизводительной вычислительной техники он стал важным инструментом исследований в науке и технике. Появилось множество пакетов прикладных программ, как коммерческих, так и общедоступных, позволяющих решать разнообразные задачи – теплопроводности, электродинамики, механики деформируемого твердого тела, гидро-

динамики и др. МКЭ представляет собой синтез метода сеток и проекционного метода Галеркина с выбором базиса из финитных функций, носители которых (конечные элементы) покрывают каждый узел сетки. В результате применения к такому базису проекционной процедуры для коэффициентов разложения искомого решения получается система алгебраических уравнений, аналогичная той, к которой приводят сеточные методы, – матрица ленточная, количество неизвестных равно количеству узлов сетки. К тому же при определенном выборе финитных функций искомые коэффициенты являются приближенными значениями решения в узлах сетки.

Поэтому можно сказать, что МКЭ – это тот же классический метод сеток, в котором конечно-разностная схема получается в результате применения проекционной процедуры к базису из финитных функций, привязанных к каждому узлу сетки. Такой способ получения конечно-разностной схемы позволил избавиться от основного недостатка классического метода сеток – привязки узлов сетки к координатным линиям, что позволило в случае многомерных задач гибко адаптировать сетку к произвольной форме границ и особенностям искомого решения.

1.2. Пример решения одномерной задачи

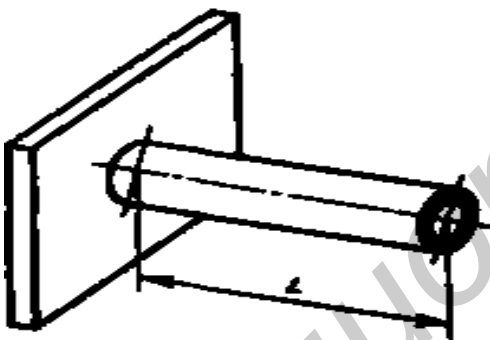


Рис. 1.1. Однородный стержень, находящийся под воздействием теплового потока

- Пусть имеется стержень длиной L и площадью поперечного сечения S (рис. 1.1). Один конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток q заданной интенсивности. На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Известны коэффициент теплообмена a и температура окружающей среды T_* . Вдоль боковой поверхности стержень теплоизолирован.

Температурное поле в неоднородном стержне описывается уравнением теплопроводности, которое в одномерном приближении

имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x).$$

Краевые условия определяются уравнениями:

$$I_x (\partial T / \partial x) + q = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$I_x (\partial T / \partial x) + a (T - T_*) = 0 \quad \text{при } x = L.$$

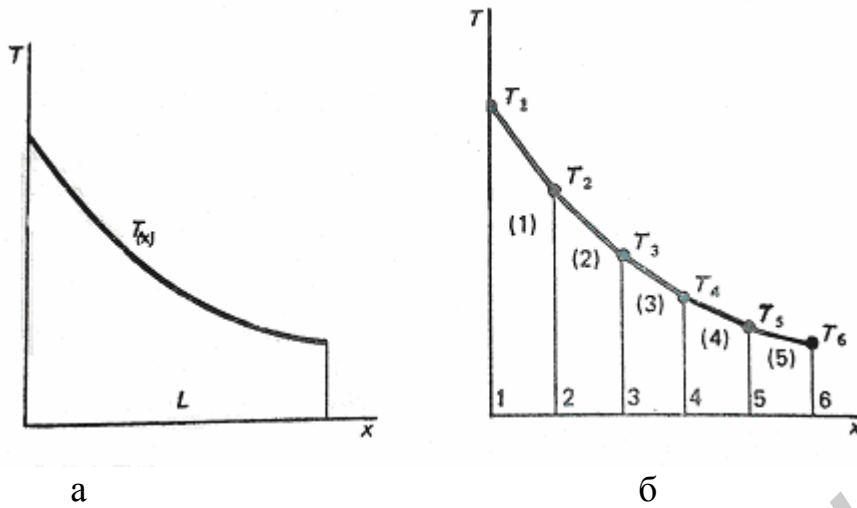


Рис. 1.2. Расчет одномерного температурного поля в однородном стержне методом МКЭ

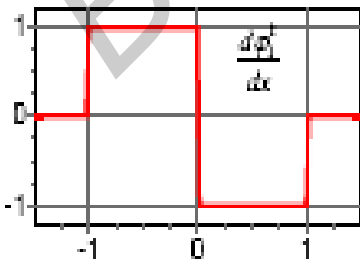
Искомое температурное поле является непрерывной функцией координаты x (рис. 1.2, а). В МКЭ стержень разбивается произвольным образом на конечные элементы, которые в данном случае являются отрезками неравной длины. На каждом элементе непрерывная функция $T(x)$ аппроксимируется некоторой линейной зависимостью, как показано на рис. 1.2, б (в скобках указаны номера элементов). Аппроксимирующая кусочно-линейная функция определяется через узловые значения $T_1 - T_6$, которые в общем случае сначала неизвестны и подлежат определению в МКЭ. Рассмотрим реализацию МКЭ на примере решения простейшей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x) \quad u(0) = a; \quad u(b) = b.$$

Выбираем равномерную сетку $w_n = \{x_i = (i-1)h, i = 1 \mathbf{K} N = n+1\}$ и ищем решение в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k j_k(x), \quad j_k = j_1^1 \left(\frac{x - (k-1)h}{h} \right).$$

Здесь обозначено $a_k = \bar{u}_k$. Заметим, что $\bar{u}_1 = a$, $\bar{u}_N = b$ в силу граничных условий. Производная от функции-крышки также финитная функция:



$$\frac{\partial j_1^1}{\partial x} = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Используем проекционные уравнения

$$\sum_{k=1}^N \left(g \frac{\partial j_k}{\partial x}, \frac{\partial j_i}{\partial x} \right) a_k = f_i; \quad i = 1 \mathbf{K} N.$$

Ввиду ограниченности функций каждое i -е уравнение содержит только три члена:

$$-\bar{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx + \bar{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx - \bar{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g}{h^2} dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f j_i dx.$$

Обозначим

$$g_{i-1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g dx, \quad g_{i+1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g dx, \quad f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f j_i dx.$$

Получаем конечно-разностную схему:

$$\frac{g_{i-1/2}}{h^2} \bar{u}_{i-1} - \left(\frac{g_{i-1/2} + g_{i+1/2}}{h^2} \right) \bar{u}_i + \frac{g_{i+1/2}}{h^2} \bar{u}_{i+1} = f_i, \quad i = 2 \dots n, \quad \bar{u}_1 = a, \quad \bar{u}_N = b.$$

Как видим, технология МКЭ для одномерного уравнения приводит практически к той же конечно-разностной схеме с трехдиагональной матрицей, что и классический метод сеток. Имеются, однако, некоторые отличия в вычислении коэффициентов: в МКЭ коэффициенты $g_{i\pm 1/2}$ вычисляются через интегралы по соответствующим участкам сетки. Это значит, что технология МКЭ приводит к так называемым однородным конечно-разностным схемам, т.е. таким, которые позволяют проводить расчеты ДУ с разрывными коэффициентами.

1.3. Конечные элементы для многомерных областей

Аналогичный подход может быть и в случае двух- и трехмерных областей определения искомой функции.

Для двухмерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как прямо, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее употребимы элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь прямолинейные и криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех шагов.

Шаг 1. Выделение конечных элементов (разбиение заданной области на конечные элементы).

Шаг 2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции $j^{(e)}$ в произвольной точке e -го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$j^{(e)} = A^{(e)} R + A_0, \tag{1.1}$$

где $A^{(e)}$ – вектор-строка коэффициентов полинома; A_0 – свободный член; $R = (x, y, z)$ – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора $A^{(e)}$ и свободного члена A_0 . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор $\Phi^{(e)}$ узловых значений функции и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\mathbf{j}^{(e)} = N^{(e)}\Phi^{(e)}, \quad (1.2)$$

где $N^{(e)}$ – матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Шаг 3. Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (1.2), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т.е. в систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{j} = N\Phi. \quad (1.3)$$

Система (1.3) является моделью искомой непрерывной функции.

Шаг 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор Φ в (1.3) вначале не известен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора Φ . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Выбор функционала F , зависящего для стационарных задач от искомой функции j и ее частных производных $\dot{j}_x, \dot{j}_y, \dot{j}_z$, по вектору пространственных координат:

$$F = \int_V f(j, \dot{j}_x, \dot{j}_y, \dot{j}_z) dV, \quad (1.4)$$

где V – объем.

Функционал F представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам:

$$F = \sum_{e=1}^N F^{(e)} = \sum_{e=1}^N \int_{V^{(e)}} f(j^{(e)}, \dot{j}_x^{(e)}, \dot{j}_y^{(e)}, \dot{j}_z^{(e)}) dV^{(e)}, \quad (1.5)$$

где N – число элементов.

Шаг 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (1.2) в (1.5) и вычисление производных $\dot{j}_x^{(e)}, \dot{j}_y^{(e)}, \dot{j}_z^{(e)}$ по формулам вида

$$\dot{j}_x^{(e)} = \partial j^{(e)} / \partial x = (\partial N^{(e)} / \partial x) \Phi^{(e)}.$$

Шаг 3. Минимизация по вектору Φ функционала F . Для этого составляются выражения

$$\partial F^{(e)} / \partial \Phi^{(e)} = 0. \quad (1.6)$$

Суммирование выражений (1.6) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

$$K\Phi = B, \quad (1.7)$$

где K – матрица коэффициентов, так называемая матрица жесткости; B – вектор нагрузки.

Шаг 4. Решение системы (1.7), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

Найденные значения вектора Φ подставляют в (1.3), после чего значение функции j легко вычисляется в любой точке заданной области.

Каждый из четырех шагов приведенного алгоритма МКЭ при реализации в САПР обладает особенностями, которые подробно рассматриваются ниже.

Разбиение области на элементы – важный этап в МКЭ. От качества разбиения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы.

Возможность легко варьировать размерами элементов – важное свойство МКЭ (последнее позволяет без труда учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т.д.).

Разбиение области на элементы обычно начинают от ее границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится разбиение внутренних областей. Часто разбиение области на

элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на достаточно крупные подобласти (подконструкции), границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать. На рис. 1.3 приведен пример разбиения двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

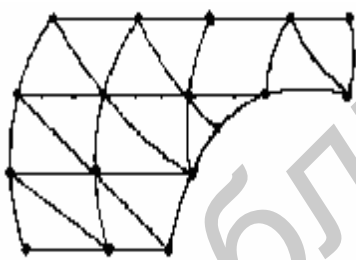


Рис. 1.3. Разбиение двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов) – следующая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумерации имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений. Дело в том, что матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, – сильно разреженная матрица ленточной структуры.

Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали. Целое число L , представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется шириной полосы. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем ОП требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затраты машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит в свою очередь от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних. Под числом степеней свободы понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двумерных задач гидравлики в каждом узле определяют три переменные: давление и составляющие скорости по осям X и Y .

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить N , а число степеней свободы – M , то ширина полосы равна $L = (N + 1)M$.

В некоторых случаях уменьшение числа N может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области. На рис. 1.4 приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на конечные элементы. При первом способе (рис. 1.4, а) $N = 14$, при втором (рис. 1.4, б) $N = 5$. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной соответственно 15 и 6; при двух степенях свободы – 30 и 12. Рациональная нумерация в случае рис. 1.4, б сокращает необходимый объем памяти почти в три раза по сравнению со случаем на рис. 1.4, а.

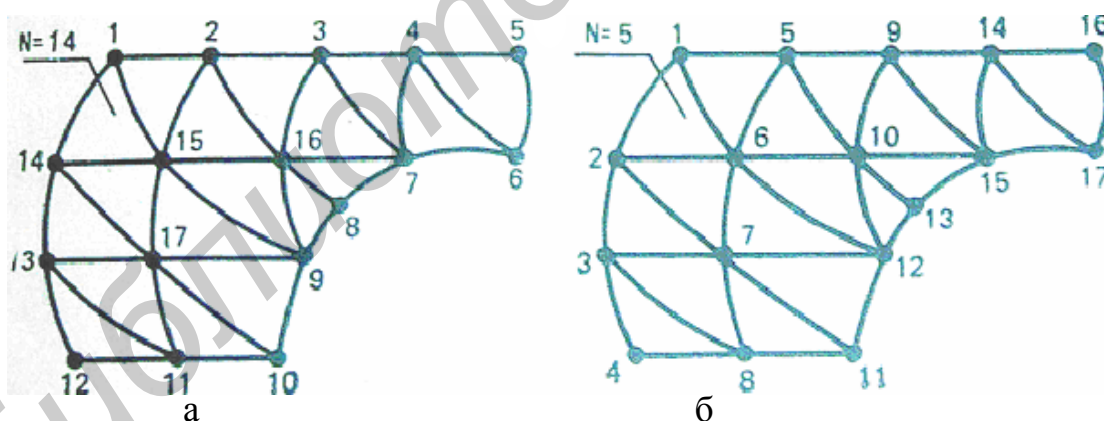


Рис. 1.4. Способы нумерации узлов при разбиении двумерной области на конечные элементы

Информация о способе разбиения области на конечные элементы и нумерации узлов является исходной для всех следующих этапов алгоритмов МКЭ при реализации метода в САПР. При этом требуется указывать не только номер, но и координаты каждого узла и его принадлежность к определенным конечным элементам. Такого рода информация называется топологической и обычно содержит примерно в 6 раз больше чисел, чем количество узлов системы.

При описании области, разбитой на конечные элементы, необходимо задавать: тип конечного элемента; его порядковый номер; номера узлов элемента; координаты узлов, информацию о соединении элементов между собой; значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Так, промышленная эксплуатация программной системы долгое время тормозилась именно сложностью подготовки исходных данных, объем которых в некоторых случаях достигал нескольких сотен тысяч.

При решении задач методом конечных элементов область определения искомой функции разбивается на несколько тысяч элементов примерно с таким же количеством узлов. В связи с этим возникают проблемы, связанные со сложностью подготовки столь большого количества исходной информации и с трудностью ее проверки и корректировки, так как при ручной подготовке такого объема исходных данных неизбежно появление ошибок.

Поэтому усилия разработчиков программ МКЭ в составе САПР в последние годы были направлены на создание подсистем автоматизированной подготовки топологической информации, основу которых составляют специальные программы, называемые препроцессорами. Препроцессоры либо непосредственно включаются в состав программных комплексов, реализующих МКЭ, либо существуют в виде автономных программ.

Алгоритм работы препроцессора, как правило, состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Нанесение на заданную область некоторого множества узлов.

Шаг 2. Формирование узловых связей с целью заполнения области конечными элементами «наилучшей» формы.

Шаг 3. Нумерация узлов, минимизирующая ширину полосы в матрице коэффициентов системы уравнений.

Последняя процедура поддается алгоритмизации особенно просто и реализована практически во всех крупных программных комплексах на основе МКЭ. При автоматическом нанесении на исходную область множества узлов должен выдерживаться ряд требований. Так, узлы должны сгущаться в зонах, где ожидаются высокие концентрации напряжений или градиенты температур. При этом изменение густоты узлов не должно быть скачкообразным. Эти требования удается обеспечить, если в качестве координат узлов брать случайные числа с заданным законом распределения. Тогда в программных реализациях координаты узлов генерируются датчиком случайных чисел. Алгоритмы формирования межузловых связей строятся на основе различных подходов. При этом в первую очередь стараются, если это возможно, использовать упрощающие предположения. Так, регулярность области, очевидно, удобно использовать для построения однородной сетки, шаг которой меняется по несложному закону. Криволинейные границы области часто аппроксимируют с помощью отрезков прямой, параболы или дуги.

В основу разбиения области произвольной формы на треугольные конечные элементы может быть положен следующий алгоритм:

Шаг 1. Аппроксимация границы области совокупностью отрезков, представляемых номерами узлов.

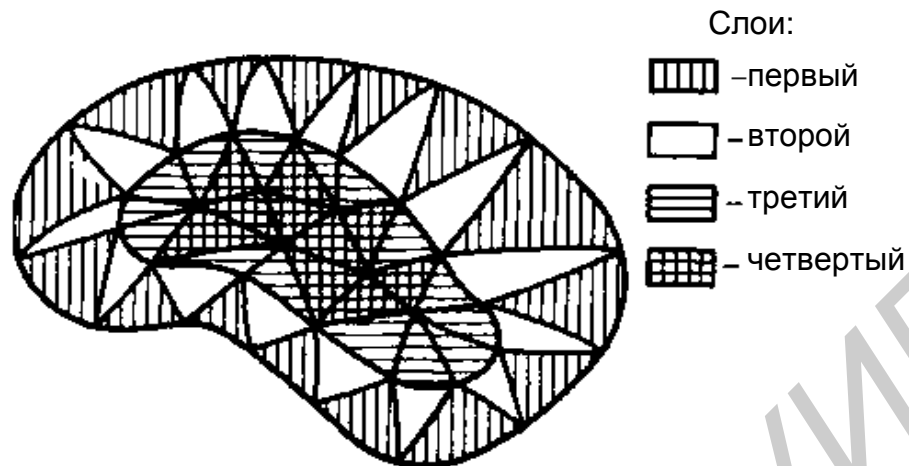


Рис. 1.5. Пример использования алгоритма автоматического разбиения произвольной области на треугольные конечные элементы

Шаг 2. Выбор вершин треугольников, основаниями которых служат полученные на шаге 1 отрезки (при этом выбор вершин разрешен только с одной вполне определенной стороны).

Шаг 3. Соединение основания с выбранной вершиной отрезками, которые на следующем шаге сами будут рассматриваться как основания новых треугольников.

Алгоритм повторяется до тех пор, пока остается возможным строить новые элементы на базе проведенных отрезков, т.е. до полного заполнения области элементами.

Пример такого «послойного» заполнения области элементами приведен на рис. 1.5. При построении очередного треугольника для анализа выбираются вначале два ближайших к основанию узла с «разрешенной» стороны. На выбранных узлах строится прямоугольник. Далее проводится топологический анализ, использующий информацию об уже построенных элементах. Целью анализа является исключение возможности попадания какого-либо узла внутрь построенного треугольника. На основании анализа выбирается одна из двух возможных вершин и четырехугольник делится на треугольники одним из двух возможных способов.

Примером другого подхода к автоматическому разбиению области на элементы служит следующий алгоритм:

Шаг 1. Определение граничных узлов области.

Шаг 2. Построение регулярной сетки с тем же числом узлов, что и в заданной области.

Шаг 3. Использование полученной схемы соединения узлов для области произвольной формы.

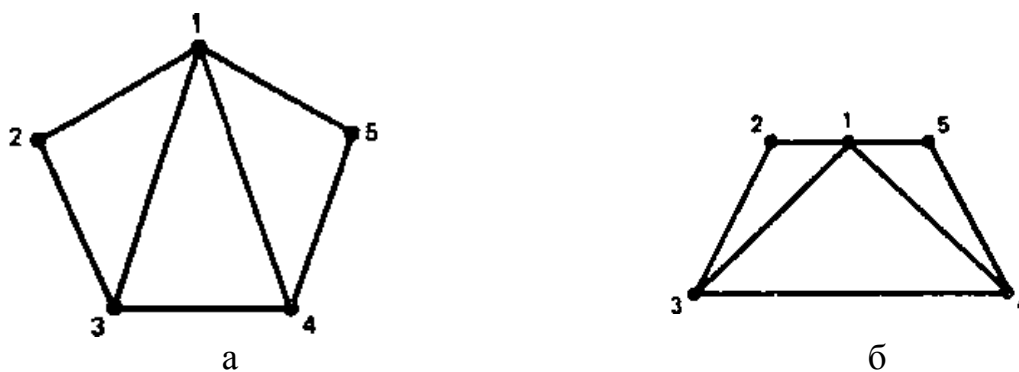


Рис. 1.6. Пример автоматического разбиения области с пятью граничными узлами на треугольные элементы:
а – регулярная сетка; б – сетка в заданной области

На рис. 1.6 приведен пример разбиения на треугольные конечные элементы области с пятью граничными узлами.

Для построения регулярной сетки используется следующий алгоритм:

Шаг 1. Окружение исходной точки кольцом равносторонних треугольников так, чтобы число внешних узлов было предельно близким к заданному числу граничных узлов.

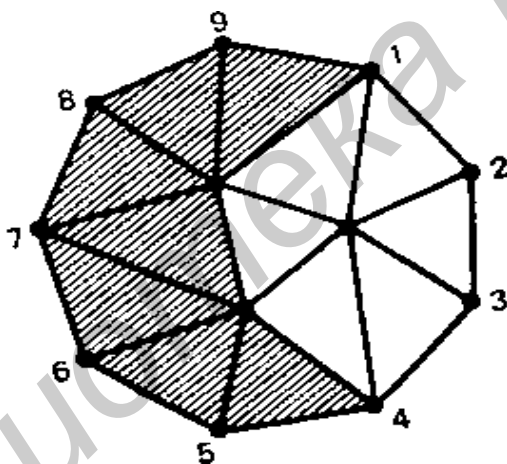


Рис. 1.7. Пример использования алгоритма автоматического построения сетки наилучшего вида в области с десятью граничными узлами

Шаг 2. Если желаемый результат не достигнут, добавление еще одного ряда колец.

На рис. 1.7 проиллюстрировано использование приведенного алгоритма для построения регулярной сетки «наилучшего» вида для границы с девятью узлами. Полученная в результате проведенного построения схема соединения узлов позволяет получить координаты всех внутренних точек области. Если в результате выполнения алгоритма вид конечных элементов оказывается неудовлетворительным, то исходная область разбивается на подобласти и все повторяется сначала.

1.4. Аппроксимирующие функции элементов

Определение аппроксимирующей функции элементов. Эту процедуру можно выполнить один раз для типичного элемента области безотносительно к его топологическому положению в ней. Полученная функция используется далее для всех остальных элементов области того же вида. Эта особенность является важным аспектом МКЭ. Благодаря ей элементы с однажды определенными функциями легко включаются в библиотеку элементов соответствующего программного комплекса. Далее эти элементы применяются для решения разнообразных краевых задач.

Выше отмечалось, что в качестве аппроксимирующих функций элементов чаще всего используются полиномы. В зависимости от степени последних конечные элементы делятся на симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы. Полиномы симплекс-элементов содержат константы и линейные члены; полиномы комплекс-элементов – константы, линейные члены, а также члены более высоких степеней. Комплекс-элементы, как правило, кроме граничных имеют дополнительные внутренние узлы. Полиномы мультиплекс-элементов также содержат члены более высоких степеней. Однако на мультиплекс-элементы накладывается дополнительно еще одно условие: их границы должны быть параллельны координатным осям.

Одномерный симплекс-элемент представляет собой отрезок, изображенный на рис. 1.8.

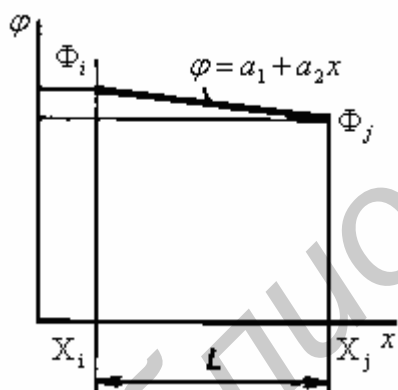


Рис. 1.8. Одномерный симплекс-элемент

При определении функции этого элемента для простоты будем считать, что узловые значения искомой непрерывной функции, определенные на концах отрезка, известны. По длине отрезка значение функции аппроксимируется полиномом

$$j = a_1 + a_2 x. \quad (1.8)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются через узловые значения функции Φ_i , Φ_j в соответствии с условием непрерывности:

$$\begin{aligned} j &= \Phi_i \text{ при } x = X_i; \\ j &= \Phi_j \text{ при } x = X_j. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставив (1.9) в (1.8), получим

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i; \quad \Phi_j = a_1 + a_2 X_j. \quad (1.10)$$

Решим систему (1.10) относительно a_1 и a_2 :

$$a_1 = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L; \quad a_2 = (\Phi_j - \Phi_i) / L.$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в (1.8), получим

$$j = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L + [(\Phi_j - \Phi_i) / L] x. \quad (1.11)$$

Проведя эквивалентные преобразования правой части уравнения (1.11), представим его в форме

$$j = [(X_j - x) / L] \Phi_i + [(x - X_i) / L] \Phi_j. \quad (1.12)$$

Члены уравнения (1.12), заключенные в скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

$$N_i = (X_j - x) / L; \quad N_j = (x - X_i) / L. \quad (1.13)$$

С учетом обозначений (1.13) уравнение (1.12) принимает вид

$$j = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \quad (1.14)$$

или в матричной форме

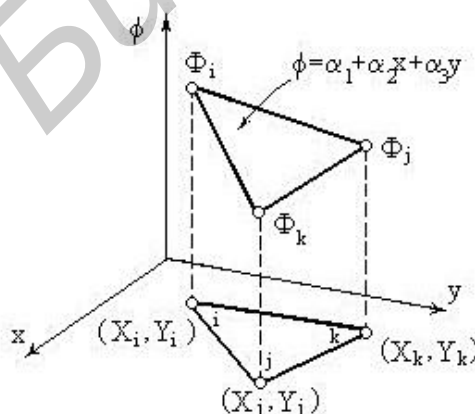
$$j = N \Phi, \quad (1.15)$$

где $N = [N_i, N_j]$ – матрица-строка;

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} \text{ – вектор-столбец.}$$

Функции формы обладают следующим свойством: функция формы с номером i равна 1 в узле с соответствующим номером и равна 0 во всех других узлах. Нетрудно убедиться в наличии этого свойства у функций формы (1.13).

Двухмерный симплекс-элемент представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами, уже использовавшийся выше для дискретизации произвольной двумерной области. Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию j внутри треугольного симплекс-элемента, имеет вид



$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (1.16)$$

Рис. 1.9. Функция двухмерного симплекс-элемента

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами i, j, k , начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис. 1.9). Узловые значения Φ_i, Φ_j, Φ_k будем по-прежнему считать известными.

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i;$$

$$\Phi_j = a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j;$$

$$\Phi_k = a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k,$$

разрешая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,5/S)[(X_j Y_k - X_k Y_j)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\Phi_k]; \\ a_2 &= (0,5/S)[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k]; \\ a_3 &= (0,5/S)[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k], \end{aligned} \quad (1.17)$$

где S – площадь элемента, вычисляемая по формуле

$$S = 0,5[X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)].$$

Подставив (1.17) в (1.16) и проделав преобразования, аналогичные предыдущему случаю, найдем

$$j = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (1.18)$$

где $N_i = (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y)$;

$$N_j = (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y); \quad (1.19)$$

$$N_k = (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y)$$

$$\text{и } a_i = X_j Y_k - X_k Y_j; \quad a_j = X_k Y_i - X_i Y_k; \quad a_k = X_i Y_j - X_j Y_i;$$

$$b_i = Y_j - Y_k; \quad b_j = Y_k - Y_i; \quad b_k = Y_i - Y_j;$$

$$c_i = X_k - X_j; \quad c_j = X_i - X_k; \quad c_k = X_j - X_i.$$

Вычисляя значения функций формы N_i, N_j, N_k , нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

Заметим, что функции (1.14) для одномерного и (1.18) для двухмерного симплекс-элементов были получены для типичных элементов безотносительно к их положению в области. Поэтому они удовлетворяют всем элементам данного типа, что, как отмечалось выше, позволяет создавать обширные библиотеки элементов в САПР.

1.5. Объединение конечных элементов в ансамбль

Основу этой процедуры составляет замена произвольно назначенных выше номеров узлов i, j, k на номера, присвоенные узлам в процессе разбиения рассматриваемой области. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений, позволяющей при известных узловых значениях искомой функции получить значение последней в любой точке области.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов для сформулированной выше задачи о нахождении поля температур в стержне (см. рис. 1.2, а). Кусочно-элементная модель области приведена на рис. 1.2, б, а функция отдельного элемента определяется уравнением (1.14).

Можно написать следующее соответствие между произвольными номерами i, j , фигурирующими в уравнении (1.14), и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели:

$$\text{для элемента 1 } i = 1; \quad j = 2; \tag{1.21a}$$

$$\text{элемента 2 } i = 2; \quad j = 3; \tag{1.21б}$$

$$\text{элемента 3 } i = 3; \quad j = 4; \tag{1.21в}$$

$$\text{элемента 4 } i = 4; \quad j = 5; \tag{1.21г}$$

$$\text{элемента 5 } i = 5; \quad j = 6. \tag{1.21д}$$

Подставив значения номеров узлов (1.21) в (1.14), получим

$$\begin{aligned} j^{(1)} &= N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \\ j^{(2)} &= N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3; \\ j^{(3)} &= N_3^{(3)}T_3 + N_4^{(3)}T_4; \\ j^{(4)} &= N_4^{(4)}T_4 + N_5^{(4)}T_5; \\ j^{(5)} &= N_5^{(5)}T_5 + N_6^{(5)}T_6, \end{aligned} \tag{1.22}$$

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

В выражениях для функций формы элемента (1.14) значения произвольных номеров i, j также следует изменить в соответствии с (1.21). Тогда значения $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$, например, определяются по формулам

$$N_3^{(2)} = (x - X_2) / L^{(2)};$$

$$N_3^{(3)} = (X_4 - x) / L^{(3)}.$$

Очевидно, что $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$ не равны друг другу даже в случае равенства длин элементов $L^{(2)}$ и $L^{(3)}$. При известных значениях узловых величин $T_1 - T_6$ уравнения (1.22) позволяют определить значение температуры в любой точке стержня.

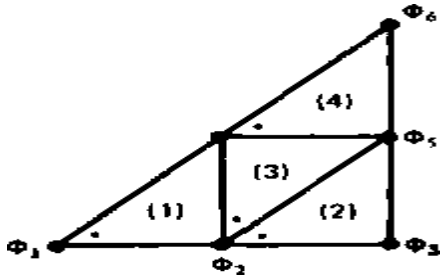


Рис. 1.10. Пример составления ансамбля конечных элементов для двухмерной треугольной области

Рассмотрим еще один пример объединения элементов двухмерной области в ансамбль, который потребуется для иллюстрации дальнейших этапов МКЭ.

Треугольная область разбита на элементы треугольной формы, как показано на рис. 1.10. Для обозначения узлов отдельных элементов по-прежнему используются номера i, j, k , начиная с произвольного узла (на рисунке отмеченного звездочкой) против часовой стрелки. Соответствие между этими обозначениями и глобальными номерами узлов следующее:

$$\text{элемента 1 } i = 1; \quad j = 2; \quad k = 4; \quad (1.23a)$$

$$\text{элемента 2 } i = 2; \quad j = 3; \quad k = 5; \quad (1.23б)$$

$$\text{элемента 3 } i = 2; \quad j = 5; \quad k = 4; \quad (1.23в)$$

$$\text{элемента 4 } i = 4; \quad j = 5; \quad k = 6. \quad (1.23г)$$

Подставляя значения (1.23) и (1.18), получим

$$\begin{aligned} j^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_4^{(1)}\Phi_4; \\ j^{(2)} &= N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + N_4^{(2)}\Phi_4; \\ j^{(3)} &= N_2^{(3)}\Phi_2 + N_5^{(3)}\Phi_5 + N_4^{(3)}\Phi_4; \\ j^{(4)} &= N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Аналогичную замену номеров необходимо проделать в (1.4.19) при вычислении функций формы элементов. Система (1.24) – сокращенная форма математического описания модели. Расширенная форма имеет вид

$$\begin{aligned} j^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ j^{(2)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + 0\Phi_4 + N_4^{(2)}\Phi_4 + 0\Phi_6; \\ j^{(3)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(3)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 + N_5^{(3)}\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ j^{(4)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$j = N\Phi. \quad (1.25)$$

В САПР с целью уменьшения объема памяти чаще используют сокращенную форму описания моделей (1.24). Расширенная форма описания моделей имеет некоторые преимущества при реализации следующих этапов алгоритма МКЭ.

1.6. Определение вектора узловых значений функций

Для определения вектора узловых значений функций, как отмечалось выше, используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некоторого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

• Пример минимизации функционала в задаче о нахождении распределения температуры в стержне. При указанном методе минимизируется функционал

$$F = \int_V 0,5I_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S [qT + 0,5a(T - T_*)^2] dS, \quad (1.26)$$

где V – объем тела; S – площадь границы.

В функционал F входят оба граничных условия. При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать, что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно). Тогда

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \quad (1.27)$$

Функционал (1.26) удобно представить в виде

$$F = \int_V 0,5I_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_{S_1} qT dS_1 + \int_{S_2} 0,5a(T - T_*)^2 dS_2, \quad (1.28)$$

где S_1 и S_2 – площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия (1.1а) и (1.1б) соответственно.

Для вычисления объемного интеграла в (1.28) его необходимо разбить на два слагаемых в соответствии с принятой конечно-элементной моделью:

$$\int_V 0,5I_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV = \int_{V_1} 0,5I_x \left(\frac{dT^{(1)}}{dx} \right)^2 dV_1 + \int_{V_2} 0,5I_x \left(\frac{dT^{(2)}}{dx} \right)^2 dV_2. \quad (1.29)$$

Производные в (1.29) вычисляются с учетом (1.27):

$$dT^{(1)} / dx = (-T_1 + T_2) / L^{(1)}; \quad dT^{(2)} / dx = (-T_2 + T_3) / L^{(2)}. \quad (1.30)$$

Подставив (1.30) в (1.29) и считая, что $dV^{(e)} = S^{(e)} dx$, получим

$$\int_V 0,5I_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV = 0,5 \frac{I_x^{(1)} S^{(1)}}{L^{(1)}} \cdot (-T_1 + T_2)^2 + 0,5 \frac{I_x^{(2)} S^{(2)}}{L^{(2)}} \cdot (-T_2 + T_3)^2. \quad (1.31)$$

Второе и третье слагаемые в (1.28) вычисляются просто, так как подинтегральным функциям соответствуют узловые значения T_1 и T_3 :

$$\int_{S_2} qT dS_1 = qT_1 S_1; \quad (1.32)$$

$$\int_{S_2} 0,5a(T - T_*)^2 dS_2 = 0,5aS_2(T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2), \quad (1.33)$$

где S_1 и S_2 – площади поверхностей, на которых заданы q и a (для рассматриваемого примера $S_1 = S^{(1)}$ и $S_2 = S^{(2)}$).

Значение функционала F вычисляется простым суммированием выражений (1.32), (1.33):

$$F = 0,5C^{(1)}(T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + 0,5C^{(2)}(T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + qS_1T_1 + 0,5aS_2(T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2), \quad (1.34)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)}I_x^{(1)} / L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)}I_x^{(2)} / L^{(2)}$.

Для минимизации функционала F необходимо выполнение условий

$$dF / dT_1 = C^{(1)}T_1 + C^{(1)}T_2 + qS_1 = 0;$$

$$dF / dT_2 = -C^{(1)}T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}]T_2 - qC^{(2)}T_3 = 0;$$

$$dF / dT_3 = -C^{(2)}T_2 + [C^{(2)} + aS_2]T_3 - aS_2T_* = 0,$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + aS_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \\ aS_2T_* \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

В общем виде (1.35) можно представить так:

$$KT = B,$$

что соответствует (1.18).

Примечание. Матрица коэффициентов K в (1.35) по-прежнему называется матрицей жесткости, хотя по физическому смыслу в данной задаче ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Такое название матрицы K пришло из строительной механики, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях техники.

Зная характеристики материала, из системы (1.35) можно определить узловые значения T_1, T_2, T_3 .

Из (1.34) и (1.35) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определенного типа в матрицу жесткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях.

Метод Галеркина – другой широко известный метод вычисления вектора узловых значений – представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этого метода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение. Поэтому метод Галеркина с успехом применяется при решении задач, для кото-

рых не удастся подобрать функционал для минимизации (например задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье–Стокса).

Метод Галеркина основан на минимизации ошибки $e = Lu - f$ приближенного решения и исходного дифференциального уравнения $L_j - f = 0$, где L – дифференциальный оператор.

Для минимизации e в заданной области G требуется выполнение равенства $\int_G N_i e dG = 0$ для каждой из функций N_i .

Сочетание метода Галеркина с МКЭ приводит к системе уравнений:

$$\int_G N_b L(j) dG = 0 \text{ при } b = i, j, k, \dots,$$

где $L(j)$ – левая часть исходного дифференциального уравнения, описывающего непрерывную функцию j .

Технику получения разрешающей системы уравнений методом Галеркина легко проиллюстрировать на примере уже решенной выше задачи об отыскании температурного поля в однородном стержне, конечно-элементная модель которого представлена ранее.

Применив метод Галеркина, получим

$$\int_V N^t I_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV = 0. \quad (1.36)$$

Подставим в (1.36) формулу дифференцирования произведений:

$$\int_V N^t I_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV = \int_V \frac{d}{dx} \left(N^t I_x \frac{dT}{dx} \right) dV - \int_V \frac{dN^t}{dx} I_x \frac{dT}{dx} dV. \quad (1.37)$$

Интерполяционная функция T не сохраняет постоянства по длине стержня, поэтому интеграл в (1.37) можно представить суммой соответствующих интегралов для отдельных элементов. Так, второй интеграл в (1.37) можно представить в виде

$$\int_V \frac{dN^t}{dx} I_x \frac{dT}{dx} dV = \sum_{e=1}^2 \int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} I_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)}. \quad (1.38)$$

Вычислим в (1.38) интегралы, относящиеся к отдельным элементам:

$$\frac{dN^{(e)t}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \frac{X_j - x}{L^{(e)}} \\ \frac{x - X_i}{L^{(e)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (1.39)$$

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{d}{dx} N^{(e)} T^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} [-1, 1] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

С учетом (1.39) и (1.40)

$$\int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} I_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{I_x^{(e)}}{L^{(e)} L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} dV^{(e)}. \quad (1.41)$$

Первый интеграл в (1.37) на основании теоремы Остроградского–Гаусса преобразуется к виду

$$\int_V \frac{d}{dx} \left(N^t I_x \frac{dT}{dx} \right) dV = \int_S N^t I_x \frac{dT}{dx} l_x dS, \quad (1.42)$$

где $l_x (dT/dx) = dT/dn$; n – внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности.

С учетом краевого условия в точке $x = 0$ для первого элемента интеграл (1.42) принимает вид

$$\int_S N^{(1)t} I_x \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} \frac{X_2}{L^{(1)}} \\ -\frac{X_1}{L^{(1)}} \end{bmatrix} (-q) dS. \quad (1.43)$$

Подставив значения $X_1 = 0$, $X_2 = L^{(1)}$ в (1.43), получим:

$$\int_S N^{(1)t} I_x^{(1)} \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

С учетом краевого условия в точке $x = L$ для второго элемента интеграл (1.42) запишется так:

$$\int_S N^{(2)t} I_x^{(2)} \frac{dT^{(2)}}{dx} = \int_S \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-a(T_3 - T_*)] dS = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-aT_3 + aT_*). \quad (1.45)$$

Просуммировав выражения вида (1.45) для первого и второго элементов и выражения (1.43) и (1.44) и приравняв сумму нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)}C^{(1)} & +C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)}C^{(2)} & +aS_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qS_1 \\ 0 \\ -aS_2T_* \end{bmatrix} = 0, \quad (1.46)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)} I_x^{(1)} / L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)} I_x^{(2)} / L^{(2)}$.

Система (1.46) идентична системе (1.35), определенной путем минимизации соответствующим образом подобранного функционала. Завершающим шагом этапа определения вектора узловых значений Φ является решение системы линейных алгебраических уравнений.

■ **Примечание.** Основные особенности этого шага – большая размерность и сильная разреженность матрицы коэффициентов системы. В связи с этим для реализации МКЭ в САПР разработаны специальные способы хранения матрицы жесткости, позволяющие уменьшить необходимый для этого объем ОП. Для нахождения узловых значений функций применяются методы пре-

образования и решения системы, направленные на снижение затрат машинного времени.

1.7. Двухмерные финитные функции на треугольной сетке

При решении двухмерных краевых задач наибольшее распространение получили кусочно-линейные базисные функции, построенные на треугольной сетке.

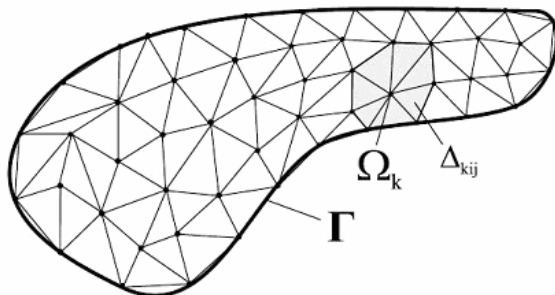


Рис. 1.11.

В этом случае область покрывается сеткой из треугольников Δ_{kij} (триангуляция), например, как показано на рис.1.11.

1. Каждая пара треугольников имеет либо одну общую вершину, либо одну общую сторону, либо не пересекается.

2. $\bigcup \Delta_{kij} \cong \Omega$. При выборе приграничных треугольников желательно, чтобы на границу попадали либо одна, либо две вершины. Иногда бывает удобно описать многоугольником границу.

Множество вершин треугольников обозначим $P_0, P_1, \dots, P_n = (x_k, y_k)$. На каждом треугольнике Δ_{kij} , имеющем вершину P_k , определим кусочно-линейную функцию $J_k^{ij}(xy)$, которая в точке P_k равна единице, а в точках P_i, P_j равна нулю.

Аналитически эта функция задается довольно просто:

$$J_k^{ij} = \frac{1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i} - \frac{y - y_j}{y_i - y_j}}{1 - \frac{x_k - x_i}{x_j - x_i} - \frac{y_k - y_j}{y_i - y_j}} = 1 + a_k^{ij}(x - x_k) + b_k^{ij}(y - y_k).$$

Теперь выбираем набор конечных элементов Ω_k следующим образом: в Ω_k будут входить все треугольники Δ_{kij} , имеющие вершину P_k : $\Omega_k = \Delta_{k,k_1,k_2} + \Delta_{k,k_1,k_2} + \dots + \Delta_{k,k_{m-1},k_m}$, как показано на рис. 1.12.

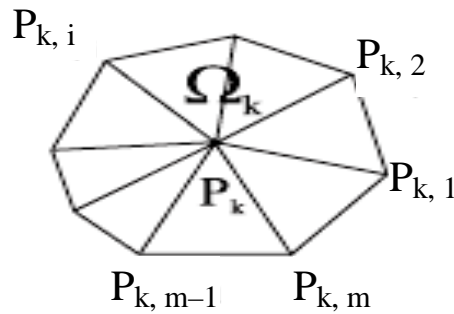


Рис. 1.12

Функция $j_k(x, y)$ составляется из функций треугольников, смежных с вершиной P_k :

$$j_k(xy) = \begin{cases} j_k^{k_1, k_2}(xy), & (xy) \in \Delta_{k, k_1, k_2}, \\ \text{КККККККККККК} \\ j_k^{k_{m-1}, k_m}(xy), & (xy) \in \Delta_{k, k_{m-1}, k_m}, \\ j_k^{k_m, k_1}(xy), & (xy) \in \Delta_{k, k_m, k_1}, \\ 0, & xy \notin \Omega_k. \end{cases}$$

В заключение отметим, что для трехмерной области Ω при выборе базиса вместо треугольной сетки Ω покрывается сеткой из тетраэдров Δ_{kij} . Конечный элемент Ω_k , связанный с узлом $P_k(x_k, y_k, z_k)$, состоит из тетраэдров, имеющих вершину P_k . Финитная функция $j_k(x, y, z)$ строится аналогично из кусочно линейных функций тетраэдра:

$$j_k^{ijl} = 1 + a_k^{ijl}(x - x_k) + b_k^{ijl}(y - y_k) + g_k^{ijl}(z - z_k).$$

Коэффициенты этой функции находятся из решения системы трех линейных уравнений:

$$1 + a_k^{ijl}(x_i - x_k) + b_k^{ijl}(y_i - y_k) + g_k^{ijl}(z_i - z_k) = 0;$$

$$1 + a_k^{ijl}(x_j - x_k) + b_k^{ijl}(y_j - y_k) + g_k^{ijl}(z_j - z_k) = 0;$$

$$1 + a_k^{ijl}(x_l - x_k) + b_k^{ijl}(y_l - y_k) + g_k^{ijl}(z_l - z_k) = 0.$$

1.8. Решение двумерной задачи Дирихле на треугольной сетке

Проиллюстрируем технологию МКЭ на примере решения задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f;$$

$$u|_{\Gamma} = a(\Gamma).$$

Допустим, что область Ω , на которой необходимо получить решение, покрыта треугольной сеткой и представлена на рис. 1.13. Решение ищем в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k j_k(x, y),$$

где j_k – набор финитных функций, привязанных к внутренним узлам сетки $P_k \notin \Gamma$. Следует отметить, что построение треугольной сетки для произвольной области, учитывающей особенности получаемого решения, является зачастую наиболее трудоемкой задачей при использовании МКЭ.

Результатом триангуляции является список узлов $P_k(x_k, y_k, z_k)$, где $k = 1 \dots N_0, N_0 + 1, \dots, N$ ($1 \dots N_0$ – номера внутренних узлов, $N_0 + 1, \mathbf{K}, N$ – номера граничных узлов) и список треугольников $\Delta_{kij}^m, m = 1 \mathbf{K} M$, содержащий номера соответствующих m -му треугольнику узлов-вершин. Зная координаты вершин и список треугольников, легко построить список конечных элементов Ω_k , связанных с каждым узлом сетки, вычислить параметры a_k^{ij}, b_k^{ij} соответствующих финитных функций j_k , а также всю необходимую информацию – площади треугольников S_{kij}^m , координаты их центров тяжести C_{kij}^m и др.

При построении конечно-разностной схемы воспользуемся проекционным соотношением для внутренних узлов:

$$\sum_{j=1}^N \bar{u}_j \left[\iint_{\Omega_k} g \left(\frac{\partial j_j}{\partial x} \frac{\partial j_k}{\partial x} + \frac{\partial j_j}{\partial y} \frac{\partial j_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] = \hat{f}_k, \quad k = 1 \mathbf{K} N_0.$$

Ввиду линейности финитных функций j_j, j_k на каждом треугольнике значения производных, входящих в \hat{f}_k постоянны. Кроме того, как видно из рисунка, в каждом уравнении имеется только $m_k + 1$ отличных от нуля матричных элементов (заметим, что количество вершин m_k у разных элементов Ω_k может отличаться):

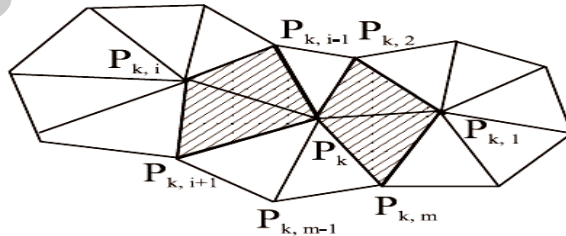


Рис. 1.13

$$\bar{u}_k g_k + \bar{u}_{k_1} g_{k_1} + \mathbf{K} + \bar{u}_{k_m} g_{k_m} = \hat{f}_k;$$

$$k = 1 \mathbf{K} N_0; \quad \bar{u}_{N_0+1} \mathbf{K} \bar{u}_N = a_{N_0+1} \mathbf{K} a_N.$$

Причем

$$g_k = -\sum_{i=1}^{m_k} g_{k_i},$$

а элементы g_{k_i} вычисляются как интегралы по двум смежным треугольникам:

$$g_{k_i} = \left(a_k^{k_{i-1}k_i} a_{k_i}^{k_{i-1}k} + b_k^{k_{i-1}k_i} b_{k_i}^{k_{i-1}k} \right) \iint_{\Delta k k_{i-1} k_i} g dS + \left(a_k^{k_i k_{i+1}} a_{k_i}^{k_i k} + b_k^{k_i k_{i+1}} b_{k_i}^{k_i k} \right) \iint_{\Delta k k_i k_{i+1}} g dS.$$

При вычислении интегралов ввиду малости Δ для случая непрерывных $g(x,y)$ обычно используют формулу средних

$$\iint_{\Delta k_{ij}} g dS = g(C_{kij}) S_{kij},$$

где C_{kij} – точка пересечения медиан. Решается система методом простой итерации или Зейделя с использованием релаксации:

$$\bar{u}_k^{s+1} = (1 - w_r) \bar{u}_k^s + w_r \frac{1}{g_k} \left(\hat{f}_k - \sum_{i=1}^{m_k} \bar{u}_{k_i}^s g_{k_i} \right).$$

Эффективность метода во многом зависит от удачной программной реализации итерационного процесса.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие МКЭ от классического метода сеток?
2. Как построить конечно-разностную схему по МКЭ задачи Дирихле для одномерного уравнения второго порядка?
3. Каким образом строится конечно-разностная схема для двумерной области на основе треугольной сетки?
4. Какие результаты триангуляции области являются исходными данными для построения конечно-разностной схемы по технологии МКЭ?

2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

2.1. Теоретические основы вариационных методов

Основной задачей классического вариационного исчисления является следующая: среди всех непрерывных функций $u = u(x)$, $a \leq x \leq b$, имеющих кусочно-непрерывные производные и удовлетворяющих граничным условиям

$$u(a) = a; u(b) = b,$$

найти такую, которая доставляет минимальное значение функционала:

$$J[u] = \int_a^b \Phi(x, u, u') dx; \quad \left(u' = \frac{du}{dx} \right).$$

В общем случае функция u может быть функцией нескольких переменных $u(x, y, z, \mathbf{K})$, в функционал Φ входят частные производные, а интеграл берется по некоторой области Ω .

Содержание одной из *центральных теорем классического вариационного исчисления* заключается в том, что дважды дифференцируемая функция $u(x)$, доставляющая минимум функционала Φ , является решением краевой задачи для дифференциального уравнения Эйлера с теми же граничными условиями:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) = 0.$$

Справедливо также обратное утверждение: решение краевой задачи для дифференциального уравнения (в общем случае ДУ в частных производных) при определенных условиях является также решением соответствующей задачи вариационного исчисления. Таким образом, имеется возможность одни и те же задачи сводить либо к решению краевой задачи для дифференциального уравнения, либо к нахождению минимума некоторого функционала, т.е. к решению задачи вариационного исчисления. Это позволяет при решении краевой задачи для ДУ, сводя ее к вариационной, применять специфические вариационные методы. Проиллюстрируем технику такого решения. Запишем краевую задачу для ДУ в общем виде как

$$Lu = f; \quad u|_{\Gamma} = a(\Gamma).$$

Область определения функции $u: R(u) = \Omega$; где Γ – граница области Ω . Тогда соответствующий функционал (заметим, что это один из возможных), минимум которого достигается на решении, имеет вид

$$(Lu, u) - 2(f, u).$$

Здесь посредством скобок (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение в общем случае в многомерном гильбертовом пространстве $L_2[\Omega]$.

Самым универсальным и во многих случаях единственным способом нахождения минимума функционала общего вида $J[u]$ является *метод Рунца*.

Чаще всего этот метод реализуется следующим образом. Выбираем в области определения $R(L)$ оператора L (например, в классе дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям) некоторый *базис*, т.е. набор функций $\{j_1(x), j_2(x), \dots, j_N(x)\}$, обладающих *свойством полноты*: любая функция $u(x)$ из области решений может быть представлена в виде

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k j_k(x).$$

Будем искать приближение к функции, доставляющей минимум функционала $J[u]$ в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k j_k(x).$$

После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k j_k(x)$$

в функционал $J[u]$ получим функцию N переменных:

$$F(a_1, a_2, \mathbf{K}, a_N) = J[u^N] = J\left[\sum_{k=1}^N a_k j_k(x)\right].$$

Неизвестные значения коэффициентов разложения $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_N$ искомого решения по функциям базиса будем находить из условия

$$\min_{a_1, \mathbf{K}, a_n} F(a_1, a_2, \mathbf{K}, a_N).$$

Таким образом, задача вариационного исчисления сводится к нахождению минимума функции N переменных.

Алгоритмы решения этой задачи для небольшого числа N хорошо разработаны. Для случая квадратичных функционалов с линейным дифференциальным оператором Lu , нахождение $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_N$ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующим образом. После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k j_k(x)$$

получим

$$F = \left(L \sum_{k=1}^N a_k j_k(x), \sum_{i=1}^N a_i j_i(x) \right) - 2(f, \sum_{i=1}^N a_i j_i) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_k a_i (L j_k, j_i) - 2 \sum_{i=1}^N a_i (f, j_i).$$

Воспользуемся необходимым условием минимума и составим N уравнений вида

$$\frac{\partial F(a_1, \mathbf{K}, a_N)}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^N a_k (L j_k, j_i) - 2(f, j_i) = 0; \quad i = 1 \mathbf{K} N.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений для нахождения a_k может быть переписана в виде

$$\left(L \sum a_k j_k, j_i \right) = (f, j_i) \text{ или } \left(Lu^N, j_i \right) = (f, j_i),$$

т.е. можно заметить, что эта система получается из исходной краевой задачи простой подстановкой u^N вместо u и последующим умножением скалярно на каждую функцию базиса. Ввиду того что такое скалярное произведение называется проекцией на функцию базиса, полученная система носит название **системы проекционных уравнений**. В наиболее общем случае при построении проекционной системы уравнений выбирают два базиса $\{j_1(x), j_2(x), \dots, j_N(x)\}$ и $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x)\}$ и некоторый дифференциальный оператор K :

$$\left(L \sum_{k=1}^N a_k j_k, Ky_i \right) = (f, Ky_i); \quad i = 1, \dots, N.$$

Как видим, полученное уравнение совершенно не связано с необходимостью предварительного получения функционала, а обоснование сходимости полученного решения u^N к u следует из теоремы о сходимости к нулю невязки

$$r_n(x) = Lu^N - f,$$

если равны нулю ее проекции на базисные функции:

$$(r_n, Ky_i) = 0.$$

Впервые идею такого решения ДУ (не обращаясь к вариационной задаче) предложил в 1915 г. Б. Г. Галеркин. В зависимости от выбора в функций j_i, y_i и оператора K эти методы имеют свои названия:

метод Бубнова–Галеркина:

$$K = I \quad (\text{тождественный}),$$

$$K = I \quad y_i = j_i, j_i \in R(L),$$

оператор L может быть несимметричным и необязательно положительно определенным;

метод Галеркина–Петрова:

$$K = I, j_i \neq y_i, j_i \in R(L), y_i \in H(L),$$

где $H(L)$ – область значений оператора L , имеющего ограниченный обратный оператор L^{-1} ;

метод наименьших квадратов:

$$K = L, \quad y_i = j_i,$$

при условии существования ограниченного оператора L^{-1} доказана сходимость метода;

метод моментов:

$$K \neq I, \quad y_i = j_i.$$

При выполнении условий на оператор K вида $(Lu, Ku) \geq y^2 \|u\|^2$ и $(Lu, Ku) \geq b^2 \|Ku\|^2$ доказана сходимость метода. Следует отметить, что в каждом конкретном случае от выбора удачной модификации проекционного метода зависит эффективность решения задачи.

2.2. Примеры решения задач методом Галеркина

2.2.1. Одномерная краевая задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x); \quad u(0) = a; \quad u(1) = b; \quad \Omega = [0,1]; \quad \Gamma = [0],[1].$$

Выберем базис вида

$$\{j_1(x), j_2, \dots, j_N(x); j_k(0) = j_k(1) = 0; y_i = j_i\}.$$

Функции базиса удовлетворяют нулевым граничным условиям, а сам базис является полным в классе функций, обращающихся в ноль на границах, например $\{j_k = \sin(k\pi x), k = 1 \dots N\}$. Решение будем искать в виде

$$u^N(x) = j_0(x) + \sum_{k=1}^N a_k j_k(x).$$

Здесь $j_0(x)$ выбирается такой, чтобы u^N удовлетворяло заданным граничным условиям, например, можно положить $j_0 = a + (b - a)x$. Если известна некоторая информация об искомом решении, то ее можно учесть в функции j_0 .

Составим проекционные уравнения:

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial (j_0 + \sum a_k j_k)}{\partial x} \right) j_i dx = \int_0^1 f j_i dx; \quad i = 1 \dots N.$$

В левой части уравнения применим формулу интегрирования по частям и, воспользовавшись тем, что $j_i|_{\Gamma} = 0$, получим

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial (j_0 + \sum a_k j_k)}{\partial x} \frac{\partial j_i}{\partial x} dx = \int_0^1 f j_i dx.$$

После очевидных преобразований имеем

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_0^1 g \frac{\partial j_k}{\partial x} \frac{\partial j_i}{\partial x} dx = -\int_0^1 \left(f + g \frac{\partial j_0}{\partial x} \right) j_i dx.$$

Или в принятых выше обозначениях

$$\sum_{k=1}^N \left(g \frac{\partial j_k}{\partial x}, \frac{\partial j_i}{\partial x} \right) a_k = f_i; \quad i = 1 \dots N.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет симметричную, положительно определенную матрицу, и ее решение находится эффективным методом квадратного корня. Следует однако отметить, что с увеличе-

нием N система становится плохо обусловленной. Если коэффициенты $g(x), f(x)$ имеют особенности (например разрывы), то для увеличения точности полезно эти особенности выделить и учесть в функции $j_0(x)$. В этом случае удастся значительно ускорить сходимость ряда. Из вида системы следует, что для получения решения базисные функции могут не иметь второй производной (достаточно только первой). В этом случае полученное решение не является в обычном смысле решением исходного дифференциального уравнения и говорят, что оно является **обобщенным решением**.

2.2.2. Двухмерная краевая задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y); \quad u|_{\Gamma} = a(\Gamma); \quad x, y \in \Omega.$$

Выбираем базис $\{j_0(x, y), j_1(x, y), \dots, j_N(x, y)\}$, полный во множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям и имеющих первую производную. Решение ищем в виде

$$u^N = \sum_{k=0}^N a_k j_k(x, y).$$

Составляем проекционные уравнения:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u^N}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial u^N}{\partial y} \right) \right] j_k d\Omega = \int_{\Omega} f j_k d\Omega.$$

Чтобы избавиться от второй производной, воспользуемся интегрированием по частям, который для двухмерного случая имеет вид (здесь $\hat{n} = (n_x, n_y)$ – единичный вектор нормали к границе):

$$\iint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = - \iint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} u v n_x d\Gamma,$$

$$\iint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega = - \iint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} u v n_y d\Gamma.$$

После подстановки получаем систему проекционных уравнений для нахождения неизвестных $a_0 \dots a_N$:

$$\sum_{k=0}^N a_k \left[\iint_{\Omega} g \left(\frac{\partial j_k}{\partial x} \frac{\partial j_i}{\partial x} + \frac{\partial j_k}{\partial y} \frac{\partial j_i}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} n \left(\frac{\partial j_k}{\partial x} n_x + \frac{\partial j_k}{\partial y} n_y \right) j_i d\Gamma \right] = \int_{\Omega} f j_i d\Omega.$$

Заметим, что если удастся подобрать функции j_k с нулевыми значениями на Γ , то второй интеграл обращается в ноль; иногда удастся подобрать $j_0|_{\Gamma} = a$, $j_{k \geq 1}|_{\Gamma} = 0$, тогда, выбрав $a_0 = 1$, этот интеграл переносится в правую часть и входит в f_i , как в предыдущем примере.

2.2.3. Сведение задачи для ДУ в частных производных к решению задачи для системы ОДУ методом Канторовича

Предположим, что задана краевая задача в цилиндрической области вида

$$Lu(xyz) = f; \quad u|_{z=0} = a(xy); \quad u|_{z=L} = b(xy); \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

где L – дифференциальный оператор 2-го порядка по z ; Γ – граница области поперечного сечения Ω_{Γ} , $x, y \in \Omega_{\Gamma}$. Выберем базис из функций, определенных на Ω_{Γ} $\{j_1(x, y), \dots, j_N(x, y)\}$ и обращающихся в ноль на границе $j_k|_{\Gamma} = 0$. Решение будем искать в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^N a_k(z) j_k(x, y),$$

т.е. коэффициенты разложения $a_k(z)$ зависят от третьей координаты z .

Составим проекционные уравнения:

$$\iint_{\Omega_{\Gamma}} \left[\left(L \sum_{k=1}^N a_k(z) j_k(x, y) \right) j_i(x, y) \right] dx dy = \iint_{\Omega_{\Gamma}} f(x, y, z) j_i(x, y) dx dy.$$

После интегрирования получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных коэффициентов с граничными условиями $a_k(0) = a_k$; $a_k(L) = b_k$. Значения a_k, b_k находятся из решения двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_k a_k \iint_{\Omega_{\Gamma}} j_k j_i dx dy = \iint_{\Omega_{\Gamma}} a j_i dx dy; \quad \sum_k b_k \iint_{\Omega_{\Gamma}} j_k j_i dx dy = \iint_{\Omega_{\Gamma}} b j_i dx dy.$$

Заметим, что решение задачи значительно упрощается, если функции выбранного базиса оказываются ортогональными, т.е.

$$\iint_{\Omega_{\Gamma}} j_i dx dy = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \|j_k\|_{L_2}^2, & i = k \end{cases}$$

В этом случае

$$a_k = \iint_{\Omega_{\Gamma}} a j_k dx dy / \|j_k\|_{L_2}^2; \quad b_k = \iint_{\Omega_{\Gamma}} b j_k dx dy / \|j_k\|_{L_2}^2.$$

Такое сведение к системе ОДУ обычно используют при решении задач распространения волн в нерегулярных волноводах, а базис получают как набор собственных функций из решения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля.

Контрольные вопросы

1. Как ставится основная задача вариационного исчисления?
2. Сформулируйте метод Ритца для нахождения минимума функционала.
3. Как получаются проекционные уравнения при решении краевой задачи для дифференциальных уравнений?
4. В чем разница между методами Бубнова–Галеркина, Галеркина–Петрова, методом наименьших квадратов и методом моментов?

Лабораторная работа

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. МЕТОДЫ КОЛЛОКАЦИЙ, НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ГАЛЕРКИНА

Цель:

- изучить методы **коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина**, составить алгоритмы методов и программы их реализаций, получить численное решение заданной **краевой задачи**;
- составить алгоритм решения **краевых задач** указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программу решения **краевых задач** по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.

Краткие теоретические сведения

Будем рассматривать дифференциальное уравнение второго порядка.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Напомним, что задача Коши для уравнения сводится к нахождению решения $y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{cases} y(a) = A, \\ y'(a) = A_1. \end{cases}$$

Краевой задачей называется задача нахождения решения $y(x)$, удовлетворяющего граничным условиям:

$$\begin{cases} y(a) = A, \\ y(b) = B. \end{cases}$$

Краевая задача отличается от задачи Коши непредсказуемостью. Ее решение может существовать, не существовать, быть единственным, может быть бесконечно много решений.

Часто вместо граничных условий используют обобщенные граничные условия:

$$\begin{cases} a_1 y(a) + b_1 y'(a) = A, \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = B. \end{cases}$$

Граничные условия называются *однородными*, если $A = B = 0$.

Соответственно краевая задача называется *однородной*, если у нее однородные граничные условия и правая часть уравнения $f(x) \equiv 0$.

Следующая теорема имеет важное теоретическое значение.

Теорема. Краевая задача имеет решение, причем единственное, тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная краевая имеет только нулевое решение (тривиальное решение однородной краевой задачи).

Способы решения краевой задачи

Поскольку достаточно хорошие аналитические методы решения краевых задач отсутствуют, то используются приближенные методы.

Система дважды непрерывно дифференцируемых функций $j_0(x), j_1(x), \dots, j_n(x)$ называется *базисной системой*, если выполняется:

1) $j_0(x)$ удовлетворяет граничному условию,

2) функции $j_1(x), \dots, j_n(x)$ – линейно независимы на $[a, b]$ и удовлетворяют однородным граничным условиям.

Тогда по базисным функциям строят приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

$$y_n(x) = j_0(x) + a_1 j_1(x) + \dots + a_n j_n(x).$$

Задача сводится к выбору коэффициентов a_1, \dots, a_n таких, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла граничному условию и была в некотором смысле близкой к точному решению.

Поступают следующим образом. Выражение

$$y(x, a_1, \dots, a_n) = y_n''(x) + p(x)y_n'(x) + q(x)y_n(x) - f(x)$$

называют невязкой. Легко видеть, что, если бы $y(x, a_1, \dots, a_n) \equiv 0$, то $y_n(x)$ было бы точным решением. К сожалению, так бывает очень редко. Следовательно, необходимо выбрать коэффициенты таким образом, чтобы невязка была в некотором смысле минимальной.

1. Метод коллокаций

На отрезке $[a, b]$ выбираются точки $x_1, \dots, x_m \in [a, b]$ ($m \geq n$), которые называются точками коллокации. Точки коллокации последовательно подставляются в невязку. Считая, что невязка должна быть равна нулю в точках коллокации, в итоге получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_1, \dots, a_n .

$$\begin{cases} y(x_1, a_1, \dots, a_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y(x_m, a_1, \dots, a_n) = 0. \end{cases}$$

Обычно $m = n$. Получается система из n линейных уравнений с n неизвестными (коэффициентами a_1, \dots, a_n):

$$\begin{cases} y(x_1, a_1, \dots, a_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ y(x_n, a_1, \dots, a_n) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему найдем приближенное решение $y_n(x)$. Для повышения точности расширяем систему базисных функций. В значительной степени успех в применении метода зависит от удачного выбора базисной системы.

Тестовый пример 1. Пусть

$$y'' + (1 + x^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Выберем базисную систему:

$$j_0(x) = 0,$$

$$j_1(x) = 1 - x^2,$$

$$j_2(x) = x^2(1 - x^2).$$

Поскольку $\frac{j_1}{j_2} = \frac{1}{x^2} \neq \text{const}$, следовательно, функции $j_1(x)$ и $j_2(x)$ линейно независимы.

Строим приближенное решение

$$y_2(x) = a_1(1 - x^2) + a_2(x^2 - x^4).$$

Выберем точки коллокации:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y\left(-\frac{1}{2}, a_1, a_2\right) = \frac{17}{16}a_1 + \frac{49}{64}a_2 - 1 = 0; \\ y(0, a_1, a_2) = a_1 - 2a_2 - 1 = 0; \\ y\left(\frac{1}{2}, a_1, a_2\right) = \frac{17}{16}a_1 + \frac{49}{64}a_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$y_2(x) = 0,957(1 - x^2) - 0,022(x^2 - x^4).$$

2. Метод наименьших квадратов

Интегральный МНК. Как и в методе коллокаций, приближенное решение строится по базисной системе. Для нахождения коэффициентов при базисных функциях минимизируется интеграл от квадрата невязки

$$I = \int_a^b y^2(x, a_1, \dots, a_n) dx.$$

Для нахождения минимума интеграла вычисляем первые производные от интеграла по параметрам и приравнивая их нулю, строим систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial a_1} = 2 \int_a^b y(x, a_1, \dots, a_n) \frac{\partial y(x, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_1} dx = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial I}{\partial a_n} = 2 \int_a^b y(x, a_1, \dots, a_n) \frac{\partial y(x, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_n} dx = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим a_1, \dots, a_n .

Дискретный МНК. Выбирают $N > n$ точек и решают задачу

$$S = \sum_{i=1}^N y^2(x_i, a_1, \dots, a_n) \rightarrow \min.$$

Для ее решения строится система

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \end{cases}$$

Тестовый пример 2

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + (1 + x^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$y(-1) = 0,$$

$$y(1) = 0.$$

Выберем базисную систему:

$$j_0(x) = 0,$$

$$j_1(x) = 1 - x^2,$$

$$j_2(x) = x^2(1 - x^2).$$

Применяя метод наименьших квадратов, можно найти

$$y_2(x) = 0,985(1 - x^2) - 0,078(x^2 - x^4).$$

3. Метод Галеркина

По базисной системе строим приближенное решение

$$y_n(x) = j_0(x) + a_1 j_1(x) + \dots + a_n j_n(x).$$

Рассматриваем невязку $y(x, a_1, \dots, a_n)$ и для определения коэффициентов при базисных функциях строим систему

$$\begin{cases} \int_a^b y(x, a_1, \dots, a_n) j_1(x) dx = 0, \\ \dots \\ \int_a^b y(x, a_1, \dots, a_n) j_n(x) dx = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим значение a_1, \dots, a_n .

Тестовый пример 3

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + y = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Возьмем

$$j_0 = 0,$$

$$j_i(x) = x^i(1 - x), \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда, применяя метод Галеркина, получим

$$y_1(x) = \frac{5}{18} x(x - 1),$$

$$y_2(x) = \frac{71}{369} x(1 - x) + \frac{7}{41} x^2(1 - x).$$

Сравним значения точного решения $y(x)$ со значениями приближенных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в отдельных точках (табл. 1)

Таблица 1

x_i	$y(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0,25	0,044	0,052	0,044
0,5	0,07	0,069	0,062
0,75	0,06	0,052	0,06

Задание

Методами коллокаций, интегральным и дискретным методами наименьших квадратов и Галеркина получить численное решение краевой задачи

$$y'' + (1 + x^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$ay'' + (1 + bx^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Исходные данные:

$a = \sin(k)$, $b = \cos(k)$, где k – номер варианта. Базисную систему выбрать в виде

$$j_0 = 0,$$

$$j_i(x) = x^i(1-x), \quad i = 1, 2, \dots$$

Лабораторная работа

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

Цель:

- изучить метод **разностных аппроксимаций**, составить алгоритм метода и программу их реализации, получить численное решение заданной **краевой задачи**;
- составить алгоритм решения **краевых задач** указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программу решения **краевых задач** по разработанному алгоритму;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.

Краткие теоретические сведения

Разностный метод решения краевых задач

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b], \\ y(a) = A, \\ y(b) = B. \end{cases}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n одинаковых частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Заменим

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{2h},$$

$$y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

где $y_k = y(x_k)$.

Получаем для любого внутреннего узла x_k , $k = \overline{1, n-1}$ уравнение

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right)$$

и для граничных узлов

$$y_0 = A, \quad y_n = B.$$

То есть мы имеем систему из $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными y_k . Ее решение дает нам приближенное решение краевой задачи. Рассмотрим частный случай линейной краевой задачи:

$$y'' - p(x)y = f(x), \quad p(x) > 0, \quad a \leq x \leq b,$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

В этом случае получаем

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} - p(x_k)y_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, n-1}$$

$$y_0 = A, \quad y_n = B.$$

То есть получили трехдиагональную систему линейных уравнений

$$y_{k-1} - (2 + h^2 p(x_k))y_k + y_{k+1} = h^2 f(x_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

в которой выполнено условие преобладания диагональных элементов

$$2 + p(x_k) > 1 + 1.$$

Такая система легко решается методом прогонки.

Задание

Составить разностную схему и получить численное решение краевой задачи с точностью 10^{-3} :

$$y'' + (1 + x^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$ay'' + (1 + bx^2)y = -1 \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Исходные данные:

$$a = \sin(k), b = \cos(k), \text{ где } k - \text{ номер варианта.}$$

Лабораторная работа

МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Цель:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности,
- составить алгоритмы решения **уравнения теплопроводности** методом сеток, применимым для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения **уравнения теплопроводности** по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
- получить численное решение заданного **уравнения теплопроводности**.

Краткие теоретические сведения

Требуется найти непрерывную на замкнутом прямоугольнике \bar{D} функцию $u(x, t)$, которая на D' удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (1)$$

при $t = 0$ удовлетворяет начальному условию

$$u(x, 0) = s(x), \quad (2)$$

а при $x = 0$ и $x = 1$ подчиняется краевым условиям

$$u(0, t) = p(t), \quad u(1, t) = q(t), \quad (3)$$

где $f(x, t)$, $s(x)$, $p(t)$, $q(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $s(0) = p(0)$, $s(1) = q(0)$.

Задача (1) – (3) называется смешанной, поскольку она содержит как начальное условие, так и краевые условия. Известно, что у поставленной задачи существует единственное решение $u(x, t)$. Мы будем предполагать, что это решение имеет на замкнутом прямоугольнике \bar{D} непрерывные частные производные $\partial u / \partial t$, $\partial^2 u / \partial t^2$, $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^4 u / \partial x^4$.

Сетки и нормы. Пусть $h = 1/N$, $t = T/M$ – шаги по x и t , где N, M – натуральные, $x_k = kh$, $t_n = nt$, $u_k^n = u(x_k, t_n)$. Построим сетки (рис. 1)

$$w_h = \{ (x_k, t_n) : k = 0, 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots, M \},$$

$$w'_h = \{ (x_k, t_n) : k = 1, 2, \dots, N-1, n = 1, 2, \dots, M \},$$

$$w_h^* = w_h \setminus w'_h.$$

Сетка w_h^* состоит из узлов сетки w_h , обозначенных на рис. 1 крестиками.

Эти узлы расположены на трех сторонах прямоугольника \bar{D} , на которых заданы начальное и краевые условия. Сетка w'_h состоит из остальных узлов сетки

w_h . Зададим для сеточных функций, определенных на w_h или на w'_h , следующие нормы:

$$\|y\|_h = \max_{w_h} |y_k^n|, \quad \|y\|'_h = \max_{w'_h} |y_k^n|. \quad (4)$$

Разностные схемы. Введем разностный оператор Λ :

$$\Lambda y_k^n = -\frac{y_{k-1}^n - 2y_k^n + y_{k+1}^n}{h^2}. \quad (5)$$

Здесь под выражением Λy_k^n подразумевается значение сеточной функции Λu в точке (x_k, t_n) , т.е. $(\Lambda u)_k^n$.

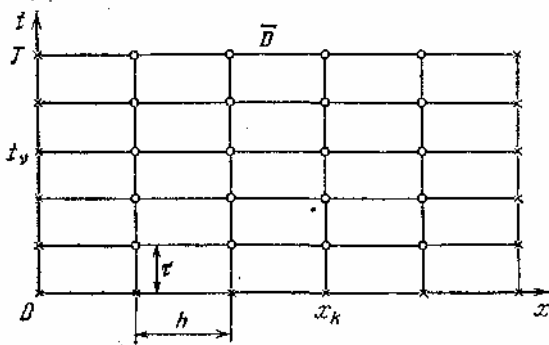


Рис. 1

Скобки опущены для упрощения записи. Аналогичные упрощения в записи будем допускать и при введении других операторов. Зададим на сетке w_h^* тождественный оператор

$$l^h y \equiv y \quad (6)$$

и сеточную функцию

$$g = \begin{cases} s(x_k), & x = x_k, & t = 0, & k = 1, 2, \dots, N-1 \\ p(t_n), & x = 0, & t = t_n, & n = 0, 1, \dots, M, \\ q(t_n), & x = 1, & t = t_n, & n = 0, 1, \dots, M. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим две разностные схемы:

$$L_1^h y_k^n \equiv \frac{y_k^n - y_k^{n-1}}{t} + \Lambda y_k^{n-1} = f_k^{n-1}, \quad (8)$$

$$l^h y = g, \quad (9)$$

и

$$L_2^h y_k^n \equiv \frac{y_k^n - y_k^{n-1}}{t} + \Lambda y_k^n = f_k^n, \quad (10)$$

$$l^h y = g. \quad (11)$$

Здесь и далее индекс k изменяется от 1 до $N-1$, $n = 1, 2, \dots, M$. Шаблоны разностных уравнений (8) и (10) представлены соответственно на рис. 2 и 3.

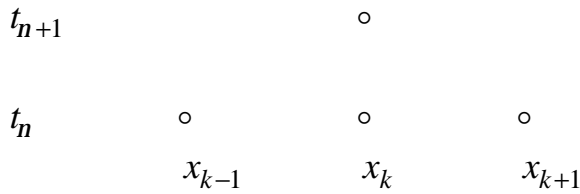


Рис. 2

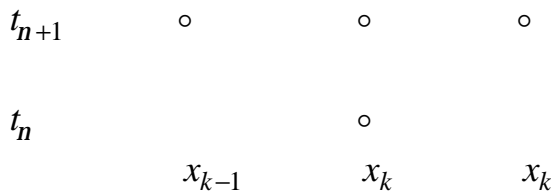


Рис. 3

Обе разностные схемы (8), (9) и (10), (11) называются двухслойными, так как шаблоны разностных уравнений (8) и (10) содержат узлы, лежащие только на двух слоях – подмножествах сетки W_h , отвечающих значениям времени $t = t_{n-1}$ и $t = t_n$. Слой, находящийся на горизонтальной прямой $t = t_{n-1}$, называется нижним, а другой — верхним. Разностные схемы (8)–(11) отличаются тем, что в уравнении (8) оператор Λ действует на нижнем слое, а в уравнении (10) оператор Λ вынесен на верхний слой, и, кроме того, значения правой части $f_k^{n-1} = f(x_k, t_{n-1})$ и $f_k^n = f(x_k, t_n)$ берутся на разных слоях. Ограничимся пока сделанным формальным описанием двух разностных схем. Их качественное различие выяснится ниже.

Аппроксимация. Сопоставляя, с одной стороны, дифференциальное уравнение (1), а с другой – разностные уравнения (8) и (10), видим, что частной производной u'_t отвечает разностная производная $\frac{y_k^n - y_k^{n-1}}{t}$, а частной производной $-u''_{xx}$ соответствует разностная производная второго порядка в направлении x , образуемая с противоположным знаком с помощью оператора Λ (5).

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3). Поскольку его частные производные $\partial^2 u / \partial t^2$ и $\partial^4 u / \partial x^4$ по предположению непрерывны и, следовательно, ограничены на замкнутом прямоугольнике \bar{D} , то согласно (5),

$$\Lambda y_k^{n-1} = -u''_{xx}(x_k, t_{n-1}) + r_k^n, \quad (12)$$

$$\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{t} = u'_t(x_k, t_{n-1}) + r_k^n, \quad (13)$$

где $k = 1, 2, \dots, M-1, n = 1, 2, \dots, N$;

$$\left| r_k^n \right| \leq c_1 h^2, \quad \left| r_k^n \right| \leq c_2 t, \quad (14)$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные, не зависящие от h, t, k, n . В силу непрерывности частных производных u'_t и u''_{xx} , на \bar{D} решение задачи (1)–(3) удовлетворяет уравнению (1) на замкнутом прямоугольнике \bar{D} . Следовательно, выполняется равенство

$$u'_t(x_k, t_{n-1}) - u''_{xx}(x_k, t_{n-1}) = f_k^{n-1} \quad (15)$$

для $k = 1, 2, \dots, N-1, n = 1, 2, \dots, M$, т.е., в частности, и для $t_{n-1} = 0$.

Согласно (12), (13), (15) невязка y_1 решения u задачи (1)–(3) для разностного уравнения (8) имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned} y_{1k}^n &= L_1^h y_k^n - f_k^{n-1} = \frac{u_k^n - y_k^{n-1}}{t} + \Lambda y_k^{n-1} - f_k^{n-1} = \\ &= u'_t(x_k, t_{n-1}) + r_k^n - u''_{xx}(x_k, t_{n-1}) + r_k^n - f_k^{n-1} = r_k^n + r_k^n. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (14) получаем

$$\|\Psi_1\|_h = \max_{w'_h} |\Psi_{1k}^n| = \max_{1 \leq n \leq M} \max_{1 \leq k \leq N-1} |r_k^n + r_k^n| = O(h^2 + t). \quad (16)$$

Аналогично находим

$$\|\Psi_2\|_h = O(h^2 + t), \quad (17)$$

где Ψ_2 – невязка решения u задачи (1)–(3) для разностного уравнения (10).

Таким образом, оба разностных уравнения (8) и (10) аппроксимируют дифференциальное уравнение (1) на решении u задачи (1)–(3) со вторым порядком по h и с первым порядком по t .

Дополнительные условия, т.е. начальное условие (2) и краевые условия (3), аппроксимируются на сетке w_h^* с помощью тождественного оператора l^h условиями (9) или соответственно условиями (11) точно, т.е. невязка решения u задачи (1)–(3) для условий (9), а также для (11) равна нулю на сетке w_h^* .

Итак, обе разностные схемы (8), (9) и (10), (11) с точки зрения аппроксимации задачи (1)–(3) обладают по порядку относительно h и t одинаковой гарантируемой точностью.

Вычислительные алгоритмы. Разрешив разностное уравнение (8) относительно y_k^n , получим

$$y_k^n = \frac{t}{h^2} y_{k-1}^{n-1} + \left(1 - \frac{2t}{h^2}\right) y_k^{n-1} + \frac{t}{h^2} y_{k+1}^{n-1} + t f_k^{n-1}. \quad (18)$$

Поскольку $y_k^0, y_0^n, y_N^n, k = 1, 2, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots, M$ известны (они задаются на w_h^* условием (9)), решение разностной схемы (8), (9) находится по

формуле (18) явно, слой за слоем. Разностная схема (8), (9) называется поэтому явной.

Разностное уравнение (10) с учетом (5) может быть записано в виде

$$\frac{t}{h^2} y_{k-1}^n - \left(1 + \frac{2t}{h^2}\right) y_k^n + \frac{t}{h^2} y_{k+1}^n = -y_k^{n-1} - t f_k^n. \quad (19)$$

Согласно (6), (7), (11) имеем также

$$y_0^n = r_n, \quad y_N^n = q_n. \quad (20)$$

Таким образом, если y_k^{n-1} , $k = 1, 2, \dots, N-1$ известны (в частности, y_k^0 , $k = 1, 2, \dots, N-1$ заданы условием (11)), то для нахождения решения разностной схемы (10), (11) на следующем n -м слое нужно решить трехточечное разностное уравнение (19) с краевыми условиями первого рода (20), т.е. разностную краевую задачу вида (1), (2). Поэтому разностная схема (10), (11) называется неявной.

Для нахождения разностного решения на n -м слое может быть применен метод прогонки, поскольку для задачи (19), (20) условия преобладания выполнены (проверьте, положив $k = j$, $y_k^n = z_j$, $y_{k\pm 1}^n = z_{j\pm 1}$, $-y_k^{n-1} - t f_k^n = F_j$). При этом число выполняемых арифметических действий для нахождения разностного решения на одном слое имеет величину $O(N)$, т.е. по порядку относительно N не больше, чем при применении явной формулы (18) для схемы (8), (9).

Устойчивость и сходимость. Так как дополнительные условия (2), (3) аппроксимируются в разностных схемах (8) – (11) на сетке w_h^* точно, то нам будет достаточно исследовать устойчивость только по правой части. Остановимся сначала на разностной схеме (8), (9). Для исследования ее устойчивости по правой части нужно рассмотреть решение z вспомогательной разностной задачи

$$L_1^h z_k^n \equiv \frac{z_k^n - z_k^{n-1}}{t} + \Lambda z_k^{n-1} = x_k^n, \quad (21)$$

$$l^h z = 0, \quad (22)$$

где x – произвольная заданная на w_h' сеточная функция. Разрешив разностное уравнение (21) относительно z_k^n , аналогично (18) получаем

$$z_k^n = \frac{t}{h^2} z_{k-1}^{n-1} + \left(1 - \frac{2t}{h^2}\right) z_k^{n-1} + \frac{t}{h^2} z_{k+1}^{n-1} + t x_k^n, \quad (23)$$

$k = 1, 2, \dots, N-1$, $n = 1, 2, \dots, M$.

Кроме того, в соответствии с (22) имеем

$$\begin{aligned} z_k^0 &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \\ z_0^n &= z_N^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (24)$$

Предположим, что t и h удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{t}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Тогда

$$\frac{t}{h^2} + \left| 1 - \frac{2t}{h^2} \right| + \frac{t}{h^2} = 1.$$

Отсюда и из (23), (24) вытекает неравенство

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^n| \leq \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^{n-1}| + t \max_{1 \leq k \leq N-1} |x_k^n|, \quad (26)$$

и поскольку $\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^0| = 0$, то

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^n| \leq nt \|x\|'_h.$$

Следовательно,

$$\|z\|_h = \max_{0 \leq n \leq M} \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^n| \leq Mt \|x\|'_h = T \|x\|'_h$$

или, окончательно,

$$\|z\|_h \leq T \|x\|'_h. \quad (27)$$

Полученное неравенство (27) для решения задачи (21), (22), в котором постоянная T не зависит от h и t , а также от функции x , и означает устойчивость разностной схемы (8), (9) по правой части при условии (25). Можно доказать, что нарушение условия (25) может привести к нарушению устойчивости разностной схемы (8), (9). В частности, разностная схема (8), (9) неустойчива, если $h \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$, $t/h^2 \geq \text{const} > 1/2$.

Для исследования устойчивости разностной схемы (10), (11) зададим на w'_h произвольную сеточную функцию x и рассмотрим разностную задачу

$$L_2^h z_k^n \equiv \frac{z_k^n - z_k^{n-1}}{t} + \Lambda z_k^n = x_k^n, \quad (28)$$

$$l^h z = 0, \quad (29)$$

причем не накладывая никаких ограничений на соотношение шагов t и h . Задачу (28), (29) можно аналогично (19), (20) записать в следующем виде:

$$\frac{t}{h^2} z_{k-1}^n - \left(1 + \frac{2t}{h^2}\right) z_k^n + \frac{t}{h^2} z_{k+1}^n = -z_k^{n-1} - tx_k^n, \quad (30)$$

$$z_0^n = 0, \quad z_N^n = 0. \quad (31)$$

Если z_k^{n-1} , $k = 1, 2, \dots, N-1$ известны (в частности, по условию (29) $z_k^0 = 0$, $k = 0, 1, \dots, N$), то, как отмечалось выше, для разностной задачи (30), (31), где n фиксировано, выполнены условия преобладания. Следовательно, эта задача однозначно разрешима на n -м слое.

Очевидно, имеется такое k' , $0 < k' < N$, что

$$|z_{k'}^n| = \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^n|. \quad (32)$$

Так как $|z_{k'-1}^n| \leq |z_{k'}^n|$, $|z_{k'+1}^n| \leq |z_{k'}^n|$, то

$$|z_{k'}^n| \leq \left| z_{k'}^n \left(1 + \frac{2t}{h^2}\right) - \frac{t}{h^2} (z_{k'-1}^n + z_{k'+1}^n) \right|$$

и, следовательно, согласно (30)

$$|z_{k'}^n| \leq |z_{k'}^{n-1}| + t |x_{k'}^n|.$$

Из полученного неравенства с учетом (32) вытекает неравенство (26) и в конечном счете оценка (27), что и означает устойчивость по правой части разностной схемы (10), (11) при любом соотношении шагов t и h .

Итак, поскольку дополнительные условия (2), (3) аппроксимируются на w_h^* точно, то из аппроксимации (см. (16), (17)) и установленной устойчивости по правой части в силу основной теоремы теории разностных схем вытекает сходимость решений разностных схем (8–11) к решению задачи (1)–(3) со вторым порядком сходимости по h и с первым порядком по t , т.е.

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + t). \quad (33)$$

При этом в случае явной схемы (8), (9) предполагается выполнение ограничения (25).

Определение. Разностная схема, устойчивая при любом соотношении шагов t и h , называется абсолютно устойчивой, а устойчивая при ограничениях на t и h – условно устойчивой.

Недостатком разностной схемы (8), (9) является ее условная устойчивость (ограничение (25) является жестким для шага t по времени). Преимущество – простота счета по явной формуле (18) и возможность распространения на задачу Коши (когда условие (2) задано на всей оси x , а краевые условия (3) отсутствуют). В случае смешанной задачи (1)–(3) предпочтение отдают неявной абсолютно устойчивой разностной схеме (10), (11). Разностная краевая задача (19), (20) при переходе на каждый следующий слой решается методом прогонки весьма эффективно.

Тестовый пример

Решим задачу для уравнения теплопроводности с начальным условием

$$U(x, 0) = 2 + x$$

и граничными условиями

$$U(0, t) = 2 + t,$$

$$U(1, t) = 3 + 2t$$

при $t \in [0; 0,2]$, $x \in [0,1]$, то есть полагая $a = 1$.

Выберем $N = 5$, тогда $h = 0,2$, а $m = 10$, и следовательно,

$$l = \frac{T}{h^2 m} = \frac{0,2}{0,2^2 * 10} = \frac{1}{2} ; \quad t = \frac{T}{m} = \frac{0,2}{10} = 0,02.$$

Последовательно заполняем таблицу для данных нашей задачи.

Таблица 2

j	i	0	1	2	3
	x	0	0.2	0.4	0.6
t	2	3	4	5	6
0	0	2.0	2.2	2.4	2.6
1	0.02	2.02	2.2	2.4	2.6
2	0.04	2.04	2.21	2.4	2.6
3	0.06	2.06	2.22	2.405	2.61
4	0.08	2.08	2.2325	2.415	2.6225
5	0.10	2.10	2.2475	2.4275	2.64
6	0.12	2.12	2.2637	2.4437	2.6593
7	0.14	2.14	2.2818	2.4615	2.6818
8	0.16	2.16	2.3007	2.4818	2.7055

Задание

Найти численное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности с точностью 0,001.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

с начальным условием

$$U(X, 0) = f(X)$$

и граничными условиями

$$U(0, t) = a, \quad U(1, t) = b.$$

Варианты заданий

Вариант	Задание	a	b	c	d
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	<p> $y = \frac{a-b}{c-1}x + \frac{bc-a}{c-1}$ </p> <p> $y = a$ </p>	1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2,0	3,0 3,5 4,0 4,5 5,0 5,5 6,0 6,5 7,0 8,0	0,05 0,15 0,25 0,35 0,45 0,55 0,65 0,75 0,85 0,95	
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	<p> $y = \frac{c-a}{d}x + a$ </p> <p> $y = \frac{c-b}{d-1}x + \frac{bd-c}{d-1}$ </p>	8,0 9,0 10,0 11,0 12,0 13,0 14,0 15,0 16,0 17,0	3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0 11,0 12,0	20,00 21,00 22,00 23,00 24,00 25,00 26,00 27,00 28,00 29,00	0,15 0,05 0,25 0,35 0,45 0,55 0,65 0,75 0,85 0,95
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	<p> $y = -\frac{b}{d-1}x + \frac{bd}{d-1}$ </p> <p> $y = -\frac{a}{c}x + a$ </p> <p> $y = 0$ </p>	10,0 11,1 8,0 7,0 6,0 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0	14,0 14,5 15,0 15,5 16,0 17,0 17,5 18,0 19,0 19,5	0,05 0,10 0,15 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50	0,30 0,35 0,40 0,45 0,50 0,55 0,60 0,65 0,70 0,75

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ, 2004. – 636 с.
2. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений / И. П. Мысовских. – М. : Наука, 1993. – 496 с.
3. Калитин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калитин. – М. : Наука, 1978. – 612 с.
4. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1976. – 632 с.
5. Численные методы анализа / В. П. Демидович [и др.]. – М. : Физматгиз, 1963. – 400 с.
6. Волков, Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1982. – 255 с.
7. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392с.
8. Вычислительные методы высшей математики. В 2 т. / В. И. Крылов [и др.] – Минск : Выш. шк., 1972. – Т. 1– 684 с.; 1976. – Т.2 – 672 с.
9. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт [и др.]. – М. : Мир, 1980. – 280 с.
10. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
11. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1971. – 552 с.
12. Сборник задач по методам вычислений / под ред. П. И. Монастырного. – М. : Наука, 1994. – 318 с.
13. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 288 с.
14. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – В 2 т. Т.1. – М. : Физматгиз, 1962. – 464 с.

Учебное издание

Анисимов Владимир Яковлевич
Минченко Леонид Иванович

КРАТКИЙ КУРС ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие
по курсу «Методы численного анализа»
для студентов специальности «Информатика»
всех форм обучения

В 2-х частях

Часть 2

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 31.03.2008.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 3,0.

Формат 60×84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,14.
Заказ 426.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6