Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информатики

А. В. Борзенков

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. MATLAB

Конспект лекций

для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

Минск БГУИР 2010

УДК 517.91(075.8)+004.43(075.8)
ББК 22.161.1я73
Б82

Р е ц е н з е н т:
профессор кафедры высшей математики БГУИР
Р. М. Жевняк

Борзенков, А. В.
Б82 Обыкновенные дифференциальные уравнения. MATLAB: конспект лекций для студ. всех спец. БГУИР днев. формы обуч. / А. В. Борзенков. – Минск : БГУИР, 2010. – 139 с.: ил.
ISBN 978-985-488-589-6 .

Учебное пособие посвящено изучению обыкновенных дифференциальных уравнений, основных аналитических методов их решения. Исследован вопрос о непрерывности и дифференцируемости решения по входным параметрам. Приведены элементы теории устойчивости решений.

Отдельное внимание уделено исследованию дифференциальных уравнений, задач Коши и краевых задач в среде MATLAB. Материал каждой главы подробно рассмотрен на специальных примерах программирования MATLAB.

УДК 517.91(075.8)+004.43(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-985-488-589-6

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРА 4
ГЛАВА 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ....5
§1. Основные определения 5
§2. Интегрирование в квадратурах дифференциальных уравнений...........................7
§3. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши.......................16
ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕРАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ........................26
§1. Существование и единственность решения.......................................26
§2. Интегрирование в квадратурах..28
ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 33
§1. Дифференциальные уравнения высших порядков.......................................33
§2. Интегрирование уравнений с помощью степенных рядов. Асимптотика 37
§3. Системы дифференциальных уравнений в нормальной форме 44
ГЛАВА 4. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ..................................50
§1. Непрерывная зависимость решений от параметров.................................50
§2. Дифференцирование по параметрам и начальным значениям........................55
§3. Уравнения в вариациях. Линеаризация...58
ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 60
§1. Линейные однородные уравнения n-го порядка.....................................60
§2. Линейные неоднородные уравнения..64
ГЛАВА 6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ...73
§1. Линейные однородные системы...73
§2. Линейные неоднородные системы.. 81
§3. Функции от матриц. Матричная экспонента...88
ГЛАВА 7. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА 95
§1. Линейное уравнение второго порядка..95
§2. Краевая задача. Функция Грина...96
§3. Собственные значения и интегральные уравнения..................................100
§4. Интегрирование уравнений с помощью рядов Фурье..................................102
§5. Уравнение Бесселя..106
ГЛАВА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ 117
§1. Устойчивость по Ляпунову..117
§2. Устойчивость линейных систем..119
§3. Устойчивость по первому приближению..130
§4. Нелинейные системы. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова...........................131
§5. Теоремы Барбашина и Красовского...135
Литература **138**

От автора

В пособии кратко рассмотрены основные темы университетского курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Приведены постановки краевых и задач Коши для уравнений и систем уравнений. В качестве общих аналитических подходов к решению изучены разложение решения в степенной ряд, разложение решения в ортогональный ряд, метод Лагранжа, вариации произвольных постоянных, метод функций Грина (функций Коши). Последний подход позволяет естественно установить связь дифференциальных и интегральных уравнений, а также рассматривать дифференциальные уравнения как условия оптимальности для вариационных задач и задач оптимального управления (бесконечномерных экстремальных задач).

Изложен материал о зависимости, непрерывности и дифференцируемости решения дифференциального уравнения по входным параметрам. Приведены элементы теории устойчивости решения обыкновенных дифференциальных систем.

Из численных методов для дифференциальных уравнений подробно разобран метод Эйлера, на котором базируется доказательство теорем существования и единственности решения задачи Коши. Очень кратко упомянут метод последовательных приближений Пикара. Из приближенных методов решения кратко отмечен асимптотический подход. Теоремы существования и единственности решений начальной и краевых задач приведены в классическом понимании. Обобщенные и особые решения не исследовались по причине ограниченности объема пособия. Заинтересованному читателю будет полезно ознакомиться с этим вопросом по ссылкам [8, 12, 19] в списке рекомендуемой литературы.

Отдельное внимание уделено исследованию дифференциальных уравнений в среде программирования MATLAB 7.0.1. Материал каждой главы рассмотрен на специальных примерах программирования. Акцент делался на аналитическое исследование решения. Численные методы MATLAB не рассматривались. Для получения целостного представления аналитические, приближенные и численные методы решения следует изучать совместно. Важное значение имеют принципы моделирования дифференциальных уравнений, поскольку именно описание объекта в терминах дифференциальных уравнений, а затем их решение часто является целью прикладных исследований.

Автор признателен сотрудникам редакторской группы Тамаре Николаевне Крюковой и Елене Николаевне Батурчик за плодотворное сотрудничество. Автор благодарен Елене Миранович и Александре Михайловской за помощь в компьютерном оформлении материала.

А. В. Борзенков

ГЛАВА 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§1. Основные определения

Под дифференциальным уравнением будем понимать соотношение между неизвестной функцией, ее производными и независимыми переменными.

Уравнения, содержащие производные лишь по одной из независимых переменных, называются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Независимую переменную, производная по которой входит в обыкновенное дифференциальное уравнение, обычно обозначают буквой x или буквой t, поскольку часто роль независимой переменной играет время. Неизвестную функцию принято обозначать $y(x)$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение можно записать в виде соотношения $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$. В данное уравнение, помимо неизвестной функции, ее производных по независимому переменному x и самого независимого переменного x, могут входить также дополнительные переменные $\mu_1, ..., \mu_k$. В этом случае говорят, что неизвестная функция зависит от переменных $\mu_1, ..., \mu_k$ как от параметров.

Порядок старшей производной, входящей в наше уравнение, называется порядком уравнения. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ и связывает три переменные величины − неизвестную функцию $y(x)$, ее производную $y'_x(x)$ и независимую переменную x. Часто данное соотношение удается записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, которое называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Наряду с дифференциальными уравнениями для одной неизвестной функции, рассматриваются также системы дифференциальных уравнений. Система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n), \ i = 1, ..., n, \qquad (1.1)$$

называется нормальной системой**.** Вводя векторные функции $y = (y_1, ..., y_n)^T$, $f = (f_1, ..., f_n)^T$, можем переписать систему (1.1) в виде векторного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (1.2)$$

Частным решением векторного уравнения (1.2) на некотором отрезке $x \in [x_0, x^*]$ называется n раз непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, которая при подстановке в уравнение (1.2) обращает его в тождество. Множество всех частных решений уравнения (1.2) называется **общим решением** этого уравнения. А сам процесс нахождения решений называется **интегрированием** дифференциального уравнения.

Всякое частное решение $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ векторного уравнения (1.2) можно интерпретировать геометрически как кривую в $n+1$-мерном пространстве переменных $x, y_1, ..., y_n$, которая называется **интегральной кривой.** Подпространство переменных $y_1, ..., y_n$ называется **фазовым пространством,** а проекция интегральной кривой на фазовое пространство – **фазовой траекторией**.

Как правило, если дифференциальное уравнение (1.2) разрешимо, то оно обладает бесчисленным множеством решений, зависящих от n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Если множество функций $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$, удовлетворяющих уравнению (1.2), где $C_1, ..., C_n$ – произвольные постоянные, позволяет за счет выбора $C_1, ..., C_n$ получить любую интегральную кривую уравнения (1.2), то $y(x) = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ является общим решением уравнения (1.2). Если общее решение $y(x)$ представлено неявно в виде функционального равенства $F(x, y(x), C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, то оно называется **общим интегралом** дифференциального уравнения.

Интегральная кривая, которая не может быть получена из общего решения либо общего интеграла ни при каких значениях $C_1, C_2, ..., C_n$, называется **особым решением** либо **особым интегралом** соответственно.

Интегрируя (1.2), мы, вообще говоря, найдем бесчисленное множество интегральных кривых, принадлежащих области определения правой части уравнения (1.2). Чтобы выделить отдельную интегральную кривую, являющуюся частным решением (1.2), необходимо задать дополнительные условия. Во многих случаях такими дополнительными условиями являются начальные условия

$$y_i(x_0) = y_i^0, i = 1, ..., n, \tag{1.3}$$

определяющие ту точку $n+1$-мерного пространства переменных $x, y_1, ..., y_n$, через которую проходит данная интегральная кривая.

Задача интегрирования уравнения (1.2) с начальными условиями (1.3) называется **задачей Коши,** или начальной задачей.

Решение задачи Коши с заданным начальным условием $y(x_0) = y_0$ заключается в построении на области D, где задана правая часть уравнения (1.2), интегральной кривой $y = y(x)$, выходящей из начальной точки (x_0, y_0) и в каждой своей точке $(x, y) \in D$ имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = tg\,(\alpha) = f(x, y)$.

Условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши, изучаются в §3. В отдельных точках эти условия могут нарушаться. Точки, через которые не проходит ни одна интегральная кривая или проходит более одной интегральной кривой, называются **особыми точками** данного дифференциального уравнения. Может случиться, что некоторая интегральная кривая уравнения состоит из одних особых точек. Такая кривая называется **особым решением** уравнения. Отметим, что особое решение (особый интеграл) не может быть получено из общего решения (общего интеграла) ни при каких значениях постоянной C, включая $C \to \pm\infty$.

Замечание. Возможны другие способы выделения частного решения. К их числу относятся, например, краевые задачи, в которых частное решение выделяется заданием условий в нескольких различных точках области решения. Они рассмотрены в гл. 7.

§2. Интегрирование в квадратурах дифференциальных уравнений

В теории дифференциальных уравнений под выражением вида $\int f(x)dx$ принято понимать не множество всех первообразных $\int f(x)dx$ функции $f(x)$, а некоторую одну фиксированную первообразную. Само выражение $\int f(x)dx$ называют квадратурой функции $f(x)$, а решить дифференциальное уравнение в квадратурах означает выразить его общее решение (либо общий интеграл) в виде конечного числа квадратур от элементарных функций или их первообразных.

Решение дифференциального уравнения, как правило, не удается выразить в виде квадратур от элементарных функций. Кратко остановимся на наиболее распространенных случаях, когда уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.1}$$

может быть проинтегрировано в квадратурах.

Поскольку во многих геометрических приложениях переменные x и y равноправны, то наряду с уравнением (2.1) часто рассматривают уравнение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x, y)}$, а также уравнение первого порядка $f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy = 0$.

2.1. Уравнение с разделяющимися переменными. Предварительно отметим, что простейшим уравнением, интегрируемым в квадратурах, является уравнение с разделенными переменными. Оно имеет следующий вид: $X(x)dx + Y(y)dy = 0$. Если $y = y(x)$ − произвольное решение этого уравнения, то $X(x)dx + Y(y(x))y'(x)dx = 0$, $Y(y(x))y'(x)dx = -X(x)dx$. Интегрируя по x

левую и правую части тождества, получаем $\int Y(y(x))y'(x)dx = -\int X(x)dx + C$. Отсюда общий интеграл уравнения имеет вид $\int Y(y)dy + \int X(x)dx = C$. Например, для уравнения $x^2dx + y^2dy = 0$ получаем $\int x^2dx + \int y^2dy = C$, откуда $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = C$. Общий интеграл имеет вид $x^3 + y^3 = C$, C – произвольная постоянная.

Уравнением с разделяющимися переменными принято называть уравнение, имеющее следующий вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{2.2}$$

Встречаются другие формы записи: $f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0$ и $y' = f(x)\cdot g(y)$.

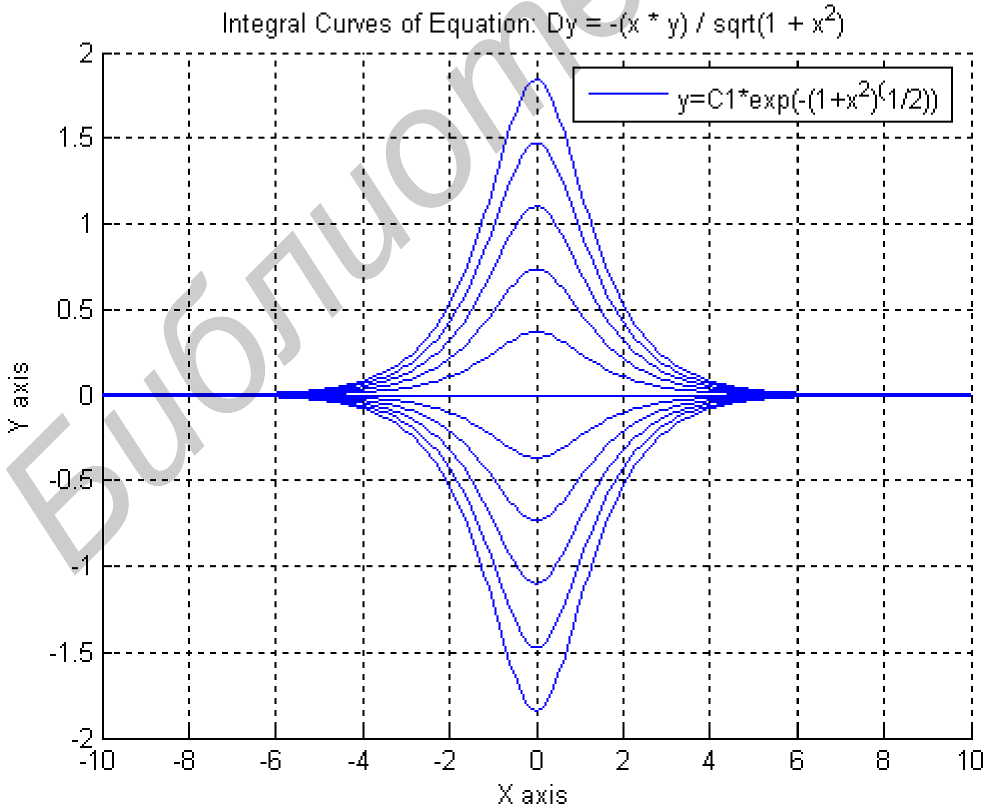
Простейшим уравнением с разделяющимися переменными является следующее: $dy/dx = f(x)$. Общий интеграл уравнения имеет вид $y - \int f(x)dx = C$. Частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, будет иметь вид $y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0$. В случае, если уравнение рассматривается с постоянной правой частью $dy/dx = a$, то частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, имеет вид $y = a(x - x_0) + y_0$. Это алгебраическое уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0) на R^2.

Рассмотрим уравнение (2.2). Сведем это уравнение к уравнению с разделенными переменными. Разделим левую часть (2.2) на $N_1(y)\cdot M_2(x)$. Получим $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$. Поэтому $\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$ – общий интеграл дифференциального уравнения. Если уравнение $N_1(y) = 0$ имеет корень y_0, то функция $y = y_0$ является решением дифференциального уравнения. К общему решению добавляем $y = y_0$. Если уравнение $M_2(x) = 0$ имеет корень x_0, то функция $x = x_0$ является решением дифференциального уравнения. К общему решению добавляем $x = x_0$. Они и только они могут оказаться особыми решениями дифференциального уравнения (2.2).

Пример. Решим уравнение $xy\,dx + \sqrt{1+x^2}\,dy = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$. При этом может быть потеряно решение $y = 0$. Получаем $\int\frac{dy}{y}dy = -\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \widetilde{C}$, $\ln|y| = -\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} + \widetilde{C}$. Общий интеграл имеет вид

$\ln\left|\tilde{\tilde{C}}\,y\right| - \sqrt{1+x^2} = 0$. Общее решение имеет вид $y(x) = C \cdot e^{-\sqrt{1+x^2}}$. Решение $y = 0$ получается из общего решения при $C = 0$ и поэтому особым не является.

```
clf;
syms x y Ur Title % инициализация символьных переменных
syms x_new y_new Expr Message
Ur = '-(x * y) / sqrt(1 + x^2)'; % задан. прав. части уравнен.
Expr = ['Dy = ', char(Ur)]; % формирование дифффер. уравнения
y = dsolve(Expr, 'x'); % решение дифференциального уравнения
fprintf('y = ');
Message = ['y=', char(y)];
pretty(simplify(y)); % печать решения уравнения
grid on; hold on;  % включаем координатную сетку
xlabel('X axis'); % подписываем ось OX
ylabel('Y axis'); % подписываем ось OY
x_new = -10:0.1:10; % формируем сетку значений аргументов
y = subs(y, 'x', x_new); % подставляем аргументы
for cycle = -5 : 1 : 5 % варьируем значения произв. константы
val = cycle;
y_new = subs(y, 'C1', val); % подставляем  константу
plot(x_new, y_new); % прорисовка интегральной кривой
end;
Title = ['Integral Curves of Equation: ', char(Expr)];
title(char(Title)); % титульная надпись графика
legend(char(Message)); % легенда графика
```



Задачи для решения

1. $y' = e^{x+y}$**. 2.** $y' + \dfrac{x\sin x}{y\cos y} = 0$**. 3.** $yy' + x = 0$**. 4.** $dy - 2\sqrt{y}\ln x dx = 0$**.**

5. $y' = \sin(y - x - 1)$**. 6.** $y' = \dfrac{1}{2x + y}$**. 7.** $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$**. 8.** $y' = (4x + y + 1)^2$**.**

9. $y' + 2y = 3x + 5$**. 10.** $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$**.**

2.2. Однородные уравнения. Рассмотрим уравнение вида

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{2.3}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции переменных x, y одной степени. Напомним, что функция $f(x,y)$ называется однородной функцией переменных x, y степени k, если имеет место соотношение $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$. Заметим, что $f(y/x)$ является однородной функцией нулевой степени. Переписав уравнение (2.3) в виде $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, мы видим, что при сделанных предположениях относительно функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$ правая часть уравнения является однородной функцией нулевой степени. Таким образом, получено уравнение $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$. Сделаем замену искомой переменной, положив $z = y/x$. При этом $y = xz$; $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dz}{dx} + z$ и наше уравнение переходит в уравнение $x\dfrac{dz}{dx} + z = f(z)$, которое может быть записано в виде уравнения с разделенными переменными: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{f(z) - z}$.

Пример. Уравнение $y' = y/x + x/y$ – однородное уравнение. Делаем замену $z = \dfrac{y}{x}$; $y = z \cdot x$; $y' = z'x + z$. Подставляем и получаем $z'x + z = z + 1/z$, $z'x = 1/z$, откуда $x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{z}$ либо $zdz = \dfrac{d\,x}{x}$. Таким образом, $\int zdz = \int\dfrac{dx}{x} + C$, $\dfrac{z^2}{2} = \ln|Cx|$. Общий интеграл уравнения $y' = y/x + x/y$ имеет вид $(y/x)^2 - 2 \cdot \ln|Cx| = 0$. Проверим это. Положив $F(x,y) = (y/x)^2 - 2 \cdot \ln|Cx|$, подсчитаем $y' = -F_x' \big/ F_y'$. Поскольку $F_x' = -2y^2 \cdot \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x}$; $F_y' = -2y/x^3$, получаем $y' = y/x + x/y$.

Задачи для решения

1. $y'=(x-y)/(x+y)$. **2.** $(x-y)\,dx+x\,dy=0$. **3.** $x(y'+e^{y/x})=y$.

4. $3x^4y^2dy=\left(4x^6-y^6\right)dx$. **5.** $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$. **6.** $y'-tg\dfrac{y-2x}{x+1}=\dfrac{y+2}{x+1}$.

7. $xy'=y+xtg\dfrac{y}{x}$. **8.** $xdy-y\cos\ln\dfrac{y}{x}dx=0$. **9.** $(x+y-1)^2dy=2(y+2)^2dx$.

10. $\left(x^2+y^2\right)dy-2xydx=0$.

2.3. Линейное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее производных. Линейное уравнение первого порядка имеет следующий вид:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=f(x). \tag{2.4}$$

При $f(x)\equiv 0$, уравнение (2.4) называется линейным однородным уравнением:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=0. \tag{2.5}$$

Линейное однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными $dy\big/y+p(x)dx=0$, общий интеграл которого имеет вид $\ln\left|y\right|+\int p(x)dx=C$, а общее решение имеет следующий вид:

$$y(x)=C\,e^{-\int p(x)dx}, \tag{2.6}$$

где $C\neq 0$. Очевидно, что частное решение $y(x)=0$ линейного однородного уравнения, которое потеряно в процессе разделения переменных (деления на $y(x)$), содержится в формуле (2.6) при $C=0$. Поэтому (2.6), где C – теперь любое вещественное число, является общим решением уравнения (2.5).

Из (2.6) получаем частное решение однородного линейного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, в виде

$$y=y_0\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(x)dx}. \tag{2.7}$$

Решение линейного неоднородного уравнения (2.4) найдем методом Лагранжа вариации произвольной постоянной. В формуле (2.6), варьируя C, полагаем $C=C(x)$. Функция $C(x)$ подлежит определению из соотношения

$$y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.8}$$

Подставляя такой вид решения в уравнение, получаем

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x),$$

откуда следует тождество $\dfrac{dC}{dx} = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$, проинтегрировав которое, найдем $C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + \widetilde{C}$. Окончательно получаем

$$y(x) = \widetilde{C}\, e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx\,. \qquad (2.9)$$

Из выражения (2.9) следует, что общее решение линейного неоднородного уравнения (2.4) представляется в виде суммы общего решения (2.6) линейного однородного уравнения (2.5) и частного решения неоднородного уравнения (2.4). В этом легко убедиться, подставив второе слагаемое формулы (2.9) в неоднородное уравнение (2.4).

Решение начальной задачи при $y(x_0) = y_0$ для уравнения (2.4) найдем, определяя из начального условия постоянную $\widetilde{C}$ в формуле (2.9). Оно также может быть записано в виде

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\xi}^{x} p(\eta)d\eta} f(\xi)\, d\xi\,, \qquad (2.10)$$

представляющем искомое решение как сумму решения однородного уравнения (2.5), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, и решения неоднородного уравнения, удовлетворяющего нулевому начальному условию. Справедливость (2.10) устанавливается непосредственной проверкой.

Замечание. Если в уравнении (2.4) функции $p(x)$ и $f(x)$ на промежутке изменения независимой переменной x удовлетворяют следующим условиям: $|p(x)| \le K$, $|f(x)| \le M$, то для решения задачи Коши, представимого формулой (2.10), имеет место оценка $|y(x)| \le |y_0|\, e^{K(x-x_0)} + \dfrac{M}{K}(e^{K(x-x_0)} - 1)$.

Пример. Решим задачу Коши: $y' = \dfrac{y}{x + 2y^3}$, $y(8) = 2$. Данное дифференциальное уравнение не является линейным относительно неизвестной функции $y(x)$. Однако, если предположить, что неизвестной является функция $x(y)$, то уравнение станет линейным. Действительно: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x + 2y^3}{y}$ или $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{y} + 2y^2$. Общим решением соответствующего линейного однородного уравнения является $x = Cy$. В соответствии с методом вариации постоянной будем искать решение неоднородного уравнения в виде $x = C(y)\cdot y$. Подставляя выражение для x в $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{y} + 2y^2$, после приведения подобных получаем $C'y = 2y^2$. Отсюда находим $C(y) = y^2 + C_1$, $(C_1 = const)$. Таким образом, общим решением уравнения $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+2y^2$ является функция $x=y^3+C_1y$. Теперь найдем решение исходной задачи Коши. Полагая в $x=y^3+C_1y$, $x=8$, $y=2$, получаем, что $C_1=0$. Следовательно, $x=y^3$, а значит, $y=\sqrt[3]{x}$.

Задачи для решения

1. $y'=\frac{3y}{x}+x$. **2.** $y'+\frac{y}{x}=2\ln x+1$. **3.** $xy'=e^x+xy$. **4.** $y-y'=y^2+xy'$.

5. $(x+2y^3)y'=y$. **6.** $y'+2y=e^{3x}$. **7.** $y'+2xy=xe^{-x^2}$. **8.** $y'=\frac{y}{x+y^3}$.

9. $xy'+x^2+xy=y$. **10.** $(1+y^2)dx=(arctg\, y-x)dy$.

2.4. Кратко об уравнениях Бернулли и Риккати. Следующие уравнения, которые часто встречаются в приложениях, соответствующими подстановками могут быть сведены к линейному уравнению.

Рассмотрим **уравнение Бернулли** $y'(x)+p(x)y=f(x)y^n$, где $n\neq 1$, иначе уравнение является линейным. Введем новую неизвестную функцию $z=y^{1-n}$. Тогда уравнение перейдет в линейное уравнение $z'(x)+(1-n)p(x)z(x)=(1-n)f(x)$, которое было исследовано ранее.

Пример. Решим уравнение: $y'-y=\frac{e^{6x}}{y^2}$. Это уравнение Бернулли $(n=-2)$. Выполнив замену $z=y^3$, получим $z'=3y^2y'$. Умножая обе части исходного уравнения на $3y^2(\neq 0)$, с учетом выражений для z и z', получаем $z'-3z=3e^{6x}$. Соответствующее линейное однородное уравнение $z'-3z=0$ имеет решение $z=Ce^{3x}$. Применяя метод вариации произвольной постоянной, получаем $C'(x)e^{3x}+3C(x)e^{3x}-3C(x)e^{3x}=3e^{6x}$. Поэтому $C'(x)=3e^{3x}$, $C(x)=e^{3x}+C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Таким образом, $z=e^{6x}+C_1e^{3x}$. Общее решение нашего уравнения имеет вид $y=\sqrt[3]{e^{6x}+Ce^{3x}}$.

Задачи для решения

1. $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$. **2.** $y'=y(y^3\cos x+tgx)$. **3.** $y'=yctgx+\frac{y^3}{\sin x}$.

4. $dy=(y^2e^x-y)dx$. **5.** $xy'+y=2x^2y\ln y\cdot y'$. **6.** $y'x^3\sin y+2y=xy'$.

Более сложное **уравнение Риккати** $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ в общем случае в квадратурах не интегрируется. Однако если известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения, то можно найти и его общее решение. Делая замену $y(x)=y_1(x)+z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция, приходим к уравнению $z'-(2a(x)y_1+b(x))z=a(x)z^2$. Это уравнение Бернулли при $n=2$.

Пример. Решить уравнение $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 1$. Нетрудно убедиться в том, что решением является $y_1(x) = x$. Тогда в результате замены $y(x) = x + z(x)$ получаем уравнение $z' = z^2$. Это уравнение имеет решение $z = 0$. Если же $z \neq 0$, то, разделяя переменные, находим: $z = 1/(x + C)$. Возвращаясь к переменной y, находим решение исходного уравнения: $y = x - 1/(x + C)$, $y = x$.

2.5. Уравнения в полных дифференциалах. Рассмотрим уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{2.11}$$

Будем считать, что существует такая функция $U(x,y)$, что справедливо соотношение $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тогда уравнение (2.11) называется уравнением в полных дифференциалах. Например, для уравнения $xdx + ydy = 0$ можно записать $U = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$, $dU = xdx + ydy$. Это уравнение в полных дифференциалах. Общий интеграл уравнения $U(x,y) = C$, т.е. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = C$.

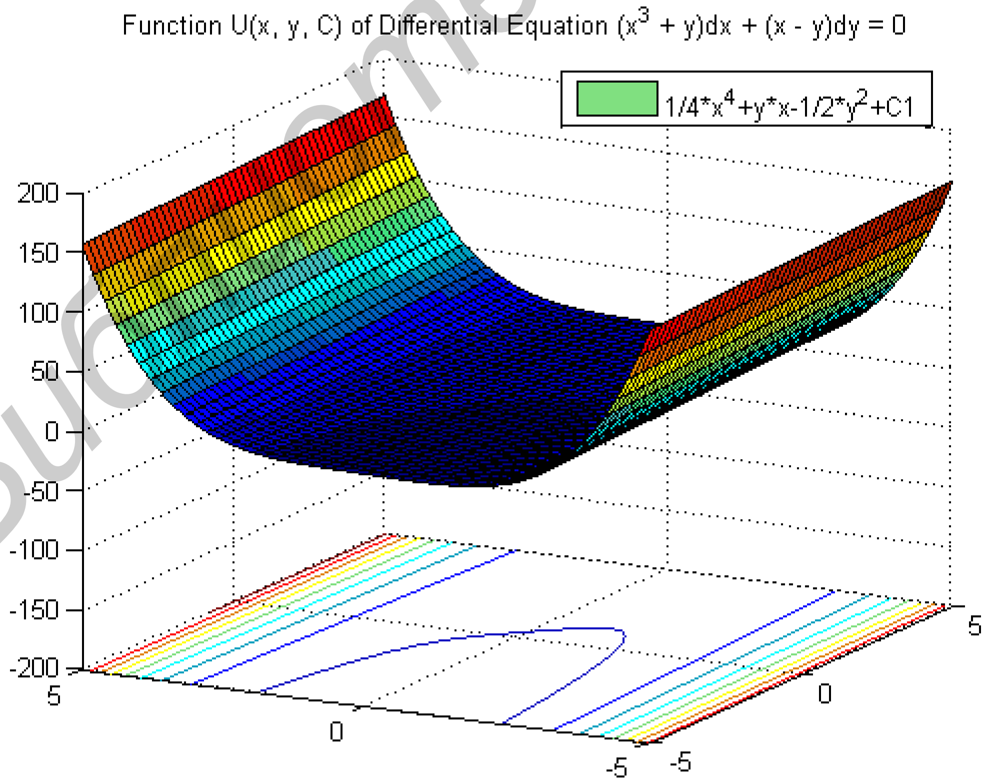
Замечание. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывно дифференцируемы в односвязной области из R^2, то уравнение (2.14) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \tag{2.12}$$

Обоснуем необходимость утверждения. Пусть уравнение (2.11) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует такая функция $U(x,y)$, что $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, $dU = \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy$. Отсюда следует $P(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial y}$. Дифференцируем: $\dfrac{\partial U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$; $\dfrac{\partial U}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В силу непрерывности производных $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ окончательно получаем $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Пример. Решим уравнение $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$. Поскольку $P(x,y) = x^3 + y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $Q(x,y) = x - y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, получаем $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Поскольку $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, то справедливо $U(x,y) = \int P(x,y)dx + \psi(y)$, $U(x,y) = x^4/4 + xy + \psi(y)$. При этом $\dfrac{\partial U}{\partial y} = x + \psi'(y) = Q(x,y) = x - y$. Отсюда $\psi'(y) = -y$, $\psi(y) = -y^2/2$. Получаем $U(x,y) = x^4/4 + xy - y^2/2$. Общий интеграл уравнения $x^4/4 + xy - y^2/2 = C$.

```
% Решение ДУ в полных дифференциалах
1.  syms x y P Q Dif_P_y Dif_Q_x U Dif_Q Dif_fi_y Expr fi Answer;
% Задание уравнения P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0
2.  P = 'x^3 + y'; Q = 'x - y';
3.  U=int(P, x);% Находим решение уравнения: U(x,y)=int(P(x,y),x)+fi(y)
% пока без произвольной постоянной c = fi(y)
% Найдём dif(fi(y),y) из выражения:
% dif(fi(y),y)=Q(x,y)-dif(int(P(x,y),x),y), где Q(x,y)=dU(x,y)/dy
4.  Dif_Q = diff(U,y); % Q(x,y) = dU(x,y)/dy
5.  Dif_fi_y = Q - Dif_Q; % dif(fi(y),y)
% Формируем условие для нахожденя fi(y)
6.  Dif_fi_y = subs(Dif_fi_y, 'y','t')
7.  Expr = ['Dy = ', char(Dif_fi_y)];
8.  fi = subs(dsolve(Expr), 't', 'y');
9.  Answer=sym(U)+sym(fi);fprintf('U(x,y) = '); % Формируем ответ U(x,y)
10. disp(Answer); grid on; hold on;
11. [x,y] = meshgrid(-5:.2:5,-5:.2:5); % сетка значений аргументов
12. for C1 = 1 : 1 % Варьируем произвольную константу C1
13. Value = C1;
14. z = inline(Answer); % Получаем частный интеграл
% Выводим на график поверхность, определяемую частн. интегралом
15. surfc(x, y, z(x, y, Value));
16. end;
% Формируем заглавие и легенду
17. Title = ['Function U(x, y, C) of Differential Equation ' ...
    '(', char(P), ')dx + (', char(Q), ')dy = 0'];
18. title(char(Title)); Legend = [char(Answer)]; legend(Legend);
```



Задачи для решения

1. $\left(3x^2+6xy-2y^2\right)dx+\left(3x^2-4xy-3y^2\right)dy=0$. **2.** $(y+\dfrac{2}{x^2})dx+(x-\dfrac{3}{y^2})dy=0$.

3. $(2x-ye^{-x})dx+e^{-x}dy=0$. **4.** $2x\cos^2 ydx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0$.

5. $\left(10xy-8y+1\right)dx+\left(5x^2-8x+3\right)dy=0$.

§3. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Докажем существование и единственность решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right),\ y(x_0)=y_0 \tag{3.1}$$

при достаточно общих условиях на функцию $f(x,y)$. Доказательство будет проведено конструктивным путем. Вместе с доказательством будет построен алгоритм, который получает функцию $\bar{y}(x)$, как угодно точно аппроксимируя решение исходной задачи. Идея метода принадлежит выдающемуся немецкому математику Леонарду Эйлеру. Интегральная кривая, являющаяся решением задачи Коши (3.1), последовательными шагами приближенно заменяется **ломаной Эйлера.**

Будем рассматривать (3.1) в замкнутом прямоугольнике $D=\left\{\left|x-x_0\right|\le a,\left|y-y_0\right|\le b\right\}$ плоскости (x,y) с центром в начальной точке (x_0,y_0). Поставим своей целью определение интегральной кривой $y(x)$, выходящей из данной начальной точки (x_0,y_0) и идущей в сторону возрастающих $x>x_0$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма (лемма Чаплыгина). Если в области D плоскости (x,y) однозначно разрешимы начальные задачи для дифференциальных уравнений $\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y)$, $\dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y)$, правые части и начальные условия которых удовлетворяют неравенствам $f_1(x,y)\le f_2(x,y)$, $y_1(x_0)\le y_2(x_0)$, то и решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующих задач Коши всюду в области D удовлетворяют условию $y_1(x)\le y_2(x)$.

Предположим, что в D функция $f(x,y)$ непрерывна вместе с частной производной $\dfrac{df}{dx}(x,y)$. Отсюда следует их ограниченность: $\left|f(x,y)\right|\le M$, $\left|\dfrac{df}{dx}(x,y)\right|\le K$, $\left(x,y\right)\in D$. Существование непрерывной частной производной функции $f(x,y)$ потребуется при доказательстве сходимости ломаных Эйлера к решению задачи (3.1). Это требование может быть, вообще говоря, ослаблено.

Искомая интегральная кривая (если она существует) пересечет либо вертикальную $x = x_0 + a$, либо горизонтальную $y = y_0 + b$ ($y = y_0 - b$) границу области D (рис. 1, 2).

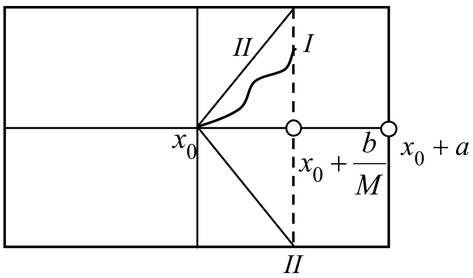


Рис. 1. $b/M \le a$

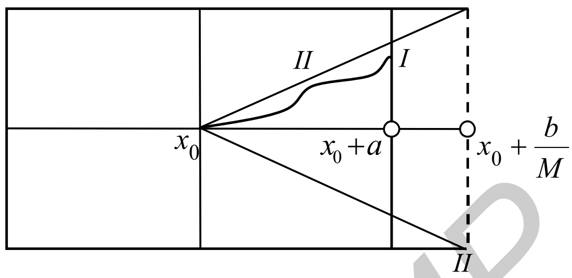


Рис. 2. $b/M \ge a$

I – интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0);

II – прямые с тангенсом угла наклона, равным $\pm M$.

В последнем случае абсцисса точки пересечения меньше $x_0 + a$ и искомая интегральная кривая определена не на всем отрезке $x_0 \le x \le x_0 + a$. Однако из простых геометрических соображений (см. рис. 1, 2) и леммы Чаплыгина ясно, что до точки $x_0 + b/M$ она не пересечет горизонтальной границы. Поэтому в дальнейшем вместо области D будем рассматривать прямоугольник $\Delta = \{|x - x_0| \le H, |y - y_0| \le b\}$, где $H = \min\{a, b/M\}$.

Перейдем к построению ломаных Эйлера. Разобьем отрезок $[x_0, X]$, $X = x_0 + H$ на n частей точками деления $x_0 = {}^{(n)}x_0, {}^{(n)}x_1, \ldots, {}^{(n)}x_n = X$. Обозначим ${}^{(n)}x_i - {}^{(n)}x_{i-1} = {}^{(n)}h_i$ и ${}^{(n)}h = \max\{{}^{(n)}h_i\}$. На первом шаге зафиксируем $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0), т.е. заменим правую часть (3.1) значением $f(x_0, y_0)$. Тогда получим уравнение с постоянной правой частью $\frac{d\,{}^{(n)}\overline{y}}{dx} = f(x_0, y_0)$, интегральной кривой которого служит отрезок прямой:

$$ {}^{(n)}\overline{y}(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0),\ x \in [x_0, {}^{(n)}x_1]. \tag{3.2}$$

В точке ${}^{(n)}x_1$ это решение принимает значение

$$ {}^{(n)}y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)({}^{(n)}x_1 - x_0). $$

На втором шаге примем за новую начальную точку $({}^{(n)}x_1, {}^{(n)}y_1)$ и, опять зафиксировав $f(x,y)$ в этой точке, построим следующее прямолинейное звено и т.д. В силу леммы Чаплыгина ясно, что полученная таким путем ломаная на отрезке $[x_0, X]$ не выйдет из прямоугольника Δ. Полученная ломаная и называется ломаной Эйлера. Примем ее за приближенную интегральную кривую.

Для обоснования описанного алгоритма и доказательства теоремы существования решения исходной задачи достаточно доказать, что последовательность ломаных Эйлера $\left\{{}^{(n)}\overline{y}(x)\right\}$ при ${}^{(n)}h \to 0$ сходится и предельная функция является решением исходной задачи (3.1).

Определение. Непрерывная на отрезке $[x_0, X]$ функция $\overline{y}(x)$ с кусочно-непрерывной производной $\dfrac{d\overline{y}}{dx}$, график которой целиком лежит в Δ, называется ε-приближенным по невязке решением начальной задачи (3.1), если $\left|\overline{y}(x_0) - y_0\right| \le \varepsilon$ и при подстановке функции $\overline{y}(x)$ в уравнение (3.1) последнее принимает вид

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = f(x,\overline{y}) + \psi(x), \tag{3.3}$$

где невязка $\psi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{x\in[x_0,X]} \left|\psi(x)\right| \le \varepsilon. \tag{3.4}$$

Очевидно, что точное решение задачи Коши (если оно существует) можно считать ε-приближенным по невязке решением при $\varepsilon = 0$.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-приближенные по невязке решения начальной задачи (3.1). Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\varepsilon_1 > 0$, что все ε_1-приближенные по невязке решения задачи (3.1) отличаются между собой на отрезке $[x_0, X]$ не больше, чем на ε.

Доказательство. Возьмем два произвольных ε_1-приближенных по невязке решения задачи (3.1) ${}^{(1)}\overline{y}(x)$ и ${}^{(2)}\overline{y}(x)$. Очевидно, что

$$\frac{d\,{}^{(1)}\overline{y}}{dx} = f\left(x, {}^{(1)}\overline{y}(x)\right) + \psi_1(x), \quad \frac{d\,{}^{(2)}\overline{y}}{dx} = f\left(x, {}^{(2)}\overline{y}(x)\right) + \psi_2(x), \tag{3.5}$$

где

$$\left|{}^{(1)}\overline{y}(x_0) - {}^{(2)}\overline{y}(x_0)\right| \le 2\varepsilon_1, \quad \sup_{x\in[x_0,X]}\left|\psi_1(x) - \psi_2(x)\right| \le 2\varepsilon_1. \tag{3.6}$$

Введем следующие обозначения:

$${}^{(2)}\overline{y}(x) - {}^{(1)}\overline{y}(x) = z(x), \; \psi_2(x) - \psi_1(x) = \varphi(x).$$

Вычитая первое уравнение из второго в (3.5), получим

$$\frac{dz}{dx} = f\left(x, {}^{(2)}\overline{y}(x)\right) - f\left(x, {}^{(1)}\overline{y}(x)\right) + \varphi(x). \tag{3.7}$$

Преобразуем разность первых двух слагаемых в правой части по формуле, называемой тождеством Адамара:

$$f\left(x, {}^{(2)}\overline{y}(x)\right) - f\left(x, {}^{(1)}\overline{y}(x)\right) = \left({}^{(2)}\overline{y}(x) - {}^{(1)}\overline{y}(x)\right)p(x),$$

где

$$p(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, {}^{(1)}\overline{y}(x) + \theta\left({}^{(2)}\overline{y}(x) - {}^{(1)}\overline{y}(x)\right)\right) d\theta . \qquad (3.8)$$

Эта формула легко проверяется непосредственно. Из (3.8) очевидно, что функция $p(x)$ непрерывна по x на $[x_0, X]$. Таким образом, для функции $z(x)$ получается линейное дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dz}{dx} = p(x)z(x) + \varphi(x)$, в котором функции $p(x)$ и $\varphi(x)$ являются кусочно-непрерывными и равномерно ограниченными на отрезке $[x_0, X]$. При этом $|z(x_0)| \le 2\varepsilon_1$, $|\varphi(x)| \le 2\varepsilon_1$. Тогда в силу полученной оценки решения задачи Коши для линейного уравнения имеем

$$\left|{}^{(2)}\overline{y}(x) - {}^{(1)}\overline{y}(x)\right| = |z(x)| \le 2\varepsilon_1 e^{K(x-x_0)} + \frac{2\varepsilon_1}{K}\left(e^{K(x-x_0)} - 1\right). \qquad (3.9)$$

Отсюда

$$\sup_{x\in[x_0, X]} \left|{}^{(2)}\overline{y}(x) - {}^{(1)}\overline{y}(x)\right| \le 2\varepsilon_1\left[e^{K(X-x_0)} + \frac{1}{K}\left(e^{K(X-x_0)} - 1\right)\right] = 2\varepsilon_1\Omega, \qquad (3.10)$$

где $\Omega > 0$ – независящая от ε_1 постоянная. Выбирая $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2\Omega}$, получаем утверждение леммы.

Определение. Пусть $\left\{{}^{(n)}\overline{y}(x)\right\}$ $(n = 1,2,...)$ – некоторая последовательность ε_n-приближенных по невязке решений такая, что $\sup\limits_{x\in[x_0, X]} |\psi_n(x)| \le \varepsilon_n$, $\left|{}^{(n)}\overline{y}(x_0) - y_0\right| \le \varepsilon_n$, $\varepsilon_n > 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, то последовательность ${}^{(n)}\overline{y}(x)$ назовем **сходящейся по невязке**.

Для дальнейшего нам потребуется утверждение об эквивалентности начальной задачи (3.1) некоторому интегральному уравнению.

Лемма 2. Задача Коши (3.1) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi, \quad x \in [x_0, X]. \qquad (3.11)$$

Доказательство. Пусть существует решение начальной задачи (3.1) – функция $y(x)$. Подставив $y(x)$ в уравнение (3.1), получим тождество. Интегрируя это тождество от x_0 до $x \in [\,0, a\,]$ и используя начальное условие, получим (3.11). Следовательно, решение начальной задачи (3.1) удовлетворяет и интегральному уравнению (3.11). С другой стороны, если существует непрерывное решение интегрального уравнения (3.11) – функция $y(x)$, то в силу непрерывности по ξ функции $f(\xi, y(\xi))$ интеграл в правой части (3.11) является непрерывно дифференцируемой функцией переменной x (по условию функции f – непрерывная функция своих аргументов и $y(\xi)$ – непрерывная функция переменной ξ). Следовательно, и левая часть (3.11) – функция $y(x)$ – имеет непрерывную производную, которая, очевидно, удовлетворяет уравнению (3.1). Выполнение начального условия (3.1) проверяется непосредственно.

Лемма 3. Если существует сходящаяся по невязке на отрезке $[x_0, X]$ последовательность ε_n-приближенных по невязке решений $\left\{{}^{(n)}\overline{y}(x)\right\}$ начальной задачи (3.1), то эта последовательность равномерно сходится к функции $y(x)$, являющейся решением данной задачи.

Доказательство. В силу леммы 2 последовательность $\left\{{}^{(n)}\overline{y}(x)\right\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости на отрезке $[x_0, X]$. Тем самым существует функция $y(x)$, к которой последовательность $\left\{{}^{(n)}\overline{y}(x)\right\}$ сходится равномерно, и эта функция будет непрерывной, поскольку ${}^{(n)}\overline{y}(x)$ непрерывны.

Подставим ε_n-приближенное решение ${}^{(n)}\overline{y}(x)$ в уравнение (3.1) и заменим получающееся при этом тождество эквивалентным интегральным соотношением

$$ {}^{(n)}\overline{y}(x) \equiv {}^{(n)}\overline{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left[f\left(\xi, {}^{(n)}\overline{y}(\xi)\right) + \psi_n(\xi) \right] d\xi . \tag{3.12} $$

Так как $|\psi_n| \le \varepsilon_n$ и $\left| {}^{(n)}\overline{y}(x_0) - y_0 \right| \le \varepsilon_n$, то, переходя в (3.12) к пределу при $\varepsilon_n \to 0$, получим

$$ y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi . \tag{3.13} $$

Из последнего тождества следует, что предельная функция $y(x)$ дифференцируема. Дифференцируя, получаем

$$ \frac{dy}{dx} = f(x, y) . \tag{3.14} $$

Кроме того, $y(x_0) = y_0$. Таким образом, предельная функция последовательности $\left\{{}^{(n)}\overline{y}(x)\right\}$ является точным решением задачи Коши (3.1).

Для доказательства теоремы существования решения начальной задачи (3.1) остается показать, что существует сходящаяся по невязке последовательность ε_n-приближенных по невязке решений этой задачи. Покажем, что ломаные Эйлера образуют такую последовательность.

Лемма 4. При ${}^{(n)}h \to 0$ невязки ломаных Эйлера, построенных для задачи (3.1), равномерно на отрезке $[x_0, X]$ сходятся к нулю.

Доказательство. Так как начальные значения ломаных Эйлера ${}^{(n)}\bar{y}(x)$ по построению совпадают с y_0, то достаточно убедиться в том, что при ${}^{(n)}h \to 0$ невязки $\psi_n(x)$ равномерно на $[x_0, X]$ стремятся к нулю. Возьмем произвольное x. Очевидно,

$$ {}^{(n)}x_{s-1} \le x \le {}^{(n)}x_s, \qquad {}^{(n)}x_s - {}^{(n)}x_{s-1} = {}^{(n)}h_{s-1}, \qquad 1 \le s \le n. $$

На этом шаге звено соответствующей ломаной определяется как

$$ {}^{(n)}\bar{y}(x) = {}^{(n)}\bar{y}\left({}^{(n)}x_{s-1}\right) + f\left({}^{(n)}x_{s-1}, {}^{(n)}\bar{y}\left({}^{(n)}x_{s-1}\right)\right)\left(x - {}^{(n)}x_{s-1}\right), x \in [{}^{(n)}x_{s-1}, {}^{(n)}x_s]. \quad (3.15) $$

Подставляя ${}^{(n)}\bar{y}(x)$ в (3.1), найдем соответствующую невязку в точке x:

$$ \psi_n(x) = \frac{d\,{}^{(n)}\bar{y}}{dx} - f(x, {}^{(n)}\bar{y}(x)) = f({}^{(n)}x_{s-1}, {}^{(n)}\bar{y}_{s-1}) - $$
$$ - f(x, {}^{(n)}\bar{y}({}^{(n)}x_{s-1}) + f({}^{(n)}x_{s-1}, {}^{(n)}\bar{y}_{s-1}))(x - {}^{(n)}x_{s-1})). \quad (3.16) $$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ отсюда следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0(\varepsilon)$, что при ${}^{(n)}h < h_0(\varepsilon)$ выполняется $\sup\limits_{x \in [x_0, X]} \left|\psi_n(x)\right| \le \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Заметим, что при доказательстве леммы была использована равномерная непрерывность функции $f(x, y)$ и не потребовались равномерная непрерывность и ограниченность производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Из доказанных лемм следуют следующие теоремы.

Теорема 1 (существования решения задачи Коши). Если функции $f(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ являются непрерывными на $D = \left\{ \left| x - x_0 \right| \le a, \left| y - y_0 \right| \le b \right\}$, т.е.

$$ f(x, y) \in C(D), \quad \frac{df}{dy}(x, y) \in C(D), \; (x, y) \in D, \quad (3.17) $$

то на $\left[x_0, X \right]$ существует решение задачи Коши (3.1), к которому на $\left[x_0, X \right]$ последовательность $\left\{ {}^{(n)}\bar{y}(x) \right\}$ ломаных Эйлера сходится равномерно при ${}^{(n)}h \to 0$.

Теорема 2 (единственности решения задачи Коши). При выполнении требований (3.17) относительно функций $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $(x, y) \in D$ задача Коши (3.1) имеет на $\left[x_0, X \right]$ единственное решение.

Эту теорему можно рассматривать как следствие леммы 1. Если допустить, что имеются два точных решения задачи Коши, то их начальные значения совпадают, а их невязки равны нулю. Поэтому по лемме 1 эти решения полностью совпадают на отрезке $\left[x_0, X \right]$.

Кроме введенного выше понятия ε-приближенного по невязке решения часто используется понятие решения, приближенного по отклонению.

Определение. Ограниченная на $[x_0, X]$ функция $\widetilde{y}(x)$ называется ε-**приближенным по отклонению** решением задачи Коши (3.1), если точное решение $y(x)$ задачи Коши существует и

$$\sup_{x\in[x_0,X]} \left| \, \widetilde{y}(x) - y(x) \, \right| \le \varepsilon , \quad \varepsilon > 0 . \tag{3.18}$$

Из предыдущих выкладок непосредственно следует

Теорема 3. Если при выполнении условий (3.17) некоторая последовательность приближенных по невязке решений сходится к точному решению, то она сходится к нему и по отклонению.

Обратное утверждение неверно. Если отклонения приближенных решений от точного стремятся к нулю, то сами решения могут при этом иметь сколь угодно большие невязки. Более того, решения, приближенные по отклонению, могут быть не дифференцируемы и даже не непрерывны.

Замечание. Доказаны существование и единственность решения $y(x)$ задачи Коши на отрезке $[x_0, X]$. Если при этом интегральная кривая не вышла из области D, где функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям (3.17), то, взяв точку $x = X$, $y = Y(x)$ за начальную, повторяем рассуждения. И продолжим решение $y(x)$ на новом отрезке $[X, X_1]$, определяющем прямоугольник $\widetilde{D} \subset D$. Процесс построения можно продолжать до тех пор, пока интегральная кривая не достигнет границы области D. По аналогии интегральная кривая $y(x)$ может быть построена в сторону убывающих $x < x_0$.

Требования непрерывной дифференцируемости на $f(x, y)$ можно ослабить. Для существования и единственности решения в некоторой окрестности начальной точки достаточно потребовать, чтобы в этой области функция $f(x, y)$ была непрерывна и удовлетворяла **условию Липшица** по переменной y: $\left| \, f(x, y_1) - f(x, y_2) \, \right| \le L \left| \, y_1 - y_2 \, \right|$, где L является некоторой постоянной, не зависящей ни от x, ни от y (константа Липшица).

Переформулируем теорему существования и единственности решения для следующей задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) , \quad y(x_0) = y_0 , \; x, y \in R, \; f : R \to R . \tag{3.19}$$

Теорема 4 (**существования и единственности**). Пусть в некотором прямоугольнике $D = \left\{ \left| \, x - x_0 \, \right| \le a, \left| \, y - y_0 \, \right| \le b \right\}$ функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных x, y и удовлетворяет условию Липшица:

$$\left| f(x,\bar{y}) - f(x,\bar{\bar{y}}) \right| \le L \left| \bar{y} - \bar{\bar{y}} \right|, \tag{3.20}$$

где $(x,\bar{y}), (x,\bar{\bar{y}})$ – любые две точки из D, L – постоянная, не зависящая от выбора этих точек (константа Липшица). Тогда на отрезке $\left| x - x_0 \right| \le H$, где $H = \min(a, b/M)$, $M = \sup\limits_D \left| f(x,y) \right|$, существует единственное решение задачи Коши (3.19).

Можно доказать существование решения начальной задачи и при одном требовании непрерывности функции $f(x,y)$.

Теорема 5 (**Пеано**). Пусть в прямоугольнике $D = \left\{ \left| x - x_0 \right| \le a, \left| y - y_0 \right| \le b \right\}$ функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности своих переменных x, y. Тогда на отрезке $\left| x - x_0 \right| \le H$, где $H = \min(a, b/M)$, $M = \sup\limits_D \left| f(x,y) \right|$, существует по крайней мере одно решение задачи Коши (3.19).

Одной непрерывности функции $f(x,y)$ недостаточно для доказательства единственности решения начальной задачи. Например, задача Коши $dy/dx = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$, помимо тривиального решения $y \equiv 0$, имеет еще решение $y = x^2/4$, удовлетворяющее нулевому начальному условию. Нетрудно видеть, что правая часть рассмотренного уравнения в окрестности точки (0, 0) имеет неограниченную производную и не удовлетворяет условию Липшица.

Если через точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая, являющаяся решением задачи (3.1) для данного дифференциального уравнения, то точка (x_0, y_0) называется **обыкновенной точкой** данного уравнения. Точка (x,y) области D, не являющаяся обыкновенной, является **особой точкой** данного дифференциального уравнения. Через особую точку, как отмечалось выше, либо не проходит ни одной интегральной кривой, либо проходят по крайней мере две интегральные кривые (через особую точку может проходить бесконечное число интегральных кривых). Если в окрестности точки (x_0, y_0) выполнены условия теорем существования и единственности, то точка (x_0, y_0) будет обыкновенной.

Нарушение условий теорем существования и единственности решения задачи Коши служит необходимым, но необязательно достаточным условием того, что данная точка является особой. Для окончательного решения вопроса, является ли данная точка особой, необходимо дополнительное исследование.

Замечание. Ранее было отмечено, что наряду с уравнением (2.1) рассматривается уравнение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x,y)}$. Если при этом в точке (x_0, y_0) для (2.1) нарушаются условия теоремы 2 в результате обращения $f(x,y)$ в бесконечность, то $1/f(x,y)$ в этой точке обращается в нуль и для уравнения

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ условия теоремы существования и единственности выполнены. Таким образом, в этом случае точка (x_0, y_0) является обыкновенной, но проходящая через нее интегральная кривая имеет вертикальную касательную.

Метод ломаных Эйлера не только позволяет доказать существование и единственность решения задачи Коши, но и дает численный алгоритм построения приближенного решения, сколь угодно близко аппроксимирующего точное. Метод является эффективным подходом к численному решению и дискретизации непрерывных начальных задач.

Другим конструктивным подходом к доказательству существования и единственности решения задачи Коши является метод последовательных приближений Пикара. Последовательность Пикара строится следующим образом: сопоставляют начальной задаче эквивалентное интегральное уравнение $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$ и далее определяют $y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx$, $n = 0,1,\ldots$. При выполнении определенных требований справедлив предельный переход $y_{(n)}(x) \to y(x)$, $|x - x_0| \le H$, $(n \to \infty)$, где $y(x)$ – решение задачи Коши. Метод построения решения задачи Коши на итерациях описанной последовательности называют методом последовательных приближений Пикара. Метод эффективно применяется при построении решений интегральных уравнений (уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода) и для исследования зависимости решения дифференциального уравнения от параметра.

Замечание. Линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода записывается в следующем виде

$$\int\limits_a^x k(x,t)y(t)dt = f(x), x \ge a,$$

а интегральное уравнение второго Вольтерра второго рода имеет вид

$$y(x) + \lambda \int\limits_a^x k(x,t)y(t)dt = f(x), x \ge a$$

Функции $k(x,t)$ и $y(t)$ известны (заданы) и называются соответственно ядром интегрального уравнения и свободным членом этого уравнения, а λ – действительный или комплексный параметр.

Интегральное уравнение вида

$$\int\limits_a^b k(x,t)y(t)dt = f(x)$$

и интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)\,y(t)\,dt + f(x)$$

называются линейными интегральными уравнениями Фредгольма первого и второго родов соответственно

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Анри Пуанкаре (Jules Henri Poincaré) (1854−1912). Великий французский математик и физик. Член Парижской Академии Наук (1887). Труды Анри Пуанкаре в области математики, с одной стороны, продолжают классическое направление, а с другой – непосредственно примыкают к новым областям естествознания. Большой цикл работ Анри Пуанкаре относится к теории дифференциальных уравнений. Он исследовал разложения решений дифференциальных уравнений по начальным условиям и малым параметрам, доказал асимптотичность некоторых рядов, выражающих решения уравнений с частными производными.

После докторской диссертации, посвященной изучению особых точек системы дифференциальных уравнений, написал ряд работ под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1880). В этих работах он построил качественную теорию дифференциальных уравнений, исследовал характер интегральных кривых на плоскости, дал классификацию особых точек, изучил предельные циклы, расположение интегральных кривых на поверхности тора. Анри Пуанкаре дал приложения своих исследований к задаче о движении трех тел, изучил периодические решения задачи, асимптотическое поведение решений. Им введены методы малого параметра, неподвижных точек, уравнений в вариациях, разработана теория интегральных инвариантов.

Анри Пуанкаре принадлежат также важные для небесной механики труды об устойчивости движения. В области математической физики Анри Пуанкаре исследовал колебания трёхмерных тел, изучил ряд задач теплопроводности, а также различные задачи в области теории потенциала, электромагнитных колебаний. Ему принадлежат труды по обоснованию принципа Дирихле.

Имя Анри Пуанкаре напрямую связано с успехом теории относительности. Он деятельно участвовал в развитии теории Лоренца. При переходе к движущейся системе координат выполняются преобразования Лоренца вместо Галилеевых. Пуанкаре дал полную правильную математическую формулировку этих преобразований. В 1898 г., до работ Эйнштейна, Пуанкаре в своей работе «Измерение времени» сформулировал для механики принцип относительности, а затем ввёл понятие четырёхмерного пространства-времени, теорию которого в сотрудничестве с Эйнштейном позднее разработал Герман Минковский. В 1905 г. Пуанкаре написал сочинение «О динамике электрона», в котором независимо от Эйнштейна развил математические следствия «постулата относительности».

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕРАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§1. Существование и единственность решения

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка общего вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1}$$

Получим достаточные условия существования решений этого уравнения.

Если соотношение (1.1) удается разрешить относительно производной y', то получаем одно или несколько дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной

$$y' = f_k(x, y),\ k = 1,2,... \ . \tag{1.2}$$

Пусть функции $f_k(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) плоскости (x, y) удовлетворяют условиям теорем существования и единственности решения задачи Коши. Тогда через точку (x_0, y_0) проходит по одной и только одной интегральной кривой $y_k(x)$ каждого из этих уравнений $(k = 1,2,...)$. Все интегральные кривые являются решениями исходного дифференциального уравнения (1.1) – при подстановке в уравнение (1.1) функции $y_k(x)$ обращают его в тождество. Направление вектора касательной к интегральной кривой $y_k(x)$ уравнения (1.2) в точке (x_0, y_0) определяется значением функции $f_k(x_0, y_0)$. Если эти значения различны, то через точку (x_0, y_0) проходит несколько интегральных кривых уравнения (1.1) – столько, каково число уравнений (1.2), полученных при разрешении уравнения (1.1) относительно производной. Однако направления векторов касательных к этим кривым в точке (x_0, y_0) различны, поэтому, чтобы выделить определенное решение уравнения (1.1), надо не только задать начальные данные $y(x_0) = y_0$, но и значение производной решения в этой точке $y'(x_0) = y'_0$. Очевидно, это значение не может быть задано произвольно: y'_0 и должно быть корнем уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$.

Таким образом, существование решения уравнения (1.1) связано с возможностью разрешить его относительно y' и существованием решений уравнений (1.2). Достаточные условия разрешимости уравнения (1.1) определяются известными из курса математического анализа условиями существования неявной функции и ее непрерывности вместе с производной.

Теорема. Пусть в некотором замкнутом трехмерном прямоугольнике D_3 с центром в точке (x_0, y_0, y'_0), где y'_0 – действительный корень уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$, выполнены условия: функция $F(x_0, y, y')$ непрерывна по совокупности своих аргументов вместе с частными производными $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$. Функция $\frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$. Тогда в окрестности точки $x = x_0$ существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Доказательство. В силу условий теоремы в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) выполнены условия существования и единственности неявной функции $y' = f(x, y)$, удовлетворяющей условию $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Причем найдется такой замкнутый прямоугольник D_2 с центром в (x_0, y_0), в котором функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, вычисляемой по правилу дифференцирования неявной функции $\frac{\partial f}{\partial y} = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, f(x, y))\right]$. Это также означает, что начальная задача $y(x_0) = y_0$ для уравнения $y' = f(x, y)$ имеет и притом единственное решение на отрезке $|x - x_0| \le H$, поскольку выполнены все условия теорем существования и единственности 1 и 2.

Пусть интегральные кривые уравнений (1.2), пересекающиеся в точке (x_0, y_0), имеют в этой точке общую касательную, направление которой определяется значением y'_0. Тогда будут нарушены сформулированные выше условия единственности решения уравнения (1.1) относительно y'.

Одним из подходов к интегрированию неявных дифференциальных уравнений является метод введения параметра. Рассмотрим уравнение $F(x, y, p) = 0$ как уравнение поверхности в пространстве (x, y, p), пока не учитывая, что $p = \frac{dy}{dx}$. Известно, что уравнение поверхности в трехмерном пространстве может быть записано в параметрической форме:

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad p = P(u, v). \tag{1.3}$$

Будем считать, что функции X, Y, P удалось выписать в виде формул. Если учесть, что $p = \frac{dy}{dx}$, то, подставив в это соотношение dy, dx и p, выраженные из (1.3), получим дифференциальное уравнение в переменных u и v. Оно будет разрешено относительно производной $\frac{dv}{du}$ (или $\frac{du}{dv}$):

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial u} - P\frac{\partial X}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} - P\frac{\partial X}{\partial v}\right)dv = 0 \tag{1.4}$$

Если семейство решений уравнения (1.4) имеет вид $v = \varphi(u, C)$, то, подставляя это в первые два уравнения (1.3), получим

$$x = X(u, \varphi(u, C)), \quad y = Y(u, \varphi(u, C)). \tag{1.5}$$

Это – семейство решений в исходных переменных x и y, причем это семейство оказалось заданным в параметрической форме.

§2. Интегрирование в квадратурах

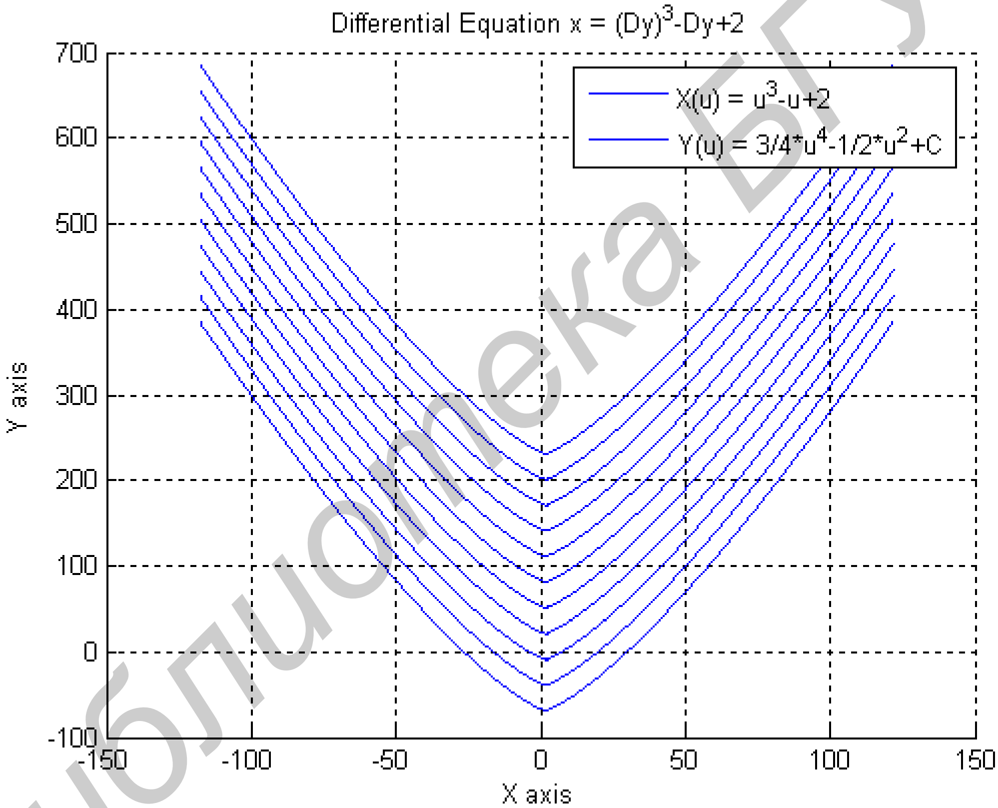
Отметим несколько случаев, когда интегрирование уравнения, неразрешенного относительно производной (1.4), сводится к квадратурам.

I. Пусть $F = F(x, p)$. Уравнение $F(x, p) = 0$ имеет параметрическую форму $x = X(u)$, $p = P(u)$. Вторым параметром u можно считать y. Уравнение (1.4) сводится к соотношению $dy = P(u)X'(u)du$, а семейство (1.5) имеет следующий вид: $x = X(u)$, $y = \int P(u)X'(u)du + C$.

Пример. Решим уравнение $x = y'^3 - y' + 2$. Полагаем $p = y' = dy/dx$ и дифференцируем равенство по y: $\frac{1}{p} = 3p^2\frac{dp}{dy} - \frac{dp}{dy}$. Получаем $dy = (3p^3 - p)dp$. Следовательно, искомое семейство решений записывается в параметрическом виде: $x = p^3 - p + 2$, $y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + C$:

```
syms x_Dy P_u X_u x_P_u;
syms dX dY Y_u Y_u_real X_u_real;
syms Title LegendX_u LegendY_u;
x_Dy = '(Dy)^3-Dy+2';% Дифференциальное уравнение: x = x(Dy)
P_u = 'Dy'; % Подстановки X = X(u)
X_u = 'x'; % Подстановки P = P(u)
x_P_u = subs(x_Dy, P_u, 'P(u)'); %  Замена P(u) = Dy
%   Подсчет dY = P(u)*dX = P(u)*X(u)*du
dX = diff(x_P_u, 'u');
dY = 'P(u)' * dX;
Y_u = sym(int(dY, 'u')+'C'); % Y(u) = int(P(u)*X(u)*du, u) + C
%   Результирующие функции получены параметрически X(u),Y(u)
Y_u_real = subs(Y_u, 'P(u)', 'u');
X_u_real = subs(x_P_u, 'P(u)', 'u');
Y_u_real = simplify(Y_u_real);% Упрощаем выражения Y(u)
X_u_real = simplify(X_u_real);% Упрощаем выражения X(u)
LegendX_u = ['X(u) = ', char(X_u_real)];
LegendY_u = ['Y(u) = ', char(Y_u_real)];
disp(LegendX_u); disp(LegendY_u);% Вывод результатов
% Визуализация фазового портрета%
syms Y_u_real_temp X_u_real_temp;
```

```
for C = -150 : 30 : 150 % Варьируем произвольную постоянную C
u = -5 : .0001 : 5; % Задаем сетку значений параметра u
% Подставляем значение C и параметра u в функции X(u), Y(u,C)
Y_u_real_temp = subs(Y_u_real, 'C', ...
    '(' + C + ')');
Y_u_real_temp = simplify(Y_u_real_temp);
Y_u_real_temp = inline(Y_u_real_temp);
X_u_real_temp = inline(X_u_real);
hold on;
plot(X_u_real_temp(u), Y_u_real_temp(u));% вывод интегр.кривой
grid; % Оформление графика
xlabel('X axis'); ylabel('Y axis');
Title = ['Differential Equation x = ',...
    char(x_Dy)];
title(char(Title)); legend(LegendX_u, LegendY_u);
end;
```



Задачи для решения

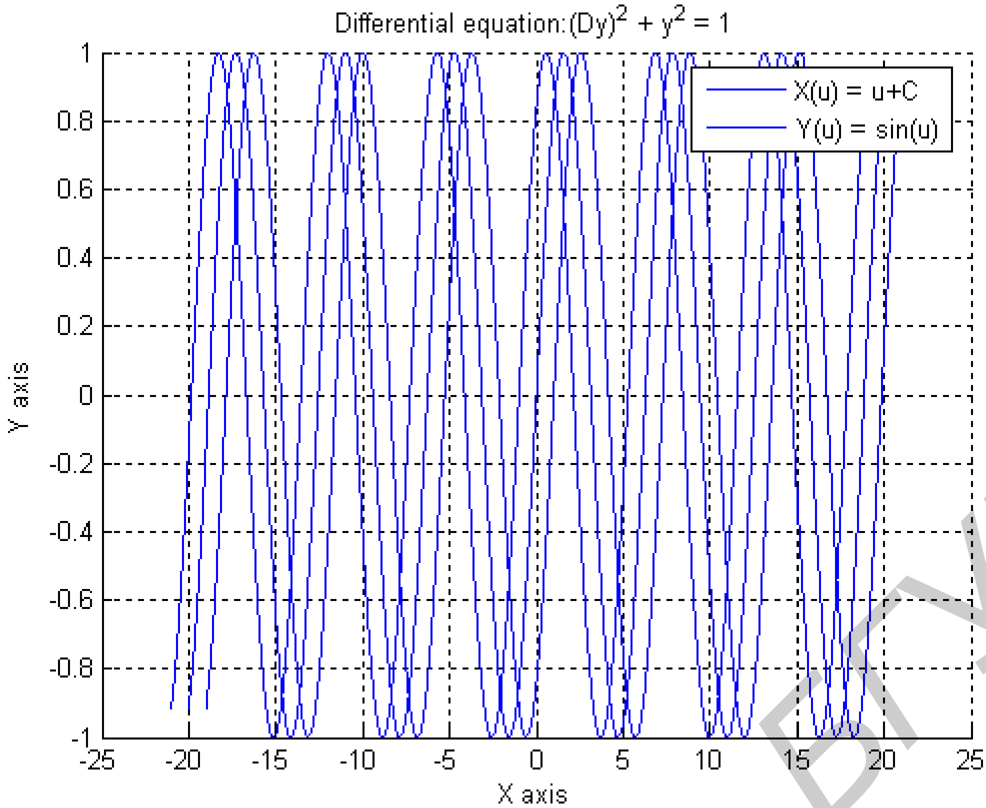
Найти семейство решений и частное решение, не входящее в семейство, если оно существует.

1. $x = y'\cos y'$. **2.** $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$. **3.** $x = 2y' - \ln y'$. **4.** $x = y'^2 + \dfrac{y}{y'}$.

II. Пусть $F = F(y, p)$. Тогда $y = Y(u)$, $p = P(u)$, $Y'(u)du = P(u)dx$ и семейство решений имеет следующий вид: $x = \int \frac{Y'(u)}{P(u)} du + C$, $y = Y(u)$.

Пример. Решить уравнение $y'^2 + y^2 = 1$. Введем параметр следующим образом: $y = \sin u$, $p = \cos u$. Имеем $dy = pdx$, $dx = \frac{dy}{p} = \frac{\cos\ udu}{\cos\ u} = du$. Следовательно, $x = u + C$, а значит, $y = \sin(x - C)$. Это и есть искомое семейство. Кроме того, при сокращении на $\cos u$ могли потеряться решения, отвечающие $\cos u = 0$ и имеющие вид $y = \sin u = \pm 1$. Итак, окончательно $y = \sin(x - C)$, $y = \pm 1$ (особые решения).

```
syms equation P_u Y_u dY dX X_u;
syms Y_u_real X_u_real LegendX_u LegendY_u;
equation = '(Dy)^2 + y^2 = 1'; % Дифференциальное уравнение
P_u = 'cos(u)'; % Подстановки P = P(u)
Y_u = 'sin(u)'; % Подстановки Y = Y(u)
dY = diff(Y_u, 'u'); % Подсчет dX = dY(u) / P(u)
dX = sym(dY) / P_u;
%   X(u) = int((Y'(u)*du)/P(u), u) + C
X_u = int(dX, 'u') + sym('(C)');
% Результирующие функции получены в параметрическом виде X(u),Y(u)
Y_u_real = simplify(Y_u);
X_u_real = simplify(X_u);
%   Вывод результатов
LegendX_u = ['X(u) = ', char(X_u_real)];
LegendY_u = ['Y(u) = ', char(Y_u_real)];
disp(LegendX_u); disp(LegendY_u);
%   Визуализация фазового портрета
syms X_u_real_temp Y_u_real_temp;
for C = -1 : 1 : 1 %  Варьируем произвольную постоянную C
u = -20 : .001 : 20; %    Задаем сетку значений параметра u
%   Подставляем значение конст. C и парам. u в функц. X(u, C),Y(u)
X_u_real_temp = subs(X_u_real, 'C', C);
X_u_real_temp = simplify(X_u_real_temp);
X_u_real_temp = inline(X_u_real_temp);
Y_u_real_temp = inline(Y_u_real);
hold on;
plot(X_u_real_temp(u), Y_u_real_temp(u)); % Вывод инт. кривой
grid; % Оформление графика
xlabel('X axis'); ylabel('Y axis');
Title = ['Differential equation:',...
    char(equation)];
title(char(Title));
legend(LegendX_u, LegendY_u);
end;
```



Задачи для решения

1. $y=(y'-1)e^{y'}$**.** **2.** $y=\dfrac{y'^2}{2}+2xy'+x^2$**.** **3.** $y=y'\sqrt{1+y'^2}$**.** **4.** $y=y'^2+xy'-x$**.**

III. Пусть уравнение имеет вид

$$y=\varphi(y')x+\psi(y'), \tag{2.1}$$

где $\varphi(y')$, $\psi(y')$ – известные функции y'. Это уравнение называется **уравнением Лагранжа**. В этом случае представление (1.3) получим, взяв x в качестве u, а p – в качестве v:

$$x=x\,,\; y=\varphi(p)x+\psi(p)\,,\; p=p\,. \tag{2.2}$$

Уравнение (1.4)

$$(\varphi(p)-p)dx+[\varphi'(p)x+\psi'(p)]dp=0 \tag{2.3}$$

оказывается линейным относительно x как функции p. Решая (2.3), находим $x=X(p,C)$, и решение (2.1) получаем в виде

$$x=X(p,C),\; y=\varphi(p)X(p,C)+\psi(p).$$

Отметим, что уравнение (2.3) также можно получить, записав (2.1) в виде $y=\varphi(p)x+\psi(p)$ и продифференцировав с учетом, что $dy=pdx$:

$$pdx=\varphi(p)dx+[\varphi'(p)x+\psi'(p)]dp\,.$$

Замечание. Если в (2.1) положить $\varphi(y')=y'$, то уравнение примет вид

$$y=y'x+\psi(y') \tag{2.4}$$

и будет называться **уравнением Клеро**. Уравнение (2.3) сводится к уравнению

$$\left[x + \psi'(p) \right] dp = 0. \tag{2.5}$$

Отсюда $dp = 0$, $p = C$ и, следовательно, семейство решений имеет вид

$$y = Cx + \psi(C). \tag{2.6}$$

Есть и другая возможность удовлетворить (2.5), а именно: $x = -\psi'(p)$. Это дает уже не семейство, а одну параметрически заданную кривую

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p), \tag{2.7}$$

которая также является решением уравнения (2.4).

Пример. Найти семейство решений и частное решение, не входящее в семейство, если таковое существует для уравнения $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$. Данное уравнение является уравнением Лагранжа. Имеем $y = \frac{1}{2}xy' + 2\frac{x}{y'}$, откуда $y = \frac{1}{2}xp' + 2\frac{x}{p}$, $pdx = \frac{1}{2}pdx + \frac{1}{2}xdp + 2\frac{dx}{p} - 2x\frac{dp}{p^2}$, $\left(\frac{p}{2} - \frac{2}{p}\right)dx = \frac{x}{2}dp\left(\frac{p}{2} - \frac{2}{p}\right)$.

Отсюда получаем следующее. Первое: $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$, $p = Cx$, $y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{2}{C}$. Это семейство решений, представляющее собой семейство парабол. Второе: $p^2 = 4$, $p = \pm 2$, $y = \pm x \pm x = \pm 2x$. Таким образом, $y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{2}{C}$, $y = \pm 2x$.

Задачи для решения

Найти семейство решений и частное решение, не входящее в семейство, если оно существует.

1. $x = y'\sqrt{(y')^2 + 1}$. **2.** $e^{-y'}y - y' + 1 = 0$. **3.** $xy' - y = \ln y'$.

4. $2xy' - y = \sin(y')$. **5.** $y = 2xy' + y^2(y')^3$. **6.** $(xy' + y)^2 = x^2 y'$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Ляпунов Александр Михайлович (1857−1918). Выдающийся русский математик и механик. Член Петербургской АН (1901). Ученик П. Л. Чебышева. Учитель В. А. Стеклова. Выдающаяся заслуга А. М. Ляпунова – создание современной теории устойчивости движения механических систем с конечным числом параметров. Основной труд – докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения» (1892). Последующие работы в рассматриваемой области содержат фундаментальные результаты в теории обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики: «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле» (1898). В 1962 г. АН СССР учреждена Золотая медаль имени Ляпунова, с 1993 г. – премия Российской АН.

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение следующего вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

неразрешенное относительно старшей производной, либо уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{1.2}$$

разрешенное относительно старшей производной.

Напомним, что если общее решение $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ уравнения (1.2) неявно задано уравнением

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0, \tag{1.3}$$

то соотношение (1.3) называют общим интегралом уравнения (1.2).
Соотношение

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, C_1) = 0 \text{ либо } \psi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C_1 \tag{1.4}$$

называют первым интегралом уравнения (1.2). Иногда первым интегралом называют функцию $\psi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, входящую в левую часть (1.4).

С помощью n независимых первых интегралов, исключая из них производные $y', ..., y^{(n-1)}$, можно получить общий интеграл (1.3) уравнения (1.2).

Для независимости n первых интегралов $\psi_i(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C_i$, $i = \overline{1, n}$, необходимо и достаточно, чтобы якобиан функций $\psi_i(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ по последним аргументам не обращался тождественно в нуль: $\dfrac{D(\psi_1, ..., \psi_n)}{D(y, y', ..., y^{(n-1)})} \not\equiv 0.$

Если известны m, $1 \le m < n$ первых интегралов, то исходная задача интегрирования уравнения n-го порядка сводится исключением m старших производных к более простой задаче $(n-m)$-го порядка.

Если требуется найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющего условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, то говорят, что для уравнения (1.2) поставлена задача Коши и записывают её в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{1.5}$$

Теорема Коши. Пусть в уравнении (1.2) функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ определена в $(n+1)$-мерной области $D = \left\{ |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b_1, ..., \left| y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)} \right| \le b_n \right\}$ в пространстве своих аргументов. Пусть, далее, в области D функция

$f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по переменным $y, y', ..., y^{(n-1)}$:

$\left| f(x, \bar{y}, \bar{y}', ..., \bar{y}^{(n-1)}) - f(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}', ..., \bar{\bar{y}}^{(n-1)}) \right| \le N \sum_{j=0}^{n-1} \left| \bar{y}^{(j)} - \bar{\bar{y}}^{(j)} \right|$. Тогда на отрезке $[x_0, x_0 + H]$, где $H = \min\left\{a, b/M\right\}$, $M = \max_D |f|$, $b = \min_i b_i$, существует единственное решение задачи Коши (1.5).

1.1. Понижение порядка уравнения. В некоторых случаях возможно понизить порядок дифференциального уравнения с целью упростить его интегрирование. Рассмотрим возможные случаи.

I. Уравнение не содержит исходной функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.6}$$

Заменой $y^k = u$, где u – новая неизвестная функция, уравнение (1.6) приводится к уравнению $(n-k)$-го порядка $F(x, u, u', ..., u^{(n-k)}) = 0$. Его решение примет вид $u = u(x, C_1, ..., C_{(n-k)})$. Функция y находится k-кратным последовательным интегрированием, в результате появляются ещё k произвольных постоянных.

Пример. Решим уравнение $y'' = y'^2$. Это уравнение не содержит y, поэтому заменой $y' = p$, $u = p(x)$ оно приводится к уравнению $p' = p^2$, равносильному совокупности уравнений $p = 0$ и $\dfrac{dp}{p^2} = dx$. Из последнего находим $p = \dfrac{1}{C_1 - x}$.

Так как $p = \dfrac{dy}{dx}$, то, интегрируя найденные соотношения, получаем для $y(x)$: $y = C$, $y = C_2 - \ln(C_1 - x)$.

II. Уравнение явно не содержит независимой переменной:

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.7}$$

Порядок уравнения (1.7) понижается на единицу заменой $y' = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция. Последовательные производные $y', y'', y''', ...$ в новых переменных p и y имеют вид:

$$\frac{dx}{dy} = p, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) p = \frac{d^2 p}{dy^2} \frac{dy}{dx} p + \frac{dp}{dy} \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$$

и т.д. Видно, что производные $\dfrac{d^k y}{dx^k}$ выражаются через производные от p по y порядка не выше $k-1$. В результате указанной замены возможна потеря решений $y=\text{const}$, что проверяется непосредственной подстановкой.

Пример 1. Рассмотренное выше уравнение $y''=y'^2$ относится также и к типу, не содержащему явно независимой переменной x. Поэтому порядок уравнения понижается на единицу заменой $y'=p$, где $p=p(y)$ – новая неизвестная функция. Действительно, $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dy}p$ и уравнение сводится к уравнению первого порядка $\dfrac{dp}{dy}p=p^2$, равносильному совокупности уравнений $p=0$ и $\dfrac{dp}{p}=dy$. Из последнего находим: $C_1 p=e^y$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем $y'=0$, а также уравнение с разделяющимися переменными $C_1\dfrac{dy}{dx}=e^y$. Интегрируя эти уравнения, находим для $y(x)$: $y=C$, $y=\ln C_1-\ln(C_2-x)$.

III. Уравнения в полных производных. Если левая часть уравнения

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0 \tag{1.8}$$

является полной производной некоторой функции $G(x,y,y',...,y^{(n-1)})$, то, переписывая (1.8) в виде $\dfrac{d}{dx}G(x,y,y',...,y^{(n-1)})=0$, находим первый интеграл уравнения $G(x,y,y',...,y^{(n-1)})=C_1$, представляющий собой уравнение уже на единицу меньшего порядка. Иногда можно подобрать интегрирующий множитель $\mu=\mu(x,y,y',...,y^{(n)})$, после умножения на который уравнение (1.8) становится уравнением в полных производных. Корни уравнения $\mu=0$ могут оказаться лишними решениями, а разрывность μ может привести к потере решений.

Пример. Уравнение $yy''=y'^2$ приводится к уравнению в полных производных после умножения на интегрирующий множитель $1/y'^2$.

IV. Пусть уравнение $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ однородно относительно $y,y',...,y^{(n-1)}$, т.е. выполнено условие $F(x,ty,ty',...,ty^{(n)})=t^kF(x,y,y',...,y^{(n)})$. Порядок такого уравнения понижается на единицу подстановкой $y'=yu$, где u – новая неизвестная функция.

Пример. Уравнение $yy''=y'^2$ является однородным, так как сохраняет свой вид после замены y, y' и y'' на ty, ty' и ty'' соответственно. Следовательно, можно понизить его порядок на единицу, полагая $y'=yu$, где u – новая неизвестная функция. Для производных y' и y'' имеем $y'=yu$, $y''=y'u+yu'=y(u^2+u')$.

Исходное уравнение приобретает вид $y^2(u^2+u')=y^2u^2$, откуда $y=0$ и $u'=0$. Интегрируя последнее равенство, получаем $u=C_1$, $\dfrac{y'}{y}=C_1$.

Возвращаемся к переменной $y(x)$: $y=0$, $y=C_2e^{C_1x}$ ($C_2\neq 0$).

V. Пусть уравнение $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ однородно в обобщённом смысле относительно x и y. В этом случае вид уравнения должен сохраняться при замене x на tx и y на $t^m y$. При этом в соответствующие выражения перейдут дифференциалы и производные:

$$dx\to tdx,\ dy\to t^m dy,\ d^2y\to t^m d^2x,\ldots;\ \frac{dy}{dx}\to t^{m-1}\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\to t^{m-2}\frac{d^2y}{dx^2},\ldots .$$

Таким образом, для сохранения вида уравнения должно выполняться условие $F(tx,t^m y,t^{m-1}y',...,t^{m-n}y^{(n)})=t^kF(x,y,y',...,y^{(n)})$, которое может выполняться не при любом m. Для получения искомого значения m надо приравнять друг другу суммы показателей степеней t в каждом слагаемом уравнения. Получается, вообще говоря, переопределённая система. Если искомое значение m существует, то делается замена переменных $x=e^t$, $y=ue^{mt}$, где t – новая независимая переменная, а $u(t)$ – новая неизвестная функция. Получается уравнение, не содержащее явно независимой переменной t и допускающее понижение порядка, например, согласно случаю II.

Пример. Решим уравнение $y^2=x^3y''$. Уравнение не является однородным относительно y и производных. Но при переходе $x\to tx$, $y\to t^m y$, получаем $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}\to\dfrac{t^m d^2y}{t^2dx^2}=t^{m-2}\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Приравниваем суммы показателей степеней t в левой и правой частях уравнения и находим $2m=3+(m-2)$, откуда $m=1$. Уравнение оказывается однородным в обобщённом смысле. Замена переменных $x=e^t$, $y=ue^t$ приводит к уравнению $\ddot{u}+u-u^2=0$. Это уравнение является уравнением Бернулли, кроме того, не содержит явно независимой переменной t, и поэтому может быть решено разными способами, в том числе и понижением порядка согласно случаю II.

Задачи для решения

Решить следующие дифференциальные уравнения:

1. $y'''=x+\cos x$. **2.** $y''=xe^x,\ y(0)=y'(0)=0$. **3.** $y''=2x\ln x$. **4.** $y^3y''=1$.
5. $xy''=y'$. **6.** $xy''=y'+x^2$. **7.** $yy''=y'^2-y'^3$. **8.** $y''=\sqrt{1+y'^2}$. **9.** $y''=\sqrt{1-y'^2}$.
10. $y''=2yy'$. **11.** $yy'''+3y'y''=0$. **12.** $yy''+y'^2=1$. **13.** $yy''+y'^2=0$.
14. $xyy''-xy'^2=yy'$. **15.** $2yy''-3y'^2=4y^2$.

§2. Интегрирование уравнений с помощью степенных рядов. Асимптотика

Большинство нелинейных и линейных уравнений с переменными коэффициентами не интегрируются в квадратурах. Одним из эффективных подходов к решению таких уравнений при выполнении определенных требований является представление решения в виде сходящегося степенного ряда.

2.1. Нелинейное уравнение *n*-го порядка. Пусть задана задача Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2.1}$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = {}^{(1)}y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = {}^{(n-1)}y_0. \tag{2.2}$$

Теорема. Пусть функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ разложима по своим аргументам в степенной ряд, сходящийся в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$. Тогда решение задачи Коши (2.1), (2.2) в окрестности $U(x)$ точки $x = x_0$ может быть представлено в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k =$$

$$= y_0 + {}^{(1)}y_0 (x - x_0) + \ldots + \frac{{}^{(n-1)}y_0}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in U(x_0),$$

где коэффициенты $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ известны из начальных условий, а коэффициенты a_k, $k = n, n+1, \ldots$ подсчитываются по формуле $a_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Замечание. Существование и единственность решения задачи Коши в данном случае следует из бесконечной дифференцируемости функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ по совокупности своих аргументов.

Производная $y^{(n)}(x_0)$ находится подстановкой $x = x_0$ в уравнение (2.1), а последующие коэффициенты $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ находятся вычислением последовательных производных $y^k(x_0)$ из уравнения (2.1). Например,

$$a_{n+1} = \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}, \text{ где } y^{(n+1)}(x_0) = \left.\frac{df(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

В полную производную $\dfrac{df}{dx}$ войдут при $x = x_0$ уже известные значения $y_0'(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)$. Вообще $y^{(k)}(x_0) = \left.\dfrac{d^{k-n} f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{dx^{k-n}}\right|_{x=x_0}$, $k = n+1, \ldots$.

Пример 1. Найдем первые четыре члена разложения в степенной ряд решения следующей задачи Коши: $y' = \cos(x + y)$, $y(0) = 0$.

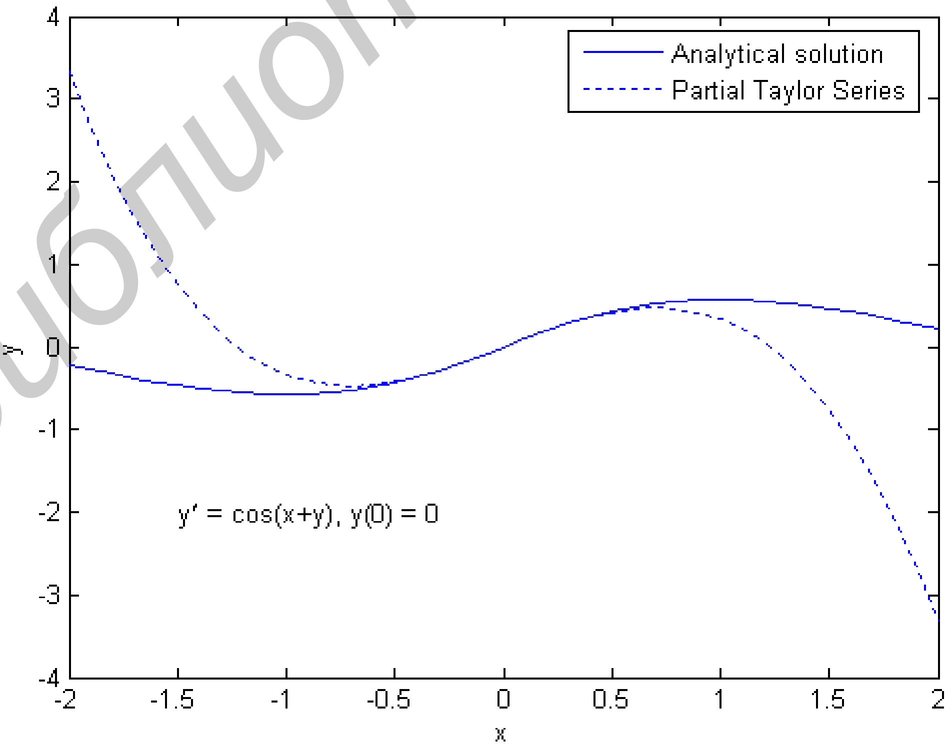
Функция $\cos(x+y)$ разложима в ряд Тейлора по переменным x и y в окрестности точки $(0,\ 0)$ и этот ряд сходится на всей плоскости (x, y). Ищем решение задачи в виде ряда следующего вида: $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots$. Поскольку $y(0) = 0$, то из уравнения $y' = \cos(x+y)$ находим $y'(0) = \cos(x+y)\big|_{x=0} = 1$. Дифференцируем это уравнение как тождество относительно искомого решения $y(x)$ и, полагая $x = 0$, получаем:

$$y''(0) = -\sin(x+y)(1+y')\,|_{x=0} = 0,$$

$$y'''(0) = -\cos(x+y)(1+y')^2 - \sin(x+y)\,y''\,|_{x=0} = -4.$$

Подставляя в ряд найденные значения $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$, получаем искомое решение с указанной точностью: $y(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(|x|^4)$.

```
syms x y1 y n % инициализируем символьные переменные
y = dsolve('Dy = cos(x+y)', 'y(0) = 0','x') % точное решен. ДУ
pretty(simplify(y)); % выводим на экран решение
x = -2:0.1:2; % задаем диапазон значений
y = subs(y,'x',x); % подставляем из диапазона в уравнение
hold on; plot(x,y,'-');% рисуем полученную интегральную кривую
y1 = x - 2/3*x.^3; % решен. в виде частичн. суммы ряда Тейлора
y1 = subs(y1,'x', x);
plot(x, y1, ':'); % рисуем полученную кривую - сумма ряда
xlabel('x'); ylabel('y'); % подписываем ось OX, OY
text(-1.5,-2.0,'y\prime = cos(x+y), y(0) = 0');
legend('Analytical solution','Partial Taylor Series');% Легенда
```



Пример 2. Найдем решение следующей задачи Коши: $y^{(2)} = x^2 y$, $y(0) = y'(0) = 1$ в виде разложения в степенной ряд.

Найдем производные высших порядков для определения закономерности и вывода общей формулы:

$y^{(2)} = x^2 y = 0$; $y^{(3)} = x^2 y' + 2xy = 0$; $y^{(4)} = x^2 y^{(2)} + 4xy' + 2y = 2$;

$y^{(5)} = x^2 y^{(3)} + 6xy^{(2)} + 6y' = 6$; $y^{(6)} = x^2 y^{(4)} + 8xy^{(3)} + 12y^{(2)} = 0$;

$y^{(7)} = x^2 y^{(5)} + 10xy^{(4)} + 20y^{(3)} = 0$; $y^{(8)} = x^2 y^{(6)} + 12xy^{(5)} + 30y^{(4)} = 60$;

$y^{(9)} = x^2 y^{(7)} + 14xy^{(6)} + 42y^{(5)} = 252$; $y^{(10)} = x^2 y^{(8)} + 16xy^{(7)} + 56y^{(6)} = 0$;

$y^{(11)} = x^2 y^{(9)} + 18xy^{(8)} + 72y^{(7)} = 0$.

Так как решение требуется найти в точке $x_0 = 0$, то $y^{(k)} = (k-2)(k-3)y^{(k-4)}$. По последовательности значений производных функции в начальной точке $(1, 1, 0, 0, 2, 6, 0, 0, 60, 252, 0, 0, \ldots)$ рекуррентно получаем следующее. Поскольку производные $y^{(4k+2)}$ и $y^{(4k+3)}$ равны нулю:

$$y^{(4k+2)} = (4k)(4k-1)y^{(4k-2)} = (4k)(4k-1)(4k-4)(4k-5)y^{(4k-6)} =$$
$$= (4k)(4k-1)(4k-4)(4k-5) \times \ldots \times y^{(2)} = 0;$$
$$y^{(4k+3)} = (4k+1)(4k)y^{(4k-1)} = (4k+1)(4k)(4k-3)(4k-4)y^{(4k-5)} =$$
$$= (4k+1)(4k)(4k-3)(4k-4) \times \ldots \times y^{(3)} = 0,$$

то в разложение решения в степенной ряд они входить не будут. Входить будут производные $y^{(4k)}$ и $y^{(4k+1)}$:

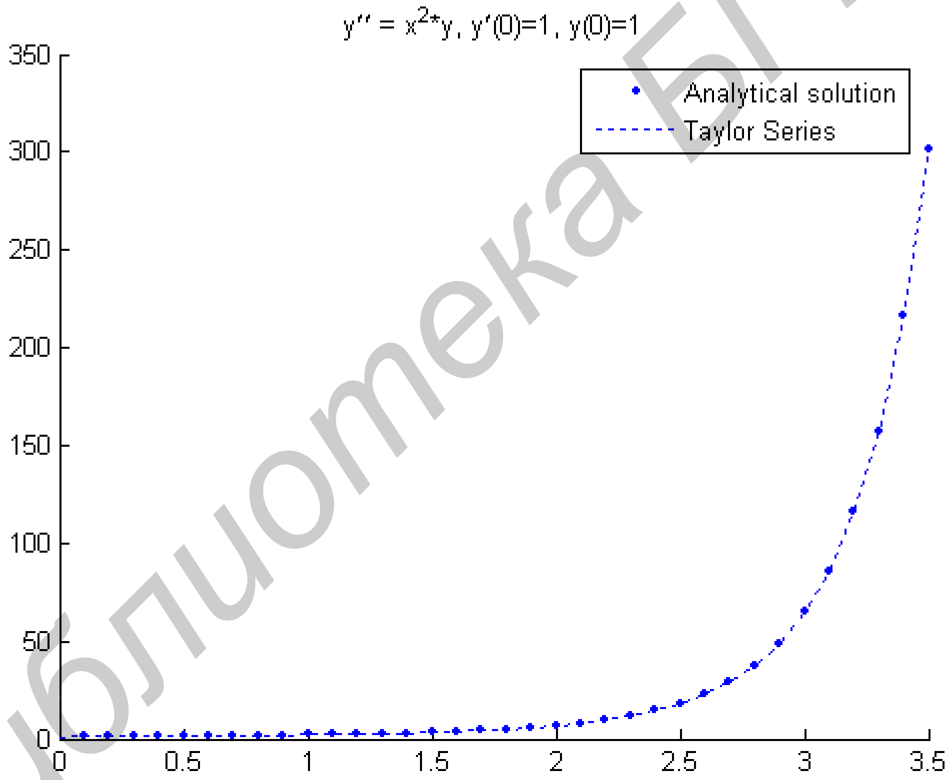
$$y^{(4k)} = (4k-2)(4k-3)y^{(4k-4)} = (4k-2)(4k-3)(4k-6)(4k-7)y^{(4k-8)} =$$
$$= (4k-2)(4k-3)(4k-6)(4k-7) \times \ldots \times 6 \times 5 \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^{\infty}(4k-2)(4k-3);$$
$$y^{(4k+1)} = (4k-1)(4k-2)y^{(4k-3)} = (4k-1)(4k-2)(4k-5)(4k-6)y^{(4k-7)} =$$
$$= (4k-1)(4k-2)(4k-5)(4k-6) \times \ldots \times 7 \times 6 \times 3 \times 2 = \prod_{k=1}^{\infty}(4k-1)(4k-2).$$

Подставляя в формулу $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, $x_0 = 0$ найденные коэффициенты, окончательно получим следующее разложение:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(4k-2)(4k-3)}{(4n)!} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(4k-1)(4k-2)}{(4n+1)!} x^{4n+1}.$$

Нетрудно видеть, что по признаку Даламбера полученный степенной ряд сходится на всей числовой прямой. Напомним, что если степенной ряд сходится, то он сходится равномерно и абсолютно. Равномерная сходимость обосновывает корректность внесения операции дифференцирования под знак ряда. Полученные ряды будут сходиться равномерно и абсолютно. Таким образом, построенное представление является решением задачи Коши.

```
syms x y1 y n; % инициализация символьных переменных
y=dsolve('D2y = x*x*y','Dy(0) = 1','y(0) = 1','x')% решаем ДУ
pretty(simplify(y)); % выводим на экран решение
hold on; x = 0:0.1:3.5; % задаем диапазон значений
y = subs(y,'x',x); % подставляем значения из диапазона
plot(x,y,'.'); % рисуем полученную интегральную кривую
y = 0; for n = 0:50 % цикл для подсчета решения как суммы ряда
fa = 1; for k = 1:(4*n) fa = fa * k; end; % считаем коэф. ряда
Proizv1 = 1; % произведение n множителей (коэффициенты ряда)
for k = 1:n Proizv1 = Proizv1*(4*k-2)*(4*k-3); end;
y = y + Proizv1 / fa * x.^(4*n); fa = fa*(4*n+1);
Proizv2 = 1;  % произведение n множителей (коэффициенты ряда)
for k = 1:n Proizv2 = Proizv2*(4*k-1)*(4*k-2); end;
y = y + Proizv2 / fa*x.^(4*n+1); % сумма ряда
end;
plot(x,y,':'); % рисуем полученную кривую - сумма ряда
title('y\prime\prime = x^2*y, y\prime(0)=1, y(0)=1');
legend('Analytical solution','Taylor Series'); % Легенда
```



2.2. Линейное уравнение. Рассмотрим частный случай линейного уравнения n-го порядка – приведенное линейное уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0. \tag{2.3}$$

Положим также для простоты $x_0 = 0$.

Теорема. Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ разложимы в ряд Тейлора, сходящийся на интервале $|x| < R$. Тогда всякое решение уравнения (2.3) разложимо в ряд Тейлора, сходящийся на $|x| < R$.

Пример. Используя степенной ряд, проинтегрируем дифференциальное уравнение $y''+xy'+y=1$ с начальными условиями $y(0)=y'(0)=0$.

Подсчитываем первые производные функции $y(x)$ в точке $x_0=0$. Получаем:

$y'(0)=0;\ \ y''(0)=1-y-xy'=1;\ \ y^{(3)}(0)=-2y'-xy''=0;\ \ y^{(4)}(0)=-3y''-xy^{(3)}=-3;$
$y^{(5)}(0)=-3y'''-xy^{(4)}=0;\ \ \ y^{(6)}(0)=-5y^{(4)}-xy^{(5)}=15;\ \ y^{(7)}(0)=-6y^{(5)}-xy^{(6)}=0;$
$y^{(8)}(0)=-6y^{(6)}-y^{(6)}-xy^{(7)}=-7y^{(6)}-xy^{(7)}=(-7)(-5)(-3)=-105;$
$y^{(9)}(0)=-7y^{(7)}-y^{(7)}-xy^{(8)}=-8y^{(7)}-xy^{(8)}=0;$
$y^{(10)}(0)=-8y^{(8)}-y^{(8)}-xy^{(9)}=-9y^{(8)}-xy^{(9)}=(-9)(-7)(-5)(-3)=945;\ \dots\ .$

Общая формула для подсчета имеет вид $y^{(n)}(0)=(1-n)\cdot y^{(n-2)}(0)$, $n=3,4,5...$ либо $y^{(2n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n!2^n}=(-1)^{n+1}(2n-1)!!$, $n=2,3,4...;\ y^{(2n+1)}(0)=0$.

Подставляя коэффициенты и учитывая, что вторая производная в точке $x_0=0$ равна единице, получаем разложение решения в степенной ряд:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)!!}{(2n)!}x^{2n}.$$

Упростим формулу, избавившись от операции !!. Поскольку

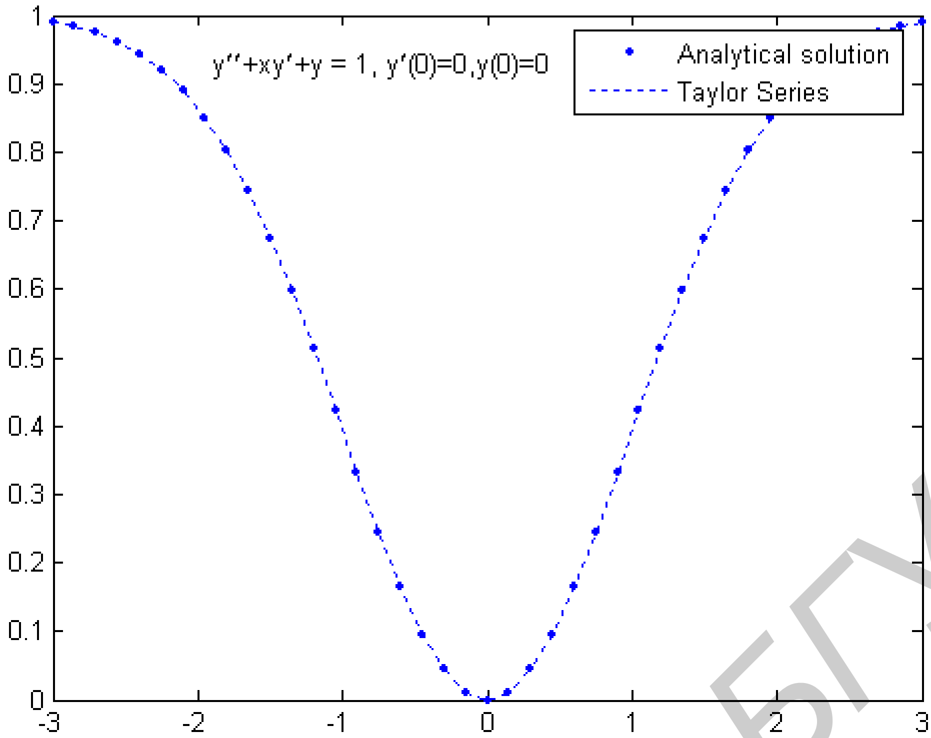
$$(2n+1)!!=1\times3\times...\times(2n+1)=\frac{1\times2\times3\times...\times(2n+1)}{2\times4\times...\times2n}=\frac{(2n+1)!}{(1\times2)(2\times2)(3\times2)...(n\times2)}=\frac{(2n+1)!}{n!\times2^n},$$

то сразу получаем, что

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)!!}{(2n)!}x^{2n}=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{n!2^n(2n)!}x^{2n}=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!2^n}x^{2n}.$$

Окончательно: $y(x)=\dfrac{x^2}{2}+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!2^n}x^{2n}$. По признаку Даламбера полученный степенной ряд равномерно и абсолютно сходится на всей числовой прямой. Равномерная сходимость обосновывает законность внесения операции дифференцирования под знак бесконечной суммы. При этом полученные ряды также будут сходиться равномерно и абсолютно. Решение задачи Коши построено.

```
syms x y1 y n; % инициализация переменных
y=dsolve('D2y+x*Dy+y=1','Dy(0)=0','y(0)=0','x'); % решаем ДУ
pretty(simplify(y)); % выводим на экран решение
x = -3:0.15:3; % задаем диапазон значений аргумента
y = subs(y,'x',x); % подставляем из диапазона в уравнение
hold on; plot(x,y,'.'); % рисуем полученную кривую
%   считаем и визуализируем решение как сумму сходящегося ряда
s=symsum((-1)^(n+1)/sym('n!')/2^n*x.^(2*n),n,2,inf);% сумма
y1 = 1/2*(x.*x) + s; % решение диф. уравнения  в виде ряда
y1 = subs(y1,'x', x);
plot(x, y1, ':');% рисуем полученную кривую - сумма ряда
text(-1.9,.93,'y\prime\prime+xy\prime+y = 1, y\prime(0)=0,y(0)=0');
legend('Analytical solution','Taylor Series'); % Легенда
```



3.1. Асимптотическая формула. Асимптотика. Предположим, что функция $f(x)$, являющаяся решением дифференциального уравнения в некоторой окрестности точки $x = x_0$, может быть представлена в форме $f(x) = F(x) + r(x)$, где вид $F(x)$ известен, а про $r(x)$ известно только то, что $r(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Тогда говорят, что выражение $F(x)+r(x)$ является асимптотической формулой или асимптотическим представлением для $f(x)$ в окрестности $x = x_0$.

Например, пусть $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$. Тогда в окрестности $x = 0$ можно написать $F(x) = \cos(x) + r(x)$. Здесь $F(x) = \cos(x)$, $r(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2} - \cos x = \cos x \dfrac{x^2}{1+x^2} \to 0$ при $x \to 0$. Для функции $f(x)$ в окрестности $x = 0$ можно написать и другую асимптотическую формулу: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + r_1(x)$. Здесь $r(x) = \dfrac{\cos x - 1}{1+x^2}$ также стремится к нулю. Таким образом, асимптотические представления могут быть разнообразными.

Асимптотическая формула приобретает особенно важное значение, если $f(x)$ неизвестна. Например, это решение не интегрируемого в элементарных функциях дифференциального уравнения, а функцию $F(x)$, отличающуюся от $f(x)$ на малую величину, найти достаточно просто. Таким образом, $F(x)$ может служить приближенным выражением для неизвестной $f(x)$ (или, как говорят, асимптотическим приближением) в окрестности точки.

Отметим, что если само $F(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то асимптотическая формула имеет смысл с точки зрения построения приближенного значения $f(x)$ только в том случае, если стремление $r(x)$ к нулю при $x \to x_0$ имеет более высокий порядок, чем стремление $F(x)$.

Вместо выражений «асимптотическая формула», «асимптотическое представление», «асимптотическое приближение» употребляется более короткий термин – асимптотика. Функция $F(x)$ называется главным членом асимптотики, а $r(x)$ – остаточным членом.

Важно подчеркнуть, что нельзя говорить об асимптотике $f(x)$ вообще, но можно говорить об асимптотике в окрестности некоторой точки: при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ и т.д. Например, для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ в окрестности $x = x_0 = 0$ можно взять $F(x) = 1$ (тогда $r(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 \to 0$ при $x \to 0$), а при $x \to \infty$ значение $F(x) = 1$ уже не годится и можно взять $F(x) = \dfrac{1}{x^2}$. (Тогда $r(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2(1+x^2)} \to 0$ при $x \to \infty$. При этом $F(x) = \dfrac{1}{x^2}$, а $r(x) = \dfrac{1}{x^4}$, так что выполнено указанное выше требование на соотношение порядков малости $F(x)$ и $r(x)$.)

В рассмотренных ранее примерах было построено решение $y(x)$ дифференциального уравнения в форме сходящегося степенного ряда – ряда Тейлора. На практике не всегда удается вычислить все коэффициенты ряда. Например, по причине ограниченной гладкости $y(x)$ можно вычислить только N коэффициентов. Тогда формула Тейлора дает $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k (x - x_0)^k + r(x)$, $a_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$. Используя разные виды остаточного члена $r(x)$ формулы Тейлора, можно получить, что $r(x) = o(x^n)$ (форма Пеано), т.е. мы получаем асимптотическую формулу для $y(x)$ при $x \to x_0$. Располагая информацией о непрерывности $y^{(N+1)}$ в окрестности x_0, можно получить для $r(x)$ более точную оценку, например $r(x) = O(x^{N+1})$ (форма Лагранжа).

Отдельно отметим следующее. Стремление к нулю остаточного члена в формуле Тейлора при фиксированном x и $n \to \infty$ доказывает сходимость степенного разложения к $y(x)$. При этом, очевидно, необходимо существование для $y(x)$ производных любого порядка *n*. Стремление к нулю того же остаточного члена при фиксированном n и $x \to x_0$ дает асимптотическую формулу.

Еще раз подчеркнем, что если функция допускает дифференцирование только до некоторого порядка, то говорить о сходимости ряда нельзя, а о построении асимптотики возможно.

§3. Системы дифференциальных уравнений в нормальной форме

Системой дифференциальных уравнений, разрешённых относительно старших производных, называется система следующего вида:

$$\begin{aligned} y_1^{(m_1)} &= f_1(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_1-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m_n)} &= f_n(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_n-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n-1)}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Число $N = m_1 + ... + m_n$ называется порядком системы (3.1). Напомним, что нормальной системой, или системой уравнений, разрешённых относительно производных от неизвестных функций, называется система вида

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, ..., y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, ..., y_n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Систему (3.1) всегда можно привести к виду (3.2). Полагая в системе (3.1) $z_1 = y_1$, $z_2 = y'_1, ...,$ $z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)}$,…, $z_{m_1+...+m_{n-1}+1} = y_n$, $z_{m_1+...+m_{n-1}+2} = y'_n$,…, $z_N = y_n^{(m_n-1)}$, получаем нормальную систему относительно функций $z_1, ..., z_N$.

Поэтому, не ограничивая общности, можно рассматривать нормальные системы.

Отдельно отметим, что частным случаем системы (3.1) является одно уравнение n-го порядка $y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$, которое также всегда можно свести к нормальной системе. Полагая $z_1 = y$, $z_2 = y', ...,$ $z_n = y^{(n-1)}$, получаем

$$z'_1 = z_2,\ z'_2 = z_3\ ,\ldots,\ z'_{n-1} = z_n,\ z'_n = f(t, z_1, z_2, ..., z_n).$$

Решением системы (3.2) на интервале T называется упорядоченная совокупность непрерывно дифференцируемых функций

$$y_1 = \varphi_1(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t),\ t \in T, \tag{3.3}$$

которые при подстановке в систему обращают все её уравнения в тождества. Множество всех решений системы (3.1) или (3.2) называется общим решением этой системы.

Уравнения (3.3) задают на интервале T в пространстве переменных $(t, y_1, ..., y_n)$ интегральную кривую системы. Если множество функций

$$y_i = \varphi_i\ (t, C_1, ..., C_n),\ i = \overline{1, n}, \tag{3.4}$$

удовлетворяющих системе (3.2), где $C_1,...,C_n$ – произвольные постоянные, позволяет за счёт выбора $C_1,...,C_n$ получить любую интегральную кривую системы (3.2), то (3.4) является общим решением системы (3.2).

Нормальные системы допускают более простую форму записи в векторно-матричных обозначениях. Введём обозначения:

$$Y = (\, y_1(t) \,...\, y_n(t))^T,\ F(t,Y) = (\, f_1(t,Y) \,...\, f_n(t,Y))^T .$$

Тогда систему (3.2) можно записать в виде векторного уравнения $Y' = F(t,Y)$. Формулы (3.4) в векторной записи имеют вид

$$Y = \varphi\,(t,C),\ \ C = (C_1,...,C_n)^T, \tag{3.5}$$

где C – произвольный постоянный вектор. Выражение (3.5) будет общим решением системы (3.2) в тех же случаях, что и формулы (3.4).

Если общее решение системы (3.2) может быть неявно задано системой n независимых уравнений

$$\psi_i(t, y_1,..., y_n) = C_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{3.6}$$

то систему (3.6) называют общим интегралом системы (3.2).

Любое из соотношений (3.6) называют первым интегралом системы (3.2). Иногда первым интегралом называют любую функцию $\psi_i(t, y_1,..., y_n)$, входящую в (3.6).

Если функция $\psi_i(t, y_1,..., y_n)$ непрерывно дифференцируема, то её производная в силу системы (3.2) равна нулю:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}y'_j\Big|_{y'_j = f(t, y_1,..., y_n)} \equiv 0 \qquad \forall t \in T .$$

Иначе говоря, первый интеграл обращается в постоянную вдоль любого решения (3.4) системы (3.2).

Для независимости n первых интегралов необходимо и достаточно, чтобы якобиан

$$J = \frac{D(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)}{D(y_1, y_2,..., y_n)} = \begin{vmatrix} \partial\psi_1/\partial y_1 & \partial\psi_1/\partial y_2 & ... & \partial\psi_1/\partial y_n \\ \partial\psi_2/\partial y_1 & \partial\psi_2/\partial y_2 & ... & \partial\psi_2/\partial y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial\psi_n/\partial y_1 & \partial\psi_n/\partial y_2 & ... & \partial\psi_n/\partial y_n \end{vmatrix}$$

функций $\psi_i(t, y_1,..., y_n)$ по последним n аргументам $y_1, y_2,..., y_n$ не обращался тождественно в нуль: $J \neq 0$.

Если известны m ($1 \le m \le n$) первых интегралов, то исходная задача интегрирования системы (2.2) с n неизвестным исключением m переменных сводится к более простой задаче интегрирования системы с $n - m$ неизвестными.

Если требуется найти решение системы (3.2), удовлетворяющее условиям $y_i(t_0) = y_i^0$, $i = \overline{1,n}$, то говорят, что для системы (3.2) поставлена **задача Коши** и записывают её в виде $y_i'=f_i(t,y_1,...,y_n)$, $y_i(t_0)=y_i^0$, $i=\overline{1,n}$ либо в векторной форме

$$Y'=f(t,Y),\quad Y(t_0)=Y^0. \tag{3.7}$$

Теорема Коши. Пусть в системе (3.2) функции $f_i(t,y_1,...,y_n)$, $i=\overline{1,n}$, определены в $(n+1)$-мерной области D: $d=\left\{\left|t-t_0\right|\le a, \left|y_i-y_i^0\right|\le b_i, i=\overline{1,n}\right\}$. Пусть, далее, в области D функции $f_i(t,y_1,...,y_n)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и удовлетворяют условию Липшица по переменным $\left|f_i(t,\overline{y}_1,...,\overline{y}_n)-f_i(t,\overline{\overline{y}}_1,...,\overline{\overline{y}}_n)\right|\le N\sum_{j=1}^{n}\left|\overline{y}_j-\overline{\overline{y}}_j\right|$. Тогда на отрезке $[t_0,t_0+H]$, где $M=\max_i\min_D f_i$, $b=\min_i b_i$ существует единственное решение задачи Коши (3.7).

3.1. **Автономные системы. Точки покоя.** Важнейшей моделью нормальной системы являются уравнения движения механических систем. Роль неизвестных функций играют при этом координаты и скорости. Роль независимой переменной *t* играет время. Производные по *t* принято по традиции обозначать точкой $\frac{dy}{dt}\equiv\dot{y}$, $\frac{dy^2}{d^2t}\equiv\ddot{y}$,… В *n*-мерном пространстве переменных $y_1,...,y_n$ решение (3.3) описывает движение точки ($y_1(t),...,y_n(t)$) в зависимости от *t* как от параметра. Это пространство называют **фазовым пространством**. Кривую, описываемую параметрическими уравнениями (3.3) в фазовом пространстве, называют **траекторией** точки ($y_1,...,y_n$). Очевидно, что траектория точки ($y_1,...,y_n$) в фазовом пространстве есть проекция интегральной кривой (3.3) в пространстве переменных ($t,y_1,...,y_n$) на фазовое пространство.

В частном случае, когда неоднородности $f_i(.)$ не зависят явно от времени, система (3.2) называется **автономной:**

$$y_1'=f_1(y_1,...,y_n),\ y_2'=f_2(y_1,...,y_n),\ldots,y_n'=f_n(y_1,...,y_n).$$

В автономной системе скорость движения в фиксированной точке ($y_1,...,y_n$) остаётся неизменной с течением времени.

В фазовом пространстве траектория движения может обращаться в точку − постоянное решение. Такая точка называется **точкой покоя либо положением равновесия.**

Точка ($y_1,...,y_n$) является точкой покоя системы (3.2) тогда и только тогда, когда $f_i(t,y_1^0,...,y_n^0)=0$, $\forall t\in T$.

Пример. Найти точки покоя автономной системы $x'=y-x^2-x$, $y'=3x-x^2-y$. Координаты точки покоя (положения равновесия) системы определяются алгебраической системой $y - x^2 - x = 0$, $3x - x^2 - y = 0$, получающейся приравниванием нулю правых частей системы дифференциальной системы. Решая нелинейную алгебраическую систему, находим точки покоя $x = 0$, $y = 0$ и $x = 1$, $y = 2$. В пространстве переменных (t, x, y) уравнения $x = 0$, $y = 0$ и $x = 1$, $y = 2$ определяют две прямые, вдоль которых сохраняются постоянные значения функций $x(t)$ и $y(t)$. На фазовой плоскости xOy уравнения $x = 0$, $y = 0$ и $x = 1$, $y = 2$ определяют две неподвижные при изменении t точки – точки покоя рассмотренной системы.

Задачи для решения

Найти точки покоя следующих систем дифференциальных уравнений:

1. $x' = x^2 - y$**;** $y' = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3$**. 2.** $x' = (2x - y)(x - 2)$**;** $y' = xy - 2$**.**

3. $x' = x^2 - y$**;** $y' = x^2 - (y - 2)^2$**.**

3.2. Приведение системы дифференциальных уравнений к одному уравнению. Одним из подходов интегрирования нормальной системы уравнений (3.2) является приведение её к одному уравнению *n*-го порядка либо нескольким уравнениям порядка, меньшего, чем n. Пусть функции $f_i(t, y_1, ..., y_n)$ имеют непрерывные частные производные до $n-1$-го порядка по всем аргументам. Предположим, что подстановкой некоторого решения $y_1(t), ..., y_n(t)$ все уравнения (3.2) обращены в тождества. Продифференцируем, например, первое из этих тождеств по t $n-1$ раз, заменяя каждый раз производные $y_i'(t)$ в силу уравнений (3.2). Получим *n* тождеств вида

$$y_1' = f_1(t, y_1, ..., y_n),\ y_1'' = F_2(t, y_1, ..., y_n), \ldots,$$
$$y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(t, y_1, ..., y_n),\ y_1^{(n)} = F_n(t, y_1, ..., y_n). \tag{3.8}$$

Предположим, что в рассматриваемой области якобиан

$$J = \frac{D(f_1, F_2, ..., F_{n-1})}{D(y_2, y_3, ..., y_n)} = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial y_2 & \partial f_1/\partial y_3 & \cdots & \partial f_1/\partial y_n \\ \partial F_2/\partial y_2 & \partial F_2/\partial y_3 & \cdots & \partial F_2/\partial y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial F_{n-1}/\partial y_2 & \partial F_{n-1}/\partial y_3 & \cdots & \partial F_{n-1}/\partial y_n \end{vmatrix}$$

первых $n-1$ функций f_1, $F_2, \ldots, F_{n-1}$ по переменным $y_2, y_3, ..., y_n$ отличен от нуля: $J \neq 0$.

Разрешаем первые $n-1$ уравнений (3.8) относительно переменных $y_2, \ldots, y_n$. Они будут выражены через $t, y'_1, ..., y_1^{(n-1)}$. Подставляя найденные выражения в последнее из уравнений (3.8), получаем уравнение *n*-го порядка относительно неизвестной функции y_1:

$$y_1^{(n)} = F(t, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n-1)}). \tag{3.9}$$

Решая уравнение (3.9), находим функцию $y_1(t)$, а затем подставляем её производные в полученные выше выражения для $y_2(t),..., y_n(t)$.

Замечание. Проведенные преобразования показывают, что нормальную систему не всегда можно привести к уравнению *n*-го порядка. Например, система $y'_1 = y_1$, $y'_2 = y_2$, не приводится к уравнению второго порядка.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$x' = y - x^2, \quad y' = y(2x+3) - 2x^3 - 3x^2 - 2x. \tag{3.10}$$

Попытаемся свести систему (3.10) к уравнению второго порядка. Дифференцируя первое из уравнений (3.10) и заменяя образующиеся производные в силу (3.10), получаем систему

$$\begin{aligned} &x' = y - x^2; \\ &x'' = y' - 2xx' = 3y - 3x^2 - 2x. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Исключая y из второго уравнения (3.11), приводим систему (3.10) к виду, допускающему последовательное определение x и y: $x'' - 3x' + 2x = 0$, $y = x' + x^2$, откуда получаем $x = C_1e^t + C_2e^{2t}$, $y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + (C_1e^t + C_2e^{2t})^2$.

Пример 2. В некоторых случаях систему n уравнений первого порядка можно свести не к уравнению n-го порядка, а только к нескольким уравнениям меньшего порядка, чем n. Например, систему $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$ можно свести лишь к уравнениям $x'' = x$, $z' = z$ и невозможно свести к уравнению 3-го порядка.

Задачи для решения

Свести дифференциальные системы к дифференциальным уравнениям более высокого порядка:

1. $x'' = y$, $y'' = x$. **2.** $x'' = 3x + y$, $y' = -2x$. **3.** $x' = y^2 + \sin t$, $y' = x/2y$.

3.3. Интегрируемые комбинации. Другим подходом к интегрированию нормальной системы уравнений (3.2) является метод интегрируемых комбинаций. Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений системы (3.2), которое получается обычно путём арифметических операций и может быть легко проинтегрировано. Стремятся получить уравнение вида $d\Phi(t, y_1,..., y_n) = 0$ или уравнение, сводящееся заменой переменных к интегрируемому типу уравнений с одной неизвестной функцией.

Для отыскания интегрируемых комбинаций часто бывает удобно перейти к симметричной форме записи системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_1}{f_1(t, y_1,..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(t, y_1,..., y_n)} = \frac{dt}{1}. \tag{3.12}$$

В симметричной форме системы (3.12) все переменные входят равноправно, что часто облегчает нахождение интегрируемых комбинаций.

Прежде всего выбирают пары соотношений, допускающие разделение переменных. В других случаях полезно использовать свойство равных дробей:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_m}{b_m} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_m a_m}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_m b_m}, \tag{3.13}$$

выбирая произвольные коэффициенты k_i удобным образом, например, числитель есть дифференциал знаменателя, либо числитель есть полный дифференциал, а знаменатель равен нулю (в этом случае пропорции рассматриваются как равенства произведений средних и крайних членов).

Пример 1. Решить систему $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$. Из первого равенства нашей системы, допускающего разделение переменных, получаем $xdx - ydy = 0$ либо $d(x^2 - y^2) = 0$, откуда выписываем первый интеграл $x^2 - y^2 = C_1$. Запишем для исследуемой системы свойство (3.13): $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z} = \frac{k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz}{k_1 y + k_2 x + k_3 z}$. Полагая $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, получаем $\frac{dz}{z} = \frac{dx + dy}{y + x}$, откуда $\frac{d(x+y)}{y+x} = \frac{dz}{z}$ и, следовательно, другой интеграл имеет вид $x + y = C_2 z$. Якобиан найденных интегралов по переменным x и y равен $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x+y)$. Матрица Якоби имеет ранг 2 при $x + y \neq 0$. Следовательно, при $x \neq -y$ найденные интегралы независимы, и их совокупность даёт общий интеграл исходной системы.

Пример 2. Решить систему $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{dt}{1}$. Запишем для заданной системы свойство (3.13): $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz}{k_1(y-z) + k_2(z-x) + k_3(x-y)}$.

Полагая $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, получаем $\frac{dz}{x-y} = \frac{dx + dy + dz}{0}$, откуда $d(x+y+z) = 0$ и, следовательно, один из первых интегралов имеет вид $x + y + z = C_1$. Полагая $k_1 = x$, $k_2 = y$, $k_3 = z$, получаем $\frac{dz}{x-y} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$, откуда $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ и, следовательно, другой первый интеграл имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Задачи для решения

Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $x' = x^2 - y^2$, $y' = 2xy$. **2.** $x' = x/y$, $y' = y/x$. **3.** $x' = y/(x-y)$, $y' = x/(x-y)$.

4. $x' = \sin x \cos y$, $y' = \cos x \sin y$. **5.** $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{ty}$. **6.** $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{yt} = \frac{dy}{xt}$.

7. $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. **8.** $\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$. **9.** $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. **10.** $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$.

ГЛАВА 4. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ

В приложениях дифференциальных уравнений начальные значения и правые части обычно известны приближенно, поскольку определяются экспериментально. Поэтому правомерен вопрос о том, как изменится решение задачи при небольших изменениях начальных значений и зависит ли решение от этих величин непрерывно.

Аналогичный вопрос можно поставить и для неограниченного временного промежутка. Он составляет содержание теории устойчивости, у истоков которой стояли выдающиеся математики А. М. Ляпунов, Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский и которой посвящена специальная гл. 8.

§1. Непрерывная зависимость решений от параметров

Будем рассматривать начальную задачу для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\mu),\ y = (y_1,...,y_m),\ f = (f_1,...,f_m) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0,\ y_0 = (y_{10},...,y_{m0}). \tag{1.2}$$

Здесь $\mu = (\mu_1,...,\mu_s)$ – вектор, описывающий параметры $\mu_1,...,\mu_s$, входящие в правую часть системы.

Исследуем характер зависимости решения этой задачи от $y_{10},...,y_{m0}$ и $\mu_1,...,\mu_s$. Отметим, что исследование зависимости решения от начальных значений $y_1,...,y_m$ и t_0 можно свести к задаче об изучении зависимости от параметров в правой части системы. Действительно, сделаем в (1.1) замену:

$$y_i = y_{i0} + z_i \quad (i = 1,\dots, m), \qquad t = t_0 + \tau. \tag{1.3}$$

Значения y_{i0} и t_0 входят в правые части (1.3) как параметры наряду с параметрами $\mu_1,...,\mu_s$. Задача сводится, таким образом, к исследованию зависимости z_i от параметров y_{i0}, t_0. Имеет место и обратная редукция: изучение зависимости от параметра можно рассматривать как некоторый частный вид зависимости решений от начальных значений. В самом деле, поскольку параметры $\mu_1,...,\mu_s$ в (1.1) фиксированы и принимают, например, значения μ_{k0} ($k = 1,\dots, s$), то к уравнениям (1.1) с начальными условиями (1.2) можно добавить уравнения вида $\frac{d\mu_k}{dt} = 0$ с начальными условиями $\mu_k(t_0) =$ $= \mu_{k0}$. Тогда получим новую систему:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu),\ \frac{d\mu}{dt} = 0,\ y_i(t_0) = y_{i0},\ \mu_k(t_0) = \mu_{k0}. \tag{1.4}$$

Теперь вопрос о зависимости y_i от μ_k сводится к исследованию зависимости решений задачи (1.4) от начальных значений μ_{10}, …, μ_{s0}.

Пусть правые части $f_i(y, t, \mu)$, определенные в некотором $(m+s+1)$-мерном параллелепипеде $D=\{\,|t-t_0|\le a,\ |y-y_0|\le b,\ |\mu_k-\mu_{k0}|\le c_k\}$, непрерывны в D по совокупности аргументов $y_1,\dots,y_m$, t, $\mu_1,\dots,\mu_s$ вместе с частными производными $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i,\ j=1,\dots,m)$.

Из непрерывности следуют справедливые в D неравенства

$$|f_i(y,t,\mu)|\le M,\quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y,t,\mu)\right|\le N. \tag{1.5}$$

Определим величины H и T как

$$H=\min\left\{a,\frac{\min b_i}{M}\right\},\ T=t_0+H. \tag{1.6}$$

При каждом фиксированном наборе значений μ_k $|\mu_k-\mu_{k0}|\le c_k$, для (1.1), (1.2) выполняются условия существования и единственности решения и условия применимости алгоритма Эйлера. Ломаные Эйлера в силу равномерности всех оценок при ${}^{(n)}h\to 0$ будут равномерно относительно $\mu_1,\dots,\mu_s$, t сходиться на сегменте $[t_0,T]$ к решению начальной задачи. При этих условиях сами ломаные Эйлера будут непрерывно зависеть от $\mu_1,\dots,\mu_s$, поскольку на любом r-м шаге $[t_{r-1},t_r]$ $(1\le r\le n)$ они записываются в виде

$$^{(n)}y_i(t)={}^{(n)}y_i(t_{r-1})+f_i({}^{(n)}y_i(t_{r-1}),t_{r-1},\mu)(t-t_{r-1}), \tag{1.7}$$
$$t_{r-1}\le t\le t_r\quad (i=1,\dots,m),$$

а $f_i(y,t,\mu)$ зависят от $\mu_1,\dots,\mu_s$ непрерывно. Поэтому и предельные (при ${}^{(n)}h\to 0$) функции, являющиеся решением задачи (1.1), (1.2), непрерывно зависят от параметров $\mu_1,\dots,\mu_s$. Из проведенных рассуждений следует справедливость теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров.

Теорема 1 (о непрерывной зависимости решения от параметров). Если функции f_i, $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $(i,j=1,\dots,m)$ непрерывны по всем переменным $y_1,\dots,y_m$, t, $\mu_1,\dots,\mu_s$ в D, то решение начальной задачи (1.1), (1.2) непрерывно по t и параметрам $\mu_1,\dots,\mu_s$ при $t\in[t_0,T]$, $|\mu_k-\mu_{k0}|\le c_k$.

Пусть теперь начальные значения t_0, y_{i0} являются параметрами, меняющимися в области $|t_0-t_0^0|\le\delta$, $|y_{i0}-y_{i0}^0|\le\delta_i$. Нетрудно видеть, что если потребовать выполнения условий теоремы 1 в параллелепипеде

$\widetilde{D} = \{|t_0 - t_0^0| \le a + \delta,\ |y_{i0} - y_{i0}^0| \le b_i + \delta_i,\ |\mu_k - \mu_{k0}| \le c_k\}$, то решение начальной задачи (1.1), (1.2) будет непрерывным по $t, t_0, y_0, ..., y_{m0}, \mu_1, ..., \mu_s$ при $|t - t_0^0| \le H,\ |y_{i0} - y_{i0}^0| \le \delta_i,\ |t - t_0^0| \le \delta,\ |\mu_k - \mu_{k0}| \le c_k$; H определяется выражением (1.6), где M – постоянная, ограничивающая $|f_i(y, t, \mu)|$ в $\widetilde{D}$.

Приведем одномерный аналог теоремы. Рассматриваем задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu),\quad y\Big|_{t=t_0} = y^0. \tag{1.8}$$

Если μ меняется, то мы имеем не одно уравнение, а семейство уравнений, в котором величина μ является параметром. Решение задачи (1.8), таким образом, зависит не только от *t*, но и от μ. Более того, решение зависит как от параметров, так и от t_0 и y^0: $y(t, \mu, t_0, y^0)$. Может быть также несколько входящих в уравнение параметров:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \mu_1, \ldots, \mu_k),\quad y\Big|_{t=t_0} = y^0. \tag{1.9}$$

Заменой переменных $t - t_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$ можно параметры t_0, y^0 перевести в разряд параметров μ_1, …, где $t_0 = \mu_{k+1}$, $y^0 = \mu_{k+2}$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = f(\xi + t_0, \eta + y^0, ..., \mu_1, ..., \mu_{k+2})\widetilde{f}(\xi, \eta, \mu_1, ..., \mu_{k+2}),\ \eta|_{\xi=0} = 0.$$

Поэтому можно в задаче (1.8) или (1.9) исследовать лишь зависимость от μ_1, …, μ_k, считая t_0 и y_0 фиксированными числами. Рассмотрим задачу (1.8), где t_0, y^0 – фиксированные числа.

Теорема 2 (о непрерывной зависимости решения от параметра). Пусть $f(t, y, \mu)$ непрерывна по совокупности аргументов в области $G = \{\ |t - t_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$, $|\mu - \mu_0| \le C\ \}$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \le L\,|y_1 - y_2|,$$

где $L = \text{const}$, (t, y_1, μ), (t, y_2, μ) – любые две точки, принадлежащие G. Тогда на отрезке $|t - t_0| \le H$, $H = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \sup|f|$ существует семейство решений $y(t, \mu)$ задачи (1.8) (μ – параметр семейства). Причем функция $y(t, \mu)$ непрерывна по совокупности аргументов при $|\mu - \mu_0| \le C$, $|t - t_0| \le H$.

Замечание. Как следствие теоремы 2 можно утверждать непрерывную зависимость $y(t, \mu)$ относительно μ в любой точке отрезка $|\mu - \mu_0| \le C$. На отрезке $|t - t_0| \le H$ имеет место неравенство $|y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)| \le \varepsilon$, если $|\Delta\mu| < \delta(\varepsilon)$. Это означает, что данная кривая $y(t, \mu + \Delta\mu)$ находится в ε - трубке возле кривой $y(t, \mu)$ на всем отрезке $|t - t_0| \le H$.

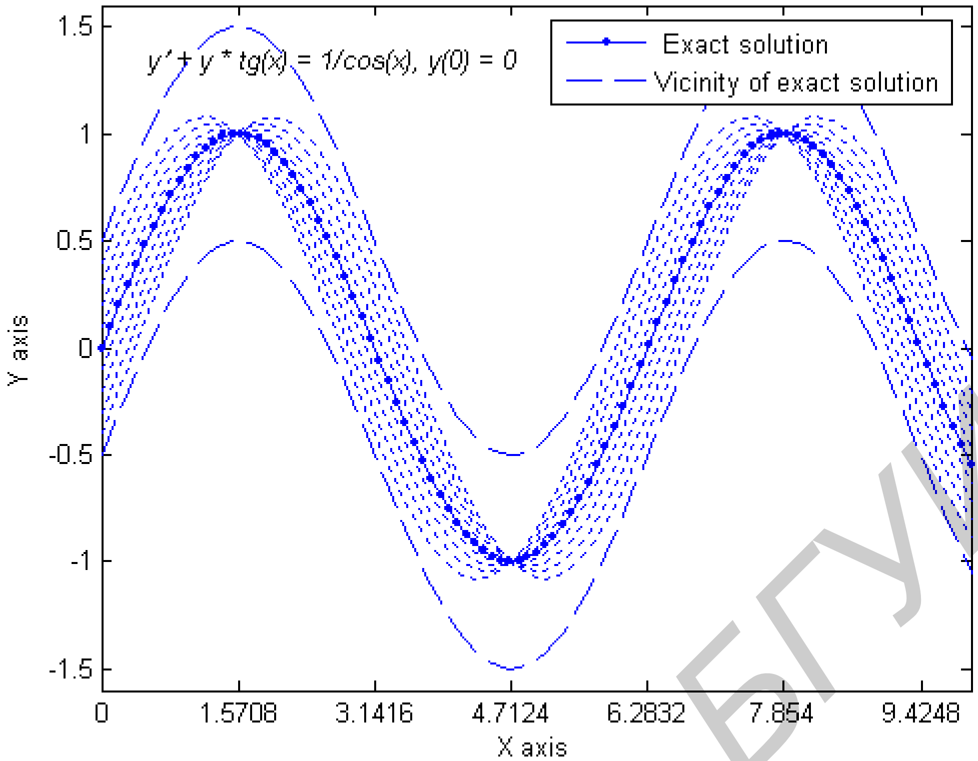
Пример 1. Рассмотрим следующую задачу Коши: $y' + ytgx = 1/\cos x$, $y(0) = 0$.

Выписываем общее решение уравнения $y(x) = \sin x + C\cos x$. Отсюда следует $y(0) = \sin(0) + C\cos(0) = C$, $C = 0$. Функция $y(x) = \sin x$ является решением нашей задачи Коши. Введем обозначение $\mu = C$, $t = x$. Теперь в качестве начального выберем следующее возмущенное условие: $y(0) = \mu + \Delta\mu$ (у нас $\mu = 0$). Оценим по модулю следующую разность:

$$|y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)| = |\sin t + (\mu + \Delta\mu)\cos t - \sin t - \mu\cos t| = |\Delta\mu\cos t| \le |\Delta\mu|. \quad (1.10)$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta\mu$, такое, что при $|\Delta\mu| < \varepsilon$ выполняется неравенство (1.10). Итак, при $|\Delta\mu| < \varepsilon$ интегральные кривые $y(t, \mu + \Delta\mu)$ возмущенной задачи Коши попадают в ε-трубку интегральной кривой $y(t, \mu)$ исходной задачи Коши.

```
syms x1 y1 y C % инициализация символьных переменных
y = dsolve('Dy = -y*tan(x)+1/cos(x)','x'); %решаем ДУ
pretty(simplify(y)); %выводим на экран решение
x1 = 0:0.1:4*pi; %задаем диапазон значений
y = subs(y,'x',x1); %подставляем из диапазона в уравнение
y1 = subs(y,'C1',0); %подставляем в уравнение C = 0
plot(x1,y1,'.-'); %рисуем полученную кривую
hold on;
plot(x1,y1+0.5,'--');
plot(x1,y1-0.5,'--');
for C = 0.1:0.1:0.4 %варьируем константу C
y1 = subs(y,'C1',C); %подставляем константу в уравнение
plot(x1,y1,':'); %рисуем полученную вариацией кривую
y1 = subs(y,'C1',-C); %подставляем значение –C в уравнение
plot(x1,y1,':'); % выводим кривую на печать
end;
% оформляем график
legend(' Exact solution','Vicinity of exact solution');
text(.55,1.35,'\ity\prime + y * tg(x) = 1/cos(x), y(0) = 0')
axis([0.0 10.0 -1.6 1.6]);% задаем интервалы на осях OX и OY
xlabel('X axis');
ylabel('Y axis'); % именуем оси OX и OY
set(gca,'XTick',0:pi/2:3*pi); % интервал обозначений на оси OX
set(gca,'XTickLabel',{'0','pi/2','pi','3/2*pi','2*pi',...
'5/2*pi', '3*pi'}); % оцифровка оси OX
```



Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения, зависящего от параметра μ:

$$y' = P(t,\mu)y + Q(t,\mu), \quad y\Big|_{t=t_0} = y^0. \tag{1.11}$$

Пусть $P(t,\mu)$, $Q(t,\mu)$ непрерывны по совокупности аргументов в области $G = \{0 \le t \le T,\ |\mu - \mu_0| \le C\}$. Убедимся, пользуясь явным представлением для решения $y(t,\mu)$, что функция $y(t,\mu)$ непрерывна по совокупности переменных t, μ в области G. Величина y^0 считается фиксированной. Используя результаты первой главы для линейных уравнений, получаем

$$y(t,\mu) = y^0 e^{\int_0^t P(\tilde{\tau},\mu)d\tilde{\tau}} + \int_0^t e^{\int_r^t P(\tilde{\tau},\mu)d\tilde{\tau}} Q(\tau,\mu)d\tau. \tag{1.12}$$

Согласно теоремам математического анализа о непрерывности интегралов от входящих в подынтегральное выражение параметров и пределов интегрирования следует, что интеграл $\int_r^t P(\tilde{\tau},\mu)d\tilde{\tau}$ непрерывен при $0 \le t \le T$, $0 \le \tau \le t$, $|\mu - \mu_0| \le C$, следовательно, $\exp\int_r^t P(\tilde{\tau},\mu)d\tilde{\tau}$ непрерывна в той же области. Отсюда следует непрерывность обоих слагаемых в (1.12), а значит, и самого $y(t,\mu)$ в области G.

Предположим, что в задаче (1.11) коэффициент $Q(t,\mu)\equiv 0$, а P от μ не зависит: $P(t,\mu)=P(t)$. Причем $P(t)$ непрерывен при $t\ge 0$; параметром считается y^0. Докажем, что если $P(t)\le 0$, то $y(t,y^0)$ непрерывна по y^0 равномерно относительно t при $t\ge 0$. Действительно, из формулы (1.12) имеем $y(t,y^0)=y^0 e^{\int_0^t P(\tilde t)d\tilde t}$. Отсюда сразу получаем следующее представление: $\Delta y=y(t,y^0+\Delta y^0)-y(t,y^0)=\Delta y^0 e^{\int_0^t P(\tilde t)d\tilde t}$. Поэтому, если $P(t)\le 0$, то $|\Delta y|\le|\Delta y^0|$ и, таким образом, $|\Delta y|<\varepsilon$ при $|\Delta y^0|<\varepsilon=\delta(\varepsilon)$ для всех $t\ge 0$, что и требовалось доказать.

Докажем, что если $P(t)\ge\alpha>0$, то утверждение о непрерывности $y(t,y^0)$ по y^0, равномерной относительно t при $t\ge 0$, неверно. Рассуждаем от противного. Допустим, что имеет место утверждение, доказанное ранее, т.е. для $\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)$ такое, что $|\Delta y|<\varepsilon$ для всех $t\ge 0$, если $|\Delta y^0|<\varepsilon$. Возьмем $|\Delta y^0|=\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$. В силу условия $P(t)\ge\alpha>0$ имеем $\exp\int_0^t P(\tilde t)d\tilde t\ge\exp(\alpha\, t)$ и тем самым экспонента $\exp\int_0^t P(\tilde t)d\tilde t$ при достаточно большом t становится больше $4\frac{\varepsilon}{\delta}$. Но тогда из представления $\Delta y=\Delta y^0 e^{\int_0^t P(\tilde t)d\tilde t}$ получаем $|\Delta y|>\frac{\delta}{2}\cdot 4\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}=2\varepsilon$, что противоречит неравенству $|\Delta y|<\varepsilon$.

Замечание. Данный пример показывает, что теорема 2 не распространяется на бесконечный промежуток изменения t и для ее справедливости нужны еще некоторые дополнительные требования, например, условие на знак $P(t)$.

§2. Дифференцирование по параметрам и начальным значениям

Кратко исследуем возможность дифференцирования решений по параметрам и начальным значениям. Не ограничивая общности, достаточно рассмотреть этот вопрос для какой-либо одной переменной α. Запишем систему в виде

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(y(t,\alpha),t,\alpha)\quad(i=1,\ldots,m).\tag{2.1}$$

Будем считать, что выполнены условия теоремы 1. Тем самым решение начальной задачи для системы (2.1) существует и является непрерывной функцией параметра α при $|\alpha-\alpha_0|<c$. Построим конечно-разностные отношения – функции $z_i(t,\Delta\alpha)$:

$$z_i(t,\Delta\alpha) = \frac{y_i(t,\alpha_0+\Delta\alpha) - y_i(t,\alpha_0)}{\Delta\alpha}, \qquad (2.2)$$

которые являются решениями следующей системы:

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{\Delta\alpha}\{\ f_i(y(t,\alpha_0+\Delta\alpha),t,\alpha_0+\Delta\alpha) - f_i(y(t,\alpha_0),t,\alpha_0)\}. \qquad (2.3)$$

Из (2.2) получаем следующее представление:

$$y_i(t,\alpha_0+\Delta\alpha) = y_i(t,\alpha) + z_i(t,\Delta\alpha)\Delta\alpha\,. \qquad (2.4)$$

Предположим, что дополнительно к условиям теоремы 1 функции $f_i(y,t,\alpha)$ в области $\widetilde{D}$ обладают непрерывными частными производными по α. Тогда пользуясь представлением (2.4) и тождеством Адамара, запишем (2.4) в виде

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t,\Delta\alpha) z_k(t,\Delta\alpha) + \varphi_i(t,\Delta\alpha), \qquad (2.5)$$

где

$$a_{ik}(t,\Delta\alpha) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(y_1(t,\alpha_0),\ \ldots,\ y_k(t,\alpha_0) + \theta z_k\,\Delta\alpha\,,\ \ldots,\ y_m(t,\alpha_0+\Delta\alpha),\ \alpha_0+\Delta\alpha\ )\ d\theta\,, \quad (2.6)$$

$$\varphi_i(t,\Delta\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial\alpha}(y_1(t,\alpha_0),\ldots,y_m(t,\alpha_0),\alpha_0+\theta\Delta\alpha)d\theta\,. \qquad (2.7)$$

Здесь $\dfrac{\partial f_i}{\partial\alpha}$ равны нулю, если α является одним из y_{i0} и отличны, вообще говоря, от нуля, если α является одним из μ_k. Начальные условия для функций $z_i(t,\Delta\alpha)$ также имеют различный вид в зависимости от того, является ли параметр α_0 каким-либо из начальных значений задачи или нет. Если $\alpha_0 \neq\ y_{j0}$ и поскольку $y_i(t_0,\alpha_0) = y_{i0}$, $y_i(t_0,\alpha_0+\Delta\alpha) = y_{i0}$, то в силу (2.4) $z_i(t,\Delta\alpha) = 0$. Если же $\alpha_0\ =\ y_{j0}$, то $y_i(t_0,\alpha_0+\Delta\alpha) = (\alpha_0+\Delta\alpha)\delta_{ij}$ и $z_i(t,\Delta\alpha) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера).

Из (2.6), (2.7) видно, что $a_{i,k}(t,\Delta\alpha)$ и $\varphi_i(t,\Delta\alpha)$ – непрерывные функции t и $\Delta\alpha$ при $|\,t-t_0\,| \leq H$, $|\,\Delta\alpha\,| \leq c$. Действительно, a_{ik} и φ_i зависят от t и $\Delta\alpha$ как сложные функции: и непосредственно, и через $y(t,\alpha_0+\Delta\alpha)$. Но в силу непрерывности частных производных от функций f_i и доказанной выше непрерывности $y(t,\alpha_0+\Delta\alpha)$ по t и $\Delta\alpha$ (непрерывность $y(t,\alpha)$ по t и $\alpha = \alpha_0+\Delta\alpha$ эквивалентна непрерывности $y(t,\alpha_0+\Delta\alpha)$ по t и $\Delta\alpha$) эти сложные функции будут также непрерывными по t и $\Delta\alpha$.

Поэтому правые части (2.5) удовлетворяют условиям теоремы 1, из которой следует, что $z_i(t,\Delta\alpha)$ – непрерывная функция t и $\Delta\alpha$ при $|\,t-t_0\,| \leq H$, $|\,\Delta\alpha\,| \leq c$. Это означает, в частности, что существуют предельные значения

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} z_i(t,\Delta\alpha) = z_i(t,0) = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{y_i(t,\alpha_0+\Delta\alpha) - y_i(t,\alpha_0)}{\Delta\alpha} \equiv \left.\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}, \qquad (2.8)$$

т. е. производные $\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}$ при $\alpha=\alpha_0$. Эти производные удовлетворяют (2.5), где $a_{ik}=a_{ik}(t,0)$, $\varphi_i=\varphi_i(t,0)$. Из (2.6), (2.7) видно, что эти величины представляют собой $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(y(t,\mu_1,...,\mu_k,y_{10},...,y_{m0}),t,\mu_1,...,\mu_s)$ и $\frac{\partial f_i}{\partial\alpha}(\cdot)$ при $\alpha=\alpha_0$. Поэтому, пользуясь той же теоремой 1, можно сделать заключение о непрерывной зависимости производных $\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}$ от t параметров и начальных значений.

Теорема 3. Если функции $f_i(y,t,\mu)$ непрерывны вместе с частными производными по $y_1,...,y_m$ $\mu_1,...,\mu_s$ в $\widetilde{D}$, то существуют производные от решения задачи (1.1), (1.2) по начальным значениям $y_{10},...,y_{m0}$ и параметрам $\mu_1,...,\mu_s$, непрерывные при $|t-t_c|\le H$, $|y_{i0}-y_{i0}^0|\le\delta_i|$, $|\mu_k-\mu_{k0}|\le c_k$ $(i=1,...,m;\ k=1,...,s)$.

Замечание. В теореме сформулированы условия существования первых непрерывных производных по параметрам решения задачи Коши. Вопрос о существовании и непрерывности производных высших порядков по параметрам исследуется аналогично. Можно показать, что существование непрерывных частных производных до порядка k функций $f_i(y,t,\mu)$ является достаточным условием существования непрерывных частных производных k-го порядка по параметрам $y_{10},...,y_{m0}$, $\mu_1,...,\mu_s$ решения задачи (1.1), (1.2). Существование непрерывных частных производных $\frac{\partial^k y_i}{\partial\alpha^k}$ $(i=1,...,m;$ $k=1,...,r+1)$ позволяет при достаточно малых $\Delta\alpha=\alpha-\alpha_0$ искать решение задачи (1.1), (1.2) в виде асимптотического разложения

$$y_i(t,\alpha) = y_i(t,\alpha_0) + \sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^k y_i}{\partial\alpha^k}(t,\alpha_0)\frac{(\Delta\alpha)^k}{k!} + O[(\Delta\alpha)^{r+1}]. \qquad (2.9)$$

Идея разложения решения по малому параметру $\Delta\alpha$, от которого правые части зависят регулярно, принадлежит выдающемуся французскому математику Анри Пуанкаре. На формуле (2.9) основаны многие методы асимптотического исследования и численного интегрирования дифференциальных уравнений, а также некоторые методы теории устойчивости.

§3. Уравнения в вариациях. Линеаризация

Предельные при $\Delta\alpha \to 0$ значения функций $z_i(t, \Delta\alpha)$ – функции $z_i(t,0)$ = $= \left.\dfrac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}$ – являются решениями задачи Коши (для определенности рассмотрим случай, когда α не входит явно в правые части f_i и равно y_{j0}):

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(y,t) z_k\,, \quad z_i(t_0, 0) = \delta_{ij}\,, \tag{3.1}$$

которую получим в результате предельного перехода при $\Delta\alpha \to 0$ в (2.5). Нетрудно видеть, эта же система может быть получена путем формального дифференцирования исходной задачи (1.1), (1.2) по параметру α. Уравнения (3.1) часто называются системой уравнений в вариациях относительно рассматриваемого решения $y(t, \alpha)$.

Переход к уравнениям в вариациях связан с идеей линеаризации уравнений (1.1) в окрестности некоторого выбранного решения. Пусть, например, свойства какого-то частного решения y_i $(i = 1,...,m)$ нам известны и нужно исследовать другое решение $\overline{y_i}$ $(i = 1,...,m)$ этого же уравнения, близкое к y_i. Так, например, y_i и $\overline{y_i}$ могут различаться по начальным значениям и т.п. Введем величины $\Delta y_i = \overline{y_i} - y_i$ $(i = 1,...,m)$. Предполагая, что правые части уравнений достаточно гладки, подставим $\overline{y_i} = y_i + \Delta y_i$ в (2.1) и разложим f_i по степеням Δy_i. Тогда получается уравнение вида

$$\frac{d}{dt}(\Delta y_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t)\Delta y_k + \varphi_i(\Delta y_1,\ \ldots,\ \Delta y_m, t), \quad a_{ik}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(y,t)\,. \tag{3.2}$$

Если параметр, значениями которого различаются y_i и $\overline{y_i}$, явно не входит в f_i, то $\varphi_i = o(\,|\Delta y|\,)$, получаем линейную систему уравнений

$$\frac{d}{dt}(\delta\, y_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t)\delta\, y_k\,, \tag{3.3}$$

которая представляет собой систему в вариациях, так как совпадает с точностью до обозначений с (3.1). Если рассмотрение ведется на конечном промежутке $[\,t_0, T\,]$, то в силу доказанных выше теорем y_i и $\overline{y_i}$ близки на всем $[\,t_0, T\,]$ (так как их начальные значения или правые части уравнений отличаются мало) и, зная y_i, можно получить приближенное выражение для $\overline{y_i}$ в виде $y_i + \Delta y_i$, где Δy_i определяется из линейных уравнений (3.4).

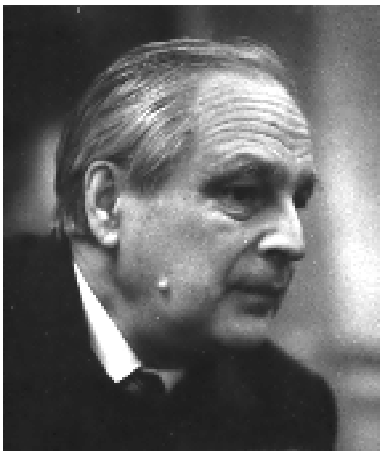
Если же, зная y_i, мы хотим исследовать $\overline{y_i}$ на неограниченном промежутке, то задача становится сложнее и относится к теории устойчивости. Линейные уравнения изучены значительно полнее, чем системы общего вида. Поэтому процесс линеаризации – замена (2.1) уравнениями вида (3.4) – приводит в тех случаях, когда эта операция законна, к серьезному упрощению задачи.

Замечание. В теореме 3 рассматривался вопрос о существовании производных решения по параметрам $y_{10},\dots,y_{m0}$, $\mu_1,\dots,\mu_s$, входящем в начальные условия и правые части системы (1.1), (1.2). Аналогично может быть исследован вопрос и о существовании производных $\dfrac{dy_i}{dt_0}$. Эти производные также являются решениями начальной задачи для системы в вариациях

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial t_0}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(y,t)\frac{\partial y_k}{\partial t_0}, \tag{3.4}$$

получающейся дифференцированием системы (1.1) по t_0 и является линейной системой относительно $\dfrac{\partial y_i}{\partial t_0}$. Чтобы получить начальные условия задачи, заменим исходную систему дифференциальных уравнений (1.1) системой интегральных уравнений $y_i(t)=y_{i0}+\int\limits_{t_0}^{t}f_i(y,\tau)d\upsilon$. Если подставить решение $y(t)$ исходной системы, то мы получим тождества. Дифференцируя тождества по t_0, получим $\dfrac{\partial y_i}{\partial t_0}=-f(y(t_0),t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}\dfrac{\partial y_k}{\partial t_0}\right)d\tau$, откуда при $t=t_0$ в силу (1.2) будем иметь $\left.\dfrac{\partial y_i}{\partial t_0}\right|_{t=t_0}=-f_i(\ y_{10},\ \dots,\ y_{m0},\ t_0)$. Эти условия и представляют собой начальные данные для системы (3.4).

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА



Красовский Николай Николаевич. Выдающийся математик. Ученик Е. А. Барбашина, И. Г. Малкина. Родился 7 сентября 1924 г. в Свердловске. В 1949 г. окончил Уральский политехнический институт (УПИ) (Свердловск). Специалист в области математики и механики. Избран членом-корреспондентом по Отделению механики и процессов управления (механика) в 1964 г., академиком по Отделению механики и процессов управления (теория устойчивости и регулирования) в 1968 г. Награжден золотой медалью им. А. М. Ляпунова за цикл статей «Работы по теории устойчивости и по теории оптимального управления» (1992 г.); золотой медалью им. М. В. Ломоносова за выдающиеся достижения в области математической теории управления и теории дифференциальных игр (1996 г.). Основатель крупной научной школы. В настоящее время является главным научным сотрудником отдела динамических систем Уральского филиала института математики и механики РАН, членом президиума Российской Академии Наук. Среди его учеников академики: президент РАН Ю. С. Осипов, А. Б. Куржанский, А. И. Субботин, члены-корреспонденты РАН А. Г. Ченцов, В. Е. Третьяков и многие другие члены-корреспонденты РАН, доктора и кандидаты наук, инженеры и преподаватели.

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§1. Линейные однородные уравнения *n*-го порядка

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,\ x \in X,\ X = [x_0, x^*], \qquad (1.1)$$

где функции $a_i(x)$ непрерывны при $x \in X$.

Если $a_0(x_0) = 0$, то точка $x = x_0$ является особой точкой уравнения (1.1), поскольку в ней меняется порядок уравнения. Если $a_0(x_0) \neq 0$ в рассматриваемой области переменной, то уравнение (1.1) делением на $a_0(x)$ приводится к виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,\ x \in X. \qquad (1.2)$$

Далее будем рассматривать именно уравнения вида (1.2). Решением уравнения (1.2) называется n раз непрерывно дифференцируемые функции $y_1(x),\ldots,y_m(x)$, которые при подстановке в уравнение обращают его в тождество. Если функции $y_1(x),\ldots,y_m(x)$ являются решениями уравнения (1.2), то любая их линейная комбинация $\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$, где $C_1,\ldots,C_m$ – произвольные постоянные, снова есть решение уравнения (1.2).

Задача Коши для уравнения (1.1) формулируется следующим образом:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (1.3)$$

Если функции $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, непрерывны на интервале X, то решение задачи Коши (1.3) существует и единственно на X.

1.1. Определитель Вронского. Пусть функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ непрерывны на интервале X со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно. Функциональный определитель вида

$$\Delta[\varphi_1,\ldots,\varphi_n] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \ldots & \varphi'_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (1.4)$$

называется определителем Вронского (вронскианом) для системы функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$, $x \in X$.

Теорема 1. Если определитель Вронского решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ уравнения (1.2) тождественно равен нулю на интервале X, тогда эти решения линейно зависимы на X. Если определитель Вронского решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$

уравнения (1.2) не равен нулю ни в одной точке интервала X, тогда эти решения являются линейно независимыми на X.

Замечание. Если $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ – произвольные функции, то из равенства нулю их определителя Вронского, вообще говоря, не следует их линейная зависимость. Рассмотрим, например, две функции $\varphi_1(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\end{cases}$ $\varphi_2(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le 1.\end{cases}$ Они линейно независимы на отрезке [-1; 1], так как условие $C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)\equiv 0$ на отрезке [-1; 0] дает $C_2=0$, а на отрезке [0; 1] дает $C_1=0$. Но определитель Вронского функций на каждой половине отрезка имеет нулевой столбец и поэтому тождественно равен нулю. Предположив, что функции являются решениями некоторого уравнения второго порядка, мы придем к противоречию с результатом теоремы.

1.2. Фундаментальная система решений. Нормальная фундаментальная система решений. Фундаментальной системой решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ уравнения (1.2) (**ФСР**) называются любые n линейно независимых решений этого уравнения.

Теорема 2. Линейное однородное уравнение всегда имеет фундаментальную систему решений. По заданной системе n линейно независимых функций $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ можно построить единственное уравнение (1.2), для которого эти функции образуют фундаментальную систему решений.

Если $y(x)$ – неизвестная функция, то искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\Delta\left[y_1,\ldots,y_n,y\right]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x)\\ y_1^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) & y^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=0.$$

Действительно, добавляя к n линейно независимым функциям $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ любое другое решение искомого уравнения n-го порядка, получаем систему из $n+1$ решений этого уравнения, которые линейно зависимы, а значит, их вронскиан равен нулю.

Замечание. Множество решений линейного однородного уравнения образует линейное пространство. Любая фундаментальная система решений является базисом этого пространства. Существует бесконечно много фундаментальных систем решений однородного уравнения, переходящих одна в другую с помощью невырожденного линейного преобразования.

Общее решение линейного однородного уравнения (1.2) имеет вид $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, где $y_1(x), \ldots, y_2(x)$ – фундаментальная система решений; $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Если функция $y_i(x), i = \overline{1, n}$, фундаментальной системы имеет единичную матрицу начальных значений в точке $x = x_0$, т.е. $y_i^{(j)}(x_0) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ – символ Кронекера, то система $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется **нормальной фундаментальной системой** решений при $x = x_0$.

Теорема 3. Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – нормальная при $x = x_0$ фундаментальная система решений. Тогда решение задачи Коши

$$\begin{gathered} y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0, \\ y(x_0) = A_1, \quad y'(x_0) = A_2, \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = A_n \end{gathered} \tag{1.5}$$

имеет следующий вид:

$$y = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \ldots + A_n y_n(x). \tag{1.6}$$

Если для произвольных функций A_i решению задачи Коши (1.5) может быть придана форма (1.6), то входящие в нее функции $y_1(x), \ldots, y_2(x)$ образуют нормальную при $x = x_0$ фундаментальную систему решений.

Замечание. Формулу (1.6) удобно представить как скалярное произведение строки функций, образующих нормальную ФСР, на столбец начальных условий.

1.3. Понижение порядка уравнения. Для произвольного линейного уравнения с переменными коэффициентами не существует общего метода отыскания частных решений для построения фундаментальной системы.

В некоторых случаях удается найти частное решение путем подбора, а затем, используя полученное решение, понизить порядок уравнения на единицу. Например, зная частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения, можно понизить порядок уравнения с помощью замены $y(x) = y_1(x) \int u(x) dx$ или, что то же самое, $u = (y/y_1)'$. На практике удобнее положить $y = y_1(x) z$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Для $z(x)$ получается линейное уравнение, содержащее только производные от $z(x)$, но не саму функцию $z(x)$. После этого полагают $u = z'$ и т.д.

Например, для уравнения второго порядка $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$, положив $y = y_1(x) z$, для функции $z(x)$ получаем уравнение $y_1 z'' + (2y_1' + a_1(x) y_1) z' = 0$. Полагая $u = z'$ и разделив переменные, находим $u = \dfrac{C_1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x) dx}$, откуда $y = C_1 y_1(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2 y_1(x).$

Если известны $(n-1)$ частных решений, то в результате последовательного понижения порядка получается уравнение первого порядка, интегрирующееся в квадратурах.

1.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида (1.1) , где коэффициенты a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n – некоторые действительные числа. Для нахождения частных решений уравнения (1.1) составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_n k + a_n = 0. \qquad (1.7)$$

Оно получается из уравнения (1.1) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями k, причем сама функция заменяется единицей. Левая часть уравнения (1.7) называется характеристическим полиномом. Полином n-й степени имеет ровно n корней. Корни будут действительными и комплексными, среди которых могут быть совпадающие – кратные корни.

Общее решение дифференциального уравнения (1.1) строится в зависимости от вида корней характеристического полинома:

I. Каждому действительному простому корню k в общем решении соответствует слагаемое вида $C\,e^{kx}$.

II. Каждому действительному корню кратностью m в общем решении соответствует слагаемое вида $(C_1 + C_2 x + ... + C_m x^{m-1})e^{kx}$.

III. Каждой паре простых комплексных сопряженных простых корней $k^{(1)} = \alpha + \beta i$ и $k^{(2)} = \alpha - \beta i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

IV. Каждой паре комплексных сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha + \beta i$ и $k^{(2)} = \alpha - \beta i$ кратностью m в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + ... + C_{m-1} x^{m-1})\cos\beta x + (C'_1 + C'_2 x + ... + C'_{m-1} x^{m-1})\sin\beta x]$.

Пример 1. Решаем уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 7k + 6 = 0$; его корни $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Следовательно, ФСР образуют функции e^{6x} и e^x, а общее решение имеет вид $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$.

Пример 2. Решаем уравнение $y''' - 2y'' + y' = 0$. Характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 + k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 1$. Здесь 1 является двукратным корнем, поэтому ФСР образуют функции 1, e^x, xe^x. Общее решение имеет вид $y = C_0 + C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Пример 3. Решаем уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет корни $k = 2 \pm 3i$. Корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные, поэтому ФСР уравнения образуют функции $e^{2x}\cos 3x$, $e^{2x}\sin 3x$. Следовательно, общее решение $y'' - 4y' + 13y = 0$ будет иметь вид $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Пример 4. Решаем уравнение $4y^{(4)} + 4y^{(2)} + y = 0$. Характеристическое уравнение $4\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$ либо $(2\lambda^2 + 1)^2 = 0$ имеет два комплексно сопряженных корня $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$ кратностью два. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$. Отсюда получаем общее решение: $y = (C_1 + C_2x)\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + (C_3 + C_4x)\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Задачи для решения

Найти общие решения уравнений:
1. $y'' - y' - 2y = 0$. **2.** $y'' + 25y = 0$. **3.** $y'' - y' = 0$. **4.** $y'' - 4y' + 4y = 0$.
5. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$. **6.** $y^{IV} + a^4y = 0$. **7.** $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным или краевым условиям:
1. $y'' + 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$.
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3. $9y'' + y = 0$; $y(3\pi/2) = 2$, $y'(3\pi/2) = 0$.
4. $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(\pi/4) = 1$.
5. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 1$, $y'(\pi/3) = 0$.

§2. Линейные неоднородные уравнения

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.1)$$

Теорема 4 (принцип суперпозиции). Пусть в уравнении (2.1) правая часть $f(x)$ является линейной комбинацией функций $f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, т.е. $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)$, где α_i – постоянные числа, и пусть функции $y_i(x)$ являются решениями уравнений

$$y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_i = f_i(x). \qquad (2.2)$$

Тогда линейная комбинация функций $y_i(x)$ с теми же коэффициентами α_i, т.е. функция $y(x) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i(x)$ будет решением уравнения (2.1).

Следствие. Разность двух решений неоднородного уравнения (2.1) удовлетворяет однородному уравнению $Ly = 0$.

Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – является ФСР однородного уравнения $Ly = 0$, а $\widetilde{y}(x)$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.1), то общее решение неоднородного уравнения (1.2) имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \widetilde{y}(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения есть сумма любого частного решения неоднородного уравнения (2.1) и общего решения однородного уравнения (1.2).

Пусть требуется найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Тогда говорят, что для уравнения (2.1) поставлена задача Коши и записывают ее в виде

$$\begin{gathered} y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Если функции $a_i(x), i = \overline{1, n}$, и функция $f(x)$ непрерывны на интервале X, то решение задачи Коши (2.3) существует и единственно всюду на X.

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – нормальная (при $x = x_0$) фундаментальная система решений однородного уравнения $Ly = 0$. Тогда решение задачи Коши

$$\begin{gathered} y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x), \\ y(x_0) = A_1, \quad y'(x_0) = A_2, \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = A_n \end{gathered}$$

может быть представлено в виде

$$y = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \ldots + A_n y_n(x) + \widetilde{y}(x), \tag{2.4}$$

где $\widetilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (2.1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Общими подходами к построению решения уравнения (2.1) на базе ФСР однородного уравнения является метод Лагранжа и метод Коши.

2.1. Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных). Пусть известна ФСР $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, а значит, и общее решение однородного уравнения $Ly = 0$: $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, где C_i – произвольные постоянные. Решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x), \tag{2.5}$$

т.е. варьируя и полагая C_i некоторыми функциями переменной x, подлежащими определению. Для определения $C_i(x)$ получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0,\\
&C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0,\\
&C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Это система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно переменных $C_i'(x)$. Определитель системы отличен от нуля, поскольку является определителем Вронского фундаментальной системы решений. Поэтому СЛАУ (2.6) имеет единственное решение, представление которого задается формулой $C_i'(x) = \dfrac{\Delta_{n\,i}(x)}{\Delta(x)} f(x),\quad i = \overline{1,n}$, откуда $C_i(x)$ находятся непосредственным интегрированием

$$C_i(x) = \int \frac{\Delta_{ni}(x)}{\Delta(x)} f(x)dx + \overline{C_i},\ \ \overline{C_i} = \text{const}. \tag{2.7}$$

Здесь $\Delta(x)$ – определитель Вронского фундаментальной системы решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, $\Delta_{ni}(x)$ – алгебраическое дополнение i-го элемента последней строки этого определителя.

Подставляя найденные коэффициенты $C_i(x)$ в искомый вид решения (2.5), получаем общее решение неоднородного уравнения (2.1) в виде $y(x) = \overline{C_1}y_1(x) + \ldots \overline{C_n}y_n(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x)\int \dfrac{\Delta_{ni}(x)}{\Delta(x)} f(x)dx$. Полагая $\overline{C_1} = \ldots = \overline{C_n} = 0$, находим частное решение неоднородного уравнения (2.1):

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\int \frac{\Delta_{ni}(x)}{\Delta(x)} f(x)dx. \tag{2.8}$$

Выбирая в (2.8) одну из первообразных вида

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_{ni}(\xi)}{\Delta(\xi)} f(\xi)d\xi, \tag{2.9}$$

получаем частное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее в точке $x = x_0$ нулевым начальным условиям $\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{y}'(x_0) = \ldots = \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$. В этом можно убедиться непосредственным дифференцированием формулы (2.9) с использованием условий (2.6) и вида $C_i'(x)$.

Пример. Методом вариации произвольных постоянных построить общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + y = f(x),\ f(x) = \frac{1}{\sin x}. \qquad (2.10)$$

ФСР соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ образуют функции $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = \cos x$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Общее решение неоднородного уравнения (2.10) ищем в виде $y = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$, т. е. считаем теперь C_1 и C_2 функциями x, подлежащими определению.

Для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = f(x). \end{cases} \qquad (2.11)$$

Система (2.11) имеет единственное решение, так как ее определитель, вронскиан функций $\sin x$ и $\cos x$, равен -1: $C_1'(x) = \cos x \cdot f(x)$, $C_2'(x) = -\sin x \cdot f(x)$, откуда следует, что $C_1(x) = \int \cos x \cdot f(x)dx + \overline{C_1}$, $C_2(x) = \int (-\sin x) f(x)dx + \overline{C_2}$.

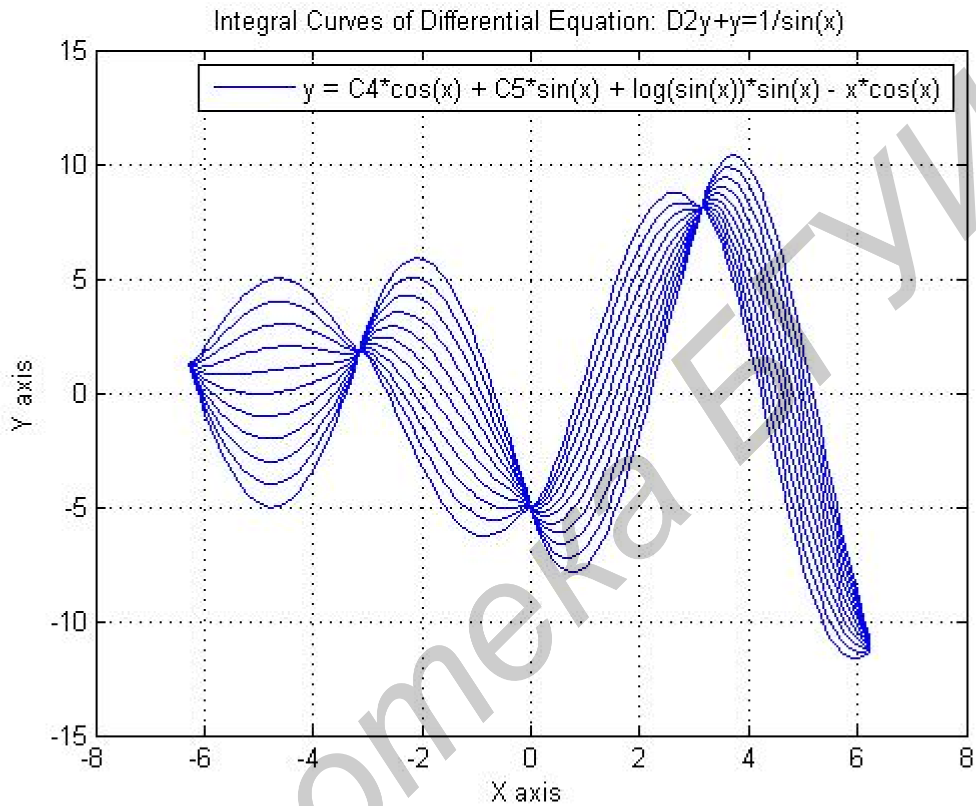
Здесь $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$ – произвольные постоянные. Вычислив $C_1(x)$ и $C_2(x)$ для $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ и подставив их в искомый вид решения, получаем общее решение неоднородного уравнения (2.10) в виде $y(x) = (\overline{C_1} + \ln|\sin x|)\sin x + (\overline{C_2} - x)\cos x$.

Если положить $\overline{C_1} = \overline{C_2} = 0$ и подставить получившиеся $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в искомый вид решения, то получится частное решение неоднородного уравнения (2.10):

$$\tilde{y} = \sin x \cdot \ln|\sin x| - x\cos x. \qquad (2.12)$$

```
clf;
syms x y LeftPart RightPart InHequation; % Инициализация
syms Title Message;
syms x_new y_new;
%   Нахождение решения
LeftPart = 'D2y+y';
RightPart = '1/sin(x)';
InHequation = [LeftPart, '=', RightPart];
y = simplify(dsolve(InHequation, 'x'));
fprintf('y = ');pretty(y); % Печать решения
%   График решения
Title = ['Integral Curves of Equation:', char(InHequation)];
Message = ['y = ', char(y)];
x_new = -2*pi : 0.1 : 2*pi;
for cycle1 = -5 : 1 : 5
val = cycle1;
y_new = subs(y, 'C2', val);
for cycle2 = -5 : 1 : 5
val = cycle2;
```

```
y_new = subs(y_new, 'C1', val);
y_new = real(double(subs(y_new, x_new)));
plot(x_new, y_new);
legend(char(Message));
hold on; end;end;
grid on;
title(char(Title));
xlabel('X axis');
ylabel('Y axis');
```



Задачи для решения

Методом вариации произвольных постоянных построить общее решение следующих уравнений:

1. $y''' + y' = \sec x$ **. 2.** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$**. 3.** $y'' - y = \dfrac{1}{\tanh x}$**. 4.** $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$ **.**

5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$**. 6.** $y'' - 6y' + 5 = \tan x$ **.**

2.2. Метод Коши. Зная ФСР $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ однородного уравнения $Ly = 0$, можно построить решение следующей специальной задачи Коши:

$$Ly = 0,\ y(\xi) = 0,\quad y'(\xi) = 0, \ldots,\ y^{(n-2)}(\xi) = 0,\ y^{(n-1)}(\xi) = 1 \qquad (2.13)$$

с начальными условиями в некоторой произвольной точке $x = \xi$. Решение такой задачи зависит от ξ, как от параметра. Обозначим это решение $K(x,\xi)$. Функцию $K(x,\xi)$ называют функцией Коши уравнения $Ly = f$. Естественно искать функцию Коши – решение уравнения (2.13) – в следующем виде:

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} C_i(\xi) y_i(x), \tag{2.14}$$

где ξ – параметр. Такая функция по переменной x удовлетворяет уравнению $Ly = 0$. Подставляя $K(x,\xi)$ искомого вида в начальные условия задачи (2.13), получаем алгебраическую систему определителей $C_i(\xi)$, аналогичную (2.6), откуда

$$C_i(\xi) = \frac{\Delta_{ni}(\xi)}{\Delta(\xi)}, \tag{2.15}$$

где, как и в формуле (2.7), $\Delta(\xi)$ – определитель Вронского системы функций $y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi)$; $\Delta_{ni}(\xi)$ – алгебраическое дополнение i-го элемента последней строки.

Для функции Коши с учетом (2.14) и (2.15) получается выражение

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{ni}(\xi)}{\Delta(\xi)} y_i(x). \tag{2.16}$$

Формулу (2.16) удобно записать в следующем виде:

$$K(x,\xi) = \frac{1}{\Delta(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y'_2(\xi) & \ldots & y_n'(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix}. \tag{2.17}$$

Числитель представляет собой определитель Вронского $\Delta(\xi)$ системы функций $y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi)$, в котором последняя строка заменена функциями $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. В $n-1$ строке всюду – аргумент ξ, в последней строке – аргумент x.

Зная функцию Коши, можно получить частное решение уравнения $Ly = f$ в виде формулы Коши:

$$\widetilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{2.18}$$

или с учетом (2.16):

$$\widetilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{ni}(\xi)}{\Delta(\xi)} y_i(x)\Big) f(\xi) d\xi. \tag{2.19}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $\tilde{y}(x)$ вида (2.19) является решением уравнения $Ly = f$ и в точке $x = x_0$ удовлетворяет нулевым начальным условиям: $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}'(x_0) = \ldots = \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Замечание. Подстановка в интегралы в формулах (2.18) и (2.19) нижнего предела $\xi = x_0$ дает некоторые постоянные, умножающиеся затем на функции $y_i(x)$ – решения однородного уравнения $Ly = 0$. Иначе говоря, подстановка нижнего предела дает некоторое решение однородного уравнения.

Поэтому для поиска частного решения $Ly = f$ достаточно в формулах (2.18) и (2.19) ограничиться подстановкой верхнего предела. Символически для этого можно записать формулы для $\tilde{y}(x)$ в следующем виде:

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int^{x} \frac{\Delta_{ni}(\xi)}{\Delta(\xi)} f(\xi)d\xi \quad \text{и} \quad \tilde{y}(x) = \int^{x} K(x,\xi) f(\xi)d\xi .$$

Полученные таким образом частные решения могут не удовлетворять начальным нулевым условиям, как полученные по формулам (2.18) и (2.19).

Пример. Найти методом Коши частное решение $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения $y'' + y = f(x)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\tilde{y}(x_0) = 0, \tilde{y}'(x_0) = 0$. Метод состоит в представлении частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения по формуле Коши в виде $\tilde{y}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} K(x,\xi) f(\xi)d\xi$. Здесь $K(x,\xi)$ – функция Коши, для построения которой достаточно знать ФСР однородного уравнения. Построим функцию Коши для нашего уравнения.

Первый способ. Согласно (2.6) найдем функцию Коши как решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ в виде $K(x,\xi) = C_1(\xi)\sin x + C_2(\xi)\cos x$, где ξ – параметр, удовлетворяющем специальным следующим начальным условиям $K(x,\xi)\big|_{x=\xi} = 0$, $K'_x(x,\xi)\big|_{x=\xi} = 1$. Подставляя представление $K(x,\xi)$ в начальные условия, получаем СЛАУ для определения $C_1(\xi), C_2(\xi)$:

$$C_1(\xi)\sin\xi + C_2(\xi)\cos\xi = 0,$$
$$C_1(\xi)\cos\xi - C_2(\xi)\sin\xi = 1,$$

откуда находим $C_1(\xi) = \cos\xi$, $C_2(\xi) = -\sin\xi$ и $K(x,\xi) = \sin(x-\xi)$.

Частное решение имеет следующий вид:

$$\tilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \sin(x-\xi) f(\xi)d\xi . \qquad (2.20)$$

Конкретный вид $\tilde{y}(x)$ при неоднородности $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ подсчитаем ниже.

Второй способ. Функция Коши может быть также найдена по формуле (2.17):

$$K(x,\xi)=\frac{1}{\Delta(\xi)}\begin{vmatrix}\sin\xi & \cos\xi\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix},\quad \Delta(\xi)=\begin{vmatrix}\sin\xi & \cos\xi\\ \cos\xi & -\sin\xi\end{vmatrix}=-1,$$

откуда сразу получаем $K(x,\xi)=-(\sin\xi\cos x-\sin x\cos\xi)=\sin(x-\xi)$.

Непосредственно убедимся, что частное решение (2.20) удовлетворяет нулевым начальным условиям $\widetilde{y}(x_0)=0,\ \widetilde{y}'(x_0)=0$. Действительно, $\widetilde{y}(x_0)=0$, так как совпадают пределы интеграла, а $\widetilde{y}'(x_0)=\frac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x}\sin(x-\xi)f(\xi)d\xi\Big|_{x=x_0}=$ $=\sin(x-\xi)f(\xi)+\int\limits_{x_0}^{x}\cos(x-\xi)f(\xi)=0$. Подставляя в (2.20) $f(\xi)=\frac{1}{\sin\xi}$ и вычисляя интеграл, находим конкретный вид частного решения для заданной правой части уравнения (2.10):

$$\widetilde{y}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\sin(x-\xi)\frac{1}{\sin\xi}d\xi=$$

$$=\sin x\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}d\xi-\cos\xi\int\limits_{x_0}^{x}d\xi=\sin x\left[\ln|\sin x|-\ln|\sin x_0|\right]-\cos x\cdot(x-x_0)=$$

$$=\sin x\ln|\sin x|-x\cos x-\left[\sin x\cdot\ln|\sin x_0|-x_0\cdot\cos x\right]. \qquad (2.21)$$

Итак, по ФСР однородного уравнения мы нашли функцию Коши $K(x,\xi)$. После этого частное решение неоднородного уравнения для заданной правой части $f(x)$ находится по формуле (2.21).

Замечание. В данном примере функция Коши $K(x,\xi)=\sin(x-\xi)$ является функцией разности $x-\xi$ своих аргументов. Это свойство функции Коши уравнений с постоянными коэффициентами.

2.3. Уравнение Эйлера. Уравнение $x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$, $x\neq 0$, где $a_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ – постоянные, называется **уравнением Эйлера** и является частным случаем линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Оно возникает при решении ряда задач математической физики. Введем новую независимую переменную t с помощью подстановки $x=e^t$ (если $x>0$) или подстановки $x=-e^t$ (если $x<0$). Пусть для определенности положим $x>0$. Тогда $y'_x=e^{-t}y'_t$, $y''_{xx}=e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t)$, $y'''_{xxx}=e^{-3t}(e'''_{ttt}-3y''_{tt}+2y'_t),\ldots$. Уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Уравнение $(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=f(x)$, где a,b, $a_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ – постоянные, приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $ax+b=e^t$ (в области $ax+b>0$).

Решение однородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

можно (при $x > 0$) искать в виде $y = x^{\lambda}$. Подставляя выражения для y', y'',..., $y^{(n)}$ в однородное уравнение Эйлера, находим характеристическое уравнение для определения показателя степени λ. При этом, если λ – действительный корень характеристического уравнения кратностью r, то ему соответствует r линейно независимых решений x^{λ}, $x^{\lambda}\ln x$, $x^{\lambda}(\ln x)^2$,..., $x^{\lambda}(\ln x)^{r-1}$, а если $\alpha \pm i\beta$ – пара комплексных корней кратностью s, то ей соответствует s пар линейно независимых решений:

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\cos(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{s-1}\cos(\beta\ln x),$$
$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\sin(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{s-1}\sin(\beta\ln x).$$

Пример 1. Найдем общее решение неоднородного уравнения Эйлера: $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$. Положим $x = e^t$, считая $x > 0$. Тогда $y'_x = e^{-t} y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$. Получаем $e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_y) - 3e^t\cdot e^{-t} y'_t + 5y = 3e^{2t}$, или $y''_{tt} - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}$. Общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения есть $y_0 = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, а частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y} = Ae^{2t}$. Тогда $\tilde{y}' = 2Ae^{2t}$, $\tilde{y}'' = 4Ae^{2t}$, и, подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в неоднородное уравнение, приходим к тождеству $Ae^{2t} = 3e^{2t}$, откуда $A = 3$. Следовательно, $\tilde{y} = 3e^{2t}$, и общее решение неоднородного уравнения есть $y = y_0 + \tilde{y} = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t + 3)$. Возвращаясь к первоначальной независимой переменной x, окончательно получим $y(x) = x^2(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x + 3)$.

Если учитывать случай $x < 0$, то общее решение можно записать в виде, охватывающем оба случая: $y(x) = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x| + 3)$.

Пример 2. Найдем общее решение однородного уравнения Эйлера: $(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$. Положим $y = (x+2)^{\lambda}$. Тогда имеем $y' = \lambda(x+2)^{\lambda-1}$; $y'' = \lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. Подставляя выражения y, y', y'' в уравнение, получим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, корни которого $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -3$. Общее решение – функция $y(x) = C_1(x+2) + \dfrac{C_2}{(x+2)^3}$.

Задачи для решения. Найти общее решение уравнений Эйлера:

1. $x^2 y'' + xy' + y = 0$. **2.** $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$. **3.** $x^2 y'' - 6y = 12\ln x$.

4. $x^2 y''' - 3xy'' + 3y' = 0$. **5.** $x^2 y''' - 2y' = 0$. **6.** $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$.

ГЛАВА 6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Линейные однородные системы

Системой линейных однородных дифференциальных уравнений называется система следующего вида:

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, y_k, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где функции $a_{ik}(t)$ непрерывны на некотором интервале T.

Линейные системы допускают более простую форму записи. Введем следующие обозначения: $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_n(t))^T$, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \cdots a_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(t) \cdots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$. Тогда систему (1.1) можно записать в виде матричной формы

$$y' = A(t)y. \tag{1.2}$$

Решением системы (1.2) называется непрерывно дифференцируемая вектор-функция $y(t)$, которая при подстановке в систему обращает все уравнения в тождества. Если векторы $y_1(t),\ldots,y_m(t)$ являются решениями системы (1.2), то любая линейная комбинация $\sum_{i=1}^{m} C_i\, y_i(t)$, где $C_1,\ldots,C_m$ – действительные произвольные постоянные, вновь является решением системы (1.2).

Если требуется найти решение системы (1.2), удовлетворяющее условию $y(t_0) = y_0$, то говорят, что для системы (1.2) поставлена задача Коши и записывают ее в виде

$$y' = A(t)y, \ y(t_0) = y_0. \tag{1.3}$$

Замечание. Из общей теоремы Коши о существовании и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений сразу следует, что, если элементы матрицы $A(t)$ – функции $a_{ik}(t)$ непрерывны на отрезке $T = [t_0, t^*]$, то на нем существует единственное решение задачи Коши (1.3).

Теорема Коши не только дает условия существования и единственности решения задачи Коши. При выполнении этих условий решение $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_n(t))$ определено на отрезке $[t_0, t^*]$, т.е. в концевых точках $t = t_0$ и $t = t^*$ функции $y_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, имеют односторонние производные.

Теорема Коши дает достаточные условия существования и единственности, т.е. задача Коши может иметь единственное решение и при невыполнении какого-либо из требований к элементам матрицы $A(t)$.

Напомним, что векторы $y_1(t),...,y_n(t)$ называются линейно-независимыми на интервале T , если тождество $C_1 y_1(t)+\ldots+C_n y_n(t)\equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда все коэффициенты C_i равны нулю одновременно.

Пусть векторы $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$ непрерывны на интервале T . Функциональный определитель $\Delta\ [\varphi_1,\ldots,\varphi_n]=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t)\ldots\varphi_{1n}(t)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_{n1}(t)\ldots\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$, где $\varphi_{ik}(t)$ – координаты вектора $\varphi_k(t)$, называется определителем Вронского, либо вронскианом векторов $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$.

Теорема 1. Если определитель Вронского решений $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ системы (1.2) тождественно равен нулю на интервале T , тогда эти решения линейно зависимы на T . Если определитель Вронского решений $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ уравнения (1.2) не равен нулю ни в одной точке интервала T , тогда эти решения линейно независимы на T .

Замечание. Если $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$ – произвольные векторы, то из равенства нулю их определителя Вронского, вообще говоря, не следует их линейная зависимость. Действительно, рассмотрим два вектора $\varphi_1(t)=(\ 0\ \ 1\ )^T$, $\varphi_2(t)=(\ t\ \ 0\ )^T$. Векторы линейно-независимы, например, на отрезке $\left[-1,1\right]$, так как условие $C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)\equiv 0$ выполняется только при $C_1=0$ и $C_2=0$. Несмотря на это, определитель Вронского рассматриваемых векторов имеет нулевую строку и поэтому тождественно равен нулю. Предположив, что эти векторы являются решениями некоторой системы второго порядка. Получаем противоречие с результатом теоремы.

Часто бывает полезен другой критерий линейной независимости произвольных векторов.

Теорема 2. Для того чтобы произвольные векторы $\varphi_i(t), i=1,\ 2,\ldots,$n были линейно независимы на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама этих векторов $\Gamma\ [\ \varphi_1,\ldots,\varphi_n\ ]=\begin{vmatrix}(\varphi_1,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_2)\ldots(\varphi_1,\varphi_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\varphi_n,\varphi_1)(\varphi_n,\varphi_2)\ldots(\varphi_n,\varphi_n)\end{vmatrix}$ был отличен от нуля: $\Gamma\left[\ \varphi_1,\mathrm{K}\ ,\varphi_n\ \right]\neq 0,$ где $(\varphi_i,\varphi_j)=\int\limits_a^b(\varphi_i(t),\varphi_j(t))dt$ – скалярное произведение функций $\varphi_i(t)$, $\varphi_j(t)$ $i,j=\overline{1,n}$ на отрезке.

1.1. Фундаментальная матрица

Определение. Фундаментальной системой решений $y_1(t),..., y_n(t)$ системы (1.2) называются любые n линейно независимых решений системы (1.2).

Если коэффициенты $a_{ij}(t)$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, в системе уравнений (1.2) непрерывны на $\left]t_0, t^*\right[$, то она имеет систему решений $\left\{y^1(t),\ldots,y^n(t)\right\}$, фундаментальную на $\left]t_0, t^*\right[$.

Определение. Матрица $W(t)$, столбцами которой являются координаты векторов, образующих фундаментальную систему решений, называется фундаментальной матрицей системы (1.2).

Определитель матрицы $W(t)$ – это определитель Вронского системы n линейно независимых решений системы (1.2). Определитель не равен нулю, поэтому матрица $W(t)$ имеет обратную $W^{-1}(t)$.

Пусть каждый из линейно независимых векторов $y_1(t),...,y_n(t)$ является решением матричного уравнения (1.2). Эту совокупность n векторных уравнений можно кратко записать в следующем виде:

$$W'(t) = A(t) \cdot W(t)\,. \tag{1.4}$$

Столбцами матрицы W являются координаты векторов $y_1(t),...,y_n(t)$. Каждый столбец матрицы $W'(t)$ равняется произведению матрицы $A(t)$ на одноименный столбец матрицы $W(t)$. Уравнение (1.4) называется матричным уравнением, сопоставленным векторному уравнению (1.2).

Очевидно, что фундаментальная матрица $W(t)$ есть решение матричного уравнения (1.4).

Теорема 3. Линейная однородная система всегда имеет фундаментальную систему решений, а значит, и фундаментальную матрицу. По заданной системе n линейно независимых векторов $y_1(t),...,y_n(t)$ можно найти единственную систему (1.2), для которой эти векторы образуют фундаментальную систему решений.

Пусть матрица $W(t)$, столбцами которой являются координаты этих векторов, удовлетворяет системе (1.4). Требуется найти матрицу $A(t)$. Умножая тождество (1.4) справа на обратную матрицу $W^{-1}(t)$, получаем $W'(t)W^{-1}(t) = A(t)W(t)W^{-1}(t) = A(t)$, где $A(t)$ – матрица искомой системы уравнений.

Замечание. Множество решений линейной однородной дифференциальной системы образует линейное пространство функций. Любая фундаментальная система решений является базисом этого пространства. Существует бесконечно много фундаментальных систем решений однородной системы, переходящих одна в другую с помощью невырожденного линейного преобразования.

Общее решение линейной однородной системы (1.2) будет иметь вид

$$y = W(t)\,C\,, \tag{1.5}$$

где $W(t)$ – фундаментальная матрица, а C – произвольный постоянный вектор. Правую часть (1.5) удобно представлять как скалярное произведение строки $(y_1(t),...,y_n(t))$ векторов, столбцы координат которых образуют матрицу $W(t)$, на столбец C: $y(t) = C_1 y_1(t) + \ldots + C_n y_n(t)$. Получается линейная комбинация векторов фундаментальной системы, коэффициентами которой служат координаты вектора C. По аналогии строилось общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка.

1.2. Матрицант. Матрица Коши. Пусть фундаментальная матрица $W(t)$ удовлетворяет условию $W\,(t_0) = E$, т.е. векторы фундаментальной системы имеют единичную матрицу начальных значений. Тогда фундаментальная матрица $W(t)$ называется матрицантом системы (1.2). Матрицант – аналог нормальной фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка. Матрицант, очевидно, является решением следующей однородной дифференциальной системы:

$$\frac{d}{dt} W\,(t) = A(t)\cdot W\,(t),\; W\,(t_0) = E\,. \tag{1.6}$$

Пусть $W(t)$ – произвольная фундаментальная матрица. Тогда матрица

$$K(t,t_0) = W(t)W^{-1}(t_0), \tag{1.7}$$

зависящая от двух аргументов t и t_0, также является матрицантом системы (1.2). Действительно, матрица $K(t,t_0)$ удовлетворяет следующей системе:

$$\frac{d}{dt} K(t,t_0) = A(t)\,K(t,t_0)\,,\; K(t_0,t_0) = E\,. \tag{1.8}$$

Поскольку $K'(t,t_0) = (W(t)\cdot W^{-1}(t_0))' = W'(t)W^{-1}(t_0) = A(t)W(t)W^{-1}(t_0) = A(t)K(t,t_0)$ и при $t = t_0$, выполнено начальное условие $K\,(t_0,t_0) = W(t_0)\,W^{-1}(t_0) = E$.

Принято также другое название матрицы, определяемой формулой (1.7), – матрица Коши системы (1.2).

Замечание. Матрица Коши $K(t,t_0)$ определяется по формуле (1.7) единственным образом, несмотря на то, что матрица $W(t)$ – произвольная фундаментальная матрица. Это следует из того, что матричное уравнение (1.2) с единичной матрицей начальных значений имеет единственное решение.

Если известна матрица Коши, то решение однородной задачи Коши $y' = A(t)y$, $y(t_0) = y_0$ имеет следующий вид: $y = K(t, t_0)y_0$. Справедливо и обратное. Если для произвольного вектора начальных значений y_0 решение однородной задачи Коши $y' = A(t)y$, $y(t_0) = y_0$ может быть записано в форме $y = K(t, t_0)y_0$, то входящая в нее матрица является матрицей Коши.

Замечание. Полученное представление является аналогом формулы, выражающей решение задачи Коши для линейного однородного уравнения n-го порядка через нормальную фундаментальную систему решений.

Поясним физический смысл матрицы Коши. Для этого рассмотрим следующую однородную дифференциальную систему:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y = A(t)\cdot y, t \in [t_0, t^*], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Пусть вектор $K^i(t,\tau)$ является решением следующего векторного дифференциального уравнения: $\frac{d}{dt}K^i(t,\tau) = A(t)\cdot K^i(t,\tau)$ с начальным условием $K^i(t_0, t_0) = e^i$. Здесь $e^i = (0,..., 0, \underset{i}{1},.., 0,..., 0)^T$ – нулевой вектор с единицей на *i*-м месте. Обозначим через $K(t,\tau)$ – $n \times n$-матричную функцию, составленную из векторов $K^i(t,\tau)$ как из столбцов, где *i* принимает значения от 1 до n.

Функция $K(t,\tau)$ однозначно определена для любого значения аргумента t. Эта функция абсолютно непрерывна и удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}K(t,\tau) = A(t)\cdot K(t,\tau), \\ K(t_0, t_0) = E. \end{cases} \tag{1.10}$$

Отсюда следует физический смысл матрицы Коши $K(t,\tau)$ (функции Коши). Каждый *i*-й столбец функции $K^i(t,\tau)$ представляет собой отклик в момент времени t однородной системы (1.9), которую возмутили в момент времени t_0 единичным вектором $y_0 = e^i$. Поэтому функции Коши часто называют еще функциями точечного источника (функциями Грина).

1.3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Построение ФСР линейной однородной системы с постоянными коэффициентами сводится к решению характеристического уравнения для матрицы системы и построению соответствующих собственных векторов.

Пример 1. Найти общее решение и ФСР системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 7y_1 + 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 6y_1 + 4y_2, \end{cases}$

т. е. $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$. Выпишем общее решение системы и найдем векторы ФСР. Общее решение считается через собственные числа и соответствующие им векторы матрицы A. Получаем: $A \cdot x = \lambda x$; $Ax - \lambda Ex = 0$; $(A - \lambda E)x = 0$; $\det(A - \lambda E) = 0$. Отсюда $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$ или $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0,$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$. Собственные числа являются действительными и простыми. Найдем собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению λ_1. Для этого решаем систему линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_1 E)\ x_1 = 0$. Получаем $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1$. Для второго вектора аналогично $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 10$. Выписываем общее решение однородной дифференциальной системы в виде $y(t) = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^t + C_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{10t}$. В матричной форме относительно C_1 и C_2 получаем $y(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{10t} \\ -2e^t & e^{10t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. Векторы ФСР $\begin{bmatrix} e^t \\ -2e^t \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} e^{10t} \\ e^{10t} \end{bmatrix}$.

Пример 2. Найти общее решение и ФСР системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 4y_1 - 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 4y_2, \end{cases}$

т.е. $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$. Решаем характеристическое уравнение относительно матрицы A: $det(A - \lambda E) = 0$. Отсюда следует $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$; $(4-\lambda)^2 = -9$; $\lambda - 4 = \pm 3i$; $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$. Найдем собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению λ_1. Для этого решаем систему линейных алгебраических уравнений $(A-\lambda_1 E)\ \ x_1 = 0$. Получаем $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 4+3i$. Для второго вектора аналогично $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 4-3i$.

Общее решение нашей системы имеет вид $y(t) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \cdot e^{(4+3i)t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \cdot e^{(4-3i)t}$. Переписывая в матричной форме относительно c_1 и c_2, получаем $y(t) = \begin{bmatrix} e^{(4+3i)t} & e^{(4-3i)t} \\ ie^{(4+3i)t} & -ie^{(4-3i)t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. Векторы ФСР соответственно будут $\begin{bmatrix} e^{(4+3i)t} \\ ie^{(4+3i)t} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} e^{(4-3i)t} \\ -ie^{(4-3i)t} \end{bmatrix}$. Выделим в общем решении действительную и мнимую части. Имеем

$$e^{(4+3i)t} = e^{4t}\cos 3t + ie^{4t}\sin 3t,\ \ ie^{(4+3i)t} = -e^{4t}\sin 3t + ie^{4t}\cos 3t.$$

Отсюда получаем $y(t) = \begin{bmatrix} e^{4t}\cos 3t & e^{4t}\sin 3t \\ -e^{4t}\sin 3t & e^{4t}\cos 3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Выписываем векторы ФСР $\begin{bmatrix} e^{4t}\cos 3t \\ -e^{4t}\sin 3t \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} e^{4t}\sin 3t \\ e^{4t}\cos 3t \end{bmatrix}$.

Пример 3. Найти общее решение и ФСР системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 5y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Перепишем систему в виде $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$. Решаем уравнение $\det(A-\lambda E) = 0$: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;\quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0;\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 4.$ Если λ_1 – корень характеристического уравнения кратностью m, то этому корню соответствует решение $x_1 = p_1(t)e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = p_2(t)e^{\lambda_1 t}$, …, $x_n = p_n(t)e^{\lambda_1 t}$, где $p_1(t)$, $p_2(t)$, …, $p_n(t)$ – многочисленные степени не выше $m-1$. Таким образом, действительному корню $\lambda = 4$ кратностью два соответствуют решения $y_1 = e^{4t}(a_1 t + a_2)$, $\ y_2 = e^{4t}(b_1 t + b_2)$. Дифференцируя y_1 и y_2, получаем тождества

$\dfrac{dy_1}{dt} = a_1 e^{4t} + 4(a_1 t + a_2)e^{4t}$, $\dfrac{dy_2}{dt} = b_1 e^{4t} + 4(b_1 t + b_2)e^{4t}$. Значения x_1, x_2, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$ подставляем в нашу систему дифференциальных уравнений. После сокращения на e^{4t} получаем два тождества

$$a_1 + 4(a_1 t + a_2) = 5(a_1 t + a_2) - (b_1 t + b_2);\ b_1 + 4(b_1 t + b_2) = a_1 t + a_2 + 3(b_1 t + b_2).$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем следующие системы алгебраических уравнений: $\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases}$. Тогда следует, что $a_1 = b_1$, $a_2 - b_2 = a_1 = b_1$. Полагая $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$ (C_1, C_2 – произвольные постоянные), находим $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2 - C_1$. Следовательно,

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2),\quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1).$$

В матричном виде имеем $y(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} t & e^{4t} \\ e^{4t}(t-1) & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. Соответствующими векторами ФСР будут $\begin{bmatrix} e^{4t} t \\ e^{4t}(t-1) \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}$.

Замечание. Систему можно решить методом исключения. Действительно, выразив из первого уравнения x_2 и продифференцировав, подставим затем значения x_2 и x_2' во второе уравнение. В результате получим линейное однородное уравнение второго порядка относительно x_1.

Выражаем x_2 из первого уравнения: $x_2 = 5x_1 - x_1'$. Дифференцируя, получаем $x_2' = 5x_1' - x_1''$. Подставляем полученные значения во второе уравнение системы и находим общее решение для x_1:

$$5x_1' - x_1'' = x_1 + 15x_1 - 3x_1',$$
$$x_1'' - 8x_1' + 16x_1 = 0.$$

Решая характеристическое уравнение, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Отсюда общее решение для y_1: $y_1 = e^{4t}(C_1 + C_2 t)$. Теперь подставляем x_1 в выражение для x_2: $x_2 = 5x_1 - x_1'$, $x_2 = 5e^{4t}(C_1 + C_2 t) - 4e^{4t}(C_1 + C_2 t) - e^{4t}C_2$. В итоге имеем общее решение для x_2: $x_2 = e^{4t}(C_1 - C_2 + C_2 t)$. Окончательно

$y(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} t & e^{4t} \\ e^{4t}(t-1) & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. Векторы ФСР $\begin{bmatrix} e^{4t} t \\ e^{4t}(t-1) \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}$.

Задачи для решения

Решить следующие дифференциальные системы:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 8y_2 - y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - x_2. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$

§2. Линейные неоднородные системы

Системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений называется система вида

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_k + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

где функции $a_{ik}(t)$ и $f_i(t)$ непрерывны на интервале T. Вводя обозначения, аналогичные началу и $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))^T$, систему можно переписать в виде матричного дифференциального уравнения

$$y' = A(t) y + f\ . \tag{2.2}$$

Решением системы (2.2) называется непрерывно дифференцируемая вектор-функция $y(t)$, которая при подстановке в систему обращает все уравнения в тождества.

Теорема 4 (принцип суперпозиции). Пусть в системе (2.2) неоднородность $f(t)$ является линейной комбинацией векторов $f_i(t), i = \overline{1, m},$: $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(t),$ где α_i – постоянные числа. Пусть векторы $y_i(t), i = \overline{1, m}$ являются решениями дифференциальных систем $y'_i = A(t) y_i + f_i, \quad i = \overline{1, m}$. Тогда линейная комбинация векторов $y_i(t)$ – $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_i(t)$ будет решением системы (2.2).

Следствие. Разность двух решений неоднородной системы удовлетворяет однородной системе.

Если требуется найти решение системы (2.2), удовлетворяющее условию $y(t_0) = y_0$, то говорят, что для системы (2.2) поставлена задача Коши и записывают ее в виде

$$y' = A(t) y + f\ , \ \ y(t_0) = y_0 . \tag{2.3}$$

Из общей теоремы Коши о существовании и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений получаем следующий важный результат:

Теорема 5. (Коши). Если функции $a_{ik}(t)$, $i,k=\overline{1,n}$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывны на интервале T, то решение задачи Коши (2.3) существует и единственно всюду на T.

Общими методами построения решения неоднородной системы (2.2) и задачи Коши (2.3), основанными на аппарате фундаментальной матрицы, являются метод вариации произвольных постоянных и метод Коши.

2.1. Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных). Пусть известна фундаментальная матрица $W(t)$ однородной системы $y'=A(t)y$, а значит, и общее решение однородной системы $y=W(t)C$, где C – произвольный постоянный вектор. Решение неоднородной системы (2.2) будем искать в следующем виде:

$$\tilde{y}(t)=W(t)C(t), \tag{2.4}$$

где $C(t)$ – n-вектор-функция переменной *t*, подлежащая определению.

Подставляя искомый вид (2.4) решения в систему (2.2), получаем для вектора $C(t)$ уравнение $W(t)C'(t)=f(t)$. Решая эту алгебраическую относительно координат вектора $C'(t)$ систему и интегрируя полученные выражения, находим вектор $C(t)$. Подставляя $C(t)$ в искомый вид решения (2.4), получаем некоторое частное решение неоднородной системы (2.2).

Пример 1. Рассмотрим метод Лагранжа на примере следующей неоднородной системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt}=x-2y+e^t,\ \frac{dy}{dt}=-y+1 \tag{2.5}$$

или $y'=Ay+f$, где $y=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; $f=\begin{pmatrix}e^t\\1\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}$. Используем метод вариации произвольных постоянных. Фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы образуют, например, вектор-функции $y_1=\begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}$; $y_2=\begin{pmatrix}e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}$. Фундаментальная матрица $W(t)$ имеет вид $W(t)=\begin{pmatrix}e^t&e^{-t}\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$. Согласно (2.4) общее решение неоднородной системы (2.5) ищем в виде

$$y=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=W(t)C(t)=\begin{pmatrix}e^t&e^{-t}\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где $C(t)=\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\end{pmatrix}$ – неизвестная вектор-функция, подлежащая определению. Подставляя искомый вид (2.6) в систему (2.5), получаем

$$W'C(t)+WC'(t)=AWC(t)+f(t)\,. \qquad (2.7)$$

Так как матрица $W(t)$ есть решение матричного уравнения $W'=AW$, то в (2.7) $(W'-AW)C(t)\equiv 0$ и из (2.7) мы находим матричное уравнение для $C'(t)$:

$$WC'(t)=f(t)\,,$$

т.е. систему

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда получаем $C_1'(t)=1-e^{-t}$, $C_2'(t)=e^t$ и

$$C(t)=\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t+e^{-t}+C_1 \\ e^t+C_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставляя (2.8) в искомый вид решения (2.6), получаем общее решение неоднородной системы (2.5) в виде

$$y=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t+e^{-t}+C_1 \\ e^t+C_2 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} te^t+2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. в виде суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной. Полагая, например, $C_1=C_2=0$, находим частное решение неоднородной системы в векторном виде $\tilde{y}(t)=\begin{pmatrix} te^t+2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся другим подходом. Сведем 2×2 дифференциальную систему (2.5) к линейному уравнению второго порядка. Продифференцируем первое из уравнений (2.5):

$$x''=x'-2y'+e^t\,. \qquad (2.9)$$

Выражая x' и y' в правой части (2.9), в силу (2.5) получаем уравнение, определяющее $x(t)$:

$$x''-x=2e^t-2\,, \qquad (2.10)$$

после чего из первого уравнения (2.5) находим

$$y=\frac{1}{2}\left(-x'+x+e^t\right). \qquad (2.11)$$

Частным решением неоднородной системы (2.5) в силу (2.10) и (2.11) будет, например, следующее: $x(t)=te^t+2$, $y(t)=1$.

Задачи для решения

Найти частные решения неоднородных систем методом вариации произвольных постоянных и методом сведения к уравнению второго порядка:

1. $\begin{cases} x'=2x+y+e^{-t}, \\ y'=3x+4y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x'=-x+8y, \\ y'=x+y+2. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x'=y+\sin t, \\ y'=-x. \end{cases}$

2.2. Метод Коши. Результат отыскания $C(t)$ из уравнения $W(t)\,C'(t) = f(t)$ будет следующим: $C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + C,$ где C – произвольный постоянный вектор. Подстановка $C(t)$ в (2.4) дает общее решение неоднородной системы (2.2): $y(t) = W(t)C + \int\limits_{t_0}^{t} W(t) W^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau$. Положив в формуле $C = 0$, получаем частное решение $\tilde{y}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} W(t) W^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau$,

$\tilde{y}(t) = W(t) \int\limits_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau$, $\tilde{y}(t_0) = 0$. Итак, если известна любая фундаментальная матрица $W(t)$ однородной системы, то:

I. Частное решение неоднородной системы (2.2) находится по формуле

$$\tilde{y} = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau) f(\tau) d\tau, \; K(t,\tau) = W(t) W^{-1}(\tau), \; \tilde{y}(t_0) = 0.$$

II. Общее решение неоднородной системы (2.2) находится по формуле

$$y(t) = W(t)C + \int\limits_{t_0}^{t} W(t) W^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Отсюда следует, что матрица Коши $K(t,\tau)$ при каждом значении параметра τ удовлетворяет по переменной *t* следующей дифференциальной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} K(t,\tau) = A(t) \cdot K(t), \\ K(\tau,\tau) = E. \end{cases} \tag{2.12}$$

Систему (2.12) принято называть прямой системой. Она интегрируется слева направо.

Замечание. Полученное разложение матрицы Коши $K(t,\tau) = W(t) W^{-1}(\tau)$ является конструктивно очень важным. Подсчитав в качестве матрицы $W(t)$ матрицант, который согласно (1.6) является решением однородной системы $\begin{cases} \dfrac{d}{dt} W(t) = A(t) \cdot W(t), \\ W(t_0) = E, \end{cases}$ и, вычислив обратную матрицу $W^{-1}(\tau)$, сразу строим матричную функцию $K(t,\tau)$ двух переменных, как произведение матриц $W(t)$ и $W^{-1}(\tau)$.

2.3. Формула Коши. Поставим своей целью получение формульного представления решения задачи Коши (2.3). Для этого рассмотрим следующую функцию: $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, где компоненты $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются решениями соответственно следующих задач Коши:

$$\frac{d}{dt}y_1 = A(t)\cdot y_1,\ \ y_1(t_0) = y_0; \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dt}y_2 = A(t)\cdot y_2 + f(t),\ \ y_2(t_0) = 0. \tag{2.14}$$

Нетрудно видеть, что функция $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ является решением задачи Коши (2.3). Она удовлетворяет условиям системы:

$$\frac{d}{dt}(y(t)) = \frac{d}{dt}y_1(t) + \frac{d}{dt}y_2(t) = A(t)\cdot y_1 + A(t)\cdot y_2 + f(t) =$$
$$= A(t)\cdot(y_1(t) + y_2(t)) + f(t) = A(t)\cdot y + f$$

и начальным условиям: $y(t_0) = y_1(t_0) + y_2(t_0) = y_0$.

Поскольку векторы e^i, $i = \overline{1,n}$ образуют базис в пространстве R^n, то вектор начального условия $y_0 \in R^n$ может быть представлен в виде: $y_0 = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e^i$, т.е. разложен по базису $y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$.

Введем функцию $\widetilde{y}_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot K^i(t,t_0)$. Продифференцировав ее, получаем

$$\frac{d}{dt}\widetilde{y}_1(t) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_n \cdot \frac{d}{dt}K^i(t,t_0) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_n \cdot A(t)\cdot K^i(t,t_0) = A(t)\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot K^i(t,t_0) = A(t)\cdot\widetilde{y}_1 ,$$

$$\widetilde{y}_1(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot K^i(t_0,t_0) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot e^i = y_0.$$

Таким образом, функция $\widetilde{y}_1(t)$ удовлетворяет тому же уравнению и тому же начальному условию, что и функция $y_1(t)$. Поэтому в силу единственности решения задачи Коши (2.3) эти функции совпадают друг с другом:

$$y_1(t) = \widetilde{y}_1(t) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_n \cdot K^i(t,t_0) = K(t,t_0)\cdot y_0. \tag{2.15}$$

Введем функцию $\widetilde{y}_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t}F(t,\tau)\cdot f(\tau)d\tau$. Продифференцировав ее, получаем

$$\frac{d}{dt}\widetilde{y}_2 = K(t,t)\cdot f(t) + \int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}K(t,\tau)d\tau = f(t) + \int_{t_0}^{t}A(t)\cdot K(t,\tau)\cdot f(\tau)d\tau = f(t) +$$
$$+ A(t)\cdot\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\cdot f(\tau)d\tau = A(t)\cdot\widetilde{y}_2(t) + f(t).$$

Очевидно, что $\widetilde{y}_2(t_0) = 0$.

Таким образом, функция $\widetilde{y}_2(t)$ удовлетворяет тому же уравнению и тому же начальному условию, что и функция $y_2(t)$. Поэтому в силу единственности решения задачи Коши (2.3) функции $\widetilde{y}_2(t)$ и $y_2(t)$ совпадают.

Выписывая представление функций $\widetilde{y}_1(t)$ и $\widetilde{y}_2(t)$ в выражение $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, получаем формулу Коши для аналитического представления решения задачи Коши (2.3) через матрицу влияния Коши $K(t,t_0)$:

$$y(t) = K(t,t_0)\cdot y_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\cdot f(\tau)d\tau\,, \qquad (2.16)$$

где матрица $K(t,t_0)$, $t\in\left[t_0,t^*\right]$ – решение системы $\begin{cases}\dfrac{d}{dt}K(t,\tau) = A(t)\cdot K(t,\tau),\\ K(t_0,t_0) = E,\end{cases}$

либо

$$y(t) = W(t)\cdot W^{-1}(t_0)\cdot y_0 + W(t)\cdot\int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau, \qquad (2.17)$$

где матрица $W(t)$, $t\in\left[t_0,t^*\right]$ – решение системы $\begin{cases}\dfrac{d}{dt}W(t) = A(t)\cdot W(t),\\ W(t_0) = E.\end{cases}$

Пример. Рассмотрим следующую систему ОДУ в матричном виде:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{d}{dt}X_1(t)\\ \dfrac{d}{dt}X_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1(t)\\ X_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ t\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}X_1(0)\\ X_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Решим ее по формуле Коши. Для этого подсчитаем матрицу $F(t,\tau) = F(t)\cdot F^{-1}(\tau)$, $F(t)$ – составлено из векторов ФСР. Выпишем общее решение, соответствующей однородной системе уравнений – найдем векторы ФСР.

Общее решение считается через собственные числа и соответствующие им векторы матрицы A. Получаем $A\cdot x = \lambda x$; $Ax - \lambda Ex = 0$; $(A-\lambda E)x = 0$; $\det(A-\lambda E) = 0$. Отсюда получаем $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Найдем собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению λ_1. Для этого решаем систему линейных алгебраических уравнений $(A-\lambda_1 E)\ \ x_1 = 0$. Получаем $x_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1$. Для второго вектора аналогично: $x_2 = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -1$.

Выписываем общее решение соответствующей однородной дифференциальной системы: $x(t) = c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\cdot e^t + c_2\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\cdot e^{-t}$. Переписываем в матричной форме относительно c_1 и c_2 и получаем $x(t) = \begin{bmatrix}e^t & -e^{-t}\\ e^t & e^{-t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$. Следовательно,

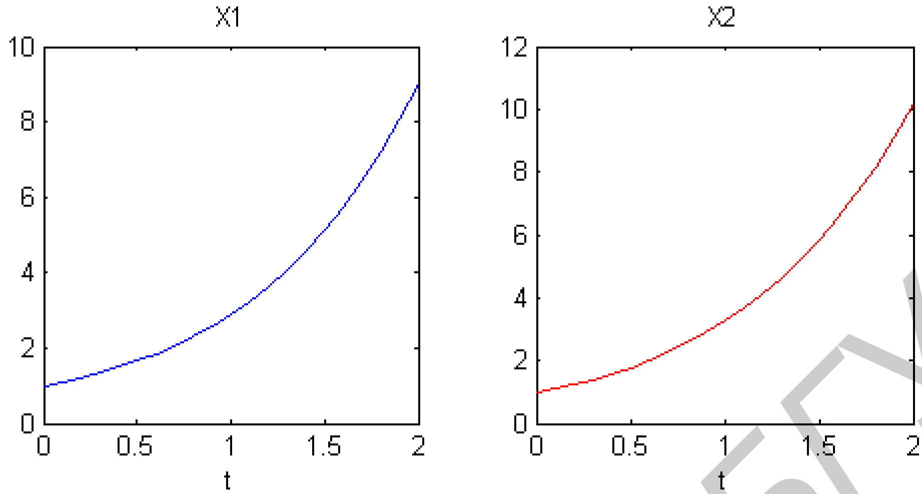
$F(t)=\begin{bmatrix} e^{t} & -e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{bmatrix}$ и $F^{-1}(\tau)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ -e^{\tau} & e^{\tau} \end{bmatrix}$. Поскольку $F(t,\tau)=F(t)\cdot F^{-1}(\tau)$, то получаем $F(t,\tau)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{t-\tau}+e^{-(t-\tau)} & e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)} \\ e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)} & e^{t-\tau}+e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$. Матрица $F(t,\tau)$ Коши (Грина) построена, применяем формулу Коши $X(t)=F(t,t_0)\cdot X_0+\int\limits_{t_0}^{t}F(t,\tau)\cdot f(\tau)d\tau$. С учетом того, что $X_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, окончательно получаем формульное решение задачи:

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^{t}+e^{-t} & e^{t}-e^{-t} \\ e^{t}-e^{-t} & e^{t}+e^{-t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\cdot\begin{bmatrix} e^{t-\tau}+e^{-(t-\tau)} & e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)} \\ e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)} & e^{t-\tau}+e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}o\\ \tau\end{bmatrix}d\tau,$$

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2t+e^{t}+e^{-t} \\ -2+e^{t}-e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}-t \\ \frac{3}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}-1 \end{bmatrix}.$$

```
% Решение по формуле Коши, исходные данные заданы в файле Input.m
syms t tau F1 F
[ n, A, X0, t0, f ] = Input();% Ввод исходных данных
% Lambda - диагональная матрица собственных значений матрицы A
% LVectors - матрица собственных векторов
[ LVectors, Lambda ] = eig(A);
% Используя матрицу Lambda, получаем вспомогательную  диагональную
% матрицу temp для построения фундаментальной матрицы Ft
% Предусмотрен случай кратных корней характеристического полинома
temp = sym(GetE(n)); k = 1;
for i = 1 : 1 : n
if ((i > 1) && (Lambda(i,i) == Lambda(i-k, i-k)))
temp(i,i) = t^k * exp(Lambda(i,i) * t); k = k + 1;
else k = 1; temp(i,i) = exp(Lambda(i,i) * t);end;
end;
Ft = simplify(LVectors * temp); % Ft-фундаментальная матрица F(t)
disp('F(t) = '); disp(Ft);
F = simplify(Ft * inv(subs(Ft,t,tau)));% F-матрица Коши F(t,tau)
disp('F(t,tau) = '); disp(F);
% X - искомое решение системы, зависящее от t
X = subs(F, tau, 0) * X0 + int(F * subs(f,t,tau), tau, t0, t);
% визуализация решения системы на временном отрезке [t0, t0+2]
disp('X = '); disp(X); disp(simplify(X));
t = t0 : 0.1 : t0+2; y = subs(X); colors = 'brgck';
for i = 1 : 1 : n
subplot(1,n,i); colorNumber = mod(i,5);
if (colorNumber == 0) colorNumber = 5; end;
plot(t, y(i,:),colors(colorNumber)); text = ['X', num2str(i)];
title(char(text)); xlabel('t');
end;
% файл Input.m - задание исходных данных
```

```
function [n, A, X0, t0, f] = Input()
syms t n=2; A=[0,1;1,0]; X0=[1;1]; t0=0; f=[0;t];
% Генерирование единичной матрицы размерностью n
function E = GetE(n)
E = magic(n); for i = 1 : 1 : n for j = 1 : 1 : n
if (i == j) E(i,j) = 1; else E(i,j) = 0; end;
end; end;
```




```
% Проверка правильности решения систем путем численного решения
% Исходные данные вводятся в файле CheckInput.m
[T,Y] = ode45(@CheckInput, [0 1], [1 1]);
for i = 1 : 1 : 2 subplot(1,2,i);colorNumber = mod(i,5);
if (colorNumber == 0) colorNumber = 5; end;
plot(T, Y(:,i), colors(colorNumber));text = ['X', num2str(i)];
title(char(text)); xlabel('t'); end;
function dy = CheckInput(t,y)
dy = zeros(2,1);dy(1) = y(2);dy(2) = y(1) + t;
```

Задачи для решения

1. $\begin{cases} x' = 2x + y + e^{-t}, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y + 2. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x' = y + \sin t, \\ y' = -x. \end{cases}$

§3. Функции от матриц. Матричная экспонента

Рассмотрим применение функций от матриц к решению систем однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если задан полином $P_m(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$ и квадратная матрица A порядка n, то очевидным образом определяется полином от матрицы $P_m(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_{m-1}A + a_mE$, где E – единичная матрица. $P_m(A)$ представляет собой матрицу того же порядка n. Способ её вычисления следует из самого представления $P_m(A)$. Однако при $m \geq n$ построение матрицы $P_m(A)$ можно упростить, используя следующий факт.

Пусть $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ – характеристический полином матрицы A. Представим его в виде $\Delta(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n$. Важнейшую роль в применении функций от матриц играет теорема Гамильтона – Кэлли, которую приведем без доказательства.

Теорема 6 (Гамильтона – Кэлли). Матрица A является нулем своего характеристического многочлена, т. е. справедливо равенство

$$A^n + p_1 A^{n-1} + \ldots + p_{n-1}A + p_n E = \Theta,$$

где Θ – нулевая матрица (все её элементы – нули), а E – единичная матрица.

Отсюда следует, что $A^n = -p_1 A^{n-1} - \ldots - p_{n-1}A - p_n E$, и поэтому любой полином $P_m(A)$ степени $m \geq n$ совпадает с некоторым полиномом от той же матрицы степени не выше $n-1$.

Определение. Пусть

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m + \ldots \tag{3.1}$$

функция комплексной переменной λ. Этому числовому ряду поставим в соответствие степенной ряд, составленный из степеней матрицы A:

$$f(A) = \sum a_k A^k, \tag{3.2}$$

который будем называть функцией от матрицы A.

Теорема 7. Если ряд (3.1) имеет бесконечный радиус сходимости $(R = \infty)$, то $f(A)$ является матрицей с конечными элементами.

Доказательство. Пусть a_{ik}^m – элементы матрицы A^m, $m = 1, 2, \ldots,$ причем $a_{ik}^1 = a_{ik}$. Пусть $\left|a_{ik}^1\right| \leq M, i,k = 1,2,\ldots,n$. Тогда очевидно, что

$$\left|a_{ik}^2\right| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}^1 a_{jk}^1\right| \leq nM^2, \quad \left|a_{ik}^3\right| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 a_{jk}^2\right| \leq n^2 M^3, \ldots, \quad \left|a_{ik}^m\right| \leq n^{m-1}M^m, \ldots \; .$$

Элементы матрицы, определяемой рядом в правой части формулы (3.2), можно представить в виде

$$\delta_{ik}a_0 + a_1 a_{ik}^1 + a_2 a_{ik}^2 + \ldots + a_m a_{ik}^m + \ldots, \quad i,k = 1,2,\ldots,n, \tag{3.3}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, определяемый формулой $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$

Каждый ряд из (3.3) мажорируется сходящимся рядом

$$\delta_{ik}\left|a_0\right| + \left|a_1\right|M + \left|a_2\right|nM^2 + \ldots + \left|a_m\right|n^{m-1}M^m + \ldots$$

Следовательно, ряд в (3.2) определяет матрицу с конечными элементами.

Теорема 8. Функция от матрицы e^{Ax} представима в виде

$$e^{Ax} = E + \frac{Ax}{1!} + \cdots + \frac{(Ax)^m}{m!} + \ldots, \tag{3.4}$$

где E – единичная матрица.

Доказательство. Так как ряд $e^{\lambda x} = 1 + \dfrac{\lambda x}{1!} + \ldots + \dfrac{(\lambda x)^m}{m!} + \ldots$ имеет бесконечный радиус сходимости, то ряд (3.4) также сходится в том смысле, что все элементы матрицы e^{Ax} являются сходящимися рядами.

Определение. Функция от матрицы e^{Ax} называется **матричной экспонентой**.

Если воспользоваться теоремой Гамильтона – Кэлли, то получим, что матрица $f(A)$, определяемая формулой (3.2), представляет собой некоторый полином $Q_f(A)$, степень которого не выше $n-1$. Матрица $f(A)$ может оказаться полиномом и по иным причинам. Если матрица A нильпотентна, т.е. существует натуральное число q такое, что A^q – матрица только с нулевыми элементами, то в этом случае $f(A) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_{q-1} \quad A^{q-1}$.

Пример 1. Степенной ряд в формуле $e^{\lambda t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ имеет бесконечный радиус сходимости, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ нильпотентна $A^2 = \Theta$, $e^{At} = E + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим основные свойства матричной экспоненты.

Свойство 1. $e^{A0} = E$, где E – единичная матрица.

Свойство 2. Если A и C – матрицы порядка n и C – невырожденная матрица, то $e^{CAC^{-1}x} = Ce^{Ax}C^{-1}$.

Свойство 3. Если матрицы A, B перестановочны ($AB = BA$), то $e^A e^B = e^{A+B}$. Матрица e^{-A} является обратной для e^A, т.е. справедливо $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = E$.

Свойство 4. Функция e^{Ax} является решением системы $\dfrac{dy}{dx} = Ay$ в смысле, что

$$ {d}/{dx}(e^{Ax}) \equiv Ae^{Ax}, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (3.5)$$

Доказательство. Поскольку ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^m}{m!}$ имеет бесконечный радиус сходимости, то $\dfrac{d}{dx} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{A^m x^m}{m!} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{d}{dx} \dfrac{A^m x^m}{m!} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{A^k x^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n x^n}{n!}$. Отсюда следует справедливость равенства (3.5).

Замечание. Функция $y = e^{Ax} y^0$, как следует из свойства 4, является решением задачи Коши: $y' = Ay$, $y(0) = y^0$.

Пример 2. В системе уравнений $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрица A является нильпотентной (см. пример 1), и $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому решение задачи Коши можно представить в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}$.

Если воспользоваться теоремой Гамильтона – Кэлли, то степенной ряд (3.4), определяющий эту функцию, может быть представлен в виде полинома относительно A, степень которого не выше $n-1$. Следующая теорема определяет структуру этого полинома.

Теорема 9. Если все собственные значения $\lambda,\ldots,\lambda_n$ матрицы A простые, а степенной ряд (3.1) имеет бесконечный радиус сходимости, то функция от матрицы $f(A)$ представима с помощью следующего интерполяционного полинома Лагранжа:

$$f(A)=\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\frac{\omega(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)\omega'(\lambda_k)}\Bigg|_{\lambda=A}, \quad \omega(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j). \tag{3.6}$$

Замечание. Напомним, что последние две теоремы справедливы в предположении, что степенной ряд, определяющий $f(\lambda)$, имеет бесконечный радиус сходимости. В том случае, когда ряд (3.1) имеет конечный радиус сходимости $(R<\infty)$, вопрос о представлении функции $f(A)$ становится значительно более сложным. Он подробно анализируется в теории функций от матриц и рассматриваться здесь не будет.

Пример 3. Вычислим e^{At}, если $A=\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$. Матрица A имеет два собственных значения $\lambda_{1,2}=\pm ik$. Составляем формулу

$$e^{At}=\left(e^{ikt}\frac{(\lambda+ik)}{2ik}+e^{-ikt}\frac{(\lambda-ik)}{-2ik}\right)_{\lambda=A}=\left(\frac{1}{2ik}(e^{ikt}-e^{-ikt})\lambda+\frac{1}{2}(e^{ikt}+e^{-ikt})\right)_{\lambda=A}.$$

Если теперь воспользоваться формулами Эйлера $\cos kt=\frac{1}{2}(e^{ikt}+e^{-ikt})$, $\sin kt=\frac{1}{2i}(e^{ikt}-e^{-ikt})$, то получаем $e^{At}=\left(\frac{\lambda}{k}\sin kt+\cos kt\right)_{\lambda=A}$ и, следовательно,

$$e^{At}=\frac{1}{k}\sin kt\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}+\cos kt\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

Рассмотренный пример показывает, что применение полинома Лагранжа дает простую процедуру построения матричной экспоненты в случае простых комплексных собственных значений матрицы A.

В случае кратных собственных значений матрицы этот прием также применим. При этом приходится выполнять ряд дополнительных операций, связанных с использованием правила Лопиталя по раскрытию неопределенностей. Проиллюстрируем его применение на конкретном примере.

Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица A имеет одно простое собственное значение $\lambda_1=2$ и одно собственное значение $\lambda_2=1$ кратностью два. Сначала выписываем полином Лагранжа в предположении, что матрица $\widetilde{A}$ имеет три различных собственных значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = p$, где p рассматривается как параметр, всевозможные значения которого принадлежат малой окрестности числа $\lambda_1 = 1$:

$$L(e^{\tilde{A}t}) = \left[e^{2t}\,\frac{(\lambda-1)(\lambda-p)}{(2-1)(2-p)} + e^{t}\,\frac{(\lambda-2)(\lambda-p)}{(1-2)(1-p)} + e^{pt}\,\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{(p-2)(p-1)} \right]_{\lambda=\tilde{A}}.$$

Затем в этой формуле переходим к пределу при $p \to 1$, имея в виду, что $\lim \widetilde{A} = A.$ Первое слагаемое в правой части последнего равенства имеет своим пределом $\left[e^{2t}(\lambda-1)^2\right]_{\lambda=A}$. Для отыскания предела второго и третьего слагаемых можно воспользоваться правилом Лопиталя. Согласно этому правилу имеем

$$\left[e^{t}\,\frac{(\lambda-2)(\lambda-p)}{(1-2)(1-p)} + e^{pt}\,\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{(p-2)(p-1)} \right]_{\lambda=\widetilde{A}} =$$

$$= \left[\frac{\lambda-2}{(p-1)(p-2)} \left[e^{t}(\lambda-p)(p-2) + e^{pt}(\lambda-1) \right] \right]_{\lambda=\widetilde{A}} \to -e^{t}\left[(\lambda-2)(\lambda+t(\lambda-1))\right]_{\lambda=A}$$

при $p \to 1$. Поэтому можно записать

$$\lim L(\widetilde{A}) = L(A) = \left[\lambda^2\left[e^{2t} - e^{t}(t+1)\right] + \lambda\left[(2t+1)e^{t} - 2e^{2t}\right] + \left[e^{2t} - 2te^{t}\right]\right]_{\lambda=A}.$$

Поскольку $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, то $L(A) = \left[e^{2t} - e^{t}(t+1)\right]$, $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} +$

$$+ \left[(2t+1)e^{t} - 2e^{2t}\right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[e^{2t} - 2te^{t}\right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычислений окончательно получаем: $e^{At} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{pmatrix}$, где

$$\begin{cases} f_{11}(t) = e^{2t} - 4te^{t},\, f_{12}(t) = e^{2t} - (2t+1)e^{t}, \\ f_{13}(t) = e^{2t} - (2t+1)e^{t},\, f_{21}(t) = -2e^{2t} + (2-4t)e^{t}, \\ f_{22}(t) = -2e^{2t} + (3+t)e^{t},\, f_{23}(t) = -2e^{2t} + (2+3t)e^{t}, \\ f_{31}(t) = 2e^{2t} - (2+4t)e^{t},\, f_{32}(t) = 2e^{2t} - (2+3t)e^{t}, \\ f_{33}(t) = 4e^{2t} - (3-6t)e^{t}. \end{cases}$$

Приведем следующий важный результат.

Теорема 10. Если известно одно частное решение неоднородной системы, то построение ее общего решения сводится к решению соответствующей однородной системы $\frac{dy}{dx} = A(x)y$.

Доказательство. В самом деле, пусть $y = u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ – решение системы $\dfrac{du(x)}{dx} \equiv A(x)u(x) + f(x)$. Тогда заменой $y = u(x) + v$ находим, что $\dfrac{d(u(x)+v)}{dx} = A(x)[u(x)+v] + f(x)$, и, следовательно, получаем систему однородных уравнений относительно переменной v: $\dfrac{dv}{dx} = A(x)v$.

Пример 4. Пусть в уравнении $dy/dt = Ay + b$, A – постоянная неособенная матрица, а b – постоянный вектор. Требуется найти его общее решение. Частное решение находим, решая систему неоднородных алгебраических уравнений $Ay = -b$. Так как матрица A невырожденная, то эта система имеет единственное решение $\bar{y} = -A^{-1}b$. Общее решение однородной системы $dy/dt = Ay$ всегда можно представить в виде $y^0(t) = e^{At} \cdot C$, где C – произвольная постоянная. Поэтому общее решение исходного уравнения можно представить в виде $y(t) = e^{At}C - A^{-1}b$.

Данный пример иллюстрирует способ построения общего решения неоднородной системы. В ряде случаев удается «угадать» частное решение неоднородной системы, в то время как известен способ построения общего решения соответствующей однородной системы.

Особый интерес представляют приведенные факты при решении систем уравнений с постоянными коэффициентами:

$$y' = Ay + f(t), \tag{3.7}$$

где A – постоянная матрица порядка n, а $f(t) = (f_1(t)\ldots, f_n(t))^T$ – заданная непрерывная на отрезке $a \le x \le b$ функция. В этом случае решение задачи Коши для уравнения $y' = Ay$ с начальным условием $y(x_0) = y^0$ определяется формулой $y(x) = e^{A(x-x_0)}y^0$. Поэтому формула Коши, определяющая решение задачи Коши для неоднородного уравнения (3.7), принимает вид

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}y^0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)} f(s)ds. \tag{3.8}$$

Таким образом, получили практический способ решения задачи Коши для неоднородной системы с постоянными коэффициентами. Нужно построить матричную экспоненту, а затем выписать формулу (3.8) искомого решения.

Если требуется получить общее решение системы, то в формуле (3.8) вместо y^0 можно использовать произвольный постоянный вектор C, т.е. такое решение можно представить в виде

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}C + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)} f(s)ds.$$

Пример 5. Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = ky + \sin\omega\ t, \\ \dot{y} = -kx + \cos\omega\ t, \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ с начальными условиями $x(t_0) = x^0$, $y(t_0) = y^0$. В примере 3 матричная экспонента e^{At} построена. Воспользовавшись этим результатом, решение поставленной задачи можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k(t-t_0) & \sin k(t-t_0) \\ -\sin k(t-t_0) & \cos k(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cos k(t-s) & \sin k(t-s) \\ -\sin k(t-s) & \cos k(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\omega s \\ \cos\omega s \end{pmatrix} ds\,.$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Давид Гильберт (David Hilbert) (1862−1943) – великий математик. Учился в Кёнигсбергском университете. В феврале 1885 г. Давид Гильберт защитил докторскую диссертацию. В марте 1886 г. по совету Феликса Клейна отправился на семинар в Париж, где слушал лекции Пуанкаре, Пикара, Эрмита, Жордана. Вернувшись в Кёнигсберг, Давид Гильберт получает звание профессора. В 1895 г. по приглашению Клейна Гильберт переходит в Гёттингенский университет. На этой должности он работает 35 лет. Среди прямых учеников Гильберта в Гёттингене были ученые с мировыми именами**:** Эрнст Цермело, Герман Вейль, Джон фон Нейман, Рихард Курант, Гуго Штейнгауз и др. Творчество Давида Гильберта четко распадается на периоды, посвящённые работе в конкретной области математики**:** теория инвариантов (1885−1893), теория алгебраических чисел (1893−1898), основания геометрии (1898−1902), принцип Дирихле и примыкающие к нему проблемы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений (1900−1906), теория интегральных уравнений (1900−1910), решение проблемы Варинга в теории чисел (1908−1909), функциональный анализ и основы математической физики (1910−1922), логические основы математики (1922−1939).

В августе 1900 г. Гильберт выступил с историческим докладом на II Международном конгрессе математиков в Париже. Гильберт сформулировал двадцать три проблемы, имевшие, по его мнению, наибольшее значение. Доклад оказал колоссальное влияние на направления дальнейшего развития математических исследований. Наиболее известным вкладом Гильберта в физику является обоснование уравнений Эйнштейна – основных уравнений общей теории относительности, проведённое им в ноябре 1915 г. практически одновременно с Эйнштейном. Гильберт первым использовал при выводе этих уравнений вариационный метод, ставший впоследствии одним из основных в теоретической физике. Это был первый в истории физики случай, когда уравнения фундаментальной теории были получены таким путем.

ГЛАВА 7. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу построения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым условиям. Такие задачи называются краевыми задачами, в отличие от ранее изученных задач Коши. Для упрощения, ограничимся исследованием задачи для уравнения второго порядка.

§1. Линейное уравнение второго порядка

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.1}$$

в котором коэффициенты $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ определены и непрерывны на отрезке $0 \le x \le l$, причем производная $a_0'(x)$ также непрерывна и существует постоянная $a > 0$ такая, что $a_0(x) \ge a$. Функция $\varphi(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $0 < x < l$.

Покажем, что это уравнение можно привести к следующему виду:

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = f(x). \tag{1.2}$$

Для этого обе части уравнения (1.1) умножим на $\rho(x)$. Чтобы полученное уравнение $\rho(x)a_0(x)y'' + \rho(x)a_1(x)y' + \rho(x)a_2(x)y = \rho(x)\varphi(x)$, $0 < x < l$ можно было записать в виде (1.2), следует потребовать выполнения условия $(\rho a_0)' = \rho a_1$, что, в свою очередь, выполняется при $\rho(x) = exp(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1 - a_0}{a_0} dx)$, $0 < x < l$. Выбрав таким образом $\rho(x)$ и положив $\rho(x) = \rho(x)a_0(x)$, $q(x) = -\rho(x)a_2(x)$, приводим уравнение (1.1) к виду (1.2).

При этом важно, что функция $\rho(x)$ определена на отрезке $[0,l]$, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $\rho(x) \ge \rho_0 > 0$, где ρ_0 – некоторая положительная постоянная. Уравнение (1.2) обладает рядом интересных свойств. Отметим некоторые из них.

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ – решения следующих уравнений:

$$L[y] = f(x),\ L[z] = g(x).$$

Умножая первое из них на $z(x)$, а второе – на $y(x)$ и вычитая почленно полученные результаты, будем иметь

$$r(x)L[y(x)] - y(x)L[z(x)] = z(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] - y(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz(x)}{dx}\right] =$$
$$= z(x)f(x) - y(x)g(x).$$

Так как

$$z(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] - y(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz(x)}{dx}\right] =$$
$$= \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy(x)}{dx} - y(x)\frac{dz(x)}{dx}\right)\right], \tag{1.3}$$

то из равенства (1.3) следует, что

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy(x)}{dx}-y(x)\frac{dz(x)}{dx}\right)\right]=z(x)f(x)-y(x)g(x).$$

Это соотношение называется тождеством Лагранжа. Его часто переписывают в операторной форме

$$z(x)\cdot L[y(x)]-y(x)\cdot L[z(x)]=z(x)\cdot f(x)-y(x)\cdot g(x). \qquad (1.4).$$

Интегрируя тождество (1.4), получаем формулу Грина:

$$\int_0^l (z(x)L[y(x)]-y(x)L[z(x)])dx=\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy(x)}{dx}-y(x)\frac{dz(x)}{dx}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=l}=$$

$$=\int_0^l [z(x)f(x)-y(x)g(x)]dx.$$

Из (1.4) следует, что если $y(x)$ и $z(x)$ – решения однородного уравнения

$$L[y]=0, \qquad (1.5)$$

то $p(x)\left(z(x)\frac{dy(x)}{dx}-y(x)\frac{dz(x)}{dx}\right)=c$, где постоянная c не является произвольной, а зависит от выбора решений $y(x)$ и $z(x)$. Отсюда находим, что определитель Вронского решений $y(x)$ и $z(x)$ имеет вид

$$\Delta(y,z)=\frac{c}{p(x)}. \qquad (1.6)$$

Замечание. Из соотношения (1.6) следует, что если известно одно решение $y_1(x)$ уравнения (1.5), то любое другое его решение $y(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta(y_1(x),y)=\frac{c}{p(x)}$. Это соотношение представляет собой линейное неоднородное уравнение первого порядка $y_1(x)\frac{dy}{dx}-\frac{dy_1(x)}{dx}y=\frac{c}{p(x)}$, зависящее от произвольной постоянной c. Его общее решение можно получить методом вариации произвольной постоянной. В итоге общее решение уравнения (1.5) можно получить в виде $y(x)=y_1(x)\left[c_1+c\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{p(s)y_1^2()s}\right]$.

§2. Краевая задача. Функция Грина

Рассмотрим следующую задачу. Требуется найти решение $y(x)$ уравнения $L[y]=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y=f(x)$, непрерывное на отрезке $[0,l]$, которое удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} a_0y(0)+a_1y'(0)=0,\\ \beta_0y(l)+\beta_1y'(l)=0, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где a_0,a_1,β_0,β_1 – заданные постоянные, такие, что $a_0^2+a_1^2\neq 0$ и $\beta_0^2+\beta_1^2\neq 0$.

Поставленная задача называется краевой задачей.

Если краевые условия неоднородны, т.е. имеют вид

$$\begin{cases} a_0 y(0) + a_1 y'(0) = \gamma_1, \\ \beta_0 y(l) + \beta_1 y'(l) = \gamma_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

где γ_1 и γ_2 – некоторые постоянные, то задачу можно свести к такой же задаче, но с однородными условиями (2.1) следующим образом. Сначала находим функцию $u(x)$ такую, чтобы она удовлетворяла условиям (2.2). Обычно ее можно построить в виде полинома $u(x) = ax + b$. Затем в уравнении (1.2) делаем замену $y = y_1 + u(x)$.

В результате относительно неизвестной y_1 получаем уравнение

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = f_1(x), \quad f_1(x) = f(x) - \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u \tag{2.3}$$

с однородными граничными условиями (2.1). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только задачу (1.2), (2.1). Эта задача решается с помощью функции Грина, которая определяется следующим образом.

Определение. Функцией Грина будем называть функцию $G(x,s)$, $0 \le x$, $s \le l$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $G(x,s)$ непрерывна на x и s при $0 \le x$, $s \le l$.
2. $G(x,s)$ как функция переменной x удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = 0, \quad 0 < x < l \tag{2.4}$$

при любом фиксированном $s \in [0,l]$ и условиям (2.1).

3. Первая производная $G_x(x,s)$ имеет разрыв при $x = s$, величина которого определяется соотношением

$$G_x(s+0,s) - G_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}, \; 0 \le s \le l. \tag{2.5}$$

Из определения функции Грина еще не следует ее существование для каждой краевой задачи (2.1), (2.4). Докажем, что краевая задача (2.1), (2.4) имеет функцию Грина, если эта задача имеет только тривиальное решение в классе дважды дифференцируемых функций.

2.1. Краевая задача для неоднородного уравнения. Перейдем к решению краевой задачи (1.2), (2.1). Напомним об основных предположениях, при которых рассматривается эта задача. Они состоят в следующем.

1. Функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны при $0 \le x \le l$.
2. Существует постоянная p_0 ($p_0 > 0$) такая, что $p(x) > p_0$ при $0 \le x \le l$.
3. Однородная краевая задача (2.1), (2.4) имеет только тривиальное решение в классе дважды дифференцируемых функций.

При выполнении этих условий задача (2.1), (2.4) однозначно разрешима. Если же эти условия не выполняются, то, как показано ниже, подобное утверждение относительно краевой задачи (2.1), (2.4) не всегда верно.

Теорема 1. При выполнении указанных выше предположений 1–3 функция

$$y(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)ds \tag{2.6}$$

является решением краевой задачи (1.2), (2.1).

Из (2.6) находим, что

$$y'(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)ds\,.$$

Имея в виду представление функции Грина, запишем:

$$y'(x) = \int_0^x G_x(x,s)f(s)ds + \int_x^l G_x(x,s)f(s)ds = \int_0^l G_x(x,s)f(s)ds\,.$$

Отсюда следует, что

$$y''(x) = \int_0^x G_{xx}(x,s)f(s)ds + \int_x^l G_{xx}(x,s)f(s)ds + G_x(x,x-0)f(x) - G_x(x,x+0)f(x) =$$

$$= \int_0^l G_{xx}(x,s)f(s)ds + \left[G'_x(x,x-0) - G''_x(x,x+0)\right]f(x)\,.$$

Так как, по определению, функция Грина удовлетворяет условию (2.5), то

$$y''(x) = \int_0^l G''_{xx}(x,s)f(s)ds + \frac{f(x)}{p(x)}\,.$$

Следовательно, $L\left[y(x)\right] = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) - q(x) = \int_0^l \left[p(x)G''_{xx}(x,s) + \right.$ $\left. + p'(x)G'_x(x,s) - q(x)G(x,s)\right]f(s)ds + f(x)$. Так как выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю (по определению $G(x,s)$ – решение однородного уравнения $L[y]=0$), то отсюда находим, что

$$L\left[\int_0^l G(x,s)f(s)ds\right] \equiv f(x),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим вопрос о единственности решения краевой задачи (1.2), (2.1).

Теорема 2. Если однородная краевая задача (1.5), (2.1) имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, то задача (1.2), (2.1) имеет единственное решение.

Доказательство получается методом от противного. Если предположить, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$, $y_1(x) \neq y_2(x)$, – два решения задачи, то функция $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$, не равная тождественно нулю, является решением однородной задачи (1.5), (2.1), а это противоречит условию теоремы.

Приведенный ниже пример показывает, что условие теоремы является существенным. Можно указать случаи, когда оно не выполняется, и тогда неоднородная краевая задача имеет одно-, а возможно, и двухпараметрическое семейство решений. Может оказаться, что задача вообще не имеет решения.

Теорема 3. Необходимым условием разрешимости краевой задачи (1.2), (2.1) является условие

$$\int_0^l \varphi(x) f(x) dx = 0, \tag{2.7}$$

где $\varphi(x)$ – произвольное решение соответствующей однородной задачи (1.5), (2.1).

Доказательство. Пусть $y(x)$ – решение неоднородной краевой задачи (1.2), (2.1), а $\varphi(x)$ – решение однородной задачи (1.5), (2.1). Применим формулу Грина к этим функциям:

$$\int_0^l (\varphi(x)L[y)(x)] - y(x)L[\varphi(x)])dx = \left[p(x)\left(\varphi(x)\frac{dy(x)}{dx} - y(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} \right) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=l} =$$

$$= \int_0^l [\varphi(x) f(x)] dx. \tag{2.8}$$

Докажем, что выражение, стоящее в середине цепочки равенств, равно нулю. В самом деле, из того, что $\varphi(x)$ и $y(x)$ удовлетворяют первому граничному условию из (2.1), имеем равенства

$$a_0\varphi(0) + a_1\varphi'(0) = 0;\ a_0 y(0) + a_1 y'(0) = 0,$$

в которых a_0 и a_1 не могут быть одновременно равны нулю (см. (2.1)). Для определенности предположим, что $a_1 \neq 0$. Тогда

$$\left(\varphi(x)\frac{dy(x)}{dx} - y(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)_{x=0} = \frac{1}{a_1}\big(a_0\varphi(0)y(0) - a_0 y(0)\varphi(0)\big) = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\left(\varphi(x)\frac{dy(x)}{dx} - y(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)_{x=l} = 0.$$

Следовательно, равенства (2.8) принимают вид

$$\int_0^l (\varphi(x)L[y(x)] - y(x)L[\varphi(x)])dx = \int_0^l f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + y = f(x);\ 0 < x < \pi;\ y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2.9}$$

Соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$ имеет общее решение $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ и, следовательно, существует однопараметрическое семейство решений $y_1(x,c) = c \sin x$, удовлетворяющих краевым условиям

$y(0)=y(\pi)=0$. Однако у этого уравнения нет двух линейно независимых дважды дифференцируемых решений, каждое из которых удовлетворяло бы лишь одному из этих краевых условий. Чтобы построить частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Его ищем в виде $Y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$. Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получаем систему уравнений

$$C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0\,;\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=f(x)\,.$$

Отсюда получаем $C_1'(x)=-f(x)\sin x$, $C_2'(x)=f(x)\cos x$. Следовательно,

$$Y(x)=\int_0^x f(s)\sin(x-s)ds\,,$$

и общее решение неоднородного уравнения можно представить в виде

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\int_0^x f(s)\sin(x-s)ds\,.$$

Это решение будет удовлетворять граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0$, если

$$c_1=0\,,\ \int_0^\pi f(s)\sin s ds=0\,. \tag{2.10}$$

В частности, если $f(x)=1$ при всех $x\in[0,\pi]$, то второе равенство (2.10) не выполняется, и в этом случае краевая задача (2.9) не имеет решения.

Замечание. Приведенный пример показывает, что не любое уравнение (1.5) имеет два линейно независимых дважды непрерывно дифференцируемых решения, удовлетворяющих условиям (2.1) соответственно при $x=0$ и $x=l$. Если таких решений нет, то функцию Грина построить не удается.

§3. Собственные значения и интегральные уравнения

Отметим два важных направления теоретических приложений, непосредственно примыкающих к рассматриваемой теме. Первое направление связано с уравнением вида

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u=\lambda\,\rho(x)u\,,\quad a<x<b\,, \tag{3.1}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ – заданные непрерывные функции, λ – параметр. Оно рассматривается вместе с граничными условиями вида

$$A_1u(a)+B_1\frac{du(a)}{dx}=0;\ A_2u(b)+B_2\frac{du(b)}{dx}=0\,, \tag{3.2}$$

где постоянные A_i и B_i удовлетворяют условиям $A_i^2+B_i^2\neq 0$, $i=1,2$.

Значения параметра λ ($\lambda=\lambda_0$), при котором задача (3.1), (3.2) имеет нетривиальное решение, называется собственным значением этой краевой задачи. Нетривиальное решение $U_0(x)$ краевой задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right]+q(x)u=\lambda_0\rho(x)u, \quad a<x<b, \\ A_1u(a)+B_1\dfrac{du(a)}{dx}=0, \quad A_2u(b)+B_2\dfrac{du(b)}{dx}=0 \end{cases} \tag{3.3}$$

называется собственной функцией краевой задачи (2.8), (3.1), соответствующей собственному значению λ_0.

Собственные значения и собственные функции обладают рядом замечательных свойств. Отметим следующие из них[12].

1. Краевая задача (3.1), (3.2) имеет счетное множество собственных значений λ_1, ..., λ_n, ... При этом обычно $\lambda_n \to \infty$.

2. Соответствующая система собственных функций $U_1(x)$, …, $U_n(x)$, … всегда может быть сделана ортонормированной, т.е. она обладает свойством

$$\int_b^a U_k(x)U_m(x)dx = \begin{cases} 1 \quad при \quad k=m, \\ 0 \quad при \quad k\neq m. \end{cases}$$

3. Ортонормированная система собственных функций $\{U_k(x)\}$ образует полный базис в пространстве $L_2(a,b)$, т. е. каждая функция $\varphi(x)$ из $L_2(a,b)$ однозначно представима в виде ряда Фурье:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n U_n(x) \ ; \ \varphi_n=\int_a^b \varphi(x)U_n(x)dx \, .$$

Эти свойства системы собственных функций послужили основой для разработки одного из наиболее эффективных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных – метода разложения решения в ортогональный ряд. Различные обобщения краевой задачи (3.1), (3.2) привели к возникновению одного из основных разделов функционального анализа – спектральной теории операторов[13].

Второе направление, основанное на теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, основывается на применении функции Грина. Ее использование позволяет установить связь краевых задач с интегральными уравнениями. Действительно, рассмотрим краевую задачу (3.1), (3.2).

Пусть $G(x,s)$, $a\le x,\ s\le b,$ – функция Грина однородной краевой задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right]+q(x)u=0, \quad a<x<b, \\ A_1u(a)+B_1\dfrac{du(a)}{dx}=0, \quad A_2u(b)+B_2\dfrac{du(b)}{dx}=0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Тогда краевая задача (3.1), (3.2) сводится к интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,s)\rho(s)u(s)ds,\quad a<x<b. \qquad (3.5)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться теоремой 1. Нужно лишь вместо функции $f(x)$ взять $\rho(x)u(x)$. Можно доказать и обратное: решение уравнения (3.5) является решением краевой задачи (3.1), (3.2). Если дополнительно предположить, что $\rho(x)>0$ при $a<x<b$, то уравнения (3.5) можно упростить следующим образом.

Умножим обе его части на $\sqrt{\rho(x)}$ и введем новую неизвестную функцию $v(x)$, положив $v(x)=\sqrt{\rho(x)}\cdot u(x)$. Тогда уравнение (3.5) приводится к виду

$$v(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)v(s)ds;\quad K(x,s)=\sqrt{\rho(x)}G(x,s)\sqrt{\rho(s)}. \qquad (3.6)$$

Выше было показано, что функция $G(x,s)$ симметрична, т.е. $G(x,s)=G(s,x)$ при $x,s\in[a,b]$. Поэтому интегральное уравнение (3.6) имеет симметричное ядро $K(x,s)$. Теория интегральных уравнений с симметричным ядром нашла широкое приложение в физике и механике. В этой теории наряду с однородными интегральными уравнениями вида (3.6) рассматриваются и неоднородные уравнения[14]

$$v(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)v(s)ds+F(x).$$

Они послужили основой для направления в современном функциональном анализе – теории вполне непрерывных (компактных) операторов.

§4. Интегрирование уравнений с помощью рядов Фурье

Исследуя вопрос о возможности представления решений дифференциальных уравнений рядами, необходимо рассмотреть случай построения решения в виде рядов Фурье.

Типичным примером такой задачи является построение периодического решения линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть в уравнении $y''+p_1y'+p_2y=f(x)$, $p_1,p_2=$ const, $f(x)$ – 2π-периодическая функция, допускающая разложение в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx. \qquad (4.1)$$

Периодическое решение уравнения (4.1) ищем также в виде ряда Фурье:

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos kx+B_k\sin kx. \qquad (4.2)$$

Подставляя ряды (4.1) и (4.2) в уравнение $y''+p_1y'+p_2y=f(x)$ и приравнивая коэффициенты при $\cos(kx)$ и $\sin(kx)$, получаем бесконечную последовательность равенств для определения A_0, A_k, B_k:

$$A_0 p_2 = a_0, \tag{4.3}$$

$$A_k[(p_2 - k^2)^2 + p_1^2 k^2] = (p_2 - k^2)a_k - p_1 k b_k,\ k = 1,2,\dots \tag{4.4}$$

$$B_k[(p_2 - k^2)^2 + p_1^2 k^2] = (p_2 - k^2)b_k - p_1 k a_k,\ k = 1,2,\dots \tag{4.5}$$

Подробно рассмотрим уравнения (4.3), (4.4), (4.5).

Если $p_2 \neq 0$, то $A_0 = \dfrac{a_0}{p_2}$, где $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$. Если $p_2 = 0$, то для существования решения уравнения (4.3) необходимо, чтобы выполнялось условие $a_0 = 0$ (правая часть не содержит нулевой гармоники). Тогда A_0 – произвольная постоянная, входящая в общее решение уравнения $y'' + p_1 y' = f(x)$. Если же $p_2 = 0$ и $a_0 \neq 0$, то периодического решения не существует.

Переходим к уравнениям (4.4), (4.5). Если $p_1 \neq 0$ (это означает наличие трения в системе, описываемой уравнением (3.6)), то уравнения (4.4) и (4.5) разрешимы и

$$A_k = \frac{(p_2 - k^2)a_k - p_1 k b_k}{(p_2 - k^2)^2 + p_1 k^2};\ B_k = \frac{(p_2 - k^2)b_k - p_1 k a_k}{(p_2 - k^2)^2 + p_1^2 k^2}. \tag{4.6}$$

Если $p_1 = 0$ (трение отсутствует), то уравнения (4.2), (4.3) принимают вид

$$A_k(p_2 - k^2) = a_k,\ B_k(p_2 - k^2) = b_k. \tag{4.7}$$

Уравнения (4.7) разрешимы относительно A_k и B_k в двух случаях:

1) если $p_2 \neq k^2, \forall k$. Тогда

$$A_k = \frac{a_k}{p_2 - k^2} = \frac{1}{p_2 - k^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx,$$

$$B_k = \frac{b_k}{p_2 - k^2} = \frac{1}{p_2 - k^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx,\ k = 1,2,\dots \tag{4.8}$$

и существует периодическое решение уравнения (3.6), определяемое формулой (4.2);

2) если для некоторого k_0 выполнено $p_2 = k_0^2$ и при этом значении k_0 одноименные коэффициенты Фурье a_{k_0} и b_{k_0} равны нулю:

$$a_{k_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(k_0 x)dx = 0,\ b_{k_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(k_0 x)dx = 0.$$

Иначе говоря, в составе $f(x)$ отсутствуют резонирующие гармоники. В этом случае уравнения (4.7) принимают вид $A_{k_0}\cdot 0 = 0$; $B_{k_0}\cdot 0 = 0$. Отсюда следует, что A_{k_0} и B_{k_0} остаются произвольными постоянными. Действительно, при

$p_1=0$, $p_2=k_0^2$ сумма $A_{k_0}\cos k_0x+B_{k_0}\sin k_0x$ при любых A_{k_0} и B_{k_0} входит в состав общего решения однородного уравнения.

Остальные коэффициенты A_{k_0}, B_{k_0} при $k\neq k_0$ определяются по формулам (4.7). Периодическое решение уравнений (3.6) существует.

Если же $p_1=0$, $p_2=k_0^2$, но хотя бы один из коэффициентов a_{k_0} и b_{k_0} отличен от нуля, периодического решения уравнения (3.6) не существует. Действительно, для k_0-гармоники имеем уравнение (резонансный случай)

$$y''+k_0^2y=ak_0\cos k_0x+b_{k_0}\sin k_0x,$$

в общее решение которого входит непериодическая функция

$$x(A_{k_0}\cos k_0x+B_{k_0}\sin k_0x).$$

Замечание. Если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся ряд Фурье, то ряд (4.2) для функции $y(x)$ с коэффициентами A_k и B_k, определяемыми формулами (4.6) или (4.7), допускает двукратное почленное дифференцирование, оставаясь равномерно сходящимся.

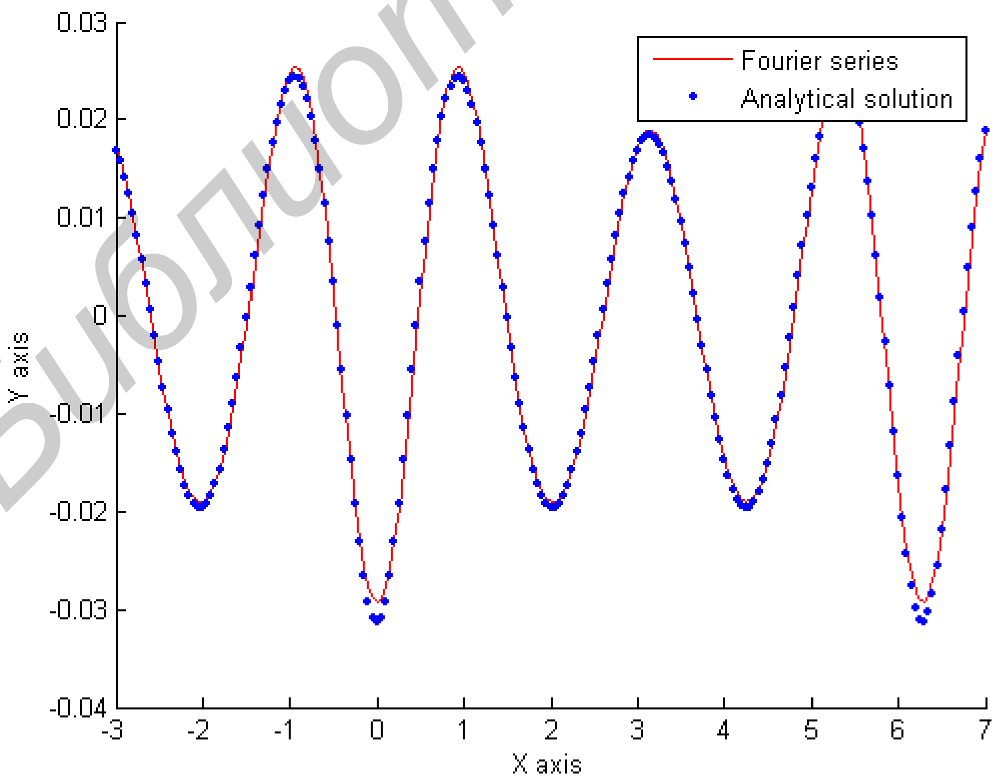
Действительно, из (4.7) следует, что $A_k=O(\frac{a_k}{k^2})$, $B_k=O(\frac{b_k}{k^2})$ и после двукратного дифференцирования коэффициенты ряда для $y''(x)$ будут отличаться от a_k и b_k в равномерно сходящемся ряде (4.1) на множители порядка $O(1)$. Значит, ряд для $y''(x)$ будет, как и ряд (4.1), равномерно сходящимся, и ряд (4.2) допускает двукратное почленное дифференцирование.

Пример 1. Найдем периодическое решение уравнения $y''(x)+4y=\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$.

Неоднородность в правой части $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, поэтому сходится равномерно для $x\in R$ и имеет непрерывно дифференцируемую конечную сумму – функцию $S(x)\in C^{\infty}(R)$. Для нашего уравнения получаем: $p_1=0$; $p_2=4=2^2$; $a_0=0$; $a_k=\frac{1}{k^2}$; $b_k=0$, $k=3,4,..$ Для правой части (суммирование начинается с $k=3$, $f(x)=\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$) выполнено условие $p_2\neq k^2$, $k=3,4,...$. В правой части отсутствуют гармоники $\cos 2x$ и $\sin 2x$. Поэтому $\forall k=3,4,...$ коэффициенты A_k

и B_k существуют и находятся по формулам $A_k = \dfrac{1}{k^2(4-k^2)}$; $B_k = 0$, $k = 3,4,\ldots$. Таким образом, периодическое решение исследуемого неоднородного уравнения имеет вид $\tilde{y}(x) = \sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k^2(4-k^2)}$, а все периодические решения содержатся в формуле $y(x) = A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k^2(4-k^2)}$, A_2, B_2 – произвольные постоянные.

```
1.  syms Sum Sum1 x k % Инициализируем символьные переменные
% Решаем уравнение с частичной суммой в правой части
2.  Sum=dsolve('D2y=-4*y+cos(3*x)/9+cos(4*x)/16+cos(5*x)/25','x');
3.  pretty(Sum); % Отображаем формулу построенного решения
% Программируем решение, построенное в рассмотренном примере
4.  Sum1=0*cos(2*x)+0*sin(2*x)+symsum(cos(k*x)/(k^2*(4-k^2)),k,3,15);
5.  pretty(Sum1); % Отображаем формулу построенного решения
6.  x = -3:.05:7; % Задаем интервал изменения аргумента
% Произвольные константы в решении C1 и C2 можно задать так:
% C1 = 0; C2 = 0; если это позволяет версия среды Matlab
% Индексы при произв. константах С корректируем самостоятельно
7.  C1 = 0:0.0000001:0.00002; % Задание констант в нашей версии
8.  C2 = 0:0.0000001:0.00002;
9. xlabel('X axis'); ylabel('Y axis'); hold on; % Рисуем графики
10. plot(x, subs(Sum),'r'); plot(x, subs(Sum1),'.b');
11. legend('Fourier series','Analytical solution'); % Легенда
```



Пример 2. Найти периодическое решение уравнения $y''(x)+4y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^2}$. В общих обозначениях получаем $p_1=0$, $p_2=4=2^2$, $a_0=1$, $a_k=\dfrac{1}{k^2}$, $k=1,2,3,...$; $b_k=0$, $k=1,2,3,...$. Для правой части имеет место $p_2=k_0^2$ при $k_0=2$. При этом $a_{k_0}=a_2=\dfrac{1}{4}$, $b_{k_0}=b_2=0$, т.е. правая часть содержит резонансную гармонику $\cos 2x$. Следовательно, периодического решения исходного уравнения не существует.

Задачи для решения

Найти периодические решения следующих уравнений в случае их существования:

1. $y''+4y=\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^2}$. **2.** $y''-y=|\sin x|$. **3.** $y''+y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^3}$. **4.** $y''+4y=\cos^2 x$.

5. $y''+y=\cos x\cdot\cos 2x$. **6.** $y''+y'=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k^2}$. **7.** $y''+3y=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx+\sin kx}{k^3}$.

§5. Уравнение Бесселя

5.1. Гамма-функция. При изучении колебательных процессов часто необходимо решать уравнение Бесселя. Его изучению кратко предпошлем некоторые свойства факториальной функции, которая называется Гамма-функцией и обозначается $\Gamma(x)$.

Трансцендентная функция $\Gamma(x)$ распространяет значение факториала $x!$ на случай любого x, действительного или комплексного, $x\neq 0,-1,-2,...$. Гамма-функция была введена Леонардом Эйлером при помощи бесконечного произведения

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)...\left(1+\frac{x}{n}\right)}, \qquad (5.1)$$

из которого Эйлер получил интегральное представление $\Gamma(x)$ – Эйлеров интеграл второго рода – в виде

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,\ \operatorname{Re}x>0. \qquad (5.2)$$

Чаще всего, определяя Γ-функцию, исходят из формулы (1.2). Выясним область сходимости несобственного интеграла (5.2). Имеем

$$\Gamma(x)==\int_0^{1}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt. \qquad (5.3)$$

Оба интеграла в этом равенстве сходятся равномерно по параметру x на любом конечном отрезке $[a,b]\subset(0,+\infty)$ по признаку сравнения Вейерштрасса.

Так как подынтегральная функция $t^{x-1}e^{-t}$ непрерывна при $t>0$, $x>0$, то оба интеграла в равенстве (5.3) являются непрерывными функциями параметра x на отрезке $[a,b]\subset(0,+\infty)$. Поэтому $\Gamma(x)$ является непрерывной при $x>0$.

При $x>0$ функция $\Gamma(x)$ будет и непрерывно дифференцируемой, причем $\Gamma'(x)=\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt+\int\limits_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$. Дифференцирование под знаком интеграла законно в силу равномерной сходимости (5.2) по параметру x на отрезке $[a,b]\subset(0,\infty)$: $\Gamma''(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^2 dt$, $\Gamma^{(n)}(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt, n=1,2,...$.

Так как $\Gamma''(x)>0$, то гамма-функция является выпуклой функцией, имеющей положительный единственный минимум.

Пример. По определению найдем $\Gamma(1)$. Имеем $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=1$. Найдем $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Получаем $\Gamma(\frac{1}{2})=\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}dt=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\left|\begin{array}{c}\sqrt{t}=s, dt=2sds\\ t=0\Rightarrow s=0\\ t=\infty\Rightarrow s=\infty\end{array}\right|=\int\limits_0^\infty \frac{2se^{-s^2}}{s}ds=$

$=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$, так как интеграл Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Приведем некоторые полезные соотношения.

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \tag{5.4}$$

Из $\Gamma(1)=1$ и (5.5) при целом $n=0,1,2...$ имеем

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{5.5}$$

При $n=0$ из (5.5) следует $0!=\Gamma(1)=1$. Применяя повторно (5.4) при $x>0$, получаем

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)x\Gamma(x). \tag{5.6}$$

Если $x\in(0,1]$, то $(x+1)\in(1,2]$ и т.д. Тогда, зная $\Gamma(x), x\in(0,1]$, можно вычислить $\Gamma(x), x\in(1,2]$ и т.д. В частности, имеем

$$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x), x\in(0,1). \tag{5.7}$$

Справедливо следующее тождество:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=x\lim_{n\to\infty}e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)x}\cdot\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}, \tag{5.8}$$

где $n^{-x}=e^{\ln n^{-x}}=e^{-x\ln n}$, $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^\infty\frac{1}{n}-\ln n)$ – постоянная Эйлера, первые цифры которой представляют число $\gamma=0{,}577217...$.

Согласно (5.8) имеем $\dfrac{1}{\Gamma(x)\Gamma(-x)}=(-x)xe^{\gamma x}\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right)\cdot e^{-\gamma x}\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$.

Отсюда и из формулы (5.7) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right). \tag{5.9}$$

Справедливы соотношения

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\ 0<x<1;\ \ \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\pi}{\cos\pi x}. \tag{5.10}$$

Пример. Найдем $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. При $x=\frac{1}{2}$ из формулы (5.10) имеем $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi$,

т.е. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}$, поскольку $\Gamma(x)\geq 0$. Положив в формуле (5.6) $x=\frac{1}{2}$, получим

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}. \tag{5.11}$$

Найдем $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$. По формуле (5.4) получим $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=$

$=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\sqrt{\pi}$. Отсюда, используя (5.11), будем иметь

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)=\left(3-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{3}{2}\right)\left(3-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5\cdot3\cdot1}{2^3}\sqrt{\pi}.$$

5.2. Уравнение Бесселя. Его интегрирование с помощью обобщенного степенного ряда. Следующее линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{5.12}$$

называется уравнением Бесселя с параметром ν. Чтобы найти общее решение уравнения (5.12), следует найти два его линейно независимых решения.

Решение уравнения (5.12), вообще говоря, ищется в виде так называемого обобщенного степенного ряда

$$y=y(x)=x^p\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+p},\quad a_0\neq 0. \tag{5.13}$$

Продифференцировав формально степенной ряд два раза, получим

$$y'=y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+p)x^{k+p-1},\qquad y''=y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+p)(k+p-1)x^{k+p-2}.$$

Подставив y, y', y'' в уравнение (5.12), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p)(k+p-1)x^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p)x^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p} = 0,$$

или $\sum_{k=0}^{\infty} a_k ((k+p)^2 + x^2 - \nu^2)x^{k+p} = 0$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x к нулю, получим бесконечную систему

$$\begin{array}{l|l} x^p & a_0(p^2 - \nu^2) = 0, \\ x^{p+1} & a_1((p+1)^2 - \nu^2) = 0, \\ x^{p+2} & a_2((p+2)^2 - \nu^2) + a_0 = 0, \\ x^{p+3} & a_3((p+3)^2 - \nu^2) + a_1 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ x^{p+n} & a_n((p+n)^2 - \nu^2) + a_{n-2} = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots \end{array} \tag{5.14}$$

По условию $a_0 \neq 0$. Следовательно, из первого уравнения находим $p = \pm\gamma$. Пусть $p = \gamma \geq 0$. Тогда из равенств (5.14) следует, что коэффициенты a_n с нечетными индексами равны нулю, а для коэффициентов с четными индексами будем иметь соотношения

$$a_2 = -\frac{a_0}{(2+\nu)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{4(1+\nu)} = -\frac{a_0}{1 \cdot 2^2 (\nu+1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(4+\nu)^2 - \nu^2} = -\frac{a_2}{2 \cdot 4(\nu+2)} = (-1)^2 \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 2^4 (\nu+1)(\nu+2)},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{(6+\nu)^2 - \nu^2} = (-1)^3 \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^3 (1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} = (-1)^3 \frac{a_0}{3! \cdot 2^6 (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}.$$

По индукции получаем, что $a_k = \dfrac{(-1)^k a_0}{k! \cdot 2^{2k} (\nu+1)(\gamma+2)\ldots(\nu+k)}$. Подставив эти коэффициенты в ряд (5.13), получим решение уравнения Бесселя в виде

$$\begin{aligned} y = y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0 x^\nu}{k! \cdot 2^{2k} (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} x^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0 x^\nu}{k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Для решения (5.15) произвольный коэффициент a_0 принято выбирать в виде $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \cdot \nu!} = \dfrac{1}{2^\nu \cdot \Gamma(\nu+1)}$. Так как $\Gamma(k+\nu+1) = (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)$, то решение (5.15) уравнения Бесселя представится в виде

$$y = y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\nu} x^{2k}}{k! \cdot 2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} = $$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = J_{\nu}(x). \tag{5.16}$$

При $p = -\nu$, выбрав коэффициент a_0 в виде $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(-\nu+1)}$, функцию $J_{-\nu}(x)$ запишем в форме ряда

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \tag{5.17}$$

Функции $J_{\nu}(x), J_{-\nu}(x)$, определенные соответственно равенствами (5.16) и (5.17), называются **функциями Бесселя** первого рода порядка ν и $-\nu$ или **цилиндрическими функциями первого рода**.

При ν нецелом ряды (5.16) и (5.17), определяющие функции $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, по признаку Даламбера сходятся при всех x. Так как $J_{\nu}(x) \to 0, J_{-\nu}(x) \to \infty$ при $x \to 0$, то функции линейно независимы при ν, не равном целому числу n. В этом случае общее решение уравнения Бесселя записывается в виде

$$y = y(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 J_{-\nu}(x),\ \nu \text{ – нецелое,} \tag{5.18}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

При ν целом, $\nu = n$, функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы, так как имеет место равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{5.19}$$

Действительно, так как функция $\Gamma(x)$ определена при действительных x при $x > 0$, то $J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-n}$. Положим $k - n = p$. Тогда p=0, 1, 2…, $k = n + p$ и, значит,

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=o}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} = (-1)^n \sum_{p=o}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} = (-1)^n J_n(x),$$

что соответствует равенству (5.17).

Таким образом, при n целом функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ не образуют фундаментальную систему решений уравнений Бесселя. Второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_n(x)$, определяется предельным соотношением

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_{\nu}(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu},\ \nu \text{ – нецелое.} \tag{5.20}$$

Функция $N_n(x)$, определенная формулой (5.20), называется **функцией Неймана** или **цилиндрической функцией Бесселя второго рода.**

Следовательно, при γ целом, $\gamma = n$, общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y = y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x),$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0$, $\nu = \dfrac{1}{2}$. Введем замену $y = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$. Тогда $y' = \dfrac{u'\sqrt{x} - \dfrac{u}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{2u'x - u}{2\sqrt{x^3}}$,

$$y'' = \frac{(2u''x + 2u' - u')2\sqrt{x^3} - (2u'x - u)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}}{2x^3} = \frac{4x^2u'' - 4xu' + 3u}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Подставив y, y', y'' в наше уравнение Бесселя, получаем

$$\frac{4x^2u'' - 4xu' + 3u}{4\sqrt{x}} + \frac{2u'x - u}{2\sqrt{x}} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{u}{\sqrt{x}} = 0 \text{ или } \frac{4x^2u'' - 4xu' + 3u}{4} + \frac{2u'x - u}{2} + \frac{4x^2u - u}{4} = 0.$$

Отсюда окончательно получаем $4x^2u'' + 4x^2u = 0 \Rightarrow u'' + u = 0$. Общим решением этого уравнения является функция $u = u(x) = A\cos x + B\sin x$, где A и B – произвольные константы. Учитывая замену $y = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$, получим общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения:

$$y = y(x) = \frac{u}{\sqrt{x}} = A \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + B\frac{\sin x}{\sqrt{x}}. \tag{5.21}$$

Но, с другой стороны, решениями этого уравнения, согласно (5.16) и (5.17), служат функции

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}},$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k - \frac{1}{2} + 1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}.$$

Частные решения $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ можно получить из общего решения (5.21) при некоторых значениях констант A и B. Найдем это константы. Имеем

$$A \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + B \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

или $A\cos x + B\sin x = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$. Отсюда при $x=0$ получаем $A=0$, т.е. имеем равенство

$$B\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}. \tag{5.22}$$

Чтобы найти константу B, разложим функцию $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ по степеням x:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+\frac{1}{2}}}{(2k+1)!}.$$

Таким образом, из равенства (5.22) получаем

$$B\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+\frac{1}{2}}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\cdot 2^{2k+\frac{1}{2}}}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем равенства

$$\frac{B}{(2k+1)!} = \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\cdot 2^k\cdot\sqrt{2}\cdot 2^k}.$$

Отсюда $B = \frac{(2k+1)!}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\cdot 2^k\cdot\sqrt{2}\cdot 2^k} = \frac{(2k+1)!}{\Gamma(k+1)\Gamma\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^k\cdot\sqrt{2}\cdot 2^k}$. Однако, согласно формуле (5.12), имеем $\Gamma\left((k+1)+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2k-1)(2k+1)}{2^{k+1}}\cdot\sqrt{\pi}$.

Тогда

$$B = \frac{(2k+1)!\cdot 2^{k+1}}{1\cdot 3\cdot 5...(2k-1)(2k+1)\sqrt{\pi}\cdot 2^k\cdot\sqrt{2}\cdot\Gamma(k+1)\cdot 2^k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5...(2k)(2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5...(2k-1)(2k+1)\cdot k!\cdot 2^k} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6...(2k)}{k!\cdot 2^k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^k k!}{k!\cdot 2^k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Таким образом, в силу равенства (5.22) получаем

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x. \tag{5.23}$$

Аналогично

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}. \qquad (5.24)$$

Отсюда при $x = 0$ имеем $A = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$ Проинтегрировав равенство (5.24), получим $A\sin x - B\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$. При $x = 0$ получаем, что $B = 0$. Таким образом, из равенства (5.24) имеем

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \qquad (5.25)$$

Справедливо

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \text{ (или } xJ_{\nu-1}(x) = xJ'_\nu(x) + \nu J_\nu(x)\text{)}. \qquad (5.26)$$

Таким образом,

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \text{ (или } xJ_{\nu+1}(x) = \nu J_\nu(x) - xJ'_\nu(x)\text{)}. \qquad (5.27)$$

Сложив (5.26) и (5.27), получим формулу $2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)$, а вычтя, будем иметь равенство $J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = 2\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0$. Введем замену $t = \alpha x$. Тогда имеем $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \alpha\frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2\frac{d^2y}{dt^2}$. Отсюда из уравнения (5.22) получаем уравнение Бесселя $t^2y''_{tt} + ty'_t + (t^2 - \nu^2)y = 0$. Это уравнение при ν нецелом имеет решение

$$y = y(x) = c_1J_\nu(t) + c_2J_{-\nu}(t) = c_1J_\nu(\alpha x) + c_2J_{-\nu}(\alpha x), \qquad (5.28)$$

а при ν – целом, $\nu = n$, – решение

$$y = y(x) = c_1J_n(\alpha x) + c_2J_{-n}(\alpha x). \qquad (5.29)$$

Используя формулу (5.27), получаем

$$(x^{-\nu}J_\nu(x))' = -\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) + x^{-\nu}J'_\nu(x) = -\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) + x^{-\nu}\left(-J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x)\right) =$$

$$= -\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) - x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) + \nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x).$$

Таким образом, имеем формулу

$$(x^{-\nu}J_\nu(x))' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \qquad (5.30)$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу $J_{\nu+1}(x) = -x^{\nu}(x^{-\nu}J_{\nu}(x))'$.

5.3. Корни бесселевых функций. Интеграл Ломмеля. Пусть даны уравнения $x^2u'' + xu' + (\beta^2x^2 - \nu^2)u = 0,\ x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0$ решениями которых, согласно соотношению (5.28), являются функции $u = J_{\nu}(\beta x)$ и $y = J_{\nu}(\alpha x)$. Умножив первое уравнение на $\frac{y}{x}$, второе – на $\frac{x}{y}$, получим $xu''y + u'y + \beta^2xuy - \frac{\nu^2uy}{x} = 0,\quad xy''u + y'u + \alpha^2xuy - \frac{\nu^2uy}{x} = 0$. Вычитая из первого равенства второе, будем иметь равенство

$$x(u''y - uy'') + (u'y - uy') = (\alpha^2 - \beta^2)xuy\ , \tag{5.31}$$

которое можно переписать в виде

$$(x(u'y - uy'))' = (\alpha^2 - \beta^2)xuy. \tag{5.32}$$

Поскольку $u' = \beta J_{\nu}'(\beta x), y' = \alpha J_{\nu}'(\alpha x)$, то равенство (5.32) приобретает вид

$$(x(\beta J_{\nu}'(\beta x)J_{\nu}(\alpha x) - \alpha J_{\nu}(\beta x)J_{\nu}'(\alpha x)))' = (\alpha^2 - \beta^2)xJ_{\nu}(\beta x)J_{\nu}(\alpha x). \tag{5.33}$$

В левую часть этого равенства вместо J_{ν}' подставим ее значение (5.33) и получим

$$\left(x\left(\beta J_{\nu}(\alpha x)\left(\frac{\nu}{\beta x}J_{\nu}(\beta x) - J_{\nu+1}(\beta x)\right) - \alpha J_{\nu}(\beta x)\left(\frac{\nu}{\alpha x}J_{\nu}(\alpha x) - J_{\nu+1}(\alpha x)\right)\right)\right)' =$$

$$= \left(\nu J_{\nu}(\alpha x)J_{\nu}(\beta x) - x\beta J_{\nu}(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x) - \nu J_{\nu}(\beta x)J_{\nu}(\alpha x) + x\alpha J_{\nu}(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)\right)' =$$

$$= \left(x\alpha J_{\nu}(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x) - x\beta J_{\nu}(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\right)'.$$

Отсюда с учетом формулы (5.33) следует

$$xJ_{\nu}(\beta x)J_{\nu}(\alpha x) = \left(\frac{x}{\alpha^2 - \beta^2}\left(\alpha J_{\nu}(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_{\nu}(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\right)\right)'.$$

Проинтегрировав это равенство от 0 до x, будем иметь формулу

$$\int_0^x sJ_{\nu}(\beta s)J_{\nu}(\alpha s)ds = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2}\left(\alpha J_{\nu}(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_{\nu}(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\right), \tag{5.34}$$

которая называется **интегралом Ломмеля.**

Корни бесселевых функций обладают интересными и важными в приложениях свойствами.

I. Все корни бесселевых функций, кроме $x = 0$, являются простыми. В самом деле, допустим, что x_0 – корень бесселевой функции имеет кратность два. Тогда выполняется соотношение $J_{\nu}(x_0) = J_{\nu}'(x_0) = 0$. Отсюда следует, что начальная задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при нулевых начальных условиях имеет лишь нулевое решение, т.е. $J_\nu(x) \equiv 0$, что, конечно, неверно. Следовательно, функция $J_\nu(x)$ не может иметь кратных корней, т. е. все ее корни простые.

II. Все корни бесселевых функций – действительные числа. Действительно, предположим, что $z = \alpha + i\beta$ является комплексным корнем функции $J_\nu(x)$, т.е. $J_\nu(z) = 0$. Так как функция имеет действительные коэффициенты, то и число $\bar{z} = \alpha - i\beta$ тоже является корнем уравнения $J_\nu(z) = 0$. Положив в интеграле Ломмеля $\alpha = z, \beta = \bar{z}$, будем иметь $\int\limits_0^x sJ_\nu(zs)J_\nu(\bar{z}s)ds =$ $= \dfrac{x}{z^2 - \bar{z}^2}\left(zJ_\nu(\bar{z}x)J_{\nu+1}(zx) - \bar{z}J_\nu(zx)J_{\nu+1}(\bar{z}x)\right)$. Отсюда при $x = 1$ с учетом $J_\nu(z) = J_\nu(\bar{z}) = 0$ получаем равенство $\int\limits_0^1 sJ_\nu(zs)J_\nu(\bar{z}s)ds = \int\limits_0^1 s\left|J_\nu(zs)\right|^2 ds = 0,$ что невозможно, так как $s\left|J_\nu(zs)\right|^2 > 0$, если $0 < s \le 1$. Противоречие показывает, что у функции $J_\nu(x)$ не может быть комплексных корней.

III. Корни бесселевых функций $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$ взаимно разделены. Между двумя последовательными корнями функции $J_\nu(x)$ находится ровно один корень функции $J_{\nu+1}(x)$, и, наоборот, между двумя корнями функции $J_{\nu+1}(x)$ находится один корень функции $J_\nu(x)$. Действительно, используя формулу (5.26) получим соотношение $(x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x))' = (\nu+1)x^\nu J_{\nu+1}(x) + x^{\nu+1}J'_{\nu+1}(x) =$ $= (\nu+1)x^\nu J_{\nu+1}(x) + x^{\nu+1}\left(J_\nu(x) - \dfrac{\nu+1}{x}J_{\nu+1}(x)\right) = x^{\nu+1}J_\nu(x)$, т.е. $(x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x))' = x^{\nu+1}J_\nu(x)$. Из этого равенства и равенства (5.32) следует в силу теоремы Ролля, что между двумя последовательными корнями функции $J_\nu(x)$ ($J_{\nu+1}(x)$) имеется корень функции $J_{\nu+1}(x)$ ($J_\nu(x)$).

IV. Функции $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$ не имеют общих корней. Это вытекает из равенства (5.27), так как у функции $J_\nu(x)$ все корни простые.

5.4. Ортогональность бесселевых функций. Разложение в ортогональный ряд по бесселевым функциям. Напомним, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется ортогональной на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x)$, если выполнено условие $\int\limits_a^b p(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, i \ne j$. Нормой функции $\varphi_n(x)$ с весом $p(x)$ будет число $\|\varphi_n\| = \|\varphi_n(x)\| = \left(\int\limits_a^b p(x)\varphi_n^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Пусть α_i – корни бесселевой функции $J_\nu(x)$. Рассмотрим систему функций

$$\{J_\nu(\alpha_i x)\}, i = 1,2,.... \tag{5.35}$$

Так как $J_\nu(\alpha_i)=0$, то из интеграла Ломмеля следует равенство $\int\limits_0^1 sJ_\nu(\alpha_i s)J_\nu(\alpha_j s)ds=0, i\neq j,$ или $\int\limits_0^1 xJ_\nu(\alpha_i x)J_\nu(\alpha_j x)dx=0, i\neq j,$ из которого следует, что система бесселевых функций (5.35) ортогональна на отрезке $[0,1]$ с весом $p(x)=x$. Норма бесселевой функции $J_\nu(\alpha_i x)$: $\| J_\nu(\alpha_i x)\|=\sqrt{\int\limits_0^1 xJ_\nu^2(\alpha_i x)dx}$.

Положив в интеграле Ломмеля $x=1$, получим $\int\limits_0^1 xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)dx=$ $=\dfrac{\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)-\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)}{\alpha^2-\beta^2}$. Если $\alpha=\beta$ – корни уравнения $J_\nu(x)=0$, то выражение справа в последнем равенстве есть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Раскроем ее по правилу Лопиталя. Имеем

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu^2(\alpha x)dx=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha J_\nu'(\beta)J_{\nu+1}(\alpha)-J_\nu(\alpha)J_{\nu+1}(\beta)-\beta J_\nu(\alpha)J_{\nu+1}'(\beta)}{-2\beta}=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha}{\beta}J_\nu'(\beta)J_{\nu+1}(\alpha),$$

так как $J_\nu(\alpha)=J_\nu(\beta)=0$. Используя последовательно формулы $2J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)$ и $xJ_{\nu-1}(x)=xJ_\nu'(x)+\nu J_\nu(x)$, получим, что

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu^2(\alpha x)dx=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}J_\nu'(\beta)(J_{\nu-1}(\alpha)-2J_\nu'(\alpha))=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}J_\nu'(\beta)\left(J_\nu'(\alpha)-\frac{\nu}{\alpha}J_\nu(\alpha)-2J_\nu'(\alpha)\right)=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}J_\nu'(\beta)J_\nu'(\alpha)=\frac{1}{2}(J_\nu'(\alpha))^2.$$

Положив в равенстве $\alpha=\alpha_i$, где α_i – корень функции $J_\nu(x)$, получим значение нормы функции $J_\nu(\alpha_i x)$: $\| J_\nu(\alpha_i x)\|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}J_\nu'(\alpha_i), i=1,2,\dots$.

Как выяснено ранее, последовательность функций $\sqrt{x}J_n(\alpha_1 x),\sqrt{x}J_n(\alpha_2 x),\dots,\sqrt{x}J_n(\alpha_n x),\dots$, где $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\dots$ – корни уравнения $J_n(x)=0$, представляет собой ортогональную систему функций на $(0,1)$.

Пусть теперь дана функция $f(x)$, определенная на $(0,1)$. Ее ряд Фурье – Бесселя выписывается в виде $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k J_n(\alpha_k x)$, где коэффициенты a_k определяются по формулам $a_k=\dfrac{2}{(J_n'(\alpha_k))^2}\int\limits_0^1 x f(x)J_n(\alpha_k x)dx.$

ГЛАВА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

§1. Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим следующую нормальную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \; y(0) = y_0, \tag{1.1}$$

где $y = y(t)$ это n-мерная вектор-функция с компонентами $y = (y_1, ..., y_n)^T$.

Как отмечалось ранее, при определенных условиях гладкости на правую часть $F(t, y)$ решение $y = y(t, y_0)$ задачи Коши (1.1) является непрерывной функцией параметров t, y_0 в точке (t, y_0), где $t \in [0, T]$. Поэтому малая погрешность в начальных условиях не оказывает существенного влияния на характер процесса на некотором конечном отрезке $[0, T]$ времени t.

Часто в приложениях требуется исследовать модель на сколь угодно большом промежутке времени: $0 \le t < \infty$. Будем предполагать, что решение задачи (1.1) существует на этом бесконечном промежутке. Возникает вопрос: останется ли кривая $y = y(t, y_0 + \Delta y_0)$ в ε-трубке кривой $y = y(t, y_0)$ для всех $t > 0$, при достаточно малых $\left|\Delta y_0\right|$, либо с ростом t кривые разойдутся?

Интегральная кривая, обладающая свойством, что все достаточно близкие к ней при $t = 0$ интегральные кривые остаются близкими к ней и для всех $t \ge 0$, называется **устойчивой интегральной кривой.** Соответствующее ей решение называется **устойчивым решением**. В противном случае говорят, что решение неустойчиво. Понятие устойчивости решения было введено выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым. Им же были заложены основы методов исследования на устойчивость.

1.1. Определение устойчивости по Ляпунову. Дадим строгое определение понятия устойчивости по А. М. Ляпунову.

Определение 1. Решение $y = y(t, y_0)$ задачи (1.1) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|\Delta y_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > 0$ справедливо неравенство $\left\| y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0) \right\| < \varepsilon$, где $\| y \| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_i^2}$, y_i, $i = 1, 2, n$ – координаты вектор-функции y.

Среди устойчивых решений может встретиться решение, обладающее свойством, что все близкие к нему в начальный момент решения с течением времени бесконечно приближаются к нему.

Определение 2. Решение $y = y(t, y_0)$ задачи (1.1) называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво и существует такое достаточно малое $\delta_0 > 0$, что при $\| \Delta y_0 \| < \delta_0$ выполнено $\lim\limits_{t \to \infty}(y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0)) = 0$.

1.2. Устойчивость по Ляпунову тривиального решения. Исследование на устойчивость решения $y(t, y_0)$ системы (1.1) можно свести к исследованию на устойчивость тривиального, т.е. тождественного равного нулю решения некоторой другой системы, связанной с (1.1).

Действительно, введем новое неизвестное x по формуле $x = y - y(t, y_0)$. Тогда система (1.1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.2}$$

где $f(t,x) = F(t, x + y(t,y_0)) - \frac{d}{dt} y(t, y_0)$. Решению $y(t, y_0)$ в прежних переменных отвечает решение $x \equiv 0$ системы (1.2). Обозначим $x_0 = y(0, y_0 + \Delta y_0) - y(0, y_0) = \Delta y_0$, $x(t, x_0) = y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0)$. Тогда в переменных t, x определения устойчивости и асимптотической устойчивости выглядят следующим образом.

Определение 1. Тривиальное решение системы (1.2) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > 0$ справедливо неравенство $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$.

Определение 2. Тривиальное решение системы (1.2) называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво и $\exists \delta_0 > 0$ такое, что при $\|x(0)\| < \delta_0$ выполнено $\lim\limits_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0$.

Замечание. Часто в записи $x(t, x_0)$ опускают зависимость от x_0 и пишут $x(t)$, а x_0 можно тогда записать как $x(0)$, и тогда устойчивость означает, что $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$, а асимптотическая устойчивость означает $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$, если $\|x(0)\| < \delta_0$.

Ознакомимся с методами исследования на устойчивость тривиального решения. Устойчивость тривиального решения допускает удобную геометрическую интерпретацию в двухмерном фазовом пространстве переменных x (рис.1). Тривиальное решение в фазовом пространстве изображается точкой – началом координат. Неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$ означает, что фазовая траектория при $t > 0$ лежит в круге радиусом ε с центром в начале координат. Неравенство $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$ означает, что начальная точка траектории лежит в круге радиусом $\delta(\varepsilon)$, т.е. траектория, начинающаяся в δ-окрестности начала координат, не выйдет из ε-окрестности начала координат при всех $t > 0$. В

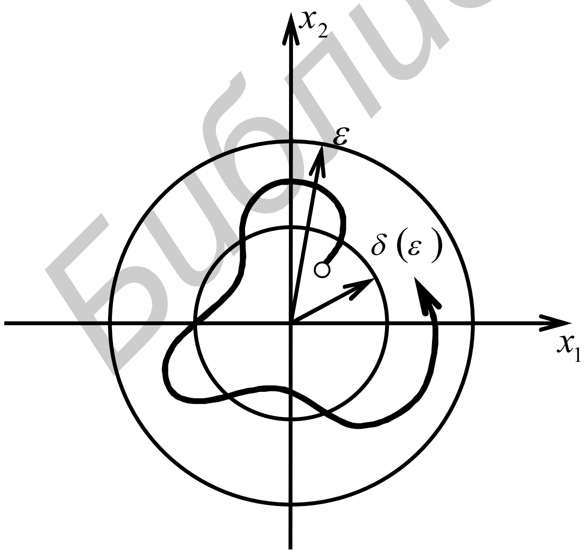


Рис. 1.

случае асимптотической устойчивости траектория при $t \to \infty$ бесконечно приближается к началу координат.

Замечание. Вместо того чтобы говорить об устойчивости тривиального решения, часто говорят об устойчивости точки $(0,...,0)$ фазового пространства.

§2. Устойчивость линейных систем

Будем считать, что уравнения (2.1) описывают движение, где аргумент t есть время, и при этом уравнения не содержат явно времени t, т.е. имеют вид $\frac{dx}{dt} = f_1(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = f_2(x,y)$, Нам известно, что такая система называется автономной. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = cx + gy, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты a, b, c, g – постоянные. Очевидно, что $x=0$, $y=0$ есть решение системы (2.1). Исследуем вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты системы, чтобы решение $x=0$, $y=0$ было устойчиво.

Дифференцируем первое уравнение и исключаем y и $\frac{dy}{dt}$ на основании уравнений системы $\frac{d^2x}{dt^2} = c\frac{dx}{dt} + g\frac{dy}{dt} = c\frac{dx}{dt} + g(ax+by) = c\frac{dx}{dt} + gax + b\left(\frac{dx}{dt} - cx\right)$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b+c)\frac{dx}{dt} - (ag-bc)x = 0. \tag{2.2}$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (2.2) имеет вид

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda - (ag-bc) = 0.$$

Это уравнение принято записывать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & g \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Обозначим корни характеристического уравнения (2.3) через λ_1 и λ_2. Устойчивость или неустойчивость системы (2.1) определяется характером корней λ_1 и λ_2. Рассмотрим все возможные случаи.

I. Корни характеристического уравнения действительные, отрицательные и различные: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Из уравнения (2.2) находим $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$. Зная x, из первого уравнения (2.1) находим y. Таким образом, решение системы (2.1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \mathrm{y} = \left[\mathrm{C}_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]\frac{1}{g}. \tag{2.4}$$

Замечание. Если $g=0$ и $a \neq 0$, то уравнение (2.2) мы составим для функции y. Найдя y, из второго уравнения системы (2.1) находим x. Структура решений (2.4) сохранится. Если же $g = 0$, $a = 0$, то решение системы уравнений принимает вид $x = C_1 e^{ct}$, $y = C_2 e^{bt}$.

Анализ характера решений в этом случае производится проще. Подберем C_1 и C_2 так, чтобы решения (2.4) удовлетворяли начальным условиям $x\big|_{t=0} = x_0$, $y\big|_{t=0} = y_0$.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям, будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g}\left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Из последних равенств следует, что при любом $\varepsilon > 0$ можно выбрать $|x_0|$ и $|y_0|$ столь малыми, что для всех $t > 0$ будет $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$, так как $e^{\lambda_1 t} < 1$; $e^{\lambda_2 t} < 1$.

Отметим, что в данном случае выполнено $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Рассмотрим плоскость xOy. Для системы дифференциальных уравнений (2.1) и дифференциального уравнения (2.2) эта плоскость будет фазовой плоскостью. Решения (2.4) и (2.5) системы (2.1) будем рассматривать как параметрические уравнения некоторой кривой на фазовой плоскости xOy:

$$\begin{gathered} x = \overline{\varphi}(t, C_1, C_2),\ y = \overline{\psi}(t, C_1, C_2), \\ x = \varphi(t, x_0, y_0),\ y = \psi(t, x_0, y_0). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Эти кривые являются интегральными кривыми или траекториями дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + gy}, \tag{2.7}$$

следующего из системы (2.1) делением друг на друга правых и левых частей.

Начало координат $O(0,0)$ является **особой точкой** для дифференциального уравнения (2.7), так как эта точка не принадлежит области существования и единственности решения.

Характер решений (2.5) и вообще решений системы (2.1) иллюстрируется расположением интегральных кривых $\overline{F}(x, y, C) = 0$, образующих общий интеграл дифференциального уравнения (2.7).

Постоянная C определяется из начального условия $y\big|_{x=x_0} = y_0$. После подстановки значения C получаем уравнение семейства в форме

$$F(x, y, x_0, y_0) = 0. \tag{2.8}$$

В случае решений (2.5) особая точка называется **устойчивым узлом**. Говорят, что точка, двигаясь по траектории, неограниченно приближается к особой точке при $t \to +\infty$.

Очевидно, что соотношение (2.8) может быть получено путем исключения параметра t из системы (2.6). Не производя полного анализа, ограничимся иллюстрацией простейших примеров. Отметим, что характер поведения траекторий уравнений (2.7) вблизи начала координат при произвольных коэффициентах качественно такой же, какой будет рассмотрен в примерах.

Пример. Исследовать устойчивость решения $x=0$, $y=0$ системы уравнений $\frac{dx}{dt}=-x$, $\frac{dy}{dt}=-2y$. Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. Решением (2.6) в данном случае будут функции $x=C_1e^{-t}$, $y=C_2e^{-2t}$. Решениями (2.5) будут

$$x=x_0e^{-t},\ y=y_0e^{-2t}. \qquad (*)$$

Очевидно, что $x(t)\to 0$ и $y(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Решение $x=0$, $y=0$ устойчиво. Вернемся к фазовой плоскости. Исключая параметр t из уравнений (*), на фазовой плоскости получим семейство парабол вида

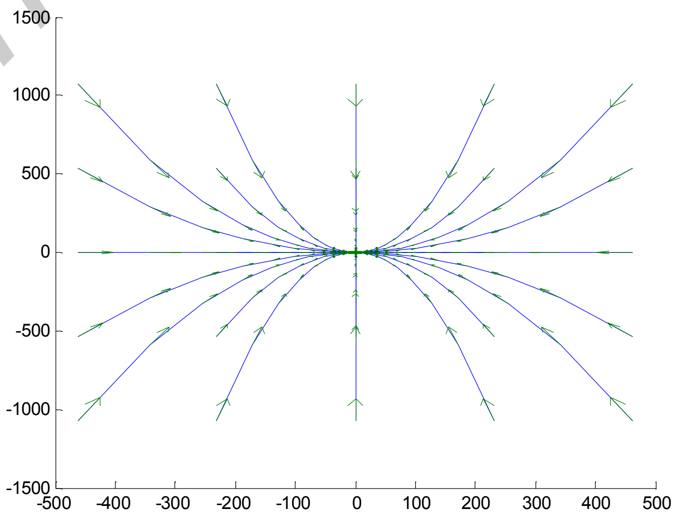
$$(x/x_0)^2=y/y_0\ . \qquad (**)$$

Уравнением вида (2.7) для системы будет $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$. Интегрируя, получаем

$$\ln|y|=2\ln|x|+\ln|C|,\ y=Cx^2\ . \qquad (***)$$

Определяем C из условия $y|_{x=x_0}=y_0$, $C=y_0/x_0^2$. Подставляя найденное значение C в (***), получаем решение (**). Особая точка $O(0,0)$ есть **устойчивый узел.**

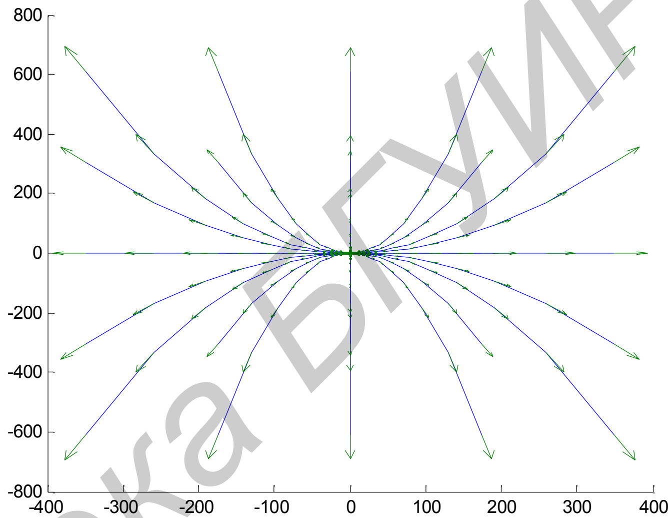
```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = -x','Dy = - 2 * y');
x = subs(s.x);
y = subs(s.y);
for C1 = [-2:2] for C2 = [-2:2]
fx = double(subs(x)).*10;
fy = double(subs(y));
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
end; end
```



II. Корни характеристического уравнения действительные, положительные и различные: $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Решения выражаются формулами (2.4) и соответственно (2.5). Но в данном случае при как угодно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ будет $|x(t)|\to\infty$ при $t\to+\infty$, так как $e^{\lambda_1 t}\to\infty$ и $e^{\lambda_2 t}\to\infty$. На фазовой плоскости особая точка – **неустойчивый узел**: при $t \to +\infty$ точка на траектории удаляется от точки покоя $x = 0$, $y = 0$.

Пример. Исследуем систему $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = 2y$. Характеристические корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Решение будет $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{2t}$. Решение неустойчиво, так как $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Исключая t, получаем $\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2 = \dfrac{y}{y_0}$. Особая точка $O(0,0)$ есть **неустойчивый узел**.

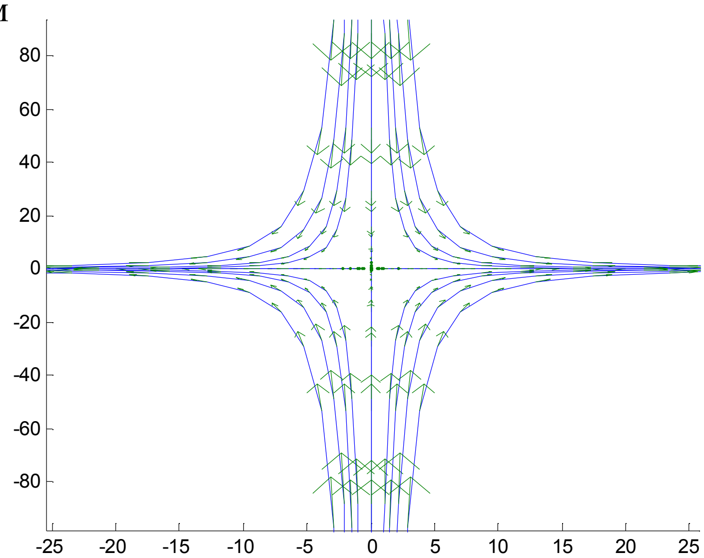
```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = x','Dy =  2 * y');
x = subs(s.x); y = subs(s.y);
for C1 = [-2:2] for C2 = [-2:2]
fx = double(subs(x)).*10;
fy = double(subs(y));
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
end; end;
```



III. Корни характеристического уравнения действительные, разных знаков, например: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Из формул (2.5) следует, что при как угодно малых $|x_0|$ и $|y_0|$, если $cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0$, будет $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Решение **неустойчиво**. На фазовой плоскости особая точка называется **седлом**.

Пример. Исследовать систему $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = -2y$. Характеристические корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Решение системы: $x = x_0 e^{+t}$, $y = y_0 e^{-2t}$. Решение неустойчиво. Исключая параметр t, получаем семейство кривых на фазовой плоскости $yx^2 = y_0 x_0^2$. Особая точка $O(0,0)$ есть **седло**.

```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = x','Dy = - 2 * y');
x = subs(s.x); y = subs(s.y);
for C1 = [-2:2]
for C2 = [-2:2]
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
```



```
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
end; end;
```

IV. Корни характеристического уравнения комплексные с отрицательной действительной частью: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ $(\alpha < 0)$. Решение системы (2.1) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{\alpha t}\left[C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right], \\ y &= \frac{1}{g} e^{\alpha t}\left[(\alpha C_1 + \beta C_2 - cC_1)\cos\beta t + (\alpha C_2 - \beta C_1 - cC_2)\sin\beta t\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

Если ввести обозначение $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\sin\delta = \frac{C_1}{C}$, $\cos\delta = \frac{C_2}{C}$, то уравнения (2.9) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= C e^{\alpha t}\sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{C e^{\alpha t}}{g}\left[(a - c)\sin(\beta t + \delta) + \beta\cos(\beta t + \delta)\right], \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$, причем $x_0 = C\sin\delta$, $y_0 = \frac{C}{g}\left[(a - c)\sin\delta + \beta\cos\delta\right]$, откуда находим

$$C_1 = x_0,\; C_2 = \frac{g y_0 - x_0(a - c)}{\beta}. \quad (2.11)$$

Снова заметим, что если $g = 0$, то вид решения будет несколько иной, но характер анализа не изменится.

Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ будут выполняться соотношения $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$. Решение **устойчиво**. В данном случае при $t \to +\infty$ $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$, неограниченное число раз меняя знаки. На фазовой плоскости особая точка называется **устойчивым фокусом**.

Пример. Исследовать устойчивость решения системы уравнений $\frac{dx}{dt} = -x + y$, $\frac{dy}{dt} = -x - y$. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm 1i$, $\alpha = -1$ $\beta = 1$. Находим C_1 и C_2 по формулам (2.11): $C_1 = x_0$, $C_2 = y_0$. Подставляя в (2.9), получаем

$$x = e^{-t}(x_0\cos t + y_0\sin t), \quad y = e^{-t}(y_0\cos t - x_0\sin t). \quad (2.12)$$

Очевидно, что при любых значениях t $|x| \le |x_0| + |y_0|$, $|y| \le |x_0| + |y_0|$. При $t \to \infty$ имеем $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$. Решение устойчиво.

Выясним характер расположения кривых на фазовой плоскости в этом случае. Преобразуем выражения (2.12). Пусть $x_0 = M\cos\delta$, $y_0 = M\sin\delta$, $M=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, $tg\delta=\dfrac{y_0}{x_0}$. Тогда равенства (2.12) примут вид

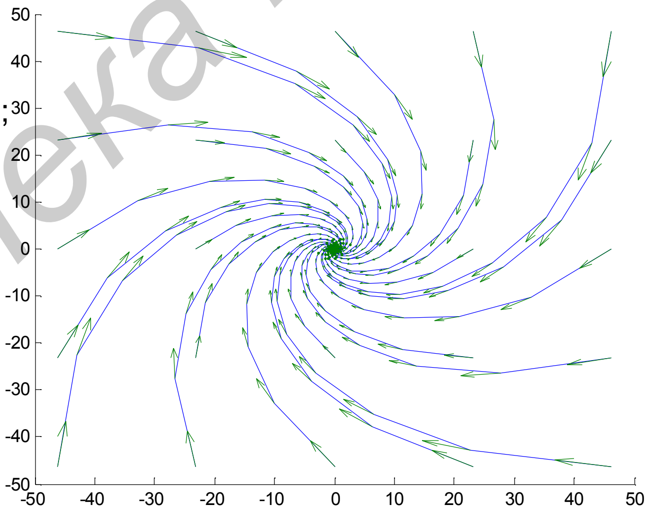
$$x = Me^{-t}\cos(t-\delta),\quad y = Me^{-t}\sin(t-\delta). \tag{2.13}$$

На фазовой плоскости перейдем к полярным координатам ρ и θ и установим зависимость $\rho = f(\theta)$. Уравнения (2.13) принимают вид

$$\rho\cos\theta = Me^{-t}\cos(t-\delta),\ \rho\sin\theta = Me^{-t}\sin(t-\delta). \tag{2.14}$$

Возведя в квадрат правые и левые части и складывая, получим $\rho^2 = M^2e^{-2t}$ или $\rho = Me^{-t}$.Установим зависимость t от θ. Разделив члены нижнего из равенств (2.14) на соответствующие члены верхнего равенства, получим $tg\theta = tg(t-\delta)$, откуда $t=\theta+\delta$. Подставляя в $\rho = Me^{-t}$, получаем $\rho = Me^{-(\theta+\delta)}$ или $\rho = Me^{-\theta-\delta}$. Обозначая $Me^{-\delta}=M_1$, окончательно получаем $\rho = M_1e^{-\theta}$. Это семейство логарифмических спиралей. В этом случае при $t\to\infty$ точка по траектории приближается к началу координат. Особая точка $O(0;0)$ – **устойчивый фокус.**

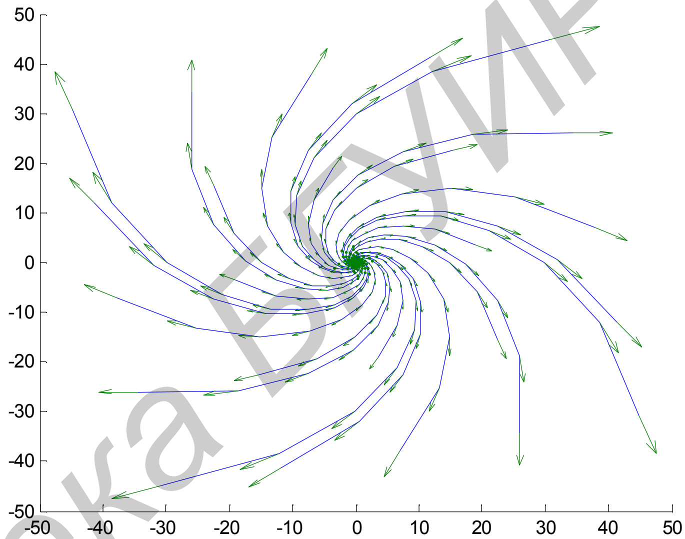
```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = - x + y','Dy = - x - y');
x = subs(s.x);
y = subs(s.y);
for C1 = [-2:2]
for C2 = [-2:2]
fx = double(subs(x));
fy = double(subs(y));
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
end;end
```



V. Корни характеристического уравнения – комплексные с положительной действительной частью: $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha+i\beta$ $(\alpha<0)$. В этом случае решение также выразится формулами (2.9), где $\alpha<0$. При любых начальных условиях x_0 и y_0 $\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\neq 0\right)$ и при $t\to+\infty$ величины $|x(t)|$ и $|y(t)|$ могут принимать сколь угодно большие значения. Решение **неустойчиво**. На фазовой плоскости особая точка называется **неустойчивым фокусом**. Точка по траектории неограниченно удаляется от начала координат.

Пример. Исследовать устойчивость решения системы уравнений $\frac{dx}{dt} = x + y$, $\frac{dy}{dt} = -x + y$. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_1 = 1 - i$. Решение (2.9) с учетом (2.11) в данном случае будет $x = e^t(x_0 \cos t + y_0 \sin t)$, $y = e^t(y_0 \cos t + x_0 \sin t)$. На фазовой плоскости получим кривую в полярных координатах $\rho = \overline{M}_1 e^{\theta}$. Особая точка – **неустойчивая фокус**.

```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = x + y','Dy = - x + y');
x = subs(s.x);
y = subs(s.y);
for C1 = [-2:2]
for C2 = [-2:2]
fx = double(subs(x));
fy = double(subs(y));
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
end; end;
```



VI. Корни характеристического уравнения чисто мнимые: $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$. Решения (2.9) в этом случае примут вид

$$x = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t \quad y = \frac{1}{g}\left[(\beta C_2 - cC_1)\cos\beta t + (-\beta C_1 - cC_2)\sin\beta t\right]. \qquad (2.15)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются по формулам (2.11):

$$C_1 = x_0,\ C_2 = \frac{gy_0 - cx_0}{\beta}.$$

Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$ и при всех достаточно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ будет $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ при любом t. Решение **устойчиво**. Здесь x и y – периодические функции от t.

Чтобы произвести анализ интегральных кривых на фазовой плоскости, первое из решений (2.15) запишем в следующем виде (см. (2.10)):

$$x = C\sin(\beta t + \delta),\ y = \frac{C\beta}{g}\cos(\beta t + \delta) - \frac{Cc}{g}\sin(\beta t + \delta), \qquad (2.16)$$

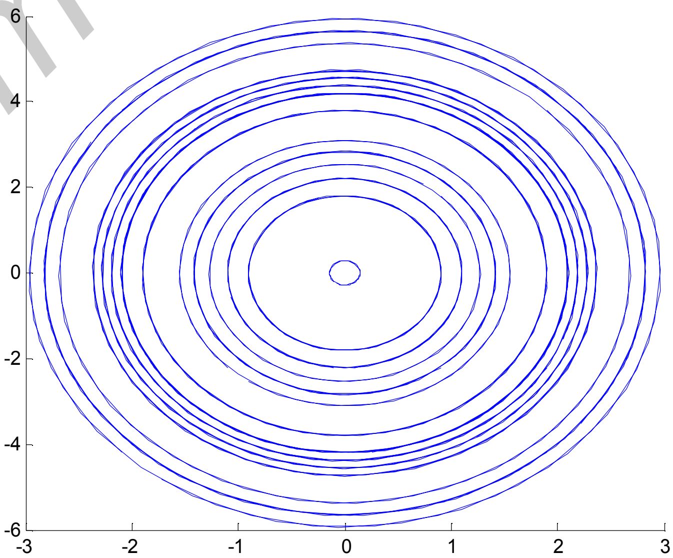
где C, δ – произвольные постоянные. Из выражений (2.16) следует, что x и y – периодические функции от t. Исключаем параметр t из уравнений (2.16): $y = \frac{C\beta}{g}\sqrt{1-\frac{x^2}{C^2}} - \frac{c}{g}x$. Освобождаясь от корня, получаем тождество

$$\left(y+\frac{c}{g}x\right)^2 = \left(\frac{C\beta}{g}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right). \qquad (2.17)$$

Это семейство кривых 2-го порядка (кривые дополнительные), зависящих от произвольной постоянной C. Каждая из них не имеет неограниченно удаленных точек. Следовательно, это семейство эллипсов, окружающих начало координат (при $C=0$ оси эллипсов параллельны осям координат). Особая точка называется **центром.**

Пример. Исследовать устойчивость решения системы уравнений $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -4x$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2+4=0$, $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Решениями (2.16) будут $x = C\sin(2t+\delta)$, $y = 2C\cos(2t+\delta)$. Уравнение (2.17) будет иметь следующий вид: $y^2 = 4C^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right)$, $\frac{y^2}{4C^2}+\frac{x^2}{C^2} = 1$. На фазовой плоскости имеем систему эллипсов. Особая точка – **центр**.

```
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.1:pi];
s = dsolve('Dx = y','Dy = - 4*x');
disp([s.x,s.y]);
x = subs(s.x);
y = subs(s.y);
for C1 = [-2.1:2]
for C2 = [-2.1:2]
fx = double(subs(x));
fy = double(subs(y));
plot(fx, fy);
 px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx,fy,px,py,0.3);
end; end
```



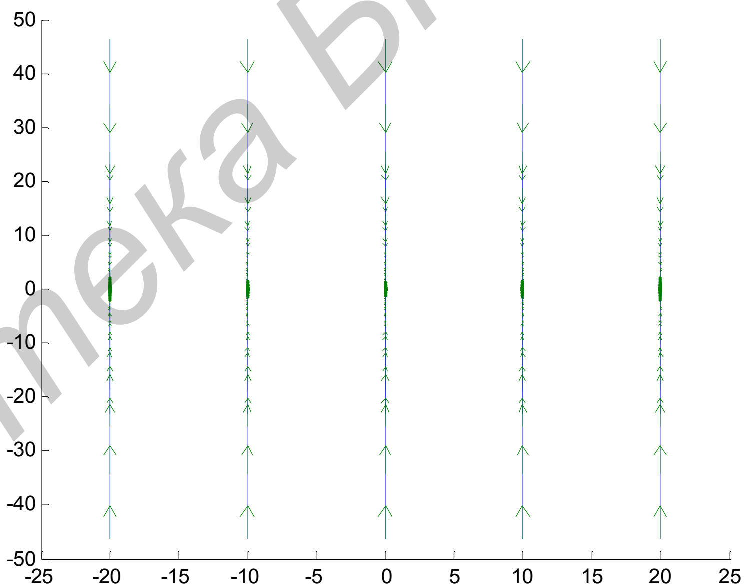
VII. Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Решение (2.5) в этом случае принимает вид

$$x = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y = \frac{1}{g}\left[-C_1 c + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]. \qquad (2.18)$$

Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$ и при всех достаточно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ при $t > 0$. Следовательно, решение **устойчиво**.

Пример. Исследовать устойчивость решения системы $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = -y$. Находим корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + \lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Здесь $g = 0$. Решения находим, непосредственно решая систему, не пользуясь формулами (2.18) $x = C_1$, $y = C_2 e^{-t}$. Решением, удовлетворяющим начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$, будет $x = x_0$, $y = y_0 e^{-t}$. Очевидно, что решение **устойчиво**. Дифференциальное уравнение на фазовой плоскости будет иметь вид $dx/dy = 0$. Его общий интеграл $x = C$. Траектории – прямые, параллельные оси Oy. Из уравнений $x = x_0$, $y = y_0 e^{-t}$ следует, что точки по траекториям приближаются к прямой $y = 0$.

```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = 0','Dy = - y');
x = subs(subs(s.x)+t-t);
y = subs(subs(s.y)+t-t);
for C1 = [-2:2]
for C2 = [-2:2]
fx = double(subs(x)).*10;
fy = double(subs(y));
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
end; end
```



VIII. Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$. Из формул (2.18) следует, что решение неустойчиво, так как $|x(t)| + |y(t)| \to \infty$ при $t \to +\infty$.

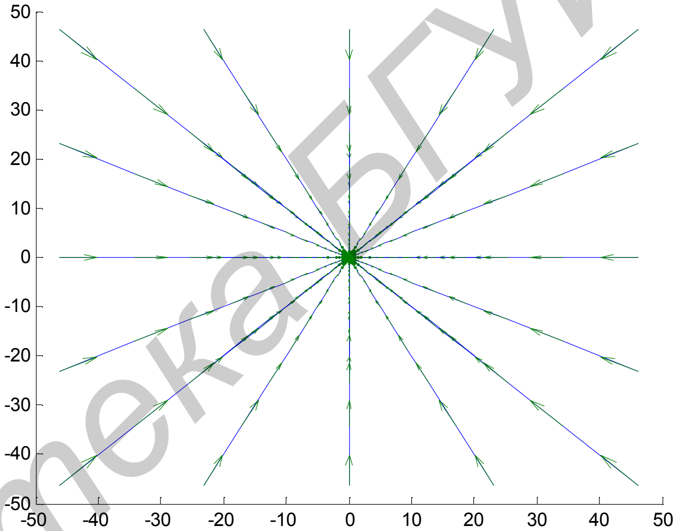
IX. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Решение будет иметь вид

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t} \quad y = \frac{1}{g} e^{\lambda_1 t} [C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 + \lambda_1 t - ct)].$$

Так как $e^{\lambda_1 t} \to 0$ и $te^{\lambda_1 t} \to 0$ при $t \to +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать C_1 и C_2 такие (путем выбора x_0 и y_0), что будет выполнено $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ при любом $t > 0$. Следовательно, решение **устойчиво**. При этом $x(t) \to 0$ и $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Пример 8. Исследовать устойчивость решения системы $\frac{dx}{dt} = -x$, $\frac{dy}{dt} = -y$. Находим корни характеристического уравнения: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $(\lambda+1)^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Здесь $g = 0$. Решение системы будет иметь вид $x = C_1 e^{-t}$, $y = C_2 e^{-t}$, причем $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Решение **устойчиво**. Семейством кривых на фазовой плоскости будут $\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} = k$**,** т. е. $y = kx$. Это семейство прямых, проходящих через начало координат. Точки по траекториям приближаются к началу координат. Особая точка $O(0;0)$ – **узел**.

```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = - x','Dy = - y');
x = subs(s.x);
y = subs(s.y);
for C1 = [-2:2]
for C2 = [-2:2]
fx = double(subs(x));
fy = double(subs(y));
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
end; end;
```



Заметим, что в случае $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ форма решения (2.18) сохраняется, но при $t \to +\infty$ получаем $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$. Решение **неустойчиво**.

X. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда

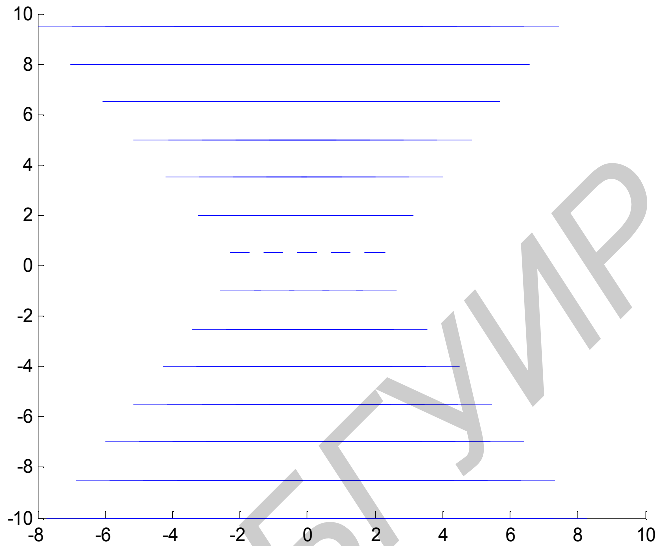
$$x = C_1 + C_2 t,\ y = \frac{1}{g}\left[-cC_1 + C_2 - cC_2 t\right].$$

Откуда видно, что $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $t \to +\infty$. Решение **неустойчиво.**

Пример. Исследовать устойчивость решения системы уравнений $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = 0$. Находим корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Находим решения $y = C_2$, $x = C_2 t + C_1$. Очевидно, что $x \to \infty$ при $t \to +\infty$. Решение **неустойчиво**. Уравнение на фазовой плоскости будет $\frac{dy}{dx} = 0$.

Траектории $y = C$ – прямые, параллельные оси. Особая точка называется **вырожденным седлом**.

```
home;
hold on;
syms x y C1 C2
t = [-pi:0.3:pi];
s = dsolve('Dx = y','Dy = 0');
x = subs(s.x);
y = subs(subs(s.y)-t+t);
for C1 = [-2:2]
for C2 = [-2:0.3:2]
fx = double(subs(x));
fy = double(subs(y)).*5;
plot(fx, fy);
px = gradient(fx);
py = gradient(fy);
quiver(fx, fy, px, py, 0.6);
disp('okay');
end; end;
```



Замечание. Математические аспекты устойчивости весьма актуальны применительно к колебательным системам. Если колебательный процесс описывается уравнением вида $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt})$, то, вводя обозначение $\frac{dx}{dt} = v$, получаем систему уравнений $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = f(x, v)$. Фазовой плоскостью для этой системы будет плоскость (x, v). Траектории на фазовой плоскости дают геометрическое изображение зависимости скорости v от координаты x. Например, если особая точка системы уравнений есть центр, траектории на фазовой плоскости есть замкнутые линии, окружающие начало координат, то движения, определяемые уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt})$ – это незатухающие колебательные движения. Если уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt})$ является линейным вида $\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b\frac{dx}{dt}$, то система примет вид $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = ax + bv$, изученный выше. Точка $x = 0$, $v = 0$ – особая точка, она определяет положение равновесия.

Задачи для решения

Определить характер точек покоя следующих систем:

1. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = -3x + y$. **2.** $\dot{x} = -2x + \frac{1}{3}y$, $\dot{y} = -2x + \frac{1}{2}y$.

3. $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -x + 2y$. **4.** $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x - 2y$.

5. $\dot{x} = -6x - 5y$, $\dot{y} = -2x - 5y$. **6.** $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

§3. Устойчивость по первому приближению

Если изучаемая система является нелинейной, то расположение траекторий в окрестности точки покоя $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ «в малом» можно исследовать, как и в линейном случае, по корням характеристического уравнения, в котором матрица A имеет элементы $a_{ik} = \dfrac{df_i}{dx_k}(x_1^0, x_2^0)$. Однако это можно делать только в случае, как принято говорить, грубой системы, т. е. когда $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если же $\operatorname{Re}\lambda_2 = 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2$, то даже «в малом» матрица линейного приближения не дает ответа относительно расположения траекторий: оно определяется членами более высокого порядка в разложении f_1 и f_2 в окрестности точки $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

Замечание. В случае нелинейной системы может быть несколько и даже бесконечно много изолированных точек покоя. При этом глобальное расположение траекторий удается исследовать лишь для некоторых отдельных классов уравнений.

Предположим, что правые части системы

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = f(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f(x_1, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{3.1}$$

т. е. функции $f_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ дифференцируемы в начале координат достаточное число раз. Разложим их по формуле Тейлора в окрестности начала координат: $f_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + F_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, где $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i\left(0, \ldots, 0\right)}{\partial x_j}$, а F_i – члены второго порядка малости относительно $x_1, \ldots, x_n$. Тогда исходная система (3.1) может быть записана в виде $\dot{x}_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + F_1\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, …, $\dot{x}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + F_n\left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.2}$$

называемую системой уравнений первого приближения для системы (3.1).
Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Если все корни характеристического уравнения системы (3.2) имеют отрицательные действительные части, то точка покоя системы (3.2), а также исходной системы (3.1) асимптотически устойчива.

II. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения системы (3.2) имеет положительную действительную часть, то точка покоя системы (3.2) (и системы (3.1)) неустойчива.

Говорят, что в этих случаях возможно исследование системы (3.1) на устойчивость по первому приближению. В остальных случаях такое исследование, вообще говоря, невозможно, поскольку начинает сказываться влияние членов второго порядка малости.

Пример. Исследовать на устойчивость точку покоя нелинейной системы $\dot{x} = 2x + 8\sin y$, $\dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y$. Разлагая функции $\sin y, \cos y, e^x$ по формуле Тейлора и выделяя члены первого порядка малости, можем переписать исходную систему в виде $\dot{x} = 2x + 8y + \Psi_1(x, y)$, $\dot{y} = -x - 3y - \Psi_2(x, y)$, где Ψ_1, Ψ_2 – члены второго порядка малости относительно x и y. Соответствующая система уравнений первого приближения вида (3.2) запишется в виде $\dot{x} = 2x + 8y$, $\dot{y} = -x - 3y$. Корни ее характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{7})/2$ имеют отрицательные действительные части. Поэтому, согласно вышеизложенному, точка покоя этой и исходной систем устойчива.

Задачи для решения. Исследовать на устойчивость по первому приближению точки покоя следующих систем дифференциальных уравнений:

1. $\dot{x} = \frac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9y$, $\dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y$. **2.** $\dot{x} = 5x + y\cos y$, $\dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y$.

3. $\dot{x} = 7x + 2\sin y$, $\dot{y} = e^x - 3y - 1$. **4.** $\dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y$, $\dot{y} = -y - 2x$.

§4. Нелинейные системы. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова

Поскольку подход, использующий линеаризацию нелинейной системы, не всегда дает ответ об устойчивости решений, А. М. Ляпуновым был предложен другой метод, в котором заданной системе уравнений сопоставляется функция аргументов $x_1, \ldots, x_n$, называемая функцией Ляпунова. По свойствам функции Ляпунова делается вывод об устойчивости решения.

Пример. Рассмотрим идею метода для следующей дифференциальной системы:

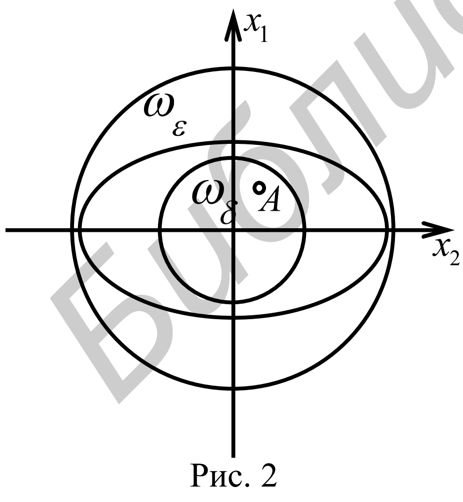


Рис. 2

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 = f_1, \ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 = f_2. \quad (4.1)$$

Известно, что тривиальное решение этой системы устойчиво, поскольку $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$. Однако, для того чтобы убедиться в устойчивости тривиального решения, можно рассуждать и по-другому. Рассмотрим функцию $V\left(x_1, x_2\right) = 2x_1^2 + x_2^2$. Эта функция положительна всюду, кроме точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, где она обращается в нуль. В пространстве переменных x_1, x_2, V уравнение $V = 2x_1^2 + x_2^2$ определяет параболоид с вершиной в начале координат. Линии уровня этой поверхности в плоскости $\left(x_1, x_2\right)$ являются эллипсами. Зададим произвольно малое ε. Построим на плоскости $\left(x_1, x_2\right)$ круг ω_ε

радиусом ε. Возьмем одну из линий уровня – эллипс, целиком лежащий внутри круга ω_ε. Построим другой круг ω_δ, целиком лежащий внутри эллипса (рис. 2). Пусть начальная точка $A(x_{1,0}, x_{2,0})$ лежит внутри ω_δ.

Рассмотрим функцию двух переменных $W(x_1, x_2) = (gradV, f)$. Если вместо x_1, x_2 подставить решение $x_1(t)$, $x_2(t)$ системы (4.1), то полученная таким образом функция от t будет представлять собой полную производную $\frac{dV}{dt}$ от $V(x_1(t), x_2(t))$ вдоль траектории решения системы (4.1). Если эта производная вдоль любой траектории, начинающейся в ω_δ, неположительна, то это будет означать, что такая траектория не сможет покинуть ω_ε. В противном случае между $t = 0$ и значением $t = t_1$, при котором она попадает на границу ω_ε, найдется значение $t = t^*$, для которого выполнено $\frac{dV}{dt} > 0$, поскольку $V(x_1(t_1), x_2(t_1)) > V(x_{1,0}, x_{2,0})$. То, что ни одна траектория, начинающаяся в ω_δ, не покидает ни при одном $t > 0$ круг ω_ε, означает устойчивость тривиального решения.

Таким образом, следует проверить знак dV/dt вдоль траектории. Для этого надо знать саму траекторию. В примере это можно сделать. Но метод должен быть рассчитан на систему общего вида, для которой $x_1(t)$, $x_2(t)$ нельзя выписать явно и тем самым проверить нужное неравенство. Поэтому потребуем, чтобы функция $W(x_1, x_2)$ была неположительной как функция двух независимых переменных x_1, x_2, в некоторой окрестности $(0,0)$. Это условие можно проверить непосредственно по правым частям системы, не зная решения. В примере так и будет, поскольку $W(x_1, x_2) = -2\left[(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2\right] \le 0$ всюду на плоскости (x_1, x_2), а тем самым вдоль любой траектории, таким образом, устойчивость тривиального решения гарантирована.

Функция $V(x_1, x_2)$, участвующая в этих выкладках, и есть функция Ляпунова для рассматриваемого примера. Она имеет вид квадратичной формы $2x_1^2 + x_2^2$. Хотя вместо $2x_1^2 + x_2^2$ можно было взять другую функцию, потребовав чтобы она была положительной всюду, кроме точки $(0,0)$, где она обращается в нуль, а выражение $(gradV, f) \equiv W(x_1, x_2)$ было неположительным.

Замечание. Еще раз отметим, что в приведенных рассуждениях важны как положительность функции V, так и неположительность функции W, значение которой вдоль траектории представляет собой полную производную от V по t вдоль траектории.

Сформулируем некоторые общие теоремы, в основу которых положена изложенная выше идея. Рассмотрим автономную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \quad f_i\left(0, \ldots, 0\right) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.2)$$

Будем исследовать устойчивость точки покоя системы (4.2) при помощи функции Ляпунова $V\left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

Верны следующие теоремы Ляпунова:

Теорема 1 (об устойчивости). Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:

1) $V(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, причем $V = 0$ лишь при $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

2) $W(x) = (\ gradV, f(x)\ ) = \dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial \ \ x} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$,

то точка покоя системы (4.2) устойчива.

Пример. Приведем пример системы, когда аппарат о первом приближении неприменим, а функция Ляпунова дает ответ. Рассмотрим следующую нелинейную систему: $\dfrac{dx_1}{dt} = 2x_2 - x_1^3 \sin^2 t$, $\dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - x_2^5$. Выберем следующую функцию: $V(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0$. Тогда $W(x,t) = -6x_1^4 \sin^2 t - 4x_2^6 \leq 0$. Следовательно, согласно теореме тривиальное решение устойчиво. Линеаризация здесь ответа не дает, так как характеристические числа матрицы первого приближения являются чисто мнимыми.

Задачи для решения. Исследовать на устойчивость следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2$**,** $\dot{y} = x - y + xy$**.**

2. $\dot{x} = xy^4$**,** $\dot{y} = -x^4 y$**.**

3. $\dot{x} = y + x^2 y^2 - \dfrac{1}{4} x^5$**,** $\dot{y} = -2x - 2x^3 y - \dfrac{1}{2} y^3$**.**

4. $\dot{x} = -x^3 y^2 - x^2 y^3$**,** $\dot{y} = x^3 y^2 - x^2 y^3$**.**

Теорема 2 (об асимптотической устойчивости). Если существует дифференцируемая функция $V\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:

1) $V\left(x_1, \ldots, x_n\right) \geq 0$, причем $V = 0$ лишь при $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

2) $W(x) = (\ gradV, f(x)\ ) = \dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x} f_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) \leq 0$, причем $\dfrac{dV}{dt} = 0$ лишь при $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

то точка покоя системы (4.2) асимптотически устойчива.

Пример. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя системы $\dot{x} = -x + y$, $\dot{y} = -2y^3 - x$. В качестве функции Ляпунова возьмем

$V = x^2 + y^2$. Тогда $\dfrac{dV}{dt} = 2x(-x+y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4)$, и функция V вместе с $\dfrac{dV}{dt}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, точка покоя системы асимптотически устойчива.

Задачи для решения. Исследовать на асимптотическую устойчивость точки покоя следующих систем дифференциальных уравнений:

1. $\dot{x} = -x - y$, $\dot{y} = x - 3y$.

2. $\dot{x} = -2x + y$, $\dot{y} = -x - y$.

3. $\dot{x} = -x + 3y^2$, $\dot{y} = -xy - y^3$.

4. $\dot{x} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y$, $\dot{y} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2y}{(1+x^2)^2}$.

Теорема 3 (о неустойчивости). Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:

1) $V(x_1, \dots, x_n) = 0$ и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых $V(x_1, \dots, x_n) > 0$;

2) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x} f_i(x_1, \dots, x_n) \le 0$, причем $\dfrac{dV}{dt} = 0$ лишь при $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

то точка покоя системы неустойчива.

Пример. Исследовать на устойчивость точку покоя следующей системы: $\dot{x} = x(2 + \cos x)$, $\dot{y} = -y$. Возьмем функцию $V(x, y) = x^2 - y^2$. Тогда получаем $\dfrac{dV}{dt} = 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = 2(x^2 + 2x^2 \cos^2 \dfrac{x}{2} + y^2) > 0$ всюду, кроме начала координат. Кроме того, сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $V > 0$ (например, вдоль прямой $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Следовательно, выполнены условия теоремы 3 и точка покоя неустойчива.

Замечание. Недостаток метода заключается в том, что не существует достаточно общего конструктивного способа построения функций $V(x)$. Однако, для ряда важных классов дифференциальных систем такое построение возможно.

Задачи для решения. Исследовать на неустойчивость следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$.

2. $\dot{x} = -y + x^5$, $\dot{y} = x + y^5$.

3. $\dot{x} = -2x + 4xy^2$, $\dot{y} = y + 2x^2 y$.

4. $\dot{x}=x^3+xy^2$, $\dot{y}=-x^2y-y^3$.

§5. Теоремы Барбашина и Красовского

Теоремы Ляпунова дают достаточные условия, при выполнении которых тривиальное решение уравнения (1.1) является устойчивым, асимптотически устойчивым или неустойчивым. Отметим некоторые из обобщений теорем Ляпунова.

Теорема 1 (Н. Н. Красовского). Если для уравнения возмущенного движения (4.2) можно найти непрерывную функцию $V(x)$ такую, что $V(0)=0$, и ее полная производная в силу этого уравнения удовлетворяет условиям:

$$1)\dot{V}>0 \text{ вне } K; \quad 2)\dot{V}=0 \text{ на } K, \tag{5.1}$$

где K – множество точек, не содержащих целые траектории при $t_0 \le t < \infty$, и если при этом можно указать точки a произвольно малой окрестности начала координат такие, что в них $V>0$, то тривиальное решение уравнения (4.2) неустойчиво.

Теорема 2 (Н. Н. Красовского). Если для уравнения возмущенного движения (4.2) можно найти положительно определенную функцию $V(x)$ такую, что ее полная производная $\dot{V}$ в силу этого уравнения удовлетворяет в окрестности начала координат условиям

$$\dot{V}<0 \text{ вне } K, \quad \dot{V}=0 \text{ на } K, \tag{5.2}$$

где K – множество точек, не содержащих целых траекторий уравнения (4.2) при $t_0 \le t < \infty$, то тривиальное решение устойчиво асимптотически.

Пример. Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\dot{x}=-x+3y^2, \quad \dot{y}=-xy-y^3 \tag{5.3}$$

и функцию Ляпунова $V(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$. Она является положительно определенной, причем ее полная производная в силу уравнений (5.3) представима в виде $\dot{V}=-\left(x-y^2\right)^2$. Так как производная $\dot{V}$ не является отрицательно определенной, то воспользоваться второй теоремой Ляпунова не представляется возможным.

Попытаемся применить теорему Красовского. Множество K найдем, приравнивая нулю производную $\dot{V}$:

$$\Phi(x,y)=x-y^2=0.$$

На фазовой плоскости множество K определяет параболу. Вне этой параболы выполняется первое условие (5.2). Остается проверить, действительно ли на найденном K нет целых траекторий системы (5.3).

Очевидно, что $grad\Phi(x,y)=\{1,-2y\}$. Вектор скорости U фазовой точки системы уравнений (5.3) можно представить в виде $U(x,y)=\left\{-x+3y^2,-xy-y^3\right\}$.

Следовательно, скалярное произведение $(U, grad\Phi)$ не тождественно равно нулю: $(U, grad\Phi) = -x + 3y^2 + xy^2 + y^4 \neq 0$, а многообразие K не содержит целых траекторий системы (5.3) и выполняются все условия теоремы Красовского. Поэтому тривиальное решение системы (5.3) асимптотически устойчиво.

До сих пор рассматривались вопросы устойчивости в малом, т. е. предполагалось, что начальное возмущение $x(t_0)$ берется из шара $\|x\| \leq \Delta$ достаточно малого радиуса $r = \Delta$. Однако использованный выше аппарат функций Ляпунова позволяет получить более общие результаты. Один из них состоит в следующем.

Теорема Барбашина – Красовского. Если для уравнения возмущенного движения (4.2) можно найти положительно определенную функцию $V(x)$, удовлетворяющую условию

$$V(x) \to \infty \text{ при } \|x\| \to \infty,$$

полная производная которой в силу этих уравнений удовлетворяет при всех x двум условиям $\dot{V} < 0$ вне K, $\dot{V} = 0$ на K, где K – множество точек, не содержащих целых траекторий уравнения при $t_0 \leq t < \infty$, то тривиальное решение уравнения (4.2) асимптотически устойчиво в целом.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Евгений Алексеевич Барбашин (1918–1969). Выдающийся советский математик. Родился в Пермской области. В раннем детстве остался без родителей. Воспитание и среднее образование получил в Березовском детском доме вблизи города Свердловска. В 1951 г. защитил докторскую диссертацию. 1952–1958 гг. – заведующий кафедрой высшей математики Уральского Политехнического Института. 1958–1960 гг. – заведующий отделом математики Уральского Политехнического Института, 1961–1966 гг. – заведующий отделом математического анализа Свердловского отделения Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова.

Евгений Алексеевич Барбашин является автором фундаментальных исследований по общей теории динамических систем, теории устойчивости и автоматического управления. Им была впервые развита теория динамических систем без предположения единственности, разработан метод сечений и даны приложения метода к вопросам качественного изучения динамических систем.

В дальнейшем Е. А. Барбашин занимался двумя проблемами теории устойчивости: устойчивостью существенно нелинейных систем в целом и задачей об устойчивости нелинейных систем по первому приближению. Большое место в исследованиях Е.А. Барбашина занимали проблемы теории автоматического управления. Он разработал новые эффективные методы стабилизации систем автоматического регулирования. Основные труды: «Введение в теорию устойчивости», «Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством», «Функции Ляпунова», «Метод сечений в теории динамических систем».

Лауреат Государственной премии СССР за цикл работ по проблеме устойчивости систем автоматического регулирования (1972). Воспитал большое число научных работников: более 30 кандидатов наук, много докторов наук, членов-корреспондентов и академиков АН СССР.

В 1966 году Евгений Алексеевич был избран академиком АН БССР и переехал в Минск. Сыграл принципиальную роль в организации и становлении всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения», придания ему статуса серьезного научного издания.

Евгений Алексеевич создал лабораторию прикладной математики и механики Института математики АН БССР. Им создана новая кафедра прикладной математики Белорусского государственного университета.

В 1970 г. на базе кафедры был образован **факультет прикладной математики** (**ФПМ БГУ,** ныне ФПМИ БГУ)**.** Сама кафедра вошла в состав нового факультета и стала называться **кафедрой методов оптимального управления**. Возглавил кафедру доктор физико-математических наук, профессор Рафаил Габасов[1]. Лабораторию возглавила Фаина Михайловна Кириллова[2], доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси. Ими разработано новое направление конструктивных (численных) методов оптимального управления на состояниях систем дифференциальных уравнений.

В заключение – еще несколько слов о человеческих качествах Евгения Алексеевича Барбашина. По словам академика Н. Н. Красовского[3] «к этому исключительно скромному, доброму и отзывчивому человеку постоянно тянулась талантливая молодежь и находила в нем своего учителя», «следует особенно отметить очень глубокий и совсем непоказной патриотизм Евгения Алексеевича…».

1. **www.gabasov.info/biography.html**
2. **www.kirillova.info/biography.html**
3. **http://proceedings.usu.ru/?base=mag/0016(03_09-2000)&xsln=showArticle.xslt&id=a23&doc=../content.jsp**

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – Москва : Наука, 1978.
2. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – Москва : ГИТТЛ, 1958.
3. Богданов, Ю. С. Дифференциальные уравнения / Ю. С. Богданов, Ю. Б. Сыроид, С. А. Мазаник. – Минск : Універсітэцкае, 1996.
4. Васильева, А. В. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. В. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов. – Москва : Физматлит, 2003.
5. Васенкова, Е. К. Дифференциальные и разностные уравнения / Е. К. Васенкова, Е. С. Волкова, И. Г. Шандра. – Москва : Фин. академия, 2003.
6. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск, 1974.
7. Годунов, С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами / С. К. Годунов. – Новосибирск : изд. Новосибирского ун-та, 1994.
8. Егоров, А. И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений / А. И. Егоров. – Москва : Физматлит, 2008.
9. Егоров, А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. – Москва : Физматлит, 2005.
10. Егоров, А. И. Уравнения Риккати / А. И. Егоров. – Москва : Физматлит, 2001.
11. Еругин, И. И. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / И. И. Еругин. – Минск : Наука и техника, 1970.
12. Зубов, В. И. Устойчивость движения / В. И. Зубов. – Москва : Высш. шк., 1973.
13. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1952.
14. Немыцкий, В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1949.
15. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – Москва : Наука, 1985.
16. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – Москва : Высш. шк., 1989.
17. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. В. Васильева, А. Г. Свешников. – Москва : Наука, 1998.
18. Федорюк, М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. – Москва : Наука, 1983.
19. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями / А. Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1985.
20. Борзенков, А. В. Дифференциальные уравнения в частных производных. MATLAB / А. В. Борзенков. – Минск : БГУИР, 2009, 2010.

Св. план 2010, поз. 52

Учебное издание

Борзенков Алексей Владимирович

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. MATLAB

Конспект лекций
для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

Редактор Т. Н. Крюкова
Корректор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л.	Тираж 100 экз.	Заказ 21.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494371 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6