http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-1-22-29

Оригинальная статья
Original paper

УДК 519.61

СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ОБРАЩЕНИЕ

В. С. МУХА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 30.06.2023

Аннотация. Статья представляет собой развитие теории многомерных матриц в части, относящейся к симметричным многомерным матрицам. Свойство симметричности рассмотрено с точки зрения структуры многомерных матриц. Наряду с симметричными матрицами, рассматриваются так называемые kq-симметричные, то есть матрицы, симметричные по отношению к мультииндексам, содержащим q индексов. Рассмотрены единичные, единичные симметричные и единичные kq-симметричные матрицы. Определены матрицы, обратные многомерным матрицам по отношению к единичным, единичным симметричным и единичным kq-симметричным. Доказано, что матрицами, обратными многомерным матрицам по отношению к единичным симметричным и единичным kq-симметричным матрицам, являются матрицы Мура–Пенроуза. Приведены различные примеры.

Ключевые слова: симметричная многомерная матрица, единичная многомерная матрица, обратная многомерная матрица, многомерно-матричный полином, матрица Мура–Пенроуза.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Муха, В. С. Симметричные многомерные матрицы и их обращение / В. С. Муха // Доклады БГУИР. 2024. Т. 22, № 1. С. 22–29. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-1-22-29.

SYMMETRICAL MULTIDIMENSIONAL MATRICES AND THEIR INVERSION

VLADIMIR S. MUKHA

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Submitted 30.06.2023

Abstract. The article discusses the development of the theory of the multidimensional matrices in the part regarding the symmetrical multidimensional matrices. The symmetry property is considered in terms of the structure of the multidimensional matrix. The so called kq-dimensional symmetrical matrices are considered along with the multidimensional symmetrical matrices, i. e. the matrices symmetrical to the multi-indices containing q indices. Unit, unit symmetrical and unit kq-symmetric matrices are considered. The matrices inverse to the multidimensional matrices with respect to the unit, unit symmetrical, and unit kq-symmetrical matrices are defined. It is proven that the matrices, inverse to the multidimensional matrices with respect to the unit symmetrical and unit kq-symmetrical matrices are the Moore–Penrose matrices. The distinct instances are given.

Keywords: symmetrical multidimensional matrix, unit multidimensional matrix, inverse multidimensional matrix, multidimensional-matrix polynomial, Moore–Penrose matrix.

Conflict of interests. The author declares no conflict of interests.

For citation. Mukha V. S. (2024) Symmetrical Multidimensional Matrices and Their Inversion. *Doklady BGUIR*. 22 (1), 22–29. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-1-22-29 (in Russian).

Введение

Симметричные многомерные матрицы занимают важное место в практике работы с многомерными матрицами. Такие матрицы возникают при аппроксимации многомерных нелинейных зависимостей полиномами с многомерно-матричными переменными [1, 2]. Многомерную матрицу A будем называть q-мерной, если ее элементы содержат q индексов $i_1, i_2, ..., i_q$

$$A = (a_{i_1, i_2, ..., i_q}),\ i_1 = \overline{1, n_1},\ i_2 = \overline{1, n_2},\ \ldots,\ i_q = \overline{1, n_q}. \quad (1)$$

В [3] введены симметричные q-мерные матрицы. Они рассматриваются также в [4]. Большое значение имеют так называемые kq-мерные матрицы, введенные в [4]. Они вводятся следующим образом. Индексы элементов многомерных матриц удобно объединять в наборы, которые будем назвать мультииндексами: $i_{(q)} = (i_1, i_2, ..., i_q)$ – q-мультииндекс, где $i_1 = \overline{1, n_1}$, $i_2 = \overline{1, n_2}$, …, $i_q = \overline{1, n_q}$. Мультииндекс пробегает свое множество значений, мощность которого для мультииндекса $i_{(q)} = (i_1, i_2, ..., i_q)$ равна $n = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_q$. Набор чисел $(n_1, n_2, ..., n_q)$ назовем размером мультииндекса. Будем использовать различные обозначения мультииндексов: $i_{(q)}$ – когда требуется указать количество индексов мультииндекса, и $\overline{i}$ – когда количество индексов мультииндекса известно из иных соображений, или когда оно не важно с точки зрения изложения вопроса.

Kq-мерной назовем многомерную матрицу, элементы которой содержат k q-мультииндексов. Матрица $A = (a_{i_1, i_2, ..., i_q})$ (1) в мультииндексной форме записи имеет вид: $A = (a_{i_{(q)}})$, $i_{(q)} = \overline{1, n}$, $n = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_q$. В [4] введены также kq-мерные симметричные матрицы и kq-мерные симметричные единичные матрицы, однако вопросы симметричных q-мерных и kq-мерных матриц требуют более детального анализа в связи с их большой практической значимостью. В статье изложены эти вопросы. Содержание статьи является дополнением, уточнением и развитием материала [4], но не его заменой. Для понимания вопросов следует иметь представление об основных положениях теории многомерных матриц [3, 4].

Структура элементов *q*-мерной матрицы *n*-го порядка и симметричные *q*-мерные матрицы

Рассмотрим вопрос q-мерных симметричных матриц с несколько иных позиций по сравнению с [3, 4], а именно – с позиций структуры многомерной матрицы. Пусть A – это q-мерная матрица n-го порядка (1), а $i'_{(q)} = (i'_1, i'_2, ..., i'_q)$ – фиксированное значение ее мультииндекса $i_{(q)} = (i_1, i_2, ..., i_q)$. Это значение указывает на конкретный элемент $a_{i'_{(q)}}$ матрицы A. В последовательности чисел $i'_{(q)} = (i'_1, i'_2, ..., i'_q)$ находятся числа от 1 до n, которые могут повторяться. Пусть число m повторяется в последовательности $i'_{(q)} = (i'_1, i'_2, ..., i'_q)$ q_m раз, $m \in \{1, 2, ..., n\}$, $q_1 + q_2 + ... + q_n = q$. Мультииндекс с повторениями (частотами) чисел 1, 2, …, n $q_1, q_2, ..., q_n$ раз соответственно будем называть мультииндексом структуры $(q_1, q_2, ..., q_n)$. Очевидно, что у элементов q-мерной матрицы n-го порядка может быть несколько мультииндексов одной и той же структуры, поскольку от перестановки чисел мультииндекса местами его структура не меняется. Например, у трехмерной матрицы второго порядка $A = (a_{i,j,l})$, $i, j, l = 1, 2$, имеется по одному мультииндексу структуры (3,0), (0,3) (мультииндексы элементов $a_{1,1,1}$, $a_{2,2,2}$), три мультииндекса структуры (1,2) (мультииндексы элементов $a_{1,2,2}$, $a_{2,1,2}$, $a_{2,2,1}$) и три мультииндекса структуры (2,1) (мультииндексы элементов $a_{1,1,2}$, $a_{1,2,1}$, $a_{2,1,1}$). Поскольку указанные перестановки являются перестановками с повторениями, их число определяется формулой [3]

$$M_{i'_{(q)}} = \frac{q!}{q_1! q_2! \ldots q_n!}. \quad (2)$$

Таким образом, элементы q-мерной матрицы n-го порядка можно разбить на группы элементов с одинаковой структурой индексов. Число элементов в группе $(q_1, q_2, ..., q_n)$ определяется формулой (2), а число групп – формулой, приведенной в [3]:

$$N = C_{n+q-1}^{q} = \frac{n(n+1)...(n+q-1)}{q!}. \qquad (3)$$

Многомерная матрица (1) называется симметричной относительно двух своих индексов i_α, i_β, если каждые два ее элемента, получающиеся один из другого перестановкой этих индексов, одинаковы, т. е. если $a_{i_1,...,i_\alpha,...,i_\beta,...,i_q} = a_{i_1,...,i_\beta,...,i_\alpha,...,i_q}$. Многомерная матрица A (1) называется симметричной относительно нескольких индексов, если она симметрична относительно любой пары из них. Многомерная матрица A (1) называется просто симметричной, если она симметрична относительно всех своих индексов. Число N отличающихся друг от друга (различных) элементов симметричной q-мерной матрицы n-го порядка определяется формулой (3) [3].

Поскольку в симметричной матрице перестановки индексов фиксированной структуры не меняют как структуру перестановки, так и значения элементов матрицы, элементы симметричной матрицы объединяются в группы одинаковых элементов. Каждая группа характеризуется мультииндексом структуры $(q_1, q_2, ..., q_n)$. Количество групп определяется формулой (3), а количество элементов в группе – формулой (2). Иными словами, у симметричной матрицы все элементы каждой группы структуры $(q_1, q_2, ..., q_n)$ одинаковы.

Симметричные q-мерные матрицы возникают, как уже отмечалось во введении, при возведении в (0,0)-свернутую m-ю степень некоторой одномерной матрицы $u = (u_i)$, $i = 1, 2, …, n$. Они могут также и не быть степенями какой-либо одномерной матрицы. Приведем примеры симметричных многомерных матриц. Многомерные матрицы будем изображать в виде ассоциированных с ними двумерных матриц [3, 4] и называть их также многомерными.

Пример 1. Пусть $u = (u_i) = (2,3)$ – одномерная матрица второго порядка (вектор с двумя компонентами). Тогда $v = u^4 = (v_{i,j,k,l})$ ((0,0)-свернутая четвертая степень матрицы u) будет симметричной четырехмерной матрицей второго порядка ($q = 4$, $n = 2$), которая представляется в виде следующей (2,0,2)-ассоциированной матрицы:

$$v = \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 24 & 24 & 36 \\ 24 & 36 & 36 & 54 \\ 24 & 36 & 36 & 54 \\ 36 & 54 & 54 & 81 \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (4)$$

Матрица (4) содержит $N = C_{n+q-1}^{q} = C_5^4 = 5$ различных элементов (формула (3)), которые повторяются определенное число раз. Например, элемент $v_{1,1,2,1} = 24$ этой матрицы повторяется $M_{1,1,2,1} = \frac{q!}{q_1!q_2!...q_n!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ раза (формула (2)), а элемент $v_{1,1,2,2} = 36$ повторяется $M_{1,1,2,2} = \frac{q!}{q_1!q_2!...q_n!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ раз (формула (2)), что подтверждается видом матрицы (4). Аналогичным образом можно определить kq-мерную симметричную матрицу. Пусть $\overline{i} = (i_1, i_2, ..., i_q)$ – q-мультииндекс, и некоторая матрица A имеет вид

$$A = \left(a_{\overline{i}_1, \overline{i}_2, ..., \overline{i}_k}\right) = \left(a_{\overline{\overline{i}}_{(k)}}\right), \qquad (5)$$

где $\overline{\overline{i}}_{(k)} = (\overline{i}_1, \overline{i}_2, ..., \overline{i}_k)$ – набор q-мультииндексов, содержащий k q-мультииндексов; матрицу A (5) будем называть kq-мерной матрицей или k-мерной матрицей по отношению к q-мультииндексу. Любая q-мерная матрица является $1q$-мерной, т. е. одномерной по отношению к q-мультииндексу.

Kq-мерную матрицу A (5) назовем симметричной относительно k ее q-мультииндексов, если она симметрична относительно любой пары мультииндексов.

К симметричной kq-мерной матрице можно применять теорию, относящуюся к q-мерной матрице. Для этого мультииндекс следует считать индексом, пробегающим значения от 1 до $n = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_q$.

Пример 2. Пусть $u=(u_{i_1,i_2})$, $i_1=1,2$, $i_2=1,2,3$, – двумерная прямоугольная матрица, в частности

$$u=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Вводя в рассмотрение мультииндекс $\overline{i}=(i_1,i_2)$ размером (2,3), можно считать матрицу (6) одномерной по отношению к мультииндексу $\overline{i}=(i_1,i_2)$: $u=(u_{\overline{i}})$ (1*q*-матрицей с *q* = 2). Мультииндекс $\overline{i}=(i_1,i_2)$ пробегает при этом 2 · 3 = 6 значений, (1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), которые можно заменить числами $1,2,3,4,5,6$. Матрица $v=u^2=(v_{i_1,i_2,i_3,i_4})=(u_{\overline{i}_1}u_{\overline{i}_2})$ является четырехмерной размером $(2,3,2,3)$ и имеет как $(2,0,2)$-ассоциированная следующий вид:

$$v=\begin{array}{c}\\ (1,1)\\ (2,1)\\ (1,2)\\ (2,2)\\ (1,3)\\ (2,3)\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}(1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) & (1,3) & (2,3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & \alpha & 2 & \beta & 3 & \gamma\\ \alpha & \alpha^2 & 2\alpha & \alpha\beta & 3\alpha & \alpha\gamma\\ 2 & 2\alpha & 2^2 & 2\beta & 6 & 2\gamma\\ \beta & \beta\alpha & 2\beta & \beta^2 & 3\beta & \beta\gamma\\ 3 & 3\alpha & 6 & 3\beta & 9 & 3\gamma\\ \gamma & \gamma\alpha & 2\gamma & \gamma\beta & 3\gamma & \gamma^2\end{pmatrix}\end{array}, \tag{7}$$

она также – двумерная матрица (*k* = 2) по отношению к 2-мультииндексу (*q* = 2) размером (2, 3).

Каждый из мультииндексов $\overline{i}_1$, $\overline{i}_2$ пробегает значения, упорядоченные как (1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3). Применяя к матрице (7) формулу (3) с *k* = 2, *n* = 2 · 3 = 6, получаем, что данная матрица содержит $N=C^k_{n+k-1}=C^2_7=7!/(2!\cdot 5!)=21$ различных элементов. По формуле (2) получаем, что, например, элемент $v_{1,3,1,2}=6$ повторяется $M_{(1,3),(1,2)}=2!/(1!\cdot 1!)=2$ раза, а $v_{2,2,2,2}=\beta^2$ – $M_{(2,2),(2,2)}=2!/2!=1$ раз, что подтверждается видом матрицы (7).

Единичные многомерные и единичные симметричные многомерные матрицы

В [3] введена (λ,μ)-единичная многомерная матрица *E*(λ,μ) как матрица, удовлетворяющая равенствам

$${}^{\lambda,\mu}(AE(\lambda,\mu))={}^{\lambda,\mu}(E(\lambda,\mu)A)=A \tag{8}$$

для любой матрицы *A*, допускающей указанное (λ,μ)-свернутое произведение. Эта матрица определяется выражением

$$E(\lambda,\mu)=(e_{\overline{c},\overline{s},\overline{m}})=(\delta_{\overline{c},\overline{m}})=\left(\begin{cases}1, & \overline{c}=\overline{m},\\ 0, & \overline{c}\neq\overline{m}\end{cases}\right), \tag{9}$$

где $\overline{c},\overline{s},\overline{m}$ – μ,λ,μ-мультииндексы соответственно; $\delta_{\overline{c},\overline{m}}$ – символ Кронекера.

Из (9) видно, что это (λ + 2μ)-мерная матрица.

Для симметричной матрицы *A* (1) *n*-го порядка существует также так называемая симметричная (λ,μ)-единичная матрица $E^{(s)}(\lambda,\mu)$, удовлетворяющая равенству для симметричной матрицы *A*, допускающей указанное (λ,μ)-свернутое произведение:

$${}^{\lambda,\mu}(AE^{(s)}(\lambda,\mu))={}^{\lambda,\mu}(E^{(s)}(\lambda,\mu)A)=A. \tag{10}$$

Данная матрица определяется выражением, приведенным в [4]:

$$E^{(s)}(\lambda,\mu)=(e^{(s)}_{\overline{c},\overline{s},\overline{m}})=\left(\begin{cases}\dfrac{\mu_1!\mu_2!...\mu_n!}{\mu!}, & \text{если } perm(\overline{c})=\overline{m},\\ 0, & \text{если } perm(\overline{c})\neq\overline{m}\end{cases}\right), \tag{11}$$

где μ_i – число повторений числа *i* в мультииндексе $\overline{c}$ (или $\overline{m}$), *i* = 1, 2, …, *n*, $\mu=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n$; $perm(\overline{c})$ – некоторая перестановка индексов в $\overline{c}$; μ – число индексов в мультииндексе $\overline{c}$ (или $\overline{m}$).

Многомерные единичные матрицы для kq-мерных матриц определяются аналогично (8)–(11) путем замены индексов на q-мультииндексы. В частности, $(\lambda q,\mu q)$-единичная матрица $E(\lambda q,\mu q)$ определяется как матрица, удовлетворяющая равенству для любой kq-мерной матрицы A (5), допускающей указанное $(\lambda q,\mu q)$-свернутое произведение:

$$^{\lambda q,\mu q}(AE(\lambda q,\mu q)) = {}^{\lambda q,\mu q}(E(\lambda q,\mu q)A) = A.$$

Эта матрица определяется выражением

$$E(\lambda q,\mu q) = (e_{\bar{\bar{c}},\bar{\bar{s}},\bar{\bar{m}}}) = (\delta_{\bar{\bar{c}},\bar{\bar{m}}}) = \left(\begin{cases} 1, & \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{m}}, \\ 0, & \bar{\bar{c}} \neq \bar{\bar{m}} \end{cases} \right),$$

где $\bar{\bar{c}},\bar{\bar{s}},\bar{\bar{m}}$ – наборы мультииндексов, содержащие μ,λ,μ q-мультииндексов соответственно; $\delta_{\bar{\bar{c}},\bar{\bar{m}}}$ – символ Кронекера.

Симметричная $(\lambda q,\mu q)$-единичная матрица $E^{(s)}(\lambda q,\mu q)$ удовлетворяет равенству для симметричной kq-мерной матрицы A (5), допускающей указанное $(\lambda q,\mu q)$-свернутое произведение:

$$^{\lambda q,\mu q}(AE^{(s)}(\lambda q,\mu q)) = {}^{\lambda q,\mu q}(E^{(s)}(\lambda q,\mu q)A) = A.$$

Эта матрица определяется выражением, приведенным в [4]:

$$E^{(s)}(\lambda q,\mu q) = \left(e^{(s)}_{\bar{\bar{c}},\bar{\bar{s}},\bar{\bar{m}}}\right) = \left(\begin{cases} \dfrac{\mu_1!\mu_2!\ldots\mu_n!}{\mu!}, & \text{если } perm(\bar{\bar{c}}) = \bar{\bar{m}}; \\ 0, & \text{если } perm(\bar{\bar{c}}) \neq \bar{\bar{m}} \end{cases} \right), \tag{12}$$

где μ_i – число повторений числа i в наборе мультииндексов $\bar{\bar{c}}$ (или $\bar{\bar{m}}$), $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$; $perm(\bar{\bar{c}})$ – некоторая перестановка мультииндексов в $\bar{\bar{c}}$; μ – число мультииндексов в наборе мультииндексов $\bar{\bar{c}}$ (или $\bar{\bar{m}}$); $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_q$ (n_1, n_2, n_q) – размер q-мультииндекса.

Понятно, что матрица $E^{(s)}(\lambda,\mu)$ является частным случаем матрицы $E^{(s)}(\lambda q,\mu q)$ при $q = 1$.

Обратные многомерные симметричные матрицы

Вопрос обращения многомерных симметричных матриц является ключевым в решении многих многомерно-матричных проблем. Нас интересуют алгоритмы обращения, имеющие практическое применение, т. е. численные алгоритмы для матриц больших размеров. Такие алгоритмы хорошо разработаны для двумерных матриц, в связи с чем целесообразно обращение многомерной матрицы рассматривать как обращение ассоциированной с ней двумерной матрицы. Под определителем и рангом многомерной матрицы будем понимать определитель и ранг соответствующей ассоциированной матрицы. Симметричные многомерные матрицы являются вырожденными, т. е. их определитель равен нулю, поскольку ассоциированные с ними двумерные матрицы имеют одинаковые строки и столбцы. Примером может служить матрица (4). Это значит, что для симметричных многомерных матриц A (1) не существует (λ,μ)-обратных матриц ${}^{\lambda,\mu}A^{-1}$ по отношению к обычной единичной матрице, т. е. удовлетворяющих равенству:

$$^{\lambda,\mu}\left({}^{\lambda,\mu}A^{-1}A\right) = {}^{\lambda,\mu}\left(A\,{}^{\lambda,\mu}A^{-1}\right) = E(\lambda,\mu).$$

В связи с этим в [4] определена матрица ${}^{\lambda,\mu}A_s^{-1}$, (λ,μ)-обратная к симметричной матрице A по отношению к симметричной единичной матрице, т. е. удовлетворяющая равенству:

$$^{\lambda,\mu}\left({}^{\lambda,\mu}A_s^{-1}A\right) = {}^{\lambda,\mu}\left(A\,{}^{\lambda,\mu}A_s^{-1}\right) = E^{(s)}(\lambda,\mu). \tag{13}$$

Возникает вопрос нахождения такой обратной матрицы. Можно показать, что эта матрица является обратной матрицей Мура–Пенроуза [5] (МП-обратной матрицей). МП-обратная матрица называется также псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза. Действительно, пользуясь определением ассоциированных матриц, можно утверждать, что многомерная МП-обратная матрица ${}^{\lambda,\mu}A_s^{+}$ – это такая матрица, которая удовлетворяет следующим условиям [5]:

1) ${}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}A_s^{+}A) = {}^{\lambda,\mu}(A\,{}^{\lambda,\mu}A_s^{+})$ – симметричная матрица;

2) ${}^{\lambda,\mu}(A\,{}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}A_s^{+}A) = A$;

3) ${}^{\lambda,\mu}({}^{\lambda,\mu}A_s^{+}\,{}^{\lambda,\mu}(A\,{}^{\lambda,\mu}A_s^{+}) = {}^{\lambda,\mu}A_s^{+}$.

Теорема. Симметричная (λ,μ)-обратная матрица ${}^{\lambda,\mu}A_s^{-1}$ (13) удовлетворяет условиям 1–3.

Доказательство. Если в условиях 1–3 принять ${}^{\lambda,\mu}A_s^{+} = {}^{\lambda,\mu}A_s^{-1}$, то выполнение условия 1 следует из выражения (13) и симметричности матрицы $E^{(s)}(\lambda,\mu)$, а условия 2 и 3 выполняются в силу (13) и (10).

Таким образом, показано, что многомерная МП-обратная матрица ${}^{\lambda,\mu}A_s^{+}$ является обратной для симметричной многомерной матрицы: ${}^{\lambda,\mu}A_s^{-1} = {}^{\lambda,\mu}A_s^{+}$, где ${}^{\lambda,\mu}A_s^{-1}$ – матрица, определяемая по (13), а ${}^{\lambda,\mu}A_s^{+}$ – МП-обратная матрица, определяемая условиями 1–3.

Матрица ${}^{\lambda,\mu}A_s^{-1}$ (13) для симметричной матрицы A может не существовать, в то время как МП-обратная матрица ${}^{\lambda,\mu}A_s^{+}$ существует для любой матрицы. В этом случае МП-обратная матрица не будет обратной для симметричной матрицы A. Алгоритм нахождения обратной многомерной симметричной матрицы следующий:

1) формируется двумерная матрица, ассоциированная с обращаемой многомерной матрицей;

2) находится МП-обратная матрица для ассоциированной матрицы;

3) выполняется преобразование двумерной МП-обратной матрицы в многомерную МП-обратную матрицу.

В системах программирования имеются функции для получения МП-обратной матрицы. В системе программирования MATLAB это функция pinv. Для нахождения МП-обратной матрицы можно воспользоваться следующим предельным соотношением [5]:

$$A^{+} = \lim_{t\to 0} A^{T}\left(AA^{T} + tI\right)^{-1},$$

где A – исходная матрица; A^{+} – МП-обратная матрица; I – единичная матрица.

В практических расчетах при достаточно малом значении параметра t следует воспользоваться выражением

$$A^{+} = A^{T}\left(AA^{T} + tI\right)^{-1}.$$

Представленный результат обобщается на kq-мерные симметричные матрицы. Если матрица ${}^{\lambda q,\mu q}A_s^{-1}$ является $(\lambda q,\mu q)$-обратной к симметричной kq-мерной матрице A по отношению к симметричной единичной матрице $E^{(s)}(\lambda q,\mu q)$, т. е. удовлетворяет равенству ${}^{\lambda q,\mu q}\left({}^{\lambda q,\mu q}A_s^{-1}A\right) = {}^{\lambda q,\mu q}\left(A\,{}^{\lambda q,\mu q}A_s^{-1}\right) = E^{(s)}(\lambda q,\mu q)$, и существует, то она удовлетворяет следующим условиям Мура–Пенроуза:

1) ${}^{\lambda q,\mu q}\left({}^{\lambda q,\mu q}A_s^{+}A\right) = {}^{\lambda q,\mu q}\left(A\,{}^{\lambda q,\mu q}A_s^{+}\right)$ – симметричная матрица;

2) ${}^{\lambda q,\mu q}\left(A\,{}^{\lambda q,\mu q}\left({}^{\lambda q,\mu q}A_s^{+}A\right)\right) = A$;

3) ${}^{\lambda q,\mu q}\left({}^{\lambda q,\mu q}A_s^{+}\,{}^{\lambda q,\mu q}\left(A\,{}^{\lambda q,\mu q}A_s^{+}\right)\right) = {}^{\lambda q,\mu q}A_s^{+}$.

Таким образом, указан реальный содержательный смысл псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, и в этом смысле термин «псевдообратная матрица» представляется неуместным. Речь идет о реально обратной матрице для симметричной многомерной матрицы.

Численный пример обратной симметричной матрицы

Пример 3. Рассмотрим четырехмерную матрицу второго порядка $A = (a_{i,j,k,l})$, $i,j,k,l = 1,2$, и пусть она как (2,0,2)-ассоциированная имеет вид:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ A = \begin{array}{c} (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} & \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & 5 & -5 \\ -4 & 5 & 5 & -5 \\ 5 & -5 & -5 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \quad (14)$$

Ранг этой матрицы равен трем, определитель – нулю. Найдем матрицу ${}^{0,2}A_s^{-1}$, (0,2)-обратную к A относительно (0,2)-единичной симметричной матрицы $E^{(s)}(0,2)$. В этом случае должно выполняться равенство

$${}^{0,2}\left({}^{0,2}A_s^{-1}A\right) = {}^{0,2}\left(A\,{}^{0,2}A_s^{-1}\right) = E^{(s)}(0,2).$$

С помощью программы псевдообращения двумерных матриц, примененной к матрице (14), получаем следующую (2,0,2)-ассоциированную МП-обратную матрицу:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ A_s^{+} = \begin{array}{c} (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} & \begin{pmatrix} -0.16807 & -0.088235 & -0.088235 & -0.042017 \\ -0.088235 & -0.058824 & -0.058824 & -0.14706 \\ -0.088235 & -0.058824 & -0.058824 & -0.14706 \\ -0.042017 & -0.14706 & -0.14706 & -0.2605 \end{pmatrix}. \end{array} \quad (15)$$

Выполняя умножение двумерных матриц A и A_s^{+}, получаем следующую матрицу:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ AA_s^{+} = \begin{array}{c} (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2.2204\text{e-}16 & -2.2204\text{e-}16 & 6.6613\text{e-}16 \\ 2.2204\text{e-}16 & 0.5 & 0.5 & -1.1102\text{e-}16 \\ 2.2204\text{e-}16 & 0.5 & 0.5 & 2.7756\text{e-}16 \\ 4.4409\text{e-}16 & 6.6613\text{e-}16 & 6.6613\text{e-}16 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Данная матрица является (2,0,2)-ассоциированной единичной симметричной матрицей $E^{(s)}(0,2)$, определенной в (13). Для сравнения, рассчитанная по формуле (11) (2,0,2)-ассоциированная единичная симметричная матрица $E^{(s)}(0,2)$ имеет вид:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{array} \\ E^{(s)}(0,2) = \begin{array}{c} (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Это обстоятельство позволяет утверждать, что полученная обратная матрица A_s^{+} (15) является искомой обратной матрицей ${}^{0,2}A_s^{-1}$.

Заключение

Основной результат статьи – это теорема, устанавливающая, что обратной к многомерной симметричной матрице является матрица Мура–Пенроуза. Хотя доказательство результата в итоге оказалось несложным, но все равно потребовало возврата к работе [4] и пересмотра соответствующего материала.

Список литературы

1. Муха, В. С. Многомерно-матричный полиномиальный регрессионный анализ. Оценки параметров / В. С. Муха // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2007. № 1. С. 45–51.

2. Муха, В. С. Наилучшая полиномиальная многомерно-матричная регрессия / В. С. Муха // Кибернетика и системный анализ. 2007. Т. 43, № 3. С. 138–143.
3. Соколов, Н. П. Введение в теорию многомерных матриц / Н. П. Соколов. Киев: Наукова думка, 1972.
4. Муха, В. С. Анализ многомерных данных / В. С. Муха. Минск: Технопринт, 2004.
5. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. М.: Мир, 1989.

References

1. Mukha V. S. (2007) Multidimensional-Matrix Regression Analysis. Estimations of the Parameters. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. (1), 45–51 (in Russian).
2. Mukha V. S. (2007) The Best Polynomial Multidimensional-Matrix Regression. *Cybernetics and Systems Analysis*. 43 (3), 138–143 (in Russian).
3. Sokolov N. P. (1972) *Introduction to the Theory of Multidimensional Matrices*. Kiev, Naukova Dumka Publ. (in Russian).
4. Mukha V. S. (2004) *Analysis of Multidimensional Data*. Minsk, Technoprint Publ. (in Russian).
5. Horn R., Johnson Ch. (1989) *Matrix Analysis.* Cambridge University Press. (in Russian).

Сведения об авторе

Муха В. С., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, 6
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Тел.: +375 44 781-16-51
E-mail: mukha@bsuir.by
Муха Владимир Степанович

Information about the author

Mukha V. S., Dr. of Sci. (Tech.), Professor, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki St., 6
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics
Tel.: +375 44 781-16-51
E-mail: mukha@bsuir.by
Mukha Vladimir Stepanovich