УДК 167/168
DOI 10.20339/AM.02-24.018

Н.В. Михайлова,
канд. филос. наук, доцент
Институт информационных технологий
Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, г. Минск
e-mail: n.mikhajlova@bsuir.by

КРИТИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА К ИЗУЧЕНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ И ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Нельзя не заметить, что во многих современных работах по логическим исследованиям используется сложнейший технический аппарат, разобраться в котором может только хорошо подготовленный логик, что невозможно без изучения математики. С другой стороны, столь же важна и обратная связь с логикой при изучении математики, т.к. логические принципы неотъемлемым образом присутствуют в базисных построениях математики и в разделах математической логики. Принципы логики как принципы умозаключения принимаются в математике, чтобы с помощью критической рефлексии систематизации развивать математическое мышление, хотя формальный логический анализ не всегда отражает реальные правила математической аргументации. Понимание этого способствует фундаментализации университетского математического образования, а также необходимости системного подхода к обоснованию математики.

Ключевые слова: *критическая рефлексия, формальная логика, обоснование математики, системный подход, проблема понимания.*

CRITICAL REFLECTION OF THE SYSTEM APPROACH TO THE STUDY OF FORMAL LOGIC AND JUSTIFICATION FOR MATHEMATICS INTERACTION

Natalia V. Mikhailova, Cand. Sci. (Philosophy), Docent of Department of Physical and Mathematical Disciplines at Institute of Information Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radio Electronics, Minsk, e-mail: *n.mikhajlova@bsuir.by*

It should be noted that many modern works on logical research use a complex technical apparatus, which can only be understood by a well-prepared logic, it is impossible without studying mathematics. On the other hand, feedback from logic in the study of mathematics is important, since logical principles are intrinsically present in the basis constructions of mathematics and in mathematical logic. The principles of logic are adopted in mathematics in order to develop mathematical thinking through critical reflection, although formal logical analysis does not always reflect the real rules of mathematical argumentation. Understanding this contributes to the fundamentality of university mathematical education, as well as the need for a systematic approach to justification for mathematics.

Keywords: *critical reflection, formal logic, justification for mathematics, systemic approach, understanding problem*

Введение

В период своего возникновения логика была теснейшим образом связана с философией и даже в течении долгого времени считалась одной из философских наук. Еще в древнегреческой философии начал употребляться термин «логика» как составляющая математического учения и предметной области философских размышлений о правилах спора и процедурах убеждений. О роли логики в доказательстве Анри Пуанкаре сказал: «Логик, так сказать, разлагает каждое доказательство на множество элементарных операций, когда рассмотрят одну за другой эти операции и констатируют, что каждая из них правильна, можно ли думать, что понят истинный смысл доказательства?» [1. С. 165–166]. Не вдаваясь в философскую полемику о природе логики и ее отношении к интуиции, заметим, что особая связь формальной логики с современной математикой придает познавательную остроту вопросу взаимодействия этих двух наук в исследовании достоверности и правильных способов рассуждения. С точки зрения математического образования логика — это не факультативный предмет для «праздного любования», и, в отличие от риторики, она не формирует навыки красивого рассуждения, а является символическим языком науки, то есть «логикой научного познания».

Логика в математических исследованиях как важнейший инструмент математического познания формирует критическое мышление, которое способствует избавлению от догматизма при выборе объектов и методов математического анализа. Когда говорят о критическом мышлении, часто считают, что критиковать — значит подвергать сомнению. Но критическое отношение означает еще и разнообразие позиций. Хотя сама по себе формализация не может наводить на возможность использования логики в процессе поиска решения проблемных задач, она способна «обрабатывать открытия» в том смысле, что проверяет полученные результаты или готовые решения на их строгость и обоснованность. Исторически первым точно определенным формальным языком стал язык математической логики, являющийся символическим языком современной математики. Он появился в конце XIX в., а в XX в. проник во многие разделы науки, в частности, в формальные языки программирования. В названии «математическая логика» отражается взаимодействие логики и математики: эта дисциплина является логикой по предмету и математикой по используемым в ней методам, т.е. это содержательная логика, изучаемая формальным математическим методом.

Логика и математика: проблема взаимодействия

Практика преподавания логики и математики показывает, что студенты часто игнорируют методические аспекты логических приемов изложения нового материала, когда, например, они плохо воспринимают точное определение математического объекта и не понимают существенность необходимых и достаточных условий теорем. Поэтому требование методологической целостности заставляет вводить даже в школьные учебники некоторую долю логического материала для аргументации, рефлексии и критической деятельности. Среди структурных элементов критической рефлексии можно выделить:

- во-первых, поиск логических несоответствий;
- во-вторых, аргументацию обоснования этих несоответствий.

При этом критическая рефлексия как «мышление о мышлении», выходящее за пределы определенности, подразумевает наличие когнитивного акта, направленного на критическое осмысление исследуемых понятий и процессов с учетом предъявляемых аргументированных контрдоводов, оценкой качества и точности которых становится критическое понимание. Замечательным примером рефлексивной науки является высшая математика, поскольку в ней не только занимаются поиском формальной истины, но и, что еще принципиально важно, изучаются собственные когнитивные логико-математические способы ее поиска.

Критическая рефлексия тесной связи логики и математики обусловлена прежде всего тем, что язык современной математики — это абстрактный язык формального описания исследуемых моделей, в которых методы исследования опираются на возможности формальных логических построений. В логике и математике формальная теория может быть построена независимо от согласия участников обсуждения по поводу истинности теории и обоснованности доказательства. Поэтому даже хорошей формализации может быть присуща такая черта, как когнитивный риск. «Формализуя, неизбежно обедняют исследуемый объект, отвлекаются от многих его черт, чтобы успешнее работать с оставшимися» [2. С. 21]. Например, в формальной логике есть операция «отрицание», но в ней ничего не говорится о пределах, в рамках которых можно положительно истолковать отрицание, а чисто формально она обозначается логическим символом. Кроме того, для построения системы формальной логики желательно устранить методологические трудности, способные помешать применению формализма, поскольку даже чисто формальный язык, который у многих ассоциируется с математическими формулами, требует интеллектуальных усилий для его практического понимания.

Основателем формальной логики считается Аристотель, хотя он в основном рассматривал силлогизмы, которые в широком смысле означают дедуктивные умозаключения. Формальная логика изучает законы, формирующие логическую правильность мышления, т.к. формальная логика, изучающая исключительно формы мышления, отвлекается от их содержания, — хотя в математической логике, по существу, как в разделе формализованной математики, нет бессодержательных утверждений. Формализация и историческое развитие математического знания оказывали непосредственное влияние на формирование современной формальной логики. Формализация логики претерпевала изменения благодаря изменению понимания строгости математического доказательства, которое иногда отождествляют со строгостью анализа или углублением критической рефлексии доказательства. Математическое доказательство принято считать доказательством, когда оно при самой тщательной проверке обоснованно и логически строго оформлено. Но критерии математической строгости формировались на основе истории практического опыта существующей математики, а когда формальные доказательства становились неуязвимыми для контрпримеров, они принимались математическим сообществом. Так, начиная с придания строгости некоторым интуитивно ясным представлениям, с изменением сферы интересов математиков менялись представления о строгости математического доказательства.

Можно предположить, что достаточно строгое объяснение интуитивно ясных утверждений по сути нужно для понимания, а также «то, что точно — это математика», однако в некоторых случаях точное описание оказывается языком обычной логики. «В настоящее время в логике широко применяются теоретико-множественные методы. В частности, используется само понятие множества. Этот факт тоже зачастую трактуется как употребление в логике методов математики» [3. С. 75].

Так ли это на самом деле, зависит от того, является ли понятие «множество» чисто математическим или в этой совокупности могут встречаться и объекты нематематической природы. Канторовская теория множеств — это наука о множествах произвольной природы, в которой понятие «множество» и отношение «быть элементом» плохо определяемы. В действительности понятие множества, интерпретируемое как «объем понятия», широко использовалось в логике, где «понятие» — это логическая категория. Современная интерпретация теории множеств в качестве языка математики принимается большинством математиков. Тем не менее, с одной стороны, это объясняет ее признание фундаментальной или основополагающей теорией, но, с другой стороны, т.к. математика развивается не только в рамках теории множеств, она не является логической теорией.

Несмотря на это, многие математические методы вписались в систему неформальных методов традиционной логики, поскольку с помощью таких методов легче всего навести мосты между математикой и ее приложениями. Хотя логические навыки формируются при обучении любой дисциплине, тесная связь логики и математики проявляется при рассмотрении тем, связанных не только с понятиями «точное определение», «строгое доказательство», «четкая аргументация», но и с пониманием философской проблемы обоснования математического знания. С образовательной точки зрения фундаментальность университетского курса математики характеризуется философско-методологической обоснованностью, а также акцентированием внимания на внутренней логике развития математического знания. В настоящее время критически рефлексивный анализ показывает, что решение проблемы обоснования математики зависит не только от достижений в формальной логике, но и от новых подходов к этой актуальной фундаментальной проблеме в философии современной математики, которые требуют уточнения представления о природе математического мышления, исходя из реального развития современных переусложненных математических теорий.

Практика преподавания логики и математики показывает, что для фундаментализации образования необходима интеграция математического и логического знания как рефлексивных наук. В философии науки самым известным рефлексивным результатом математической логики является теорема Гёделя о неполноте. Согласно одному из вариантов теоремы Гёделя, в любой формализации понятия доказательства всегда найдется такое утверждение, которое (ни оно само, ни его отрицание) невозможно доказать в рамках предъявленной формализации. Из логических результатов Гёделя отчасти следует, что понятие математической истины не может быть заключено ни в одну из формальных систем, однако чистая логика непротиворечива. «Логические принципы присутствуют в каждом доказательстве, и в этом смысле каждое доказательство опирается на них, независимо ни от того, знаем ли мы их в явной форме или нет, ни от того, верим мы в них или нет» [4. С. 267]. Философская суть импликаций гёделевских результатов о неполноте сводится к тому, что математика в целом не может быть формализована, что является одной из причин когнитивных искажений. Запись содержательного доказательства на формальном языке, возможно, может потерять что-то несущественное с математической точки зрения, но важное для понимания.

В логике психологически тяжело воспринимается «материальная импликация». В частности, если исходить из таблицы истинности, парадоксальным соглашением является импликация с ложной посылкой, из которой следует истинное предложение. В условном высказывании его части содержательно связаны между собой, поэтому правильному употреблению импликации надо учиться на занятиях по математике, где задачи на доказательство не решаются импликацией с ложной посылкой. Прежде чем применить импликацию, нужно убедиться, что может выполняться ее посылка, — только тогда на основании истинности импликации будет выполняться заключение. Парадоксы материальной импликации без смысловой связи возникают при выходе за пределы математики. Методическую ответственность за то, как расценивать импликацию не только в тех случаях, когда посылка и заключение истинны, несут математики, доказывающие переусложненные теоремы. Материальная импликация, в которой нет смысловой связи предыдущего и последующего члена, не представляет когнитивного интереса для математиков. Еще одна особенность материальной импликации обусловлена тем, что она плохо коррелирует с основной функцией такой связи — проблемой обоснования.

Заметим также, что соотнесение смысловых границ логики и прикладной математики свидетельствует о сложностях определения статуса философии применения математики. В контексте взаимодействия логики и математики в прикладной математике приходится заниматься «логическими ухищрениями» по переводу с содержательного языка на математический язык численных методов, а последний — на язык информационных технологий и программирования, в котором логические построения рассматриваются как формальные процедуры. «Можно говорить об информационном взаимодействии логики и информатики. В настоящее время логика и информатика применяются в следующих направлениях: как формализм для построения вычислительных алгоритмов, как инструмент верификации программ в структурном программировании, как инструмент построения структур и структуризации информации, как инструмент получения вывода и принятия решений, как инструмент познания» [5. С. 8]. Теоретическая информатика как фундаментальная наука о знаковых математических системах и процессах использует язык логики и математики, т.к. и в момент возникновения, и сейчас информатика занимается логическим воплощением математических объектов и процессов в информационных языках и технологиях.

Информационными конструкциями можно считать логические высказывания и теоретико-множественные построения, проблемой которых является передача смысла. Современные воплощения логики и математики — это теория алгоритмов и теоретическая информатика. Язык математической логики и современной математики остается основным ориентиром среди сменяющихся каждые десять лет (после создания современных компьютеров) формальных языков программирования. Применение компьютеров в экспериментальных исследованиях позволило осуществить практическое воплощение формализации современной математики и выявить логические аспекты математической деятельности.

Нельзя не отметить интеллектуальные сдвиги в развитии логики, которые произошли в 30-е годы XX в., когда профессиональный математик и логик Алан Тьюринг осознал, что для любого алгоритма существует реализующая его машина. Согласно его убеждениям, такой машиной — «машиной Тьюринга» — реализуем любой интуитивный алгоритм. Для философского осмысления алгоритмизированного вычисления, используя выразительные возможности формального языка с точным и однозначным смыслом, он воспользовался физической метафорой «машины Тьюринга». Абстрактная математика остается практически значимой прежде всего благодаря проблемам, поставленным компьютерной математикой, поскольку ее оппонентами инициируется критическая рефлексия сложного доказательства.

Среди указанных проблем философской рефлексии подвергаются сомнению математические результаты, полученные с помощью компьютера, в отношении их обоснованности, обозримости и приемлемости. Постоянное усложнение проблематичных объектов математического мышления, понимание которых можно назвать формалистским или логическим, поскольку они не имеют никакой наглядной интерпретации, требует их логического оправдания в обосновании непротиворечивости теоретических утверждений. Отсутствие экспериментальных методов в математике и абстрактность ее объектов способствовали логическим методам развития математики. Это обстоятельство стимулировало философско-методологические надежды, что математика может быть полностью сведена к логике, а такое направление в обосновании математики получило название логицизма. Но эта программа не могла быть реализована из-за математических понятий и принципов, связанных с бесконечностью. «Несостоятельность установки логицизма следует, таким образом, из самого статуса логики как системы понятий, не связанной с идеей бесконечности» [6. С. 121]. Кроме того, из гёделевских результатов о неполноте следует, что современная математика не может быть с достоверностью обоснована исключительно статичными логическими средствами, т.к. они не рассматривают механизмы становления математической теории.

Например, методологическая трудность великой теоремы Ферма состоит в том, что рассматриваемое в ней множество натуральных чисел бесконечно и проверить все нет принципиальной возможности. Но помимо используемой в математике абстракции «актуальной бесконечности», отличающей ее в логическом плане, уместно также заметить, что логицизм существенно привязан к языку математики, а не к структуре математики, что не позволяет логическому обоснованию внести в математику убедительную для всех ясность.

Строго говоря, математика не нуждается в логическом обосновании, которое принципиально невозможно. Сам процесс успешного развития математических теорий можно интерпретировать как ее обоснование, а системный подход к обоснованию математики, исходя из эволюции математического знания, позволяет утверждать, что математическая теория способна достичь стадии своей непротиворечивости. Даже если математические теории не нуждаются в логическом обосновании, они требуют систематизации и целостного подхода к математическим объектам познания, исходя из анализа логики их развития. В идее системности отражается смена ориентаций в философски приемлемом обосновании непротиворечивости математики. Поэтому системная модель обоснования математического знания в силу своих исходных абстракций относится к когнитивной аргументации.

Заключение

В философии математического образования основным понятием аксиоматической теории является теорема как истинное высказывание для всех методических интерпретаций аксиом и правильного понимания логического следствия в математическом действии. Обоснование математического высказывания, в том числе теоремы, есть либо его доказательство, либо его подтверждение с помощью истинных высказываний. Основной вопрос, возникающий при этом — правильно ли в процессе доказательства одни математические высказывания с помощью логических рассуждений преобразованы в другие высказывания. Продуктивным подходом к пониманию доказательства является не просто анализ своих действий с позитивной стороны, а критическая рефлексия собственного последовательного и беспристрастного мышления, чтобы подтвердить или опровергнуть пришедшие на ум мысли, поддерживая состояние сомнения в систематическом исследовании.

Чем выше у студента уровень логического мышления, тем выше обоснованность и полнота понимания математики, не вызывающая сомнения в истинности математических утверждений. Но, вообще говоря, недостаточно сомневаться в чем-то при изучении разделов высшей математики, т.к. при методологически правильном понимании необходимо знать, почему возникает сомнение.

Кроме формирования логического мышления, критическая рефлексия при изучении природы математического доказательства даже в небольших «учебных дозах» позволяет с помощью *«тренинга мышления»* приобрести следующие интеллектуальные умения, которые очень известный математик В.А. Успенский выделяет в следующем порядке возрастания практической важности: «Первое — это умение отличить истину от лжи; второе — это умение отличить смысл от бессмыслицы; третье — это умение отличать понятное от непонятного» [7. С. 33]. Отметим также, что, выбирая между понятностью и точностью, он отдавал предпочтение пониманию математики, т.к. абсолютной строгости в математике достичь невозможно: даже выигрывая иногда в строгости, можно потерять в объективности.

С точки зрения философии образования системный уровень понимания математической темы предполагает установление связей с другими темами и дополнение ее новыми интерпретациями, что ведет к пониманию структурных взаимодействий. Недостаточность практических навыков аргументации — следствие непонимания таких важных понятий, как «доказательство», «непротиворечивость», «обоснование», которые характеризуют логико-методологическую культуру. Поэтому можно заключить, что систематическое изучение свойств математических объектов и методов математической аргументации выявляет незыблемые основы критически-рефлексивного стиля математического мышления.

Литература

1. *Пуанкаре А.* Интуиция и логика в математике / Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983. С. 159–169.
2. *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. 2-е изд., испр. и доп. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 2000. 521 с.
3. *Бочаров В.А.* Логика и математика // Вестник Московского университета. Сер. 7. Философия. 2012. № 1. С. 72–80.
4. *Коэн М., Нагель Э.* Введение в логику и научный метод. Челябинск: Социум, 2010. 655 с.
5. *Майоров А.А.* Логика и информатика // Перспективы науки и образования. 2015. № 4. С. 7–12.
6. *Перминов В.Я.* Философия и основания математики. М.: Прогресс-Традиция, 2001. 320 с.
7. *Успенский В.А.* Апология математики: сб. статей. СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2011. 554 с.

References

1. *Poincaré, A.* Intuition and Logic in Mathematics. In: *On Science*. Moscow, 1983. P. 159–169.
2. *Nepeivoda, N.N.* Applied logic. Novosibirsk: Publishing House of Novosibirsk University. 2000. 521 p.
3. *Bocharov, V.A.* Logic and Mathematics. *Vestnik of Moscow University. Ser. 7. Philosophy.* 2012. No. 1. P. 72–80.
4. *Cohen, M, Nagel, E.* Introduction to logic and scientific method. Chelyabinsk: Society, 2010. 655 p.
5. *Maiorov, A.A.* Logic and informatics. *Prospects of science and education.* 2015. No. 4. P. 7–12.
6. *Perminov, V.Ya.* Philosophy and foundations of mathematics. Moscow: Progress-Tradition, 2001. 320 p.
7. *Uspensky, V.A.* Apology of mathematics: Collection of articles. St. Petersburg: Amphora, 2011. 554 p.