УДК 519.714

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОДСИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ ДИЗЪЮНКТИВНО-КОНЪЮНКТИВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ



П.Н. Бибило
Заведующий лабораторией логического проектирования ОИПИ НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор
bibilo@newman.bas-net.by

С.Н. Кардаш
Старший научный сотрудник лаборатории логического проектирования ОИПИ НАН Беларуси, кандидат технических наук
kardash77@gmail.com

В.И. Романов
Ведущий научный сотрудник лаборатории логического проектирования ОИПИ НАН Беларуси, кандидат технических наук, доцент
rom@newman.bas-net.by

П.Н. Бибило

С 1994 г. является заведующим лабораторией логического проектирования Объединенного института проблем информатики НАН Беларуси, с которым неразрывно связана вся его трудовая деятельность. Основные научные результаты Бибило П.Н. относятся к теории логического проектирования цифровых устройств, основные направления – разработка методов синтеза цифровых устройств с использованием современной элементной базы сверхбольших интегральных схем (СБИС), автоматизация процессов проектирования (синтеза, моделирования и функциональной верификации) заказных цифровых СБИС, разработка систем автоматизированного проектирования (САПР).

С.Н. Кардаш

Окончил БГУ им. Ленина. Область научных интересов – синтез матричных структур заказных цифровых СБИС, разработка программ логической оптимизации систем булевых функций.

В.И. Романов

Область научных интересов – разработка инструментария для решения задач логико-комбинаторного характера, разработка программного обеспечения САПР дискретных устройств и применения в них методов искусственного интеллекта.

Аннотация. Рассматривается задача логической оптимизации представлений систем булевых функций – выделение из заданной системы булевых функций подсистем, функции которых можно представить в виде совместного алгебраического разложения. Совместность заключается в использовании одной и той же функции для разложения (дизъюнктивного, конъюнктивного) всех функций выделенной подсистемы. Приводятся результаты экспериментального исследования программной реализации предложенного алгоритма выделения подсистем булевых функций.

Ключевые слова: система булевых функций, совместное алгебраическое разложение, *Binary Decision Diagram* (*BDD*), разложение Шеннона, синтез логической схемы, *VHDL*.

Введение. Синтез комбинационных логических схем в заданном базисе логических элементов, называемом также технологической библиотекой проектирования, выполняется обычно в два этапа. На первом этапе проводится технологически независимая минимизация представлений систем булевых функций, являющихся математическими моделями функционирования комбинационных схем, на втором этапе выполняется покрытие минимизированных описаний систем функций функциональными описаниями базисных логических элементов [1]. Для уменьшения сложности (площади) кристаллов цифровых СБИС (сверхбольших интегральных схем) при минимизации представлений ДНФ (дизъюнктивных нормальных форм) систем булевых функций выделяются общие части элементарных конъюнкций либо дизъюнкций, что привело к созданию различных методов факторизации [2, 3], выполняемой после минимизации систем булевых функций в классе ДНФ. Совместная минимизация ДНФ систем функций [4, 5] ориентирована на получение возможно меньшего числа элементарных конъюнкций, из которых можно образовать ДНФ каждой из функций системы. Минимизация представлений систем функций в виде суперпозиций функций с меньшим числом аргументов привела к развитию разнообразных методов декомпозиции, среди которых выделяются методы алгебраической декомпозиции «от выходов» [6, 7], называемые в зарубежной литературе *bi-decomposition* [8 - 10], когда в качестве выходных функций, по которым производится разложение, выступают двухместные алгебраические операции (булевы функции) дизъюнкции (ИЛИ), конъюнкции (И), «суммы по модулю 2» (исключающего ИЛИ).

В данной работе изучаются разложения булевых функций «от выходов» - совместные алгебраические дизъюнктивные и конъюнктивные разложения системы булевых функций. Рассматривается задача выделения из заданной системы булевых функций подсистем, функции которой можно представить в виде совместного алгебраического разложения. Совместность заключается в использовании одной и той же функции для разложения всех функций выделенной подсистемы. Приводятся результаты экспериментального исследования эффективности программной реализации предложенного алгоритма выделения подсистем булевых функций.

Основные определения и постановка задачи. Пусть задана система $\boldsymbol{f(x)}$ =($f^1(\boldsymbol{x})$,…, $f^r(\boldsymbol{x})$), $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$, булевых функций, отличных от функций-констант 0, 1. Характеристическим множеством $M^1_{f^i}$ компонентной функции $f^i(\boldsymbol{x})$, i=1,…, r, называется множество элементов булева пространства, на которых функция $f^i(\boldsymbol{x})$ принимает единичное значение. Через $M^0_{f^i}$ обозначим множество элементов булева пространства, на которых функция $f^i(\boldsymbol{x})$ принимает нулевое значение.

Совместным ***дизъюнктивным*** *разложением* функций $f^i(\boldsymbol{x})$, i=1,…, r, системы $\boldsymbol{f(x)}$ назовем их представление в виде

$$\begin{aligned} &f^1(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}) \quad f^1_{ost}(\boldsymbol{x}) \\ &\dots \\ &f^r(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}) \quad f^r_{ost}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Совместность заключается в том, что все функции системы в своих разложениях имеют общую (совместно используемую) подфункцию $h(\boldsymbol{x})$. Совместное дизъюнктивное разложение (1) существует, если $\bigcap_{i=1}^{r} M^1_{f^i}$. Очевидно, что $M^1_h \quad \bigcap_{i=1}^{r} M^1_{f^i}$. Обозначим через $|A|$ мощность множества A. Мерой связанности $\alpha_{\boldsymbol{f},h}$ функций системы $\boldsymbol{f(x)}$ в совместном дизъюнктивном разложении (1) назовем отношение мощности $|M^1_h|$ характеристического множества M^1_h функции $h(\boldsymbol{x})$ к общему числу

2^n элементов булева пространства размерности *n*, построенного над вектором $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$

$$\alpha_{f,h} = \frac{|M_h^1|}{2^n} \quad . \tag{2}$$

Совместным ***конъюнктивным*** *разложением* функций $f^i(\boldsymbol{x})$, *i*=1,…, *r*, системы $\boldsymbol{f(x)}$ назовем их представление в виде

$$\begin{aligned} &f^1(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\,\&\,f^1_{ost}(\boldsymbol{x}) \\ &\dots \\ &f^r(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\,\&\,f^r_{ost}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{3}$$

Совместное конъюнктивное разложение (3) существует, если $\bigcap_{i=1}^{r} M^0_{f^i}$, при этом $M_h^0 \quad \bigcap_{i=1}^{r} M^0_{f^i}$. Аналогично, мерой связанности $\alpha^{\&}_{f,g}$ функций системы $\boldsymbol{f(x)}$ совместного конъюнктивного разложения (3) назовем

$$\alpha^{\&}_{f,g} = \frac{|M_g^0|}{2^n} \quad . \tag{4}$$

Система функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется S_p *-связанной*, если $p^n_{max} \quad p$, где

$$p^n_{max} = \left|\bigcap_{i=1}^{r} M^1_{f_i}\right| \tag{5}$$

Иначе говоря, система функций $\boldsymbol{f(x)}$ называется S_p *-связанной*, если имеются *p* наборов *n*-мерного булева пространства (строк таблицы истинности), на которых все компонентные функции $f^i(\boldsymbol{x})$ принимают значение 1. Если система функций является S_p *-связанной*, то она будет S_q *-связанной* для всех *q*, удовлетворяющих условию 0<*q*<*p*. Число p^n_{max} назовем *весом дизъюнктивной связанности* системы функций, или весом связанности «по единичным значениям функций», так как для S_p *-связанной* системы можно построить дизъюнктивное разложение (1) с мерой связанности $\alpha_{f,h} = \frac{p}{2^n}$. Аналогично, система функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется S_c *-связанной*, если $c^n_{max} \quad c$, где $c^n_{max} = \left|\bigcap_{i=1}^{r} M^0_{f_i}\right|$. Иначе говоря, система функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ называется S_c *-связанной*, если имеются *c* наборов *n*-мерного булева пространства, на которых все компонентные функции $f^i(\boldsymbol{x})$ принимают значение 0. Число c^n_{max} назовем *весом конъюнктивной связанности* системы функций, или весом связанности «по нулевым значениям функций», так как для S_c *-связанной* системы можно построить конъюнктивное разложение (3) с мерой связанности $\alpha^{\&}_{f,g} = \dfrac{c}{2^n}$.

Задача 1. Задана таблица истинности системы $\boldsymbol{f(x)}=(f^1(x),\ldots,f^m(\boldsymbol{x}))$ полностью определенных булевых функций. Заданы число r ($r<m$) функций, мера связанности α и вид (1) или (3) совместного алгебраического разложения. Требуется из заданной системы булевых функций, выделить минимальное число попарно непересекающихся подсистем, каждая из которых содержит не менее r функций и каждую из которых можно представить совместным алгебраическим разложением (1) или (3) с мерой связанности, не меньшей α, при этом выделенные подсистемы должны содержать возможно большее число функций заданной системы.

Точное решение задачи 1 для *дизъюнктивных* разложений может быть сведено к:

– нахождению всех максимальных по мощности S_p -связанных подсистем функций, при этом те функции исходной системы, которые не вошли ни в одну из подсистем, образуют подсистему «остаток»;

– построению булевой матрицы R вхождения компонентных функций, не вошедших в «остаток», в подсистемы – каждой подсистеме соответствует строка матрицы R;

– нахождению кратчайшего строчного покрытия матрицы R, методы решения этой задачи подробно изложены в [5];

– обеспечению взаимной непересекаемости подсистем, вошедших в кратчайшее строчное покрытие, путем удаления некоторых функций из пересекающихся подсистем.

Решение задачи 1 для *конъюнктивных* разложений аналогично – вместо S_p -связанных подсистем функций рассматриваются S_c-связанные подсистемы.

Введем в рассмотрение m-компонентный булев вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, называемый вектором поляризации для компонентных функций $f^i(\boldsymbol{x})$. Обозначим β_i=1, если рассматривается функция $f^i(\boldsymbol{x})$, и β_i =0, если берется инверсия $\overline{f^i}$. Система $\boldsymbol{f(x)}$ функций называется S_p^{β} *-связанной*, если для вектора $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ поляризации соответствующая система функций является S_p *-связанной*. Аналогично определяется и S_c^{β} -связанные подсистемы при нахождении конъюнктивных разложений.

Задача 2. Решить задачу 1 с учетом возможности инверсирования функций исходной системы.

Решение задачи 2 сводится к нахождению вектора поляризации $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, для которого из исходной системы выделяется возможно меньшее число S_p^{β} *-связанных* (либо S_c^{β} -связанных) подсистем, каждая из которых имеет соответствующее совместное алгебраическое разложение.

Эвристический алгоритм решения задачи 2. Идея алгоритма состоит в выделении из системы функций некоторой подсистемы и построении соответствующего дизъюнктивного разложения (1) входящих в подсистему функций. Функции подсистемы выбираются с учетом полярности – в прямой либо инверсной форме, в зависимости от того, какая из них приводит к более компактному решению. Функции, не вошедшие в выделенную подсистему, образуют подсистему «остаток», к которому описанная процедура может применяться до тех пор, пока последний остаток перестанет удовлетворять необходимым требованиям по связанности областей единичных значений.

Пусть задан параметр связности $\alpha = p/2^n$ - рассматривается связность по областям единичных значений функций. Функцию будем называть p-совместимой с S_p -связанной подсистемой, если добавление этой функции в подсистему оставляет расширенную подсистему S_p -связанной. Алгоритм является итеративным, на первом шаге текущей системой функций является исходная система.

Шаг 1. Оценивается связанность «по единичным значениям» столбцов значений функций текущей системы, каждая из функций f^i рассматривается как в прямой f^i, так и инверсной $\overline{f}^i$ форме. Перебираются $C_{2m}^2 - m$, $m > 1$, всевозможных неупорядоченных пар функций текущей системы, для пар находится *вес дизъюнктивной связанности*, при этом пары $\{ f^i\ f^i \}$, $\{ \overline{f}^i\ \overline{f}^i \}$, $\{ f^i\ \overline{f}^i \}$ не рассматриваются. Если ни одна из подсистем, состоящих из пары функций не является S_p -связанной, то из системы нельзя выделить ни одной из подсистем, для которых имеется дизъюнктивное разложение (1) с мерой связанности $\alpha = p/2^n$.

Шаг 2. Выделение подсистемы. Первую пару функций выделяемой подсистемы образует пара функций с максимальным значением веса (5) связанности, если таких несколько – выбирается первая из них. Выбранные функции помечаются. Затем происходит процесс наращивания множества функций подсистемы. На каждом шаге последовательно перебираются непомеченные функции, и в подсистему добавляется первая функция (либо ее инверсия), не нарушающая условия *p*-совместимости. Процесс добавления прекращается, если среди непомеченных не осталось *p*-совместимых функций. В таблице истинности полученной подсистемы имеется не менее *p* наборов, на которых все функции подсистемы имеют единичное значение. Для полученной подсистемы проводится дизъюнктивное разложение (1).

Шаг 3. Из текущей системы удаляются все функции, вошедшие в выделенную подсистему.

Шаг 4 (итеративный). Такой процесс формирования подсистем продолжается до тех пор, пока все функции не будут размещены по подсистемам, либо когда останутся функции, каждая пара которых не является S_p -связанной. Эти оставшиеся функции образуют подсистему «остаток».

Аналогичным образом решается задача выделения подсистем для конъюнктивных разложений, рассматриваются S_c -связанные подсистемы и формулируется понятие *c*-совместимой функции.

Рассмотрим **пример** системы булевых функций, заданных в табл. 1, для этой системы *n*=*m*=4. Результат работы эвристического алгоритма для ограничений *r*=2, $\alpha = 8/2^4 = 0{,}5$ (50% связанности по единичным значениям функций) даны в табл. 2 – 4.

На первом шаге для функций f^i, $\overline{f}^i$, *i*=1,…, 4, (табл. 1) находятся неупорядоченные пары функций, для которых подсчитывается значение p_{max}^4. Например, для пары $\{ f^1$, $f^2 \}$ p_{max}^4 =6, так имеется шесть наборов (0001), (0011), (0101), (0111), (1010), (1011), на которых функции f^1, f^2 одновременно принимают единичное значение. В результате на первом шаге первой итерации алгоритма выбирается пара $\{ f^1$, $\overline{f}^4 \}$, для которой p_{max}^4 =9. На шаге 2 выясняется, что добавить в выделенную подсистему функций нельзя ни одну из оставшихся функций f^2, $\overline{f}^2$, f^3, $\overline{f}^3$ без нарушения *p*-совместимости. Поэтому на первой итерации формируется подсистема $\{ f^1$, $\overline{f}^4 \}$. Функции f^1, f^4 исключаются из текущей системы.

Текущей системой на второй итерации является система { f^2, f^3 }. Рассмотрев на первом шаге второй итерации пары { f^2, f^3 }, { f^2, $\overline{f}^3$ }, { $\overline{f}^2$, f^3 }, легко убедиться в том, что они не являются *p*-совместимыми. Например, для пары f^2, f^3 функций имеется только два набора (0110), (0111), на которых эти функции одновременно принимают единичное значение. При записи дизъюнктивного разложения $\overline{f}^4 = h \quad 0$ выясняется, что f^4_{ost} =0 и $f^4 = \overline{h}$. Таким образом, при решении задачи 2 уравнение дизъюнктивного (и конъюнктивного) разложения может редуцироваться до оператора инверсии. В результате решения задачи 2 в качестве вектора поляризации выступает 4-компонентный булев вектор β =(1110), нулевая компонента вектора отмечает тот факт, что функция f^4 реализуется в инверсной форме.

Таблица 1. Система булевых функций

0 0 0 0	0 0 1 1
0 0 0 1	1 1 0 0
0 0 1 0	1 0 0 0
0 0 1 1	1 1 0 0
0 1 0 0	0 0 1 1
0 1 0 1	1 1 0 0
0 1 1 0	0 1 1 1
0 1 1 1	1 1 1 0
1 0 0 0	0 0 1 1
1 0 0 1	1 0 0 0
1 0 1 0	1 1 0 0
1 0 1 1	1 1 0 0
1 1 0 0	0 0 1 1
1 1 0 1	1 0 1 1
1 1 1 0	0 0 0 1
1 1 1 1	1 0 1 0

Таблица 2. Подсистема «остаток»

Матричная форма		*Логические уравнения (BDDI)*
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	f^2 f^3	

0 0 0 0	0 1	f2=^x1*sf0+x1*sf1;
		f3=^x1*sf2+x1*sf3;
		sf2=^x4*^sf1+x4*sf4;
		sf3=^x4*^x3+x4*x2;
		sf0=^x4*sf4+x4;
		sf1=^x2*x3;
		sf4=x2*x3;

0 0 0 1	1 0	
0 0 1 1	1 0	
0 1 0 0	0 1	
0 1 0 1	1 0	
0 1 1 0	1 1	
0 1 1 1	1 1	
1 0 0 0	0 1	
1 0 1 0	1 0	
1 0 1 1	1 0	
1 1 0 0	0 1	
1 1 0 1	0 1	
1 1 1 1	0 1	

Таблица 3. Остаточные подфункции дизъюнктивного разложения

Матричная форма		*Логические уравнения (BDDI)*
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	f^1_{ost}	

1 1 0 1	1	f1ost=^x3*sf0;
		sf0=x1*sf1;
		sf1=x2*x4;

Таблица 4. Общая подфункция дизъюнктивного разложения

Матричная форма		*Логические уравнения (BDDI)*
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	h	

0 0 0 1	1	h=^x3*sf0+x3*sf1;
		sf1=^x4*^x2+x4;
		sf0=x4*sf2;
		sf2=^x1+x1*^x2;

0 0 1 0	1	
0 0 1 1	1	
0 1 0 1	1	
0 1 1 1	1	
1 0 0 1	1	
1 0 1 0	1	
1 0 1 1	1	
1 1 1 1	1	

***BDDI*-минимизация.** Под *BDDI-представлением* (*BDDI – Binary Decision Diagram with Inverse cofactors*) понимается ориентированный бесконтурный граф, задающий последовательные разложения Шеннона

$$f(\boldsymbol{x})=\bar{x}_i f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\quad x_i f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) \qquad (6)$$

булевой функции $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, либо системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f^1(\boldsymbol{x}),\ldots,f^m(\boldsymbol{x}))$ булевых функций по всем переменным $x_1,x_2,\ldots,x_n$ при заданном порядке (перестановке) переменных, по которым проводятся разложения, и при условии нахождения пар взаимно инверсных кофакторов. Функции $f_0=f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$, $f_1=f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$ в правой части (5) называются кофакторами (cofactors, англ.) разложения по переменной x_i. *BDDI*-представлению соответствует совокупность взаимосвязанных формул разложения Шеннона. Минимизация сложности *BDDI* заключается в нахождении последовательности (*перестановки*) переменных разложений Шеннона, при которой число пар взаимно инверсных кофакторов является наименьшим [1, 11].

Вычислительные эксперименты. Целью десяти проведенных вычислительных экспериментов на двух наборах примеров систем функций явилось выяснение эффективности использования программы выделения из системы булевых функций подсистем, для которых возможно совместное алгебраическое разложение, и сравнение этой программы с другими программами технологически независимой оптимизации. В экспериментах использовались представления систем булевых функций в языке *SF* и следующие программы системы *FLC*-2 [12] логической минимизации:

Wypo2 – программа выделения подсистем и построения для выделенных подсистем совместных алгебраических разложений при заданных значениях параметра α меры связанности и числа r функций в выделяемой подсистеме, программа обрабатывает системы функций, для которых число n аргументов не превышает 16;

AutoDecomp – программа нахождения лучшего значения q меры связанности по критерию минимальности общего числа литералов в формульных представлениях совместного дизъюнктивного либо конъюнктивного представления системы функций. Для пары α, r ограничений (значение α задавалось в процентах) программа *Wypo2* строила совместное алгебраическое разложение, после чего элементы полученной логической сети подвергались *BDDI*-минимизации и проводился подсчет суммарного числа литералов в *BDDI*-представлениях логической сети ;

BDD_Builder – программа [11] минимизации *BDDI*-представления системы булевых функций;

Espresso[4], *Tie* [13] – программы совместной минимизации системы булевых функций в классе ДНФ;

Набор 1 примеров для экспериментов 1 – 8 взят из библиотеки (*http*://*www*1.*cs*.*columbia*.*edu*/~*cs*6861/*sis*/*espresso*-*examples*/*ex*) примеров схем, представленных в формате *PLA*, при этом описания из формата *PLA* (матричное представление систем ДНФ) переводились в формат *SDF* матричных форм таблиц истинности системы *FLC*-2.

Параметры примеров систем функций (схем) для экспериментов и результаты экспериментов следующие: n – число аргументов; m – число функций; K_f – число наборов, на которых система функций имеет ненулевой вектор значений; $K_{ДНФ}$ – число элементарных конъюнкций в формате *PLA*; k_{min} – число элементарных конъюнкций в минимизированных ДНФ, полученных программой *Espresso*; α (%), r – ограничения для программы *Wypo2,* при которых программа *AutoDecomp* перебора совместных алгебраических разложений нашла лучшее решение по суммарному числу литералов в *BDDI*-представлениях функций совместного разложения: α - процент связанности в выделенных подсистемах; r – число функций в выделенных подсистемах; s – число функций в «остаточной» подсистеме, которую образуют функции, не вошедшие в выделенные подсистемы; $\left|M_h^1\right|$, $\left|M_g^1\right|$ – мощности характеристических множеств функций *h*, *g,* соответственно; *Area* – суммарная площадь элементов схемы в условных единицах ; *Delay* – задержка схемы (нс).

Эксперименты были организованы следующим образом. Сначала (кроме эксперимента 8) выполнялась программа (либо несколько программ) технологически независимой минимизации. После логической минимизации описания представлений систем функций задавались логическими уравнениям, которые конвертировались в *VHDL* описания [14] и подавались на вход синтезатора *LeonardoSpectrum* – выполнялся синтез логических схем в библиотеке проектирования заказных КМОП СБИС, после синтеза выдавались отчеты о суммарной площади (*Area*) элементов схемы и отчеты о максимальной задержке (*Delay*). Синтезатор *LeonardoSpectrum* [14] перерабатывает входное описание, выполняет свою логическую минимизацию, получает внутреннее описание, по которому и синтезируется схема. Библиотекой синтеза являлась библиотека проектирования заказных цифровых КМОП СБИС, состав библиотеки приведен в [1].

Эксперимент 1. Программа *AutoDecomp* перебирала значения α =15, 25, 35,…,85 и *r*=2, 3, для которых выполнялась программа *Wypo2* выделения подсистем с совместными *дизъюнктивными* разложениями по заданным значениям α и *r*. Программа *AutoDecomp* находила совместное *дизъюнктивное разложение*, характеризуемое наименьшим суммарным числом литералов. Функциональные описания блоков выбранной логической сети (функции *h* и функции $f_{ost}^i(\boldsymbol{x})$) задавались логическими уравнениями, которые конвертировались в *VHDL*-описания.

Эксперимент 2. Отличается от эксперимента 1 тем, что программа *AutoDecomp* перебирала совместные *конъюнктивные разложения.*

Эксперимент 3. Для блоков логических сетей, задающих совместные дизъюнктивные разложения, найденные в эксперименте 1, осуществлялся переход к функциональным описаниям в виде таблиц истинности, затем к логическим уравнениям, задающим СДНФ (совершенные ДНФ), которые конвертировались в *VHDL*-описания.

Эксперимент 4. Для блоков логических сетей, задающих совместные *дизъюнктивные* разложения, найденные в эксперименте 1, осуществлялся переход к функциональным описаниям в виде таблиц истинности, для которых с помощью программы *Tie* выполнялась минимизация в классе ДНФ, минимизированные ДНФ представлялись логическими уравнениями, которые конвертировались в *VHDL*-описания.

Эксперимент 5. Отличается от эксперимента 4 тем, что рассматривались совместные *конъюнктивные* разложения, найденные в эксперименте 2.

Эксперимент 6. Исходная система функций совместно минимизировалась в классе ДНФ с помощью программы *Espresso*, минимизированные ДНФ представлялись логическими уравнениями, которые конвертировались в *VHDL*-описания.

Эксперимент 7. Для исходной системы функций выполнялась *BDDI*-минимизация с помощью программы *BDD_Builder*, минимизированные многоуровневые представления (логические уравнения) конвертировались в *VHDL*-описания.

Эксперимент 8. Для систем функций, заданных таблицами истинности, осуществлялся перевод в совершенные ДНФ, которые представлялись логическими уравнениями языка *SF*. Логическая оптимизация не выполнялась, уравнения конвертировались в *VHDL*-описания.

В качестве *набора 2 примеров* для экспериментов 9 и 10 рассматривались системы функций, мало отличающиеся по областям определений и полученные по результатам экспериментов [15], в которых выделялись подсистемы функций, связанные «по уравнениям», функции таких подсистем имеют много общих (одинаковых) уравнений в *BDDI*-представлениях.

Эксперимент 9. Совпадает с экспериментами 1 и 7 на наборе 2 примеров исходных данных.

Эксперимент 10. Совпадает с экспериментами 2 и 7 на наборе 2 примеров исходных данных.

Результаты схемной реализации системы функций (табл. 1) приведены в табл. 5, показывающие, что предварительное выделение подсистем, допускающих алгебраическое разложение, может уменьшать площадь схем по сравнению с предварительным проведением только *BDDI*-минимизации.

Результаты экспериментов 1 - 8 на потоке 1 примеров систем булевых функций приведены в табл. 6 - 9, на потоке 2 примеров – в табл. 10, 11.

Таблица 5. Результаты схемной реализации системы функций (табл. 1)

	Эксперимент 1 *Совместное дизъюнктивное разложение*	*Эксперимент 2* *Совместное конъюнктивное разложение*	*Эксперимент 7* *BDDI-описание*
Площадь схемы (Area)	4 380	4 419	4 659

Таблица 6. Результаты эксперимента 1

Имя	*n*	*m*	K_f	α , *r*	*s*	$\|M_h^1\|$	*Эксперимент 1*	
							Area	*Delay*
*B*12	15	9	32 768	85, 2	7	29 504	*18 860	4.71
*B*9	16	15	23 530	35, 2	1	-	67 127	6.04
*BR*1	12	8	33	15, 2	0	4 063	48 914	7.96
*BR*2	12	8	35	15, 2	0	4 061	31 867	6.90
Dist	8	5	255	15, 2	1	-	*67 033	6.27
*IN*0	15	11	24 072	45, 3	4	16 964	140 499	10.58
INTB	15	7	32 768	45, 2	5	-	417 178	9.49
*M*181	15	9	32 768	85, 2	7	29 504	*19 469	3.59
*M*2	8	16	96	15, 2	0	160	48 044	4.41
*M*3	8	16	128	15, 2	0	128	*56 710	4.99
MP2D	14	14	16 384	85, 4	5	-	46 755	9.09
*P*82	5	14	24	15,2	0	8	25 183	4.02
ROOT	8	5	255	45, 2	3	-	*27 091	4.83
*T*3	12	8	4 096	85, 2	5	3 492	19 792	4.14
Tial	14	8	16 384	35, 2	3	-	406 336	9.78
*Z*5*xp*1	7	10	128	35, 2	8	-	*24 351	4.99

Таблица 7. Результаты эксперимента 2

Имя	*n*	*m*	K_f	$\alpha^{\&}$, *r*	*s*	$\|M_g^1\|$	*Эксперимент 2*	
							Area	*Delay*
*B*9	16	15	23 530	25, 2	2	17 792	42 592	8.71
*BR*1	12	8	33	15, 2	0	33	30 578	9.84
*BR*2	12	8	35	15, 2	0	35	23 994	11.01
Dist	8	5	255	15, 2	1	-	77 032	6.40
INTB	15	7	32 768	15, 3	3	-	*346 853	10.17
*M*181	15	9	32 768	25, 2	2	14 240	23 500	6.19
*M*2	8	16	96	15, 2	0	96	*46 258	4.74
*M*3	8	16	128	15, 2	0	128	58 942	5.20
MP2D	14	14	16 384	15, 2	0	6 880	30 830	6.83
*P*82	5	14	24	15, 2	0	8	*20 334	3.11

Окончание таблицы 7

Имя	n	m	K_f	$\alpha^{\&}, r$	s	$\lvert M_g^1 \rvert$	*Эксперимент 2*	
							Area	*Delay*
ROOT	8	5	255	45, 2	3	72	27 671	4.87
*T*3	12	8	4 096	75, 2	4	1 024	19 741	4.48
*Z5xp*1	7	10	128	35, 2	8	52	25 316	3.34

Таблица 8. Результаты экспериментов 3, 4, 5

Имя	*Дизъюнктивное разложение*		*Дизъюнктивное разложение +совместная минимизация (Tie)*		*Конъюнктивное разложение +совместная минимизация (Tie)*	
	Эксперимент 3		*Эксперимент 4*		*Эксперимент 5*	
	Area	*Delay*	*Area*	*Delay*	*Area*	*Delay*
*B*12	21 600	4.39	20 852	3.70	-	-
*B*9	-	-	158 171	16.01	52 363	7.97
*BR*1	46 191	8.18	48 624	8.42	30 383	8.09
*BR*2	28 508	7.17	24 524	6.66	22 052	10.65
Dist	76 686	7.02	75 040	-	110 741	6.55
INTB	-	-	560 148	11.62	457 248	9.72
*M*181	22 532	4.44	21 154	3.70	22 471	6.74
*M*2	60 515	7.00	72 121	7.33	48 998	5.72
*M*3	75 631	8.34	93 097	8.34	62 848	5.44
MP2D	-	-	59 366	7.00	28 151	6.51
*P*82	36 192	3.84	26 343	4.15	19 480	3.21
ROOT	29 284	4.64	31 148	5.00	31 494	3.90
*T*3	30 963	6.46	29 853	9.30	19 474	5.84
Tial	-	-	382 035	9.30	-	-
*Z5xp*1	24 820	3.68	27 152	3.18	27 057	3.34

Таблица 9. Результаты экспериментов 6, 7, 8

Имя	n	m	$K_{ДНФ}$	*Совместная минимизация (Espresso)*			*BDDI-минимизация*		*Исходные описания*	
				k_{min}	*Эксперимент 6*		*Эксперимент 7*		*Эксперимент 8*	
					Area	*Delay*	*Area*	*Delay*	*Area*	*Delay*
*B*12	15	9	431	41	20 813	3.20	18 358	3.59	не вып. синтез	
*B*9	16	15	123	119	*28 943	3.86	26 081	4.91	не вып. синтез	
*BR*1	12	8	34	19	*24 446	5.36	23 843	6.36	28 212	7.62
*BR*2	12	8	35	13	*18 196	4.70	21 371	6.34	22 632	6.37
Dist	8	5	256	121	79 956	5.44	60 085	6.08	83 136	7.03
*IN*0	15	11	138	107	*99 782	6.68	94 648	6.74	не вып. синтез	
INTB	15	7	664	629	369 653	10.42	272 555	8.67	не вып. синтез	
*M*181	15	9	430	41	21 115	3.20	19 469	3.90	не вып. синтез	
*M*2	8	16	96	47	59 170	6.77	45 086	5.20	62 412	7.31
*M*3	8	16	128	64	83 839	8.47	52 580	4.49	82 227	7.09
MP2D	14	14	123	33	*22 532	4.69	17 471	3.56	не вып. синтез	
*P*82	5	14	24	21	20 378	2.89	19 988	2.93	22 605	3.89
ROOT	8	5	256	57	40 221	5.01	26 109	4.78	55 750	6.47
*T*3	12	8	152	33	*17 834	2.89	17 276	3.59	41 978	5.90
Tial	14	8	640	582	*327 752	7.96	255 531	8.76	не вып. синтез	
*Z5xp*1	7	10	128	76	65 057	5.58	18 442	4.64	96 378	8.35

Таблица 10. Результаты эксперимента 9

Имя	n	m	K_f	*Эксперимент 9*					
				Дизъюнктивное разложение				*BDDI-минимизация*	
				α , r	$\lvert M_h^1 \rvert / 2^n$	*Area*	*Delay*	*Area*	*Delay*
*T*0_*B*12	7	2	53	15, 2	92/128	*3 778	2.15	3 839	1.81
*T*0_*B*2	15	2	24 304	15, 2	20 324/32 768	*47 770	*5.92	50 449	6.39
*T*0_*Dist*	8	4	460	15, 2	45/256	*44 640	5.82	44 964	*4.58
*T*0_*IN*0	14	3	8 602	15, 2	12 810/16 384	40 935	8.26	*28 508	4.95
*T*0_*INTB*	15	2	19 576	15, 2	16 384/32 768	230 560	10.74	*205 160	8.39
*T*0_*M*181	7	2	53	15, 2	92/128	*3 778	2.15	3 839	1.81

Таблица 11. Результаты эксперимента 10

Имя	n	m	K_f	*Эксперимент 10*					
				Конъюнктивное разложение				*BDDI-минимизация*	
				$\alpha^{\&}$, r	$\lvert M_g^1 \rvert / 2^n$	*Area*	*Delay*	*Area*	*Delay*
*T*0_*B*12	7	2	53	15, 2	36/128	4 213	*1.78	3 839	1.81
*T*0_*B*2	15	2	24 304	15, 2	12 444/32 768	65 838	9.59	50 449	6.39
*T*0_*Dist*	8	4	460	15 ,2	45/256	58 233	7.16	44 964	*4.58
*T*0_*IN*0	14	3	8 602	80, 2	2 836/16 384	30 394	*4.79	*28 508	4.95
*T*0_*INTB*	15	2	19 576	15, 2	16 384/32 768	224 506	16.11	*205 160	*8.39
*T*0_*M*181	7	2	53	15, 2	36/128	4 213	*1.78	3 839	1.81

Результаты экспериментов 1 – 8 на потоке 1 примеров показывают, что технологически независимая минимизация функциональных описаний (эксперименты 1 – 7) позволяет значительно сокращать площади и задержки логических схем по сравнению с использованием исходных не минимизированных описаний (эксперимент 8). В табл. 9 помечены случаи не выполнения синтеза («не вып. синтез») из-за того, что исходные описания имеют слишком большой объем *VHDL*-описаний - более 10 Мб. Применение алгебраических разложений совместно с минимизацией в классе ДНФ полученных блоков разложений (эксперименты 4, 5) позволяет улучшить результаты синтеза по сравнению с результатами синтеза без предварительной логической минимизации. При этом оказывается, сравнив результаты экспериментов 3 и 4, что в некоторых случаях встроенные в синтезатор средства оптимизации оказываются лучше, чем предварительная дополнительная минимизация логических сетей в классе ДНФ, выполняемая программой *Tie*. Наилучшей программой предварительной минимизации оказалась мощная и эффективная программа *BDD_Builder*, выполняющая *BDDI*-минимизацию исходной системы. Широко известная программа *Espresso* совместной минимизации систем функций в классе ДНФ позволила получить лучшие результаты синтеза в семи случаях из 16 по экспериментам на потоке 1 примеров (лучшие результаты по экспериментам 1 – 6 помечены символом *). Сравнив, значения K_f , $K_{\textit{ДНФ}}$ и k_{min} можно определить и уменьшение сложности функциональных *VHDL*-описаний систем ДНФ, по которым осуществляется синтез схем в экспериментах 6 и 8. В девяти случаях лучшие результаты показали программы выделения подсистем, которые имеют совместные алгебраические разложения.

Однако эти программы, использующие однократные совместные алгебраические разложения проигрывают *BDDI*-минимизации исходных систем функций. В табл. 6 и 7 указываются мощности $\lvert M_h^1 \rvert$, $\lvert M_g^1 \rvert$ характеристических множеств функций h, g в случаях, когда из исходной системы была выделена одна подсистема для совместного разложения. Сравнение мощностей множеств K_f и M_h^1 (табл. 6), K_f и M_g^1 (табл. 7) в случаях, когда была выделена одна подсистема функций, показывает, что характеристическое множество общей функции алгебраического разложения значительно отличается от областей единичных значений функций, участвующих в алгебраических разложениях. Чтобы определить область эффективного применения программ алгебраических разложений, был сформирован набор 2 примеров из шести систем функций и проведены эксперименты 9 и 10 для сравнения программы *BDDI*-минимизации с комбинированным подходом к *DDDI*-минимизации, когда предварительно выполняется выделение подсистем с их алгебраическим разложением. В табл. 10, 11 символом * отмечены лучшие решения. Дизъюнктивные разложения оказались предпочтительнее в четырех случаях из шести для примеров систем функций, области единичных значений которых меньше отличаются друг от друга. В этих случаях выделение общей функции при дизъюнктивном разложении дает эффект при схемной реализации при сравнении с *BDDI*-минимизацией.

Заключение. Применение совместных алгебраических разложений в выделенных подсистемах функций, дает положительный эффект при синтезе, если области единичных значений функций в выделенных подсистемах незначительно отличаются друг от друга. Чтобы выяснить области предпочтительного применения совместных алгебраических разложений при *BDDI*-минимизации многоуровневых представлений систем функций, требуется при алгебраических разложениях следить за мощностями множеств единичных значений функций, а также изучить эффективность применения итеративных (многократных) разложений для систем функций, имеющих различную степень отличий в областях определения функций. Целесообразно также при формировании общих функций h и g учитывать не только мощности их характеристических множеств, но и компактность их представлений, например в виде ДНФ либо полиномов Жегалкина. Это позволит уменьшать сложность схем из библиотечных элементов заказных цифровых СБИС. Для повышения размерности обрабатываемых систем булевых функций при программной реализации предложенных алгоритмов совместного алгебраического разложения систем функций целесообразно применить технику покомпонентных булевых вычислений над «длинными» булевыми и троичными векторами, разработанную и эффективно используемую в [16] при решении различных оптимизационных логико-комбинаторных задач.

Список литературы

[1] Бибило, П.Н. Бинарные диаграммы решений в логическом проектировании. / П. Н. Бибило. М.: ЛЕНАНД, 2024. – 560 с.

[2] Синтез асинхронных автоматов на ЭВМ /Под ред. А. Д. Закревского. – Минск: Наука и техника, 1975.184 с.

[3] *Brayton R.K*., *Rudell R*., *Sangiovanni-Vincentelli A. L*., *Wang A. R. MIS*: *A multiple-level logic optimization systems* // *IEEE Trans*. *on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 1987. *V. CAD*-6. № 6.*P*. 1062 – 1081.

[4] *Logic Minimization Algorithm for VLSI Synthesis* / *K. R. Brayton* [*et al.*]. – *Boston*: *Kluwer Academic Publishers*, 1984. – 193 *p*.

[5] Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М.: Физматлит, 2007. – 592 с.

[6] Поттосин, Ю.В. Метод бидекомпозиции частичных булевых функций / Ю.В. Поттосин // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 77–87.

[7] Поттосин, Ю. В. Эвристический метод алгебраической декомпозиции частичных булевых функций / Ю.В. Поттосин // Информатика. – 2020. – № 3. – С. 44-53.

[8] *Sasao*, *T. On bi-decomposition of logic functions* / *T. Sasao*, *J. T. Butler* // *International Workshop on Logic Synthesis*, *Lake Tahoe*, *California*, *May* 18–21, 1997. – *V*. 2. – *Session* 8-1. – *P*. 1 – 6.

[9] *Mishchenko, A. An algorithm for bi-decomposition of logic functions / A. Mishchenko, B. Steinbach, M. Perkowski // Proc. of the* 38*th Annual Design Automation Conf.* (*DAC*'2001), 18–22 *June* 2001, *Las Vegas, USA.* – *Las Vegas*, 2001. – *P.* 103 – 108.

[10] *Lee, R.-R. Bi-decomposing large Boolean functions via interpolation and satisfiability solving / R.-R. Lee, J.-H. R. Jiang, W.-L. Hung // Proc. of the* 45*th annual Design Automation Conf., Anaheim, California*, 2008. – 2008. – *P.* 636–641.

[11] Бибило, П. Н. Использование полиномов Жегалкина при минимизации многоуровневых представлений систем булевых функций на основе разложения Шеннона / П. Н. Бибило, Ю. Ю. Ланкевич // Программная инженерия. – 2017. – № 8. – С. 369–384.

[12] Бибило, П.Н. Система логической оптимизации функционально-структурных описаний цифровых устройств на основе продукционно-фреймовой модели представления знаний / П.Н. Бибило, В.И. Романов // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. 2020. – Выпуск 4. – С. 9–16.

[13] Леончик, П.В. Минимизация систем булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм / П.В. Леончик // Информатика – 2006. – № 1. С. 88–96.

[14] Бибило П. Н. Системы проектирования интегральных схем на основе языка VHDL. *StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum*. М.:СОЛОН-Пресс, 2005. – 384 с.

[15] Бибило, П. Н. Выделение из многоуровневого представления системы булевых функций подсистем для совместной логической минимизации / П. Н. Бибило, Н. А. Кириенко, В. И. Романов // Программные продукты и системы. – 2023. – Т. 36. – № 4. – С. 509–522;

[16] Закревский, А. Д. Вычисления в многомерном булевом пространстве / А. Д. Закревский. Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2011. – 106 *с*.

Авторский вклад

Бибило Петр Николаевич – постановка задачи исследования, проведение экспериментов в системе FLC-2, подготовка текста доклада.

Кардаш Сергей Николаевич – разработка программ совместных алгебраических разложений систем булевых функций, исследование эффективности программ.

Романов Владимир Ильич – разработка программы перебора совместных алгебраических разложений систем булевых функций, исследование эффективности программы, подготовка текста доклада.

EXTRACTING OF A BOOLEAN FUNCTION SUBSYSTEMS FOR JOINT DISJUNCTIVE-CONJUNCTIVE ALGEBRAIC DECOMPOSITIONS

P. N. Bibilo
Head of Laboratory of UIIP of NAS of Belarus,
Dr. of Technical Sciences, Professor

S. N. Kardash
Senior Researcher of UIIP of NAS of Belarus,
PhD of Technical Sciences

V.I. Romanov
Leading Researcher of UIIP of NAS of Belarus,
PhD of Technical Sciences

Abstract. The problem of logical optimization of representations of Boolean function systems is considered – the extracting of a subsystem from a given system of Boolean functions, the functions of which can be represented as a joint algebraic decomposition. Compatibility consists in the joint use of the same function to decompose (disjunctive, conjunctive) all the functions of a dedicated subsystem. The results of an experimental study of the software implementation of the proposed algorithm for the allocation of subsystems of Boolean functions are presented.

Keywords: Boolean function system, joint algebraic decomposition, Binary Decision Diagram (BDD), Shannon expansion, logic circuit synthesis, VHDL.