Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информатики

Н.А. Волорова, А.С. Летохо

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебно-методическое пособие
для студентов специальности «Информатика»
дневной формы обучения

В 2-х частях

Часть 1

Минск 2006

УДК 519.21+519.25(075.8)
ББК 22.171+22.172 я 73
В 68

Р е ц е н з е н т:

доцент кафедры ВМиП БГУИР,
канд. техн. наук А.Б. Гуринович

Волорова Н.А.
В 68 Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно-метод. пособие для студ. спец. «Информатика» дневн. формы обуч.: В 2 ч. Ч.1 / Н.А. Волорова, А.С. Летохо. – Мн.: БГУИР, 2006. – 75 с.: ил.
ISBN 985-488-015-X (ч. 1)

В пособии приведены краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, а также условия задач, рекомендуемых для проведения контрольных работ, при приеме зачетов и экзаменов, на практических занятиях и при самостоятельной работе студентов.

УДК 519.21+519.25 (075.8)
ББК 22.171+22.172 я 73

ISBN 985-488-015-X (ч. 1)
ISBN 985-488-013-3

СОДЕРЖАНИЕ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Теория вероятностей **–** математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайного события*** (или просто ***события***).

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые ***числа***, характеризующие степень объективной возможности появления этих событий, называемые ***вероятностями событий***.

К понятию «вероятность» существует несколько подходов.

Современное построение теории вероятностей основывается на *аксиоматическом подходе* и опирается на элементарные понятия теории множеств. Такой подход называется теоретико-множественным.

Пусть производится некоторый опыт со случайным исходом. Рассмотрим множество Ω всех возможных исходов опыта; каждый его элемент $\varpi \in \Omega$ будем называть *элементарным событием,* а множество Ω – *пространством элементарных событий*. Любое событие A в теоретико-множественной трактовке есть некоторое подмножество множества Ω: $A \in \Omega$.

Достоверным называется событие Ω, которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие $\varnothing$, которое в результате опыта произойти не может.

Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A \cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A \cdot B$, $A \cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

Противоположным к событию A называется такое событие $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\right) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{B}_i\right) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - \mathrm{P}(B_i))$, которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k (k=1, 2, ..., n) образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

При преобразовании выражений можно пользоваться следующими тождествами:

$$A + \overline{A} = \Omega; \qquad A \cdot \overline{A} = \varnothing; \qquad A + \Omega = \Omega; \qquad A \cdot \Omega = A; \qquad A \cdot \varnothing = \varnothing;$$

$$A+\varnothing=A; \qquad \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}; \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}; \qquad A+\overline{A}\cdot B=A+B.$$

На основе вышеизложенного сформулированы ***аксиомы теории*** *вероятностей*. Пусть каждому событию ставится в соответствие *число*, называемое *вероятностью события*. Вероятность события A обозначается $P(A)$. Так как событие есть множество, то вероятность события есть функция множества. Вероятности событий удовлетворяют следующим аксиомам.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей:
$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.1}$$
2. Если А и В несовместные события, то
$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2}$$

Вторая аксиома обобщается на любое число событий: $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$,

если события A_i и A_j попарно несовместны для всех $i \neq j$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют *равновозможными* если
$$P(A_1)=P(A_2)= \ldots =P(A_n). \tag{1.3}$$

Если в каком-то опыте пространство элементарных событий Ω можно представить в виде полной группы несовместных и равновозможных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, то такие события называются *случаями*, а сам опыт сводится к *схеме случаев*.

Случай ω_i называется благоприятным событием А, если он является элементом множества А: $\varpi_i \in A$.

Классическое определение вероятности: вероятность события определяется по формуле
$$P(A)=\frac{m}{n}\ , \tag{1.4}$$
где n - число элементарных равновозможных исходов данного опыта;
m - число равновозможных исходов, приводящих к появлению события.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область случайным образом бросается точка T, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки T. Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение
$$\mathrm{P}(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}\ , \tag{1.5}$$
где $S(A)$ и $S(\Omega)$ — геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей A и Ω соответственно.

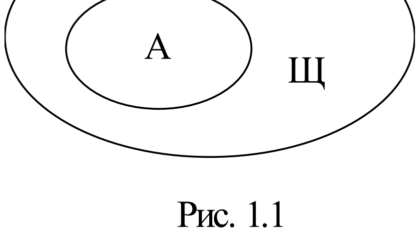


Рис. 1.1

1.1 Основные комбинаторные формулы

Пусть имеется множество $X = \{x_1, x_2, .., x_n\}$, состоящее из n различных элементов. (n, r) - *выборкой* называется множество, состоящее из r элементов, взятых из множества X.

Упорядоченной называется выборка, для которой важен порядок следования элементов. Если каждый элемент множества X может извлекаться несколько раз, то выборка называется *выборкой с повторениями*.

Число упорядоченных (n, r) - выборок (*перестановок*) с повторениями $\tilde{P}(n,r)$ и без повторений $P(n,r)$ равно

$$\tilde{P}(n,r)=n^r, \tag{1.6}$$

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n,r)!} \tag{1.7}$$

Число неупорядоченных (n, r) - выборок (*сочетаний*) с повторениями $\tilde{C}_n^r$ и без повторений C_n^r равно

$$\tilde{C}_n^r=\frac{(n+r-1)!}{r!(n,r)!}, \tag{1.8}$$

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n,r)!} \tag{1.9}$$

Число различных разбиений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств, причем в 1-м подмножестве r_1 элементов, во 2-м r_2 элементов и т.д., а $n = r_1 + r_2 +... + r_k$ равно

$$P_n(r_1, r_2, ..., r_k)=\frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!} \tag{1.10}$$

Пример 1.1. В партии транзисторов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов стандартны. Найти вероятность p того, что следующий транзистор будет стандартным.

Решение. Всего осталось для проверки $n+m-k$ транзисторов, из которых стандартных $n-k$. По формуле классического определения вероятности

$$p=\frac{n-k}{n+m-k}.$$

Пример 1.2. Банковский сейф имеет кодовый замок, состоящий из шести дисков с восьмью буквами на каждом. Сейф открывается при наборе единственной комбинации букв. Злоумышленник пытается открыть сейф, причем на проверку одной кодовой комбинации у него уходит 10 секунд. Какова вероятность того, что злоумышленник успеет открыть сейф, если в его распоряжении 1 час?

Решение. Обозначим искомую вероятность через P(A). Общее число исходов, равное числу кодовых комбинаций замка определяется по формуле (1.6) и равно 8^6. Число благоприятствующих исходов, в данном случае равное числу комбинаций, которые успеет испробовать злоумышленник за 1 час, равно 360. Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{360}{8^6} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}$$

ЗАДАЧИ

1.1. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани. *(Ответ:* 0,096.)

1.2. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже. *(Ответ:* 0,008.)

1.3. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг, хотя бы одна художественная. *(Ответ:* 0,785.)

1.4. Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных контролером деталей нет ни одной бракованной, то вся партия принимается. В противном случае ее посылают на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 5 бракованных, будет принята контролером? *(Ответ:* 0,5838.)

1.5. Два человека условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих людей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время? *(Ответ:* 0,3056.)

1.6. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от 0 до 9. Определить вероятность того, что случайно составленное с помощью данных карточек двузначное число делится на 8. *(Ответ:* 0,056.)

2. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Несколько событий называются ***несовместимыми***, если появление одного из них исключает возможность появления остальных.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{2.1}$$

Если имеется счетное множество несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{2.2}$$

Из правила сложения вероятностей вытекает, что если события A_1, A_2, …, A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице; т.е. если

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \quad A_i \cdot A_j = O \text{ при } i \neq j,$$

то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1 \tag{2.3}$$

В частности, если два события A и $\overline{A}$ противоположны, то они образуют полную группу несовместных событий и

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{2.4}$$

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \tag{2.5}$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \tag{2.6}$$

Вероятность суммы трех совместных событий

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - \\ - P(B \cup C) - P(A \cup C) + P(A \cup B \cup C) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Событие А называется независимым от события В, если возможность наступления события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

В противном случае события являются зависимыми. *Условной вероятностью* события В при наличии А называется величина

$$P(B / A) = P(A \cap B) / P(A) \tag{2.8}$$

(при этом полагается, что Р(А) не равно 0).

Условную вероятность события *P(B/A)* можно трактовать как вероятность события В, вычисленная *при условии, что событие А произошло*.

На практике формулу (2.8) записывают в виде:

$$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(B / A) \tag{2.9}$$

Вероятность произведения (пересечения, совмещения) двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого (правило умножения вероятностей).

Правило умножения вероятностей может быть обобщено на случай произвольного числа событий

$$\begin{gathered} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \\ P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \ldots A_n), \end{gathered} \tag{2.10}$$

т.е. *вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого последующего события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место*.

Событие *A* называется ***независимым*** от события *B,* если его вероятность не зависит от того, произошло событие *B* или нет, т.е. P(*B*/*A*)=P(*B*).

Для независимых событий правило произведения вероятностей принимает вид:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.11}$$

Несколько событий A_1, A_2, …, A_n называются независимыми, если любое из них не зависит от любой комбинации (произведения) любого числа других. Для независимых событий правило умножения принимает вид*:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n), \tag{2.12}$$

или

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{2.13}$$

т.е. *вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*.

Заметим, что если имеется несколько событий A_1, A_2, …, A_n, то их попарная независимость (т.е. независимость любых двух событий A_i и A_j, $i \neq j$) еще не означает их независимости в совокупности.

Пример 2.1. Сообщение передается одновременно по *n* каналам связи, причем для надежности по каждому каналу оно повторяется *k* раз. При одной передаче сообщение (независимо от других) искажается с вероятностью *p* . Каждый канал связи (независимо от других) «забивается» помехами с вероятностью *q*;

«забитый» канал не может передавать сообщения. Найти вероятность того, что адресат получит сообщение без искажений.

Решение. Обозначим события:

A = {хотя бы один раз сообщение передано без искажений};

B_i = {по i-му каналу сообщение хотя бы один раз было передано без искажений}.

Для выполнения события B_i i-й канал, во-первых, не должен быть забит помехами и, во-вторых, хотя бы одно сообщение по нему не должно быть искажено.

Вероятность того, что канал не «забит» помехами равна 1-q.

Вероятность того, что хотя бы одно сообщение передано без помех – равна 1-p^k (p – вероятность того, что все сообщения переданы с искажениями).

Тогда $P(B) = (1 - q) \cdot (1 - p^k)$.

Вероятность события A, состоящего в том, что хотя бы на одном канале произойдет событие, равна

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(B_i)) =$$

$$= 1 - [1 - (1-q)(1-p^k)]^n.$$

Пример 2.2. Какова вероятность угадать в спортлото “5 из 36” не менее трех номеров?

Решение. Событие А - угадать не менее трех номеров в спортлото, разбивается на сумму трех несовместных событий:

A_3 - угадать ровно три номера;

A_4 - угадать ровно четыре номера;

A_5 - угадать ровно пять номеров.

При этом $P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)$, так как события несовместны.

Найдем вероятность $P(A_3)$. Для этого воспользуемся формулой (1.1). Здесь общее число комбинаций n по формуле (1.6) будет равно числу возможных заполнений карточек:

$$n = C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!(36-5)!} = 376992.$$

Число благоприятствующих комбинаций m в этом случае определяется следующим образом. Выбрать три номера из пяти выигравших можно $C_5^3 = 10$ способами. Однако каждый выбор трех правильных номеров сочетается с выбором двух неправильных номеров.

Число таких выборок равно $C_{31}^2 = 465$. Таким образом, число благоприятствующих событий равно произведению найденных чисел:

$$m = C_5^3 \cdot C_{31}^2 = 10 \cdot 465 = 4650.$$

Тогда

$$P(A_3) = \frac{m}{n} = \frac{4650}{376992} \approx 0{,}123 \cdot 10^{-1}.$$

Аналогично вычисляются $P(A_4)=0,478\cdot10^{-3}$, $P(A_5)=0,265\cdot10^{-5}$. Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P(A)=0,123\cdot10^{-1}+0,478\cdot10^{-3}+0,265\cdot10^{-5}=0,128\cdot10^{-1}.$$

ЗАДАЧИ

2.1. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б)не более одной камеры; 3) три камеры. *(Ответ:* а) 0,398; б) 0,098; в) 0,504.)

2.2. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен: э) тремя станциями; б) не менее чем двумя станциями; в) ни одной станцией. *(Ответ:* а) 0,504; б) 0,902; в) 0,006.)

2.3. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго -0.5, третьего -0,6. Найти вероятность успешного преодоления: а) трех препятствий; б) не менее двух препятствий; в) двух препятствий. *(Ответ:* а) 0,12; б) 0,5; в) 0,38.)

2.4. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй -0,7, третий -0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов. *(Ответ:* а) 0,456; б) 0,834; в) 0,622.)

2.5. Два бомбардировщика преодолевают зону ПВО. Вероятность того, что будет сбит первый бомбардировщик, равна 0,7, второй-0,8. Найти вероятность: а) уничтожения одного бомбардировщика; б) поражения двух бомбардировщиков; в) промахов. *(Ответ:* а) 0,38; б) 0,56; в) 0,06.)

2.6. Три команды спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами общества В. Вероятности выигрышей первой, второй и третьей команд из общества А у соответствующих команд из общества В равны: 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече. Какова верояность того, что команды общества А выиграют: а) две встречи; б) хотя бы две встречи; в) три встречи? *(Ответ:* а) 0,436; б) 0,604;в) 0,168.)

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Формула полной вероятности является следствием основных правил теории вероятностей: теорем сложения и умножения вероятностей.

Допустим, что проводится некоторый опыт, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (***гипотез***):

$$\{ H_1, H_2, \ldots, H_n\}, H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j. \tag{3.1}$$

Каждая гипотеза осуществляется случайным образом и представляет собой некоторые *события*, вероятности которых известны:

$$\mathrm{P(H_1); P(H_2); ...; P(H_n)}. \tag{3.2}$$

Рассматривается некоторое событие A, которое может появиться только совместно с одной из гипотез (3.2). Заданы условные вероятности события A при каждой из гипотез:

$$P(A/H_1); P(A/H_2); ...; P(A/H_n) \tag{3.3}$$

Требуется найти вероятность события A. Для этого представим событие А как сумму n несовместных событий

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n) \tag{3.4}$$

По правилу сложения вероятностей $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i \cap A)$.

По правилу умножения вероятностей $\mathrm{P}(H_i \cap A) = \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(A/H_i)$. Тогда полная вероятность события A:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(A/H_i), \tag{3.5}$$

т.е. полная вероятность события А вычисляется как *сумма произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события при этой гипотезе*.

Формула (3.5) называется ***формулой полной вероятности***. Она применяется в тех случая, когда опыт со случайным исходом распадается на два этапа: на первом “разыгрываются” условия опята, а на втором – его результаты.

Следствием правила умножения, и формулы полной вероятности является теорема гипотез или ***формула Байеса***.

По условиям опыта известно, что гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, образуют полную группу событий:

$$H_i \cap H_j = \emptyset \text{ при } i \neq j \text{ и } H_1 \cup H_2, \cup ..., \cup H_n = \Omega .$$

Вероятности гипотез до опыта (так называемые «априорные вероятности») известны и равны

$$\mathrm{P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)}; \quad \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(H_i) = 1}.$$

Предположим, что опыт произведен и в результате появилось событие *A*. Спрашивается, как нужно пересмотреть вероятность гипотез с учетом этого факта, или, другими словами, какова вероятность того, что наступлению события A предшествовала гипотеза $\mathrm{H_k}$ (послеопытные вероятности называются апостериорными):

$$\mathrm{P(H_1/A), P(H_2/A), ..., P(H_n/A)}$$

Вероятность наступления события *A* совместно с гипотезой H_k определяется с использованием теоремы умножения вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap H_k) = \mathrm{P}(H_k) \cdot \mathrm{P}(A/H_k) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(H_k/A) \tag{3.6}$$

Таким образом, можно записать:

$$\mathrm{P}(H_k/A) = \mathrm{P}(H_k) \cdot \mathrm{P}(A/H_k) \; / \; \mathrm{P}(A) \tag{3.7}$$

С использованием формулы полной вероятности

$$\mathrm{P(H_k/A)} = \frac{\mathrm{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)} \tag{3.8}$$

Формула (3.8) называется ***формулой Байеса***. Она позволяет пересчитывать вероятности гипотез в свете новой информации, состоящей в том, что опыт дал результат *A*

Пример 3.1. На вход радиоприемного устройства с вероятностью 0,9 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,1 только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то приемник с вероятностью 0,8 регистрирует наличие сигнала, если поступает только помеха, то регистрируется наличие сигнала с вероятностью 0,3. Известно, что приемник показал наличие сигнала. Какова вероятность того, что сигнал действительно пришел?

Решение. С рассматриваемым событием A={приемник зарегистрировал наличие сигнала} связано две гипотезы: H_1={пришел сигнал и помеха}, H_2={пришла только помеха}. Вероятности этих гипотез $\mathrm{P}(H_1)=0{,}9$, $\mathrm{P}(H_2)=0{,}1$. Условные вероятности события *A* по отношению к гипотезам H_1 и H_2 находим из условия задачи: $\mathrm{P}(A/H_1)=0{,}8$, $\mathrm{P}(A/H_2)=0{,}3$.

Требуется определить условную вероятность гипотезы H_1 по отношению к событию A, для чего воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}8}{0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}3} = 0{,}96 .$$

Пример 1.8. Для решения вопроса идти в кино или на лекцию студент подбрасывает монету. Если студент пойдет на лекцию, он разберется в теме с вероятностью 0,9, а если в кино - с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что студент разберется в теме?

Решение. Применим формулу полной вероятности (1.19). Пусть А - событие, состоящее в том, что студент разобрался в теме, событие (гипотеза) H_1 - студент идет в кино, H_2 - студент идет на лекцию. Известны из условия задачи следующие вероятности:

$$P(H_1)=P(H_2)=0.5;\ P(A/H_1)=0{,}3;\ P(A/H_2)=0{,}9.$$

Искомая вероятность события А будет равна

$$P(A) = P(H_1)\ P(A/ H_1)+ P(H_2)\ P(A/ H_2)=0{,}5\ 0{,}3+0{,}5\ 0{,}9=0{,}6.$$

ЗАДАЧИ

3.1. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом - по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков. *(Ответ:* а) 0,1848; б) 0,4099.)

3.2. По линии связи передано два сигнала типа А и В с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60% сигналов типа А и 70% типа В. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал типа А. (*Ответ:* а) 0,62; б) 0.7742.)

3.3. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал - «тире». (*Ответ:* а) 0,5; б) 0,5.)

3.4. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени Т для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа - 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени Т. б) Узел проработал гарантийное время Т. К какому типу он вероятнее всего относится? *(Ответ:* а) 0,74; б) ко второму.)

3.5. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа А, 3 мишени типа В и 3 мишени типа С. Вероятность попадания в мишень типа А равна 0,4, в мишень типа В - 0,1, в мишень типа С-0,15. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена при одном выстреле, если неизвестно, по мишени какого типа он был сделан; б) при одном выстреле (если неизвестно, по мишени какого типа он сделан) поражена мишень типа А. *(Ответ:* а) 0,25; б) 0,7273.)

3.6. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала А или в одну из пяти касс вокзала В. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала А имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала В - 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет. б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен? *(Ответ:* а) 0,5375; б) в кассе вокзала В.*)*

3.7. Шесть шаров, среди которых 3 белых и 3 черных, распределены по двум урнам. Наудачу выбирается урна, а из нее один шар. Как нужно распределить шары по урнам, чтобы вероятность вынуть белый шар была максимальной? (*Ответ*: в одной урне один белый шар, а в другой – все остальные).

3.8. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого стрелка соответственно равны:0,7, 0,75, 0,8. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени осталось две пробоины? *(Ответ*: 0,33).

3.9. По каналу связи передается цифровой текст, содержащий только три цифры 1, 2, 3, которые могут появляться в тексте с равной вероятностью. Каждая передаваемая цифра в силу наличия шумов принимается правильно с вероятностью 0,9 и с вероятностью 0,1 принимается за какую-либо другую цифру. Цифры искажаются независимо. Найти вероятность того, что было передано 111, если принято 123. (*Ответ*: 0,0025).

3.10. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Вычислить вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятность отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3.)*Ответ*: 0,3).

4. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

Несколько опытов называются ***независимыми***, если вероятность исхода опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Рассмотрим случай, когда вероятности исходов опытов постоянны и не зависят от номера опыта.

Пусть один тот же опыт проводятся n раз. В каждом опыте некоторые события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ появляется с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Будем рассматривать не результат каждого конкретного опыта, а общее число появлений событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

4.1. Формула Бернулли

Рассмотрим случай с двумя возможными исходами опытов, т.е. в результате каждого опыта событие A появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $q=1-p$. Вероятность $P(n,k)$ того, что в последовательности из n опытов интересующее нас событие произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна (***формула Бернулли***)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \qquad (4.1)$$

<u>Докажем это:</u> Обозначим через $B_к$ появление события A в k опытах и появление $\overline{\text{A}}$ в $(n - k)$ опытах. Событие $B_к$ представляет собой сумму несовместимых событий

$$B_k = \underbrace{A_1 \cdot A_2 \cdot ......A_k}_{k} \underbrace{\overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} ......\overline{A}_n}_{n-k} + ... + \underbrace{\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 ......\overline{A}_{n-k}}_{n-k} \underbrace{\overline{A}_{n-k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} ......\overline{A}_n}_{k}$$

Где A_i – появление события A в i-том опыте. Определим вероятность одного из вариантов серии испытаний. Так как все опыты одинаковы, то вероятности всех вариантов одинаковы равны

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ......A_k \overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} ......\overline{A}_n) = \underbrace{p \cdot p .....p}_{k} \underbrace{q \cdot q ......q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}$$

Количество вариантов таких сложных событий равно числу выборок k номеров опытов из n возможных, в которых произойдут события A, т.е. равно $C_n^к$. Тогда, согласно правилу сложения вероятностей для несовместных событий $P(B_к)$ равно

$$P_n(k) = P(n,k) = C_n^к p^к q^{(n-к)}.$$

Следствия из формулы Бернулли.

1. Вероятность того, что событие A наступит менее k раз

$$P(n,<k) = P\ (n,0) + P\ (n,1) + ... + P\ (n,k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} P(n,i) \tag{4.2}$$

2. Вероятность того, что событие наступит более k раз

$$P(n,>k) = P\ (n,k+1) + P\ (n,k+2) + ... + P\ (n,n) = \sum_{i=k+1}^{n} P(n,i). \tag{4.3}$$

3. Вероятность того, что в n опытах схемы Бернулли, событие А появится от *k1* до *k2* раз

$$P(n,k_1 \le i \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P_n(i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^{ik} p^i q^{n-i} \tag{4.4}$$

4. Вероятность того, что в n опытах событие А появится хотя бы один раз, определяется формулой

$$P(n,\ge 1) = P_n(1 \le k \le n) = 1 - q^n \tag{4.5}$$

Число $\underline{к_0}$, которому соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(k_0)$, называется *наивероятнейшим числом* появления события А. При заданных n и p это число определяется неравенствами:

$$np - q \le k_0 \le np + p \tag{4.6}$$

4.2. Случай с несколькими исходами опытов

Пусть производится серия из n независимых опытов, в результате каждого из которых может появиться одно из событий A_1, A_2, ..., A_r с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_r$ соответственно.

Вероятность того, что в серии из n опытов событие A_1 наступит ровно k_1 раз, событие A_2 — k_2 раз,..., событие A_r — k_r раз ($k_1 + ... + k_r = n$) равна

$$\mathrm{P}(n,k_1,...,k_r) = \frac{(k_1 + ... + k_r)!}{k_1!...k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_r^{k_r}. \tag{4.7}$$

4.3. Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли.

Вычисление вероятностей $P(n,k)$, при больших значениях n по формуле Бернулли проблематично. Поэтому вычисление соответствующих вероятностей проводится с помощью приближенных формул.

Теорема Пуассона. Если $(n \to \infty)$ *и* $p \to 0$, так что $np \to \lambda,\ 0 < \lambda < \infty$, то

$$P_k(n) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},\ k = 0,...,n \tag{4.8}$$

Теоремы Муавра-Лапласа. На практике приближенные формулы Муавра-Лапласа применяются в случае, когда p и q не малы, а $npq > 9$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность появления события А в каждом из $n(n \to \infty)$ независимых испытаний равна одной и той же постоянной p=const ($0 < p < 1$), то вероятность $P(n,k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно k раз, приближенно вычисляется формулой:

$$P(n,k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{4.9}$$

где: $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – кривая Гаусса.

Таблицы значений функции $\varphi(x)$ даны в приложениях к учебникам по теории вероятностей (Приложение 1 настоящего методического пособия).

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пусть вероятность появления события A в каждом из n ($n\to\infty$) независимых испытаний равна одной и той же постоянной p ($0<p<1$), то вероятность $P(n,k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно вычисляется формулой:

$$P(n, k_1 \le k \le k_2) \approx (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)), \tag{4.10}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ - функция Лапласа,}$$

$$x_1 = \frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}$$

Значения аргументов функции Лапласа для x $\in$[0,5] даны в приложениях к учебникам по теории вероятностей (Приложение 2 настоящего методического пособия), для x>5 Ф(x)=1/2.Функция нечетная - Ф(x)= Ф(-x).

Пример 4.1. По каналу связи передается $n = 6$ сообщений, каждое из которых независимо от других, с вероятностью $p = 0{,}2$ оказывается искаженным. Найти вероятности следующих событий:

A = {ровно два сообщения из 6 искажены},

B = {не менее двух сообщений из 6 искажены},

C = {все сообщения будут переданы без искажений},

D = {все сообщения будут искажены}.

Решение. По теореме о повторении опытов

$$P(A) = C^6 \cdot p^2 \cdot (1-p)^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}197,$$

$$P(B) = P(6{,}2) + P(6{,}3) = P(6{,}5) + P(6{,}6) = 1 - P(6{,}0) -$$

$$- P(6{,}1) = 1 - C_6^0 p^0 (1-p)^6 - C_6^1 p^1 (1-p)^5 = 1 - 0{,}8^6 - 6 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}345,$$

$$P(C) = (1-p)^6 = 0.262,$$

$$P(D) = p^6 = 0{,}2^6 = 0{,}000064.$$

Пример 4.2. Вероятность появления события A за время испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появится: а) 80 раз; б) не менее 75 и не более 90 раз; в) не менее 75 раз.

Решение

а) Воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$\mathrm{P}(100{,}80) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}, \quad \text{где } x = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0.$$

По таблице (приложение 1): φ(0) = 0,3989, тогда P(100,80) = 0,0997.

б) Согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа

$$\mathrm{P}\ (100{,}75<k< 90) = \left(\Phi\left(\frac{90-80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75-80}{4}\right)\right)/2 = (\Phi(2{,}5)\text{-}\Phi(\text{-}1{,}25))/2 = \Phi(2{,}5)+$$

$$+\ \Phi(\text{-}1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

Значение функции Лапласа определяем по таблице Φ(2,5)=0,4938;Φ(1,25) = 0,3944. Тогда P (100, $75<k<90$) =0,8882.

ЗАДАЧИ

4.1. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов за время T одинаковы и равны $p=0{,}2$. Найти вероятности отказ прибора, если для этого достаточно чтобы отказали хотя бы 3 элемента из восьми. (*Ответ:* 0,203).

4.2. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,78. Чему равно наивероятнейшее число наступления события в 150 опытах? (*Ответ:* 117).

4.3.Телефонная связь с 12 абонентами, находящимися в удаленном населенном пункте, обеспечивается при помощи многоканальной линии. Каждый абонент пользуется этой линией в течение 20% времени пиковой нагрузки. Сколько каналов нудно иметь, чтобы в пиковый период линия была доступна:

а) 80% абонентов в любой момент времени;

б) всем абонентам в течение 80% времени;

в) всем абонентам в течение 95% времени.

(Ответ: а) 10; б) 4; в) 5).

4.4. Вероятность успеха в каждом испытании равна p. Найти вероятность того, что k-ый по порядку успех происходит в n-м испытании. Вычислить эту вероятность для p=0,7; k=5, n=12. (*Ответ:* 0,0011).

4.5. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений. *(Ответ:* а) 0,3487; б) 0,0574; в) 0,9872.)

4.6. Вероятность промаха при одном выстреле по мишени равна 0,1. Сколько выстрелов необходимо произвести, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота промаха отклонится от постоянной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03? *(Ответ:* 400.)

5. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

5.1. Случайные величины. Закон распределения вероятностей

Под с***лучайной величиной*** понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Возможные значения случайной величины образуют множество Ξ, которое называется ***множеством возможных значений*** случайной величины. Обозначения случайной величины: X, Y, Z; возможные значения случайной величины: x, y, z.

Примеры случайных величин:

1. Опыт –бросание двух монет. Тогда Ξ ={(г,г), (г,ц), (ц,г), (ц,ц)}. Числовая функция X (СВ X)– число выпадений герба, определенная на множестве Ξ={0,1,2} – герб может выпасть 0,1,2 раза.

2. Опыт - работа ЭВМ после ремонта, случайная величина T – время наработки на отказ. Множество возможных значений Ξ – теоретически вся правая половина оси абсцисс. Множество возможных значений для этого опыта несчетно.

В зависимости от вида множества Ξ случайные величины могут быть *дискретными* и *недискретными*. СВ X называется ***дискретной***, если множество ее возможных значений Ξ – счетное или конечное. Если множество возможных значений СВ несчетно, то такая СВ является ***недискретной***.

В теоретико-множественной трактовке основных понятий теории вероятностей случайная величина X есть функция элементарного события: $X=\varphi(\omega)$, где ω – элементарное событие, принадлежащее пространству Ω. При этом множество Ξ возможных значений СВ X состоит из всех значений, которые принимает функция $\varphi(\omega)$.

Законом распределения СВ называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной. (То есть, всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями.)

СВ будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т.е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое событие. Про случайную величину мы будем говорить, что она *подчинена данному закону распределения*.

5.2. Ряд распределения дискретной случайной величины

Наиболее простую форму можно придать закону распределения дискретной случайной величины. ***Рядом распределения*** дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины X: x_1, x_2, …, x_n, … и вероятности этих значений p_1, p_2, …, p_n, …, где $p_i=P\{X=x_i\}$ – вероятность того, что в результате опыта СВ X примет значение x_i ($i=1,2,\dots, n, \dots$).

Ряд распределения записывается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Так как события {X=x1}, {X=x2}, … несовместны и образуют полную группу, то сумма всех вероятностей, стоящих в нижней строке равна единице:

$$\sum_{i} P\{X = x_i\} = 1. \tag{5.1}$$

Многоугольник вероятностей – есть графическое изображение ряда вероятностей – по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений. Для наглядности полученные точки соединяются отрезками прямых. Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения полностью характеризует случайную величину – и является одной из форм закона распределения.

5.3. Функция распределения

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для *всех* случайных величин (как дискретных, так и недискретных) является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции x: $F(x)=\mathrm{P}\{X<x\}$.

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная точка X попадет левее заданной точки X (рис. 5.1). Из геометрической интерпретации наглядно можно вывести *основные свойства функции распределения.*

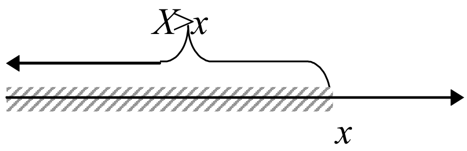


Рис. 5.1

1. $$\lim_{n\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \tag{5.2}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1. \tag{5.3}$$

3. (x) – неубывающая функция своего аргумента, т.е. при $x_1 < x_2$ $F(x_1) \le F(x_2)$.Доказательство этого свойства иллюстрируется рис. 5.2. Представим событие $C=\{X<x_2\}$ как сумму двух несовместных событий $C=A+B$, где $A=\{X<x_1\}$ и $B=\{x_1 \le X<x_2\}$. По правилу сложения вероятностей $P(C)=P(A)+P(B)$, т.е. $P\{X<x_2\}=P\{X<x_1\}+P\{x_1 \le X<x_2\}$, или $F(x_2)=F(x_1)+P\{x_1 \le X<x_2\}$. Но $P\{x_1 \le X<x_2\} \le 0$, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

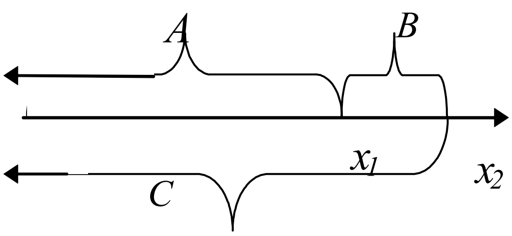


Рис. 5.2

4. $$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \quad \text{для } \forall[\alpha, \beta[\in \mathrm{R}. \tag{5.4}$$

Доказательство этого свойства вытекает из предыдущего доказательства.

Вероятность того, что случайная величина X в результате опыта попадет на участок от α до β (включая α) ***равна приращению функции распределения*** *на этом участке.*

Таким образом, *функция распределения F(x)любой случайной величины есть неубывающая функция своего аргумента, значения которой заключены между 0 и 1: $0 \le F(x) \le 1$, причем $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.*

5.4. Функция распределения дискретной случайной величины

Исходной информацией для построения функции распределения дискретной случайной величины *X* является ряд распределения этой СВ.

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n	$>x_n$
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n	0
$F(x_i)$	0	p_1	p_1+p_2		$p_1+..+p_{n-1}$	1

$F(x_i)=P\{X<x_i\}=P\{(X=x_1)\cup(X=x_2)\cup \ldots \cup(X=x_{i-1})\}= p_1+\ldots+p_{i-1}$.

$F(x)=\sum\limits_{x_i<x} P(X=x_i)$, то есть суммирование распространяется на все значения x_i, которые меньше x.

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятности этих значений.

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le x_1, \\ p_1, x_1 \le x \le x_2, \\ p_1+p_2, x_2 \le x \le x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1+p_2+\ldots.p_i, x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 1, x \ge x_n \end{cases} \qquad (5.5)$$

Пример: СВ X – количество выпавших гербов при подбрасывании двух монет. Случайная величина X принимает следующие значения X={0, 1, 2}. Вероятности этих значений: $P(X=0)=0{,}25$; $P(X=1)=0{,}5$; $P(X=2)=0{,}25$. Тогда функция распределения этой случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0{,}25, 0 < x \le 1 \\ 0{,}25+0{,}5, 1 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

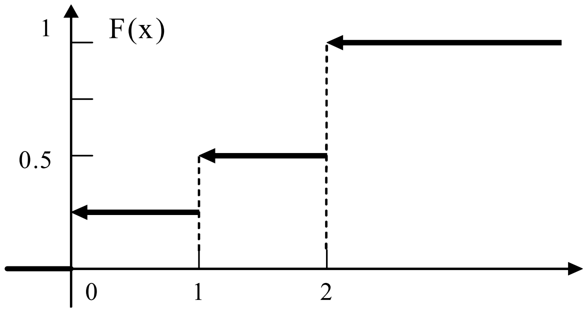


Рис. 5.3

5.5. Непрерывная случайная величина (НСВ). Плотность вероятности

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения *F(x)* есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Так как для таких случайных величин функция *F(x)* нигде не имеет скачков, то *вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*

$$P\{X=\alpha\}=0 \text{ для любого } \alpha.$$

В качестве закона распределения, имеющего смысл только для непрерывных случайных величин существует понятие ***плотности распределения*** или ***плотности вероятности***.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от x до $x+\Delta x$ равна приращению функции распределения на этом участке:

$$\mathrm{P}\{x \le X < x+\Delta x\}=F(x+\Delta x) - F(x).$$

Плотность вероятности на этом участке определяется отношением

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x\le X<x+\Delta x\}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{dF(x)}{dx} \qquad (5.6)$$

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке и обозначается $f(x)$. График плотности распределения называется кривой распределения.

Пусть имеется точка x и прилегающий к ней отрезок dx. Вероятность попадания случайной величины X на этот интервал равна $f(x)dx$. Эта величина называется **элементом вероятности.**

Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок $[a, b[$ равна сумме элементарных вероятностей на этом участке:

$$\mathrm{P}\{a \le X < b\}=\int_a^b f(x)dx. \qquad (5.7)$$

В геометрической интерпретации $\mathrm{P}\{\alpha\le X<\beta\}$ равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и опирающейся на участок (α,β) (рис. 5.4).

Это соотношение позволяет выразить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X через ее плотность:

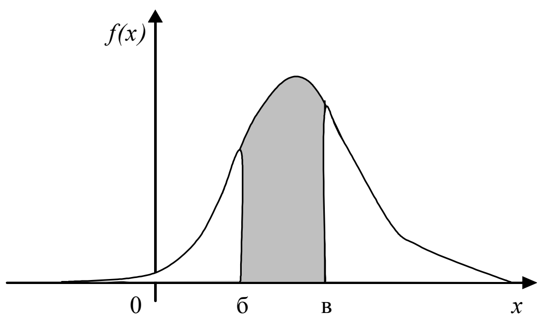


Рис. 5.4

$$F(x)=\mathrm{P}\{X<x\}=\mathrm{P}\{-\infty<X<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (5.8)$$

В геометрической интерпретации $F(x)$ равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и лежащей левее точки x (рис. 5.5).

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \geq 0$.
   Это свойство следует из определения *f(x)* – производная неубывающей функции не может быть отрицательной.

2. Условие ***нормировки***: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Это свойство следует из формулы (5.8), если положить в ней $x=\infty$.

Геометрически основные свойства плотности *f(x)* интерпретируются так:

1. вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;
2. полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

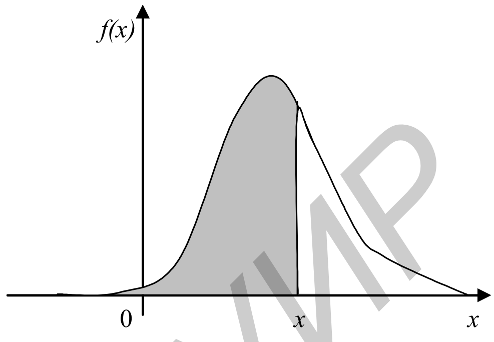


Рис. 5.5

5.6. Смешанная случайная величина

Случайная величина называется *смешанной,* если функция распределения *F(x)* на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точках имеет разрывы (скачки).

На тех участках, где *F(x)* непрерывна, вероятность каждого отдельного значения случайной величины равна нулю. Вероятность тех значений, где функция распределения совершает скачки, отличны от нуля и равны величине скачка.

Пример 5.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,8. Построить ряд распределения числа попаданий.

Решение. Случайная величина *X* (число попаданий в цель) может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятность принятия величиной *X* этих значений, используя формулу Бернулли:

$\mathrm{P}\{X=0\} = (1-p)^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032$,

$\mathrm{P}\{X=1\} = C_5^1 p(1-p)^4 = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064$,

$\mathrm{P}\{X=2\} = C_5^2 p^2(1-p)^3 = 10 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$,

$\mathrm{P}\{X=3\} = C_5^3 p^3(1-p)^2 = 10 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048$,

$\mathrm{P}\{X=4\} = C_5^4 p^4(1-p) = 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$,

$\mathrm{P}\{X=5\} = p^5 = 0{,}8^5 = 0{,}32768$.

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Пример 5.2. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases} c\cos x, -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0, |x| > \pi/2 \end{cases}.$$

Найти константу c, функцию распределения $F(x)$ и вычислить P$\{|x| < \pi/4\}$.

Решение. Константу c вычислим исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\cos x dx = c\sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2c = 1,$$

откуда $c = 0,5$.

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности.

Для $x < -\pi/2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0$

для $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{x} \frac{\cos y}{2}dy = \frac{\sin y}{2}\Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{1+\sin x}{2}$,

для $x > \pi/2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos y}{2}dy + \int_{\pi/2}^{x} 0dy = 1$.

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -\pi/2 \\ (1+\sin x)/2, |x| \le \pi/2 \\ 1, x > \pi/2 \end{cases}$$

Вероятность P$\{|x| < \pi/4\}$$= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ЗАДАЧИ

5.1. Случайная величина X принимает значения X=n (n=1,2,…) с вероятностью $P\{X = n\} = 2^{-n}$. Найти функцию F(x) и вычислить P$\{3 \le x \le 6\}$.
(*Ответ:* $F(x)\sum_{i<x} 2^{-i}; P\{3 \le x \le 6\} = 0{,}2344.$*)*

5.2. По двоичному каналу связи с помехами передаются две цифры 1 и 0. Априорные вероятности передачи этих цифр равны *p(1)=p(0)=0,5.* Из-за наличии помех возможны искажения. Вероятности перехода единицы в единицу и нуля в нуль соответственно равны *p(1/1)=p,p(0/0)=q.* Определить закон распре-

деления вероятностей случайной величины X – однозначного числа, которое будет получено на приемной стороне:
(*Ответ:* $P\{X=0\}=(1-p+q)/2, P\{X=1\}=(1-q+p)/2.$).

5.3. Случайная величина X имеет следующую плотность вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{a}{4}x^3, \ 0\le x\le 2 \\ 0, x\notin[0,2] \end{cases}$$

Определить *a*, медиану величины X и функцию распределения *F*(*x*).

5.4. Случайная величина X имеет следующую плотность вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0.5x-a, \ 2\le x\le 4 \\ 0, x\notin[2,4] \end{cases}$$

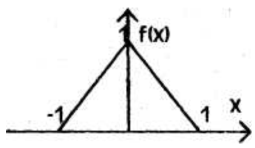
Вычислить а и вероятности $p(X < 0,2)$, $p(X < 3)$, $p(X \ge 3)$, $p(X \ge 5)$.

5.5. Случайная величина X имеет следующую функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ a\sin 2x, \ 0<x\le \pi/4 \\ 1, \ x>\pi/4 \end{cases}.$$

Определить а, плотность вероятностей f(x) и значение f(π/4). Ответ - а.

5.6. Дан график плотности вероятностей случайной величины X: Записать *f*(*x*) в аналитической форме, определить функцию распределения *F*(*x*) и $p(X < -0.5)$.



5.7. Случайная величина *X* имеет следующую функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ ax^3, \ 0<x\le 2 \\ 1, \ x>2 \end{cases}$$

Определить *a*, плотность вероятностей *f*(*x*), вычислять вероятность *p*(0 < x <1,5).

6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Законы распределения случайной величины являются исчерпывающими характеристиками. Каждый закон распределения представляет собой некоторую *функцию*, указание которой полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения.

Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями; зачастую достаточно бывает только отдельные числовые параметры, характеризующие отдельные черты распределения; например, среднее значение или разброс случайной величины («степень случайности»). Такие числа называются *числовыми характеристиками случайной величины.*

6.1. Математическое ожидание

Математическое ожидание (МО) характеризует среднее взвешенное значение случайной величины.

Для вычисления математического ожидания для ДСВ каждое значение x_i учитывается с «весом», пропорциональным вероятности этого значения.

$$m_x = M[\times] = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots\ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (6.1)$$

M[X]-оператор математического ожидания;

m_x -- число, полученное после вычислений по формуле.

Для НСВ заменим отдельные значения x_i непрерывно изменяющимся параметром x, соответствующие вероятности p_i- элементом вероятности $f(x)dx$, а конечную сумму – интегралом:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \qquad (6.2)$$

Механическая интерпретация понятия математического ожидания: на оси абсцисс расположены точки с абсциссами x_i, в которых сосредоточены соответственно массы p_1, p_2,...., причем $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда МО – *абсцисса центра тяжести*. Для НСВ – масса распределена непрерывно с плотностью $f(x)$.

Для смешанных случайных величин математическое ожидание состоит из двух слагаемых.

$$M[X] = \sum_i x_i p_i + \int_H x dF(x), \qquad (6.3)$$

где сумма распространяется на все значения x_i, имеющие отличные от нуля вероятности, а интеграл – на все участки оси абсцисс, где функция распределения $F(x)$ непрерывна.

Физический смысл математического ожидания – это среднее значение случайной величины, т.е. то значение, которое может быть использовано вместо конкретного значения, принимаемого случайной величиной в приближительных расчетах или оценках.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание неслучайной величины c равно самой величине c:

$$\mathrm{M}[c] = c \tag{6.4}$$

Доказательствово: представим величину c как случайную величину, которая принимает одно и то же значение, c вероятностью p=1:

$$M[c]=c\cdot 1=c.$$

2. При умножении СВ X на неслучайную величину c не ту же самую величину увеличится ее математическое ожидание:

$$\mathrm{M}[c\cdot X] = \mathrm{c}\cdot\mathrm{M}[X]. \tag{6.5}$$

Доказательство:

$$M(cX) = cx_1 \cdot p_1 + ...cx_n \cdot p_n = c(x_1 \cdot p_1 + ...x_n \cdot p_n)$$

3. При прибавлении к СВ X неслучайной величины c к ее математическому ожиданию прибавляется такая же величина:

$$M(X + c) = M[x] + c. \tag{6.6}$$

Доказательство: следует из свойств 1 и 3.

$$M(X + c) = (c + x_1) \cdot p_1 + ... + (c + x_n) \cdot p_n =$$

$$c(p_1 + ... + p_n) + (x_1 \cdot p_1 + ...x_n \cdot p_n) = c \cdot 1 + M[x] = M[x] + c.$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M[X+Y] = M[X]+M[Y]. \tag{6.7}$$

6.2. Моменты случайной величины

Понятие момента широко применяется в механике для описания распределения масс (статические моменты, моменты инерции и т.д.). Теми же приемами пользуются и в теории вероятностей. Чаще на практике применяются моменты двух видов: начальные и центральные.

Начальный момент s-го порядка СВ X есть математическое ожидание s-й степени этой случайной величины: $\alpha_s = \mathrm{M}[X^s]$.

$$\alpha_k(x) = M[X^s] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^s P\{X = x_i\}, & для \quad ДСВ; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx, & для \quad НСВ; \\ \sum\limits_i x_i^s P\{X = x_i\} + \int\limits_H x^s f(x)dx, & для \quad ССВ. \end{cases} \qquad (6.8)$$

Математическое ожидание случайной величины является начальным моментом первого порядка

Центрированной случайной величиной называется отклонение случайной величины от ее математического ожидания:

$$\overset{o}{X} = X - m_x.$$

Центрирование случайной величины аналогично переносу начала координат в среднюю, «центральную» точку, абсцисса которой равна математическому ожиданию случайной величины.

Центральным моментом *s*-го порядка СВ *X* есть математическое ожидание *s*-й степени центрированной случайной величины: $\mu_s = M[(X\text{-}m_x)^s]$.

$$\mu_k(x) = M[\dot{X}^s] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s P\{X = x_i\}, & для \quad ДСВ; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x)dx, & для \quad НСВ; \\ \sum\limits_i (x_i - m_x)^s P\{X = x_i\} + \int\limits_H (x - m_x)^s f(x)dx, & для \quad ССВ. \end{cases} \qquad (6.9)$$

Очевидно, что для любой случайной величины X центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1(X) = M[\dot{X}] = M[X - m_x] = M[X] - m_x = 0.$$

Приведем некоторые соотношения, связывающие начальные и центральные моменты:

Для второго :

$$\mu_2 = M[\dot{X}^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x^2_{i} p_i - 2m_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_x^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha_2 - m_x^2$$

Для третьего центрального момента:

$$\mu_3 = M[\dot{X}^3] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^3 p_i = \sum_{i=1}^{n} x^3_{i} p_i - 3m_x \sum_{i=1}^{n} x_{щ}^2 p_i + 3m_x^2 \sum_{i=1}^{n} x_{щ} p_i + m_x^3 \sum_{i=1}^{n} p_i =$$

$$= \alpha_3 - 3\alpha_2 m_x + 2m_x^3.$$

Аналогично можно получить моменты не только относительно начала координат (начальные моменты) или математического ожидания (центральные моменты), но и относительно произвольной точки a.

6.3. Дисперсия

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины.

Она характеризует степень разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания, т.е. ширину диапазона значений.

Расчетные формулы:

$$D[x] = M[\dot{X}^2] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 P\{X = x_i\}, & \text{для ДСВ;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx, & \text{для НСВ;} \\ \sum\limits_{i} (x_i - m_x)^2 P\{X = x_i\} + \int\limits_{H} (x - m_x)^2 f(x)dx, & \text{для ССВ.} \end{cases} \tag{6.10}$$

Дисперсия может быть вычислена через второй начальный момент:

$$\begin{aligned} D[X] &= M[(x - m_x)^2] = M[x^2 - 2xm_x + m_x^2] = \\ &= M[x^2] - 2m_x \cdot M[X] + m_x^2 = M[x^2] - m_x^2. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Дисперсия СВ (как дискретной, так и непрерывной) есть неслучайная (постоянная) величина.

Дисперсия СВ имеет размерность квадрата случайной величины. Для наглядности характеристики рассеивания пользуются величиной, размерность которой совпадает с размерностью СВ.

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ X называется характеристика

$$\sigma_x = \sigma[X] - \sqrt{D[X]} \tag{6.12}$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины c равна нулю.

<u>*Доказательство:*</u> по определению дисперсии

$$D(C) = M\left\{[C - M(C)]^2\right\} = M\left\{[C - C]^2\right\} = M(0) = 0$$

2. При прибавлении к случайной величине X неслучайной величины c ее дисперсия не меняется.

$$\mathrm{D}[X+c] = \mathrm{D}[X].$$

Доказательство: по определению дисперсии

$$D[X] = M[((X+c)-(m_x - c))^2] = \\ M[(X + c - m_x - c)^2] = M[(X-m_x)^2] = D[X] \tag{6.13}$$

3. При умножении случайной величины X на неслучайную величину c ее дисперсия умножается на c^2.

Доказательство: по определению дисперсии

$$D(cX) = M[(cx - M[cx])^2] = M[(cx - cm_x)^2] = \\ M[c^2(x-m_x)^2] = c^2 M[(x-m_x)^2] = c^2 D[X] \tag{6.14}$$

Для среднего квадратичного отклонения это свойство имеет вид:

$$\sigma[cX] = |c| \cdot \sigma[X] \tag{6.15}$$

Действительно, при $|C|>1$ величина cX имеет возможные значения (по абсолютной величине), большие, чем величина X. Следовательно, эти значения рассеяны вокруг математического ожидания $M[cX]$ больше, чем возможные значения X вокруг $M[X]$, т.е. $D(cX) > D(X)$. Если $0<|c|<1$, то $D(cX) < D(X)$.

Правило 3σ. Для большинства значений случайной величины абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, или, другими словами, практически все значения СВ находятся в интервале:

$$[\, m - 3\sigma;\ m + 3\sigma;\,] \tag{6.16}$$

6.4. Дополнительные характеристики случайной величины

1. ***Модой*** случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигают максимума. Обозначения: *Mx*, *Mo.:*

Распределение с одним максимумом ряда распределения (для ДСВ) или плотности вероятности (НСВ) называется *«унимодальным».*

Если многоугольник распределения или кривая распределения имеют несколько локальных максимумов, то такое распределение называют *«полимодальным».*

Если распределение обладает не максимумом, а минимумом, то оно называется *«антимодальным».*

2. ***Медианой*** случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $\mathrm{P}\{X<Me\} = \mathrm{P}\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0.5; \qquad \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = 0.5$$

Если известна функция распределения случайной величины X, то Me есть решение уравнения $F(Me) = F(x) = 0.5$

3. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X произвольному числу $x \in R$ ставит в соответствие вероятность.

Для решения обратной задачи используются следующие понятия.

Квантилью χ_p случайной величины X является такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X<\chi_p\} = F(\chi_p) = p$. Т.к. функция $F(x)$ непрерывная, то для непрерывной случайной величины X для любых p, $0<p<1$, существуют квантили.

Очевидно, что квантиль, которая соответствует значению p=0.5, является медианой .

Квантили $\chi_{0.25}$ и $\chi_{0.75}$ -называются нижней и верхней квантилью.

4.Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии распределения. Если распределение симметрично относительно МО (масса распределена равномерно относительно центра тяжести), то все моменты нечетного порядка равны нулю. Поэтому для характеристик асимметрии выбирают третий центральный момент – он имеет размерность куба случайной величины. Безразмерный ***коэффициент асимметрии*** вычисляется так:

$$S_k = \mu_3 / \sigma^3 \tag{6.17}$$

5. Четвертый центральный момент служит для характеристики так называемой «крутости», т.е. островершинности или плосковершинности распределения. Это свойство распределения описывается с помощью ***эксцесса***:

$$E_x = \mu_4 / \sigma^3 - 3. \tag{6.18}$$

6. ***Коэффициент вариации*** безразмерная величина, характеризует степень разбросанности значений СВ и вычисляется по формуле:

$$\upsilon_x = \frac{\delta_x}{m_x}. \tag{6.19}$$

Пример 6.1. Из партии численностью 25 изделий, среди которых имеется шесть нестандартных, случайным образом выбраны три изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. По условию задачи СВ X принимает следующие значения: x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно i (i = 0, 1, 2, 3) нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{C_6^i \cdot C_{19}^{3-i}}{C_{25}^i},$$

откуда

$$p_1=0,41;\ p_2=0,43;\ p_3=0,11;\ p_4=0,05.$$

Дисперсию определим по формулам

$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$,

$M[X] = 0 \cdot 0,41 + 1\cdot 0,43 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,05 = 0,8$,

$M[X^2] = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 2^2 \cdot 0,11 + 3^2 \cdot 0,05 = 1,32$,

$D[X] = 1,32 - (0,8)^2 = 0,68$.

Тогда $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 0,82$.

Пример 6.2. Непрерывная СВ распределена по закону Лапласа:

$$f(x) = b \cdot e^{-|x|}.$$

Найти коэффициент b, математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Решение. Для нахождения коэффициента b воспользуемся свойством нормировки плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2b\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 2b = 1$, откуда $b = 1/2$. Так как функция $xe^{-|x|}$ - нечетная, то $M[X] = 0,5 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}dx = 0$, дисперсия $D[X]$ и СКО $\sigma[X]$ соответственно равны:

$$D[X] = 0,5 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}dx = 2 \cdot 0,5 \cdot \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-|x|}dx = 2,$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{2}.$$

ЗАДАЧИ

6.1. Производятся три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,4, вторым -0,5, третьим -0,6. СВ X - число поражений мишени. *(Ответ:* M(X)=1,5, D(X) =0,73.)

6.2. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8. СВ X - число студентов, сдавших экзамен. *(Ответ:* M(X)=3,2,D(X)=0,64).

6.3. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется четыре нестандартных, для проверки качества выбраны случайным образом 3 изделия. СВ X - число нестандартных изделий среди проверяемых. *(Ответ:* M(X)=0,6,D(X)=0,48).

6.4. Вероятность отказа прибора за время испытания на надежность равна 0,2. СВ X - число приборов, отказавших в работе, среди пяти испытываемых. *(Ответ:* M(X)=1, D(X) = 0,9.)

6.5. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/6. СВ Х-число выигрышных билетов из четырех. *(Ответ:* M(X) = 2/3*,* D(X) = 5/9.)

6.6. Проводятся три независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,01. СВ Х - число ошибок, допущенных в измерениях. *(Ответ:* M(X)= 0,03, D(X) = 0,0297.)

6.7. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения. Найти математическое ожидание случайной величины, дисперсию и вероятность попадания СВ X в интервал 0<*X*<*3/*

$$F(X)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{20}(x^2+x), 0\le x\le 4, a=0, b=3.\\ 1, x>4\end{cases}$$

(*Ответ*: M(X)=2,53, D(X)=1,049, P($0\le X\le 3$)=0,6)

6.8. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=0, x<0; F(x)=(x^3+x)/10, 0\le x<2; F(x)=1, x\ge 2.$$

Найти $M[X], D[X], \delta_x$, квантиль 0,75, моду и медиану.

(*Ответ:* $M[X]=1{,}4; D[X]=0{,}22; \delta_X=0{,}469.$)

6.9. Плотность распределения вероятностей величины Y имеет вид

$$f(y)=\begin{cases}ky, 0<y\le 6\\ 0, y\le 0, y>6.\end{cases}$$

Определить: а) постоянную k ; б) математическое ожидание СВ Y ; в) математическое ожидание квадрата СВ *Y.* (*Ответ*: а) 1/18; б) 4; в) 18.

7. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДСВ

7.1. Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет ***геометрическое распределение***, если вероятности ее возможных значений 0,1,…,*k*,.. определяются так:

$$p_k = P\{X = k\} = q^k p,$$

где *p* – параметр распределения, $(0 \le p \le 1)$, а *q=1-p*.

x_i	*0*	*1*	*2*	…	*k*	…
p_i	*p*	q^1	q^2	…	q^k	…

На практике геометрическое распределение появляется при следующих условиях. Пусть производится некоторый опыт, в котором некоторое событие появляется с вероятностью p. *Опыты производятся последовательно, до наступления события. Случайная величина* X, *равная числу неудачных опытов, имеет геометрическое распределение.*

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$M[X] = q / p, D[X] = q / p.^2$$

"Смещенное" геометрическое распределение получается из геометрического путем преобразования СВ X и СВ Y=X+1.

Дискретная случайная величина Y имеет смещенное геометрическое распределение если вероятности ее возможных значений 1,…,*k,* определяются так

$$p_k = P(Y = k) = q^{k-1} p,$$

где *p* – параметр распределения $(0 \le p \le 1)$, а *q=1-p.*

x_i	*1*	*2*	*3*	…	*k*	…
p_i	*p*	q^1	q^2	…	q^k	…

Числовые характеристики смещенного геометрического распределения определяются с использованием их свойств:

$$M[Y] = M[X+1] = M[X] + 1 = q / p + 1 = 1 / p,$$

$$D[Y] = D[X+1] = D[X] = q / p^2.$$

7.2. Индикатор случайного события

Величина X называется индикатором случайного события *A*, если она равна 1 при осуществлении события *A* и 0 при неосуществлении A.

$$X = \begin{cases} 1, & A \\ 0, & \overline{A} \end{cases}$$

Ряд распределения вероятностей имеет следующий вид:

x_i	0	1
P_i	q	p

P – вероятность наступления события A.

Числовые характеристики индикатора события определяются так.

$M[X]=0 \cdot q+1 \cdot p=p$;

$M[X^2]=0^2 \cdot q+1^2 \cdot p=p$;

$D[X]=M[X^2]-m_x^2=p-p^2=p(1-p)=pq; \quad \sigma_x=\sqrt{pq}.$

7.3. Биноминальный закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет *биноминальное* распределение, если ее закон распределения описывается формулой Бернулли:

$$P\{X=k\}=P(n,k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p – параметр распределения $(0 \le p \le 1), q=1-p$.

Распределение загасит от двух параметров n и p.

На практике биноминальное распределение возникает при следующих условиях. Пусть производится серия из n испытании, в каждом из которых некоторое событие появляется с вероятностью p. Случайная величина X, равная числу наступлений события в n опытах, имеет биноминальное распределение.

Числовые характеристики: $M[X]=n$, $D[X]=npq$.

Название объясняется тем, что правую часть равенства можно рассматривать как общий член разложения Бинома Ньютона:

$$(p+q)^n=C_n^n p^0 q^n+C_n^1 pq^{n-1}+.....+C_n^k p^k q^{n-k}+C_n^n p^n \cdot q^0=1, p+q=1,$$

т.е. $$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=1.$$

7.4. Распределение Пуассона

Соотношениями, описывающими биноминальное распределение, удобно пользоваться в тех случаях, если величина и достаточно мала, а p велико.

Теорема: Если, $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $np=\alpha$ $(0<\alpha<\infty)$, то

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-a}$$

при любом $k=0,1,\dots$.

Числовые характеристики: $M[X] = \alpha$, $D[X] = \alpha$.

Закон Пуассона зависит от одного параметра α, смысл которого заключается в следующем: он является одновременно и математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X.

Физические условия возникновения распределения.

Рассмотрим временную ось, на которой будем отмечать моменты возникновения случайных событий (например, отказы компонентов в сложном техническом устройстве, заявки на обслуживание).

Поток случайных событий называется *стационарным*, если число событий, приходящихся на интервал τ в общем случае не зависит от расположения этого участка на временной оси и определяется только его длительностью, т.е. среднее число событий в единице времени (λ) (интенсивность потока) постоянно.

Поток случайных событий называется *ординарным*, если вероятность попадания в некоторый участок Δt двух и более случайных событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события.

В потоке *отсутствует последействие*, если вероятность попадания событий на участок τ не зависит от того, сколько событий попало на другие участки, не пересекающиеся с данным.

Поток случайных событий называется *простейшим*, или *Пуассоновским*, если он является стационарным, ординарным и без последействия.

Для Пуассоновского потока число событий поступивших в течение интервала τ является дискретной случайной величиной с распределением Пуассона с параметром $\alpha = \tau\lambda$

Пример 7.1. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1000 изделий не менее двух не выдержит испытаний.

Решение. В данном случае имеет место последовательность независимых испытаний, для которых применима формула Бернулли, но так как $p = 0{,}0004$ мало, а $n = 1000$ велико, то можно считать, что число неисправных изделий X распределено по закону Пуассона с параметром, $\lambda = pn =.\ 0{,}0004 \cdot 1000 = 4$. Необходимо найти вероятность $P\{x \geq 2\}$:

$$P\{x \geq 2\} = 1 - P\{x < 2\} = 1 - (P\{x = 0\} + P\{x = 1\}),$$

$$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-4} \approx 0{,}018,$$

$$P\{X = 1\} = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 4e^{-4} \approx 0{,}0733,$$

$$P\{x \geq 2\} = 1 - (0{,}018 + 0{,}0733) = 0{,}908.$$

ЗАДАЧИ

7.1. По каналу связи несколько раз пересылается пакет информации до тех пор, пока он не будет передан без ошибок. Вероятность искажения пакета равна 0,1, найти среднее количество попыток передать пакет. (*Ответ:* 1,11).

7.2. Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанции другой равна *0,2* при каждой посылке. Позывные передаются каждые 5 секунд до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 секунд. Найти математическое ожидание количества позывных сигналов до установления, двухсторонней связи. (*Ответ:* 7).

7.3. Вероятность отыскания малоразмерной цели при каждой попытке равна *р.* Определять математическое ожидание и дисперсию числа попыток обнаружить цель, которые выполняются до первого обнаружения, р=0,б. (*Ответ:M[XJ=0,666, D[X*|*=1,11).*

7.4. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время Т с вероятностью $5 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятности следующих событий: А = [за время *Т* откажет ровно 3 элемента], В = (откажет хотя бы I элемент). (*Ответ:* 0,394; 0,013).

7.5. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту равно 120. Найти вероятности следующих событий: *А* = {за две секунды на АТС не поступит ни одного вызова}, *В* = (за две секунды на АТС поступит менее двух вызовов). (*Ответ:* 0,018: 0,092).

7.6. Радиостанция ведет автоматическую передачу цифрового текста в течение 10 мкс. Работа ее происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой за одну секунду составляет $I0^4$. Для срыва передачи достаточно попадания двух импульсов помехи в период работы станции. Вычислить вероятность срыва передачи. (*Ответ: 0,0047*).

7.7. При работе прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Количество неисправностей, возникающих за определенный промежуток времени подчиняется закону Пуассона. Среднее число неисправностей за сутки равно двум. Определить вероятность того, что а) за двое суток не будет ни одной неисправности; б) в течение суток возникнет хотя бы одна неисправность; в) за неделю работы прибора возникнет не более трех неисправностей. (*Ответ: а) 0,018; б) 0,865; г) 0,004*).

8. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НСВ

8.1. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина *X* равномерно распределена в интервале [*а; в*], если ее плотность вероятности в этом интервале постоянна, т.е. если все значения в этом интервале равновероятны:

$$f(x) = \begin{cases} c, a \le x \le b \\ 0, x \le a, x \ge b \end{cases} \tag{8.1}$$

Значение постоянной *с* определяется из условия нормировки:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_a^b cdx + 0 = c(b-a) \Rightarrow c = \frac{1}{b-a} \tag{8.2}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \le x \le b, \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{8.3}$$

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины определяются так:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_a^b xf(x)dx + \int_b^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$\int_{-a}^{+b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \tag{8.4}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} (x-a)^2 f(x)dx + \int_a^b (x-a)^2 f(x)dx + \int_b^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx =$$

$$= \int_a^b \frac{(x-a)^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(x-a)^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{(x - \frac{a+b}{2})^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b = \tag{8.5}$$

$$= \frac{(b - \frac{a+b}{2})^3 - (a - \frac{a+b}{2})^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Среднее квадратичное отклонение равномерного распределения равно

$$\sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \tag{8.6}$$

Равномерное распределение случайной величины полностью определяется двумя параметрами: a и b – интервалом, на котором определена случайная величина.

При необходимости можно определить параметры a и b равномерного распределения по известным значениям математического ожидания m_X и дисперсии D_X случайной величины. Для этого составляется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = m_X \\ \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = \sigma_X \end{cases}, \tag{8.7}$$

из которой определяются искомые параметры.

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал [α,β) определяется так:

$$P(c \le X \le d) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}, \qquad \text{где } [\alpha,\beta] \in [a,b]$$

Например, шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. СВ. X – ошибка при округлении до ближайшего целого деления, которая с постоянной плотностью вероятности принимает любое значение между двумя соседними делениями. X∈(к, к+1). Ошибка измерения имеет равномерное распределение на интервале (-1/2,1/2).

8.2. Показательное (экспоненциальное) распределение

Непрерывная случайная величина X, принимающая только положительные значения имеет *показательное* (или экспоненциальное) распределение, если

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \tag{8.8}$$

Положительная величина λ называется параметром показательного распределения и полностью определяет его.

Определим функцию распределения случайной величины.

1. при t<0

$$F(t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0,$$

2. при t≥0

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{t}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{t}=-(-e^{-\lambda t}-e^{0})=1-e^{-\lambda t}.$$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \end{cases} \qquad (8.9)$$

Графики плотности и функции распределения вероятностей экспоненциального распределения приведены на рис. 8.1.

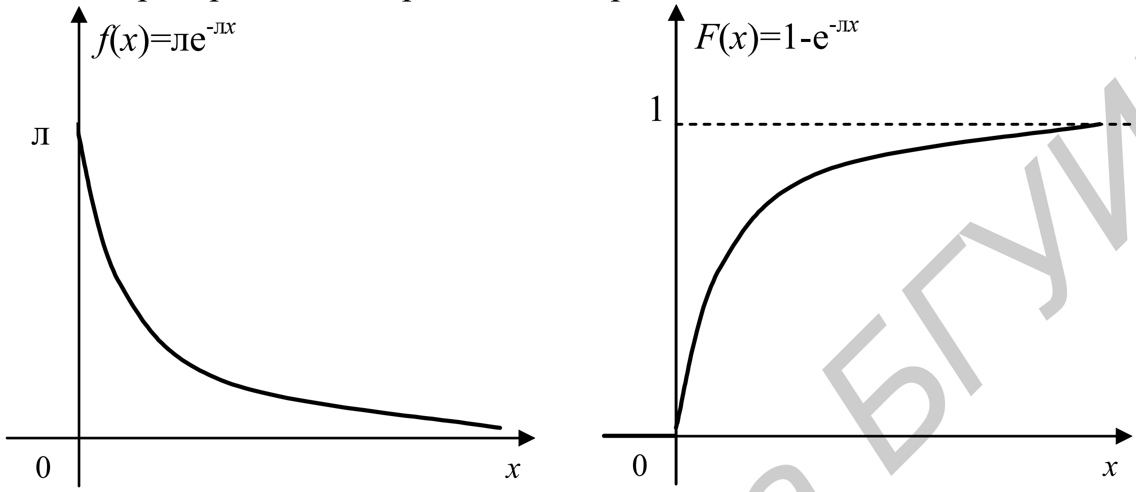


Рис. 8.1

Числовые характеристики случайной величины.

$$M[X]=\int_{0}^{\infty} xf(x)dx=\lambda\int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx.$$

Проводя интегрирование по частям и учитывая, что при $x\to\infty$ e^{-x} стремиться к нулю быстрее, чем возрастает любая степень x , находим:

$$m_x=\frac{1}{\lambda} \qquad (8.10)$$

Дисперсия случайной величины определяем по формуле:

$$D[X]=\alpha_2-m_x^2=\lambda\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2} \qquad (8.11)$$

Показательное распределение тесно связано с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком событий. *Интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока.*

Функция распределения СВ T интервала времени между двумя соседними событиями в потоке:

$$F(t)=P\{T<t\}.$$

Рассмотрим на оси $0t$ интервал времени T между двумя соседними событиями (рис. 8.2). Для того, чтобы выполнилось неравенство $T<t$, необходимо, чтобы на хотя бы одно событие потока попало на участок длины t; вероятность этого

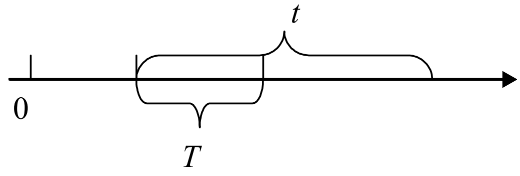


Рис. 8.2

$$P\{T < t\} = P_t(k \ge 1) = 1 - P_t(k = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Таким образом:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

а плотность распределения равна

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

т.е. случайная величина имеет показательное распределение.

8.3. Нормальное распределение (закон Гаусса)

Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (8.12)$$

Кривая нормального распределения приведена на рис. 8.3.

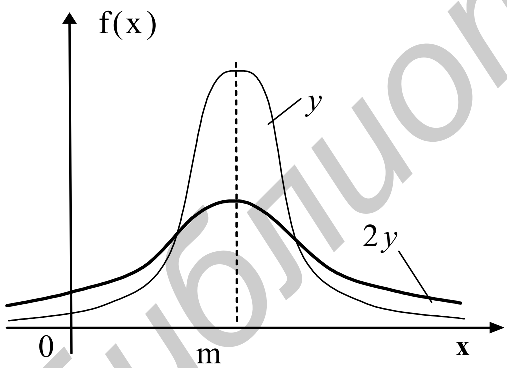


Рис. 8.3

Определим *числовые характеристики* нормально распределенной случайной величины X. Математическое ожидание:

$$M[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Применяя замену переменной

$$t = (x - m)/(\sigma\sqrt{2}), \quad (8.13)$$

получим

$$M[X] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t\sqrt{2} + m) e^{-t^2} dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

В полученном выражении первый интеграл равен нулю (интеграл в симметричных пределах от нечетной функции), а второй интеграл есть интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}. \qquad (8.14)$$

Таким образом, математическое ожидание величины X равно m:

$$\text{M}[X]=m.$$

Вычислим дисперсию СВ X:

$$D[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dx.$$

Применяя замену переменной (8.13) получим:

$$D[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2t^2 e^{-t^2}\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$D[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{-te^{-t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю (т.к. e^{-t^2} при $t\to\infty$ убывает быстрее, чем возрастает любая степень t), второе слагаемое, согласно (8.14), равно $\sqrt{\pi}$, откуда

$$D[X] = \sigma^2.$$

Таким образом, нормальное распределение случайной величины полностью описывается двумя числовыми характеристиками: математическим ожиданием $M[X]$ и средним квадратичным отклонением σ.

Рассмотрим влияние параметров m и σ на кривую распределения. При изменении параметра m кривая $f(x)$, не изменяя формы, будет смещаться вдоль оси абсцисс. Изменение σ равносильно изменению масштаба кривой по обеим осям; например, при удвоении σ масштаб по оси абсцисс удвоится, а по оси ординат уменьшится в два раза (рис. 8.3).

Центральные моменты нечетной степени для нормально распределенной случайной величины определяются равны нуню; для вычисления центральных моментов четной степени используется рекуррентное соотношение следующего вида:

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2\mu_{s-2} \qquad (8.15)$$

Определим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал от α до β:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Сделав замену переменной $t=(x\text{-}m)/\sigma$, получим:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt.$$

Так как первообразная для e^{-x} не выражается через элементарные функции, то для вычисления вероятностей событий, связанных с нормальными случайными величинами используют табулированную *функцию Лапласа*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

С помощью этой функции вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на интервал от α до β определится так:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right) \qquad (8.16)$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(0) = 0$;
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
3. $\Phi(-\infty) = 0{,}5$.

Функция распределения нормально распределенной случайной величины через функцию Лапласа выражается так:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad (8.17)$$

Значения функции Лапласа приведены в Приложении.

Нормально распределенная случайная величина возникает в тех случаях, когда складывается много независимых (или слабо зависимых) случайных величин X_1, X_2, …, X_n. Тогда, каковы бы не были законы распределения отдельных случайных величин X_i, закон распределения их суммы будет близок к нормальному распределению. В частности, ошибки измерений распределяются по закону, близкому к нормальному.

Пример 8.1. Время безотказной работы аппаратуры является случайной величиной X, распределенной по показательному закону. Среднее время безотказной работы 100 ч. Найти вероятность того, что аппаратура проработает больше среднего времени.

Решение. Плотность распределения $X: f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$ Параметр $\lambda = 1/m_x$. где m_x = 100 — среднее время безотказной работы. Искомая вероятность *f{X>m$_x$}* = P(X>100):

$$P\{X > 100\} = \int_{100}^{\infty} f(x)dx = \int_{100}^{\infty} 0{,}01e^{-0{,}01x}dx = -e^{-0{,}01x}\Big|_{100}^{\infty} = e^{-0{,}01 \cdot 100} = e^{-1} \approx 0{,}368.$$

Пример 8.2. Имеется СВ, распределенная нормально с параметрами m, δ. Найти вероятность того, что СВ отклоняется от своего математического ожидания *m* на величину, большую чем 3δ.

Решение.

$$P\{|X - m| < 3\delta\} = 2\Phi\left(\frac{3\delta}{\delta}\right) = 2\Phi(3).$$

По таблицам функции Лапласа (Приложение 2) находим Ф(3) = 0,49865. Тогда $P\{|X - m| < 3\delta\}$ = 1 - 2-0,49865 = 0,0027.

Пример 8.3. Для замера напряжения используются специальные датчики. Определить среднюю квадратичную ошибку датчика, если он не имеет математических ошибок, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ±0,2.

Решение. Из условия задачи следует, что $P\{-0{,}2 < X < 0{,}2\} = 0{,}8$. Так как распределение ошибок нормальное, а математическое ожидание равно 0 (систематические ошибки отсутствуют), то

$$P\{-0{,}2 < x < 0{,}2\} = \Phi(-0{,}2/\delta) - \Phi(0{,}2/\delta) = 2\Phi(0{,}2/\delta) = 0{,}8.$$

По таблице Лапласа находим аргумент $0{,}2/\delta = 1{,}28$, откуда

δ -0,2/1,28=1,0156.

ЗАДАЧИ

8.1. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия 0111 ошибок равна 1370 м^2 ? *(Ответ:* 0,4108.)

8.2. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший пуассоновский поток. Математическое ожидание числа вызовов за 1 ч равно 30. Найти вероятность того, что за 1 мин поступит не менее двух вызовов. *(Ответ:* 0,0902.)

8.3. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 5 см, и дисперсией, равной 0,81 см^2. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали **-** от 4 до 7 см. *(Ответ:* 0,8533.)

8.4. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с. *(Ответ:* 0,6667.)

8.5. Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием а = 3. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить вероятность поражения бомбардировщика в результате трех атак. *(Ответ:* 0,784.)

8.6. Производят взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайная ошибка взвешивания распределена нормально с математическим ожиданием 20 кг и средним квадратичным отклонением 2 кг. Найти вероятность того, что следующее взвешивание отличается от математического ожидания не более чем на 10 г. *(Ответ:* 0,0398.)

8.7. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Считая, что случайная величина X — время ожидания автобуса на остановке — распределена равномерно на указанном интервале, найти среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания. (*Ответ: 5/2, 25/12*).

8.8. Азимутальный лимб имеет цену деления один градус. Какова вероятность при считывании азимута угла сделать ошибку в пределах 10 мин, если отсчет округляется до ближайшего целого числа градусов? (*Ответ:* 1/3).

8.9. Шкала рычажных весов, установленных в лаборатории, имеет цену деленая 1 г. При измерении массы отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Какова вероятность того, что абсолютная ошибка определения массы; а) не превысит величины среднеквадратического отклонения возможных ошибок определения массы; б) будет заключена между значениями a_x и $2\delta_x$? (*Ответ:* а)$1/\sqrt{3}$; б)$1-1/\sqrt{3}$.).

8.10. Время T ожидания у бензоколонки заправочной станции является случайной величиной, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания, равным t_0. Найти вероятности следующих событий: $A=\{0{,}5t_0 \le X < 1{,}5t_0\}, B=\{X \ge t_0\}$ (*Отчет:* 0,3834; 0,135).

8.11. Время безотказной работы радиотехнической системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы λ = 0,02 1/ч. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы за 80 ч. (*Ответ:* 50 ч., 0,02).

8.12. Производятся испытания двух приборов. Время безотказной работы каждого прибора имеет показательное распределение с параметром λ_1 для первого прибора и с параметром λ_2 для второго. Приборы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t_0 оба прибора не откажут. (*Ответ:* $e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\ t_0}$).

8.13. Среднее время работы электронного модуля равно 700 ч. Определить время безотказной работы модуля с надежностью 0,8. (*Ответ: 140 ч*).

9. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть некоторая случайная величина *X* подвергается детерминированному преобразованию φ, в результате которого получается величина У. Рассмотрим задачу определения числовых характеристик и закона распределения получаемой в результате преобразования случайной величины *У*.

9.1. Числовые характеристики функции случайного аргумента. Общее понятие математического ожидания

Рассмотрим случайную величину *Y*, зависящую функционально от случайной величины *X* с известным законом распределения $F(x)$: $Y = \varphi(X)$.

Если X – дискретная случайная величина и известен ее ряд распределения имеет вид

X_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Определяем вероятности появления различных значений случайной величины *У*

$\varphi(X)_i$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Тогда математическое ожидание случайной величины Y определяется так:

$$m_y = M[Y] = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i = M[\varphi(X)] \qquad (9.1)$$

Если случайная величина *X* непрерывна и имеет плотность распределения *f(x),* то заменяя в формуле (9.1) вероятности p_i элементом вероятности $f(x)dx$, а сумму – интегралом, получаем:

$$m_y = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)dx = M[\varphi(x)] \qquad (9.2)$$

Для смешанной случайной величины выражение для математического ожидания преобразуется к виду:

$$m_y = M[Y] = M[\varphi(x)] = \int_{H} \varphi(x)dF(x) + \sum_{i} \varphi(x_i) p_i \qquad (9.3)$$

Соотношения (9.1), (9.2) и (9.3) – общее понятие математического ожидание, позволяющее вычислить математическое ожидание для неслучайных функций случайного аргумента. Например, дисперсия случайной величины Y=φ(x) определяется так:

$$D[Y] = M[(Y - m_y)^2] = M[Y^2] - m_y^2 = M[(\varphi(x))^2] - (M[\varphi(x)])^2$$

Величину $M[\varphi(x)]$ рассчитываем в соответствии с (9.1)-(9.3). Для определения математического ожидания квадрата $\varphi(x)$ воспользуемся следующими соотношениями:

$$M[(\varphi(x))^2]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)p_i, & \text{для ДСВ}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)f(x)dx, & \text{для НСВ}\\ \int_{H}\varphi^2(x)f(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)p_i, & \text{для ССВ}\end{cases} \quad (9.4)$$

Таким образом, для нахождения числовых характеристик функции $Y=\varphi(x)$ достаточно знать закон распределения ее аргумента.

9.2. Закон распределения функции дискретного случайного аргумента

Для дискретной случайной величины $Y=\varphi(x)$ определяем вероятности появления различных значений случайной величины:

$\varphi(X)_i$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Преобразуем полученную таблицу в ряд распределения случайной величины Y. Для этого расположим значения Y в порядке возрастания, а для определения вероятностей $p\{Y=y_i\}$ будем руководствоваться следующими правилами:

- если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения Y, то $P\{\ Y=\varphi(\ x_i\ )\ \}=p_i$;
- если различным возможным значениям случайной величины X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений СВ Y.

Полученный таким образом ряд является рядом распределения случайной величины Y.

9.3. Закон распределения функции непрерывного случайного аргумента

Пусть X – непрерывная случайная величина с известной плотностью вероятности. Алгоритм определения закона распределения СВ Y зависит от вида функции $Y=\varphi(x)$.

1. Рассмотрим случай ***монотонного возрастания функции Y=φ(x)*** на интервале [a,b) определения случайной величины X (рис. 9.1).

Определим функцию распределения величины У:

$$F_y(y)=p(Y<y)=p(\varphi(x)<y).$$

Чтобы выполнилось условие $Y < y$, необходимо и достаточно, чтобы случайная величина X попала на участок оси абсцисс от a до $x=\psi(x)$, где $\psi(x)$ – функция, обратная функции $\varphi(x)$.

$$F_y(Y) = P(Y < y) =$$
$$= P(a < X < x) =$$
$$= \int_a^x f(x)dx = \int_a^{\psi(y)} f(x)dx.$$

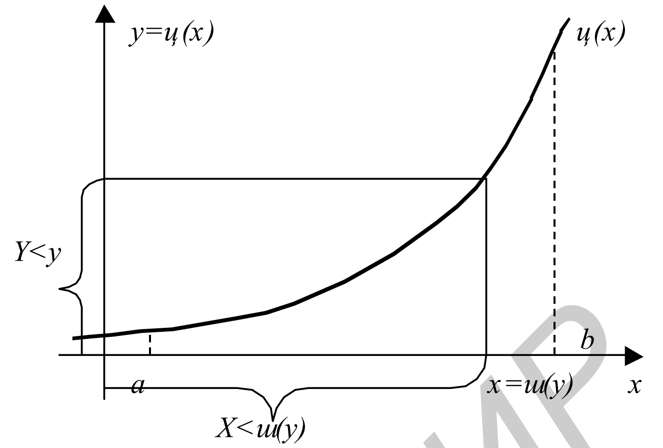


Рис. 9.1

Функция распределения случайной величины Y имеет вид

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < \psi(a); \\ \int_a^{\psi(y)} f_x(x)dx, & \psi(a) \le y < \psi(b); \\ 1, & y \ge \psi(b). \end{cases}$$

Дифференцируя интеграл по переменной y, входящей в верхний предел, получим:

$$f(y) = F'_y(y) = f_y(\psi(y))\psi'(y).$$

2. Рассмотрим случай, когда ***y=φ(x) монотонно убывающая функция*** на интервале [a,b) определения случайной величины X (рис. 9.2).

Функция распределения случайной величины Y определиться так:

$$F_y(y) = p(Y < y) =$$
$$= p(\varphi(x) < y) =$$
$$= p(X > \psi(y)) =$$
$$= \int_{\psi(y)}^{+\infty} f_x(x)dx.$$

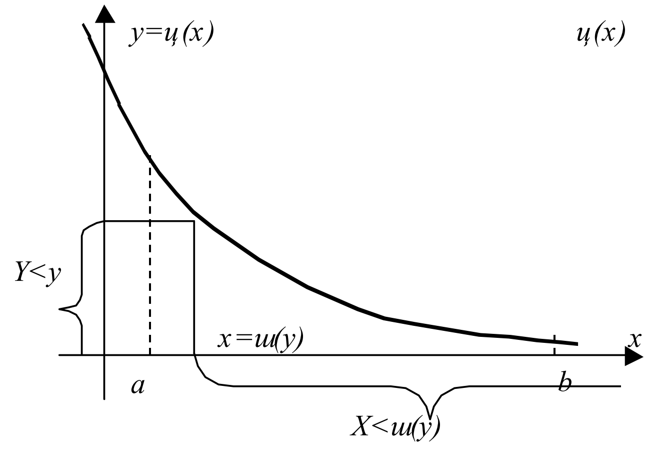


Рис. 9.2

Функция распределения СВ $Y=\varphi(x)$ для СВ X, распределенной в интервале [a,b], равна:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < \psi(b); \\ \int\limits_{\psi(y)}^{b} f_x(x)dx & \psi(b) \le y < \psi(a); \\ 1 & y \ge \psi(a). \end{cases}$$

Плотность вероятностей для любого монотонного случая принимает вид:

$$f_y(y) = F'(y) = \begin{cases} f_x(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|, & y_{\min} \le y < y_{\max} \\ 0, & y < y_{\min}, y \ge y_{\max} \end{cases} \tag{9.5}$$

3. Рассмотрим случай, когда ***функция y=φ(x)*** на участке $[a,b)$ возможных значений случайной величины X ***не монотонна*** (рис. 9.3).

Число значений обратной функции ψ(y) зависит от того, какое значение Y выбрано. Событие Y<y равносильно попаданию случайной величины X в один из непересекающихся отрезков, отмеченных жирной линией на рис.9.3, где соответствующая часть кривой y-φ(X) лежит ниже прямой y. Попадания точки X в эти отрезки – события несовместные; по правилу сложения вероятностей

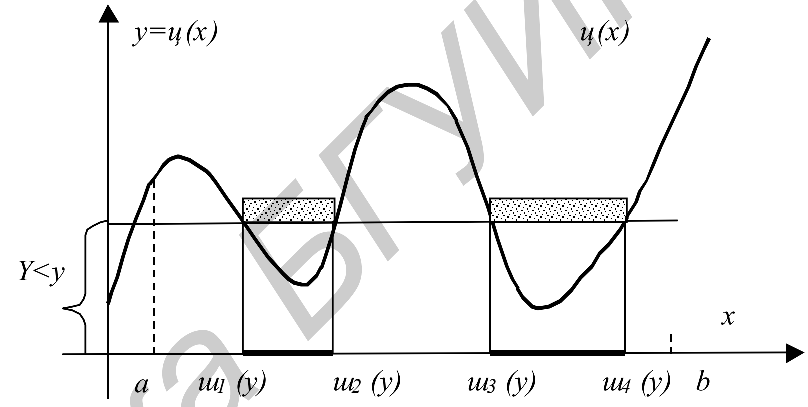


Рис. 9.3

$$F(y) = P(Y < y) = P(X \subset]\psi_1(y), \psi_2(y)] \cup X \subset]\psi_3(y), \psi_4(y)] \cup ......)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\psi_i(y)}^{\psi_{i+1}(y)} f(x)dx \tag{9.6}$$

Плотность вероятностей случайной величины *Y* равна

$$f_y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} f_x(\psi_i(y)) \cdot |\psi'(y)|, & y_{\min i} \le y < y_{\max i}; \\ 0 & y < y_{\min}, y > y_{\max}, \end{cases} \tag{9.7}$$

где: k – интервалов монотонности функции φ(x);

$y_{\min}, y_{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное значение случайной величины Y;

$y_{\min i}, y_{\max i}$ – соответственно минимальное и максимальное значение случайной величины Y на i-ом интервале монотонности.

Пример 9.1. Определить плотность вероятности величины $Y = X^2$, если X - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (-1, 2).

Решение. В зависимости от числа *k* обратных функций выделим следующие интервалы для *Y* (см. рис. 9.4):

$(-\infty, 0)$ $k = 0$,
$(0, 1)$ $k = 2$,
$(1, 4)$ $k = 1$,
$(4, +\infty)$ $k = 0$.

Так как на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(4, +\infty)$ обратная функция не существует, то $g(y)=0$.

В интервале (0,1) две обратных функции: $\psi_1(y) = +\sqrt{y}$ и $\psi_2(y) = -\sqrt{y}$. По формуле (9.7) получим

$$g(y)=f_x(\psi_1(y))\cdot|\psi_1'(y)|+f_x(\psi_2(y))\cdot|\psi_2'(y)|=$$

$$=f_x(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_x(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{3\sqrt{y}}$$

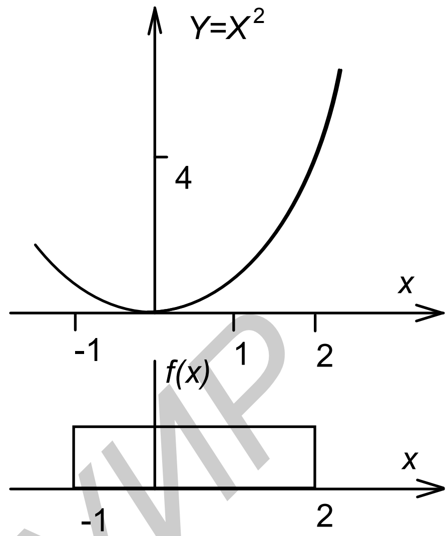


Рис. 9.4

В интервале (1,4) одна обратная функция $\psi_1(y) = +\sqrt{y}$, следовательно

$$g(y)= f_x(\psi_1(y))\cdot|\psi_1'(y)| = f_x(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} = f_x(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{6\sqrt{y}}$$

ЗАДАЧИ

9.1. Определить плотность вероятности величины $Y = \ln X$, если X - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (1, 3).

$$\textit{Ответ}:\ g(y)=\begin{cases}0{,}5e^{y}, 0\le y<\ln 3,\\ 0, y<0, y>\ln 3.\end{cases}$$

9.2. Определить плотность вероятности величины $Y = |X|$, если X - случайная равномерно распределенная величина со следующими характеристиками $m_x = 1$, $D_x = 1$.

$$\textit{Ответ}:\ g(y)=\begin{cases}0, y<0, y>2{,}73,\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\le y<0{,}73,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, 0{,}73\le y\le 2{,}73\end{cases}$$

9.3. Случайная величина X имеет равномерное распределение с параметрами $M[x]=m_x$; $D[x]=\sigma_x^2$. Найти плотность вероятности f(y) случайной величины $Y=\varphi(x)$.

а. $Y=x^2$; $m_x=1$; $\sigma_x=2\sqrt{3}$; $y_0=2$;

б. $Y=signx$; $m_x=1$; $\sigma_x=3\sqrt{3}$; $y_0=-1$;

в. $Y=|x|$; $m_x=1$; $\sigma_x=2\sqrt{3}$; $y_0=2$.

10. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

10.1. Понятие системы случайных величин

Системоой случайнвх величин (случайным вектором, многомерной случайной величиной) называется любая упорядоченная совокупность случайных величин $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$.

Случайные величины$\{X_1, \ldots, X_n\}$, входящие в систему могут быть как непрерывными, так и дискретными. Для наглядности рассмотрения пользуются геометрической интерпретацией; так систему двух случайных величин $\{X,Y\}$ можно представить *случайной точкой на плоскости* с координатами X и Y, или *случайным вектором*, направленным из начала координат в точку (X,Y).

Свойства случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных величин, входящих в систему и необходимы средства для описания характеристик систем случайных величин. Рассмотрим свойства систем СВ на примере двумерной случайной величины.

10.2. Функция распределения системы случайных величин

Функцией распределения (или ***совместной функцией распределения***) системы случайных величин называется вероятность совместного выполнения неравенств $X_1<x_1, \ldots, X_n<x_n$:

$$F(x_1,...,x_n) = P\{(X_1 < x_1) \cap ... \cap (X_n < x_n)\} \tag{10.1}$$

Для случая ***двумерной случайной величины***:

$$F(x,y) = P\{(X < x) \cap (Y < y)\}. \tag{10.2}$$

Геометрически функция распределения $F(x,y)$ это вероятность попадания случайной точки $(X,У)$ в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x,y), лежащей левее и ниже ее (рис. 10.1).

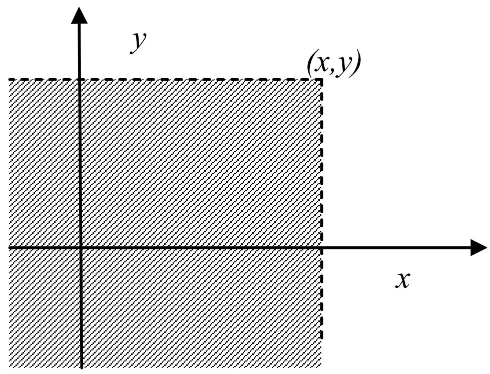


Рис. 10.1

Свойства функции распределения:

1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству:

$$0 \le F(x,y) \le 1.$$

Доказательство этого свойства вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность есть неотрицательное число, не превышающее 1.

2. Функция распределения $F(x,y)$ есть ***неубывающая функция*** по каждому из аргументов т.е

$x_1 < x_2 \;=> F(x_1,y) \le F(x_2, y)$

$y_1 < y_2 \;=> F(x, y_1) \le F(x,y_2)$

Доказательство этого свойства вытекает из того, что при увеличении какого-нибудь из аргументов (x,y) квадрант, заштрихованный на рис. 10.1, увеличивается; следовательно, вероятность попадания в него случайной точки (X,Y) уменьшаться не может.

3. Если хотя бы один из аргументов функции распределения обращается в -∞, то функция распределения равна 0:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0. \qquad (10.3)$$

Доказательство. По определению

$$F(-\infty, y) = P\{(X < -\infty) \cap (Y < y)\}.$$

Событие $\{(X < -\infty) \cap (Y < y)\}$ невозможное событие, т.к. невозможным является событие $(X < -\infty)$ событие; тогда

$$F(-\infty, y) = 0.$$

4. Если оба аргумента функции распределения $F(x,y)$ равны +∞, то функция распределения равны 1.

Доказательство следует из определения функции распределения системы случайных величин:

$$\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty} F(x, y) = P(x < \infty, y < \infty) = 1 \qquad (10.4)$$

5. Если один из аргументов обращается в +∞, то функция распределения $F(x,y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x); \quad F(+\infty, y) = F_1(y) \qquad (10.5)$$

Доказательство. По определению функции распределения:

$$F(x, +\infty) = P\{(X < x) \cap (Y < +\infty\}.$$

Событие ($Y<+\infty$) является достоверным событием. Тогда

$$P\{(X < x) \cap \Omega\} = P\{X < x\} = F_1(x).$$

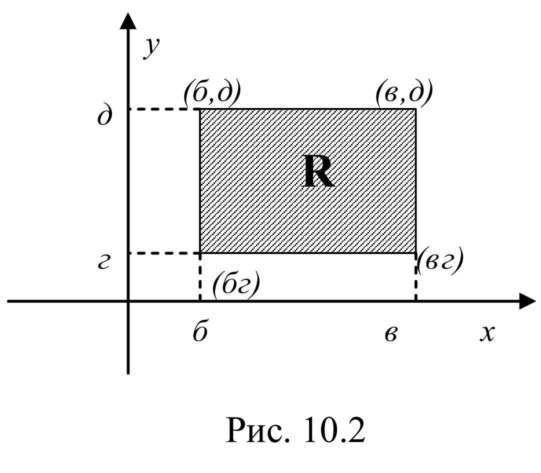
Точно так же доказывается, что

$$F(+\infty, y) = P\{Y < y\} = F(y).$$

6. Вероятность попадания в прямоугольную область:

$$P(\alpha \le X \le \beta; \delta \le Y \le \gamma) = F(\beta,\gamma) - F(\beta,\delta) - F(\alpha,\gamma) + F(\alpha,\delta). \qquad (10.6)$$

Вероятность попадания в прямоугольник R равна вероятности попадания в квадрант с вершиной в точке (β,δ), минус вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (α,δ), минус вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (β,γ), плюс вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (α,γ), которую мы вычли дважды.



ве-

Рис. 10.2

10.3. Система двух дискретных

случайных величин. Матрица вероятности

Двухмерная случайная величина (Х,У) является дискретной, если множества значений ее компонент $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y=\{y_1, \ldots, y_m\}$ представляют собой счетные множества.

Для описания вероятностных характеристик таких величин используется двухмерная функция распределения и матрица вероятности, которая содержит значения компоненты $X=\{x_1,x_2,.. x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2, \ldots y_m\}$ и вероятности всех возможных пар значений

$$p_{ij} = P(X=x_i,\ Y=y_j),\ i=1..n,\ j=1..m.$$

Матрица распределения системы двух случайных величин записывается в виде

$x_i \setminus y_j$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{im}
…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nj}	…	p_{nm}

Сумма всех вероятностей p_{ij}, стоящих в матрице распределения вероятностей равна единице как сумма вероятностей полной группы событий:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1 \qquad (10.7)$$

Зная матрицу распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y), можно найти закон распределения отдельных случайных величин, входящих в систему:

$$p_{xi} = P\{X = x_i\}; \quad p_{yj} = P\{Y = y_j\}$$

Представим событие $(X = x_i)$ как сумму несовместных событий:

$$(X = x_i) = \{(X = x_i) \cap (Y = y_1)\} \cup \ldots \cup \{(X = x_i) \cap (Y = y_m)\},$$

По правилу сложения вероятностей

$$p_{xi} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad (10.8)$$

аналогично

$$p_{yj} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}. \qquad (10.9)$$

Если известна матрица распределения системы двух случайных величин (X,Y), то ее функция распределения находится суммированием всех вероятностей p_{ij}, для которых $x_i<x,\ y_j<y$:

$$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij} \qquad (10.10)$$

10.4. Система двух непрерывные случайные величины. Совместная плотность вероятности

Двумерная величина (X,Y) является ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x,y)$ представляет собой непрерывную, дифференцируемою функцию по каждому из аргументов и существует вторая смешанная производная $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Рассмотрим на плоскости $x0y$ прямоугольник ΔR_{xy}, примыкающий к точке (x,y), с размерами Δx, Δy и найдем вероятность попадания в него случайной точки (X,Y). Согласно (10.6)

$$P\{(x\le X<x)+\Delta x\cap(y\le Y<y+\Delta y)\}=$$
$$=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y).$$

Будем неограниченно уменьшать оба размера прямоугольника $\Delta x\to\infty$, $\Delta y\to\infty$ и вычисляем предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Совместной плотностью вероятности или ***плотностью совместного распределения*** называется функция

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} \qquad (10.11)$$

Плотность $f(x,y)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(x,y)\ge 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$

Геометрически совместная плотность $f(x,y)$ системы двух случайных величин представляет собой некоторую *поверхность распределения.*

Аналогично вводится *понятие элемента вероятности:* $f(x,y)dxdy$.

Элемент вероятности $f(x,y)dxdy$ с точностью до бесконечно малых величин равен вероятности попадания случайной точки (X,Y) в элементарный прямоугольник ΔR_{xy}, примыкающий к точке (x,y), с размерами Δx, Δy.

Аналогично тому, как было рассмотрено в случае одномерной случайной величины, определим вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D:

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy. \qquad (10.12)$$

Функция распределения системы (X,Y) через совместную плотность определяется так:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \qquad (10.13)$$

Совместная плотность распределения системы случайных величин (X,Y) позволяет вычислить одномерные законы распределения случайных величин X и Y

$$f_1(x)==\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy; \quad f_2(y)==\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \qquad (10.14)$$

Одномерные плотности распределения составляющих системы случайных величин называют *маргинальными плотностями распределения.*

10.5. Зависимые и независимые случайные величины. Условные законы распределения

Величина X не зависит от величины Y, если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величины Y.

Для независимых величин выполняется следующие соотношения:

1. $F(x,y) = p(X<x,Y<y) = p(X<x)\, p(Y<y)=F_X(x)F_Y(y)$;

2. для непрерывных случайных величин $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$;

3. для дискретных случайных величин $p_{ij} = p_i\, p_j$, для $\forall\ i, j$.

Для независимых величин двумерные формы закона распределения не содержат никакой дополнительной информации кроме той, которая содержится в двух одномерных законах.

В случае зависимости величин X и Y, переход от двух одномерных законов к совместному осуществить невозможно. Для этого необходимо знать условные законы распределения.

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные ряды вероятностей для дискретных составляющих X и Y определяются по формулам

$$p_{i/j} = \mathrm{P}(X = x_i/Y = y_j) = p_{ij}/\mathrm{P}(Y = y_j) =$$

$$=\frac{P(Y=y_j \cap X=x_i)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}},\ i = 1, ..., N; \qquad (10.15)$$

$$p_{j/i} = \mathrm{P}(Y = y_j / X = x_i) = p_{ij} \,/\, \mathrm{P}(X = x_i) =$$

$$= \frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}}, \quad j = 1, \ldots, M \qquad (10.16)$$

Условное распределение может быть представлено в виде таблицы:

Y	y_1	…	y_j	…	y_m
$p(y/x_i)$	$p(y_1/x_i)$	…	$p(y_j/x_i)$	…	$p(y_m/x_i)$

Заметим, что $\sum\limits_{j=1}^{m} p(y_i / x_i) = (\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}) / P_{i*}) = P_{i*} / P_{i*} = 1$

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются так

$$f(x/y) = f(x, y) \,/\, f_y(y), \quad f_y(y) \neq 0; \; f(y/x) = f(x, y) \,/\, f_x(x), \quad f_x(x) \neq 0. \qquad (10.17)$$

$$f_x(x/y) = (F_x(x/y))'_x = \frac{f(x, y)}{f_y(y)};$$

$$f_y(y/x) = (F_y(y/x))'_y = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}.$$

Условные плотности обладают всеми свойствами обычных плотностей:

1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна $f(x, y) \geq 0$
2. Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1 \; \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = 1$

Пример 101. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону, приведенному в таблице:

y_i	x_i	
	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$y_1 = -1$	0,1	0,2
$y_2 = 0$	0,2	0,3
$y_3 = 1$	0	0,2

Определить одномерные ряды вероятностей величин X и Y, условный ряд вероятностей величины X при условии, что $Y = 0$. Исследовать зависимость случайных величин X и Y.

Решение. Определим ряды вероятностей X и Y по формулам (10.8) и (10.9), т.е. выполним суммирование по столбцам и по строкам:

x_i	0	1
p_{i*}	0,3	0,7

y_j	-1	0	1
p_{*j}	0,3	0,5	0,2

Условный ряд X при $Y = 0$ получаем по формуле (10.15):

x_i	0	1
$p_{i/Y=0}$	0,4	0,6

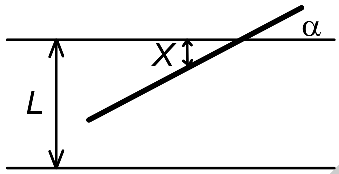
Величины X и Y зависимы, так как

$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$,

$0{,}2 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}5$.

Пример 1.2. Иглу длиной b бросают на плоскость, на которой на расстоянии L друг от друга проведены параллельные линии. Определить вероятность пересечения иглой одной из линий, если $b < L$ (задача Бюффона).

Решение. Рассмотрим двумерную случайную величину (X, α), где X - расстояние от середины иглы до ближайшей линии, α - острый угол между иглой и линией.



Составляющая X распределена равномерно в интервале [0; L/2], а α распределена равномерно в интервале [0; π/2]. Тогда плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x) = 2/L.$$

А составляющей α:

$$f_2(\alpha) = 2/\pi.$$

Согласно теореме умножения законов распределений двумерная плотность равна

$$f(x, \alpha) = (2/L)\cdot(2/\pi).$$

Пересечение иглой одной из линий для заданного угла будет, когда

$$0 < X < (b/2)\sin(\alpha).$$

Тогда

$$\mathrm{P}\{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{D}\} = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{(l\sin\alpha)/2} f(x, y)\,dx\,d\alpha = \frac{4}{\pi L} \int\limits_0^{\pi/2} d\alpha \int\limits_0^{(b\sin\alpha)/2} dx = \frac{2b}{\pi L}.$$

ЗАДАЧИ

10.1. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в первом ящике: один шар с номером 1, два шара с номером 2, 3 шара с номером 3. Во втором ящике: два шара с номером 1, три шара с номером 2, один шар с номером 3. Пусть X номер шара вынутого из первого ящика, Y номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару.Составить матрицу вероятностей двумерной случайной величины X, Y. Найти одномерные ряды распределений составляющих X и Y.

Ответ:

$Y \, X$	$x_1 = 1$	$x_2=2$	$x_3=3$
$y_1=2$	1/18	1/9	1/6
$y_2=3$	1/12	1/6	1/4
$y_3=1$	1/36	1/18	1/12

Одномерные ряды составляющих X и Y:

X	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$
	1/6	1/3	1/2

Y	$y_1=2$	$y_2=3$	$y_3=1$
	1/3	1/2	1/6

10.2. Двумерная случайная величина имеет закон распределения с плотностью

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x,y), (x,y) \in D \\ 0, \quad (x,y) \notin D \end{cases}.$$

Область D - квадрат ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$. Требуется определить коэффициент a ; вычислить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$.

(*Ответ*: $a = 1$, $P = 1/9$).

10.3. Двумерная случайная величина распределена по закону:

$$f(x,y) = a/(1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty .$$

Найти коэффициент a, установить зависимость случайных величин X и Y.

(*Ответ*: $a = 1/\pi^2$, независимы).

10.4. Имеются две независимые случайные величины (X, Y), распределенные по показательному закону:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0, \ y < 0 \\ \mu e^{-\mu y}, y > 0 \end{cases}$$

Найти $f(x, y)$, $F(x, y)$.

(*Ответ*: $f(x,y) = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)}$; $F(x,y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y})$).

10.5. Положение случайной точки (X, Y) равновозможно в любом месте круга радиусом R, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность распределения и функцию распределения каждой составляющей X и Y . Выяснить зависимость X и Y.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/\pi R^2, \ x^2 + y^2 \le R^2 \\ 0, \ x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

Ответ: $f_1(x) = \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}$, $f_2(y) = \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}$, *X* и *Y* независимы.

11. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНЫХ ВЕЛИЧИН

11.1. Смешанные моменты двумерной случайной величины

Смешанным начальным моментом порядка *k*+*s* называется математическое ожидание произведения X^k и Y^s:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = M[X^k Y^k]. \tag{11.1}$$

Смешанным центральным моментом порядка *k*+*s* называется математическое ожидание произведения центрированных величин X^k и Y^k:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = M[\overset{\circ}{X}{}^k \overset{\circ}{Y}{}^s] \tag{11.2}$$

где $\overset{\circ}{X} = M[(X - m_x)]$, $\overset{\circ}{Y} = M[(Y - m_y)]$ - центрированные случайные величины.

Расчетные формулы:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i-1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{ij}, & ДСВ \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy. & НСВ \end{cases} \tag{11.3}$$

$$\mu_{k,s}(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i-1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}, & ДСВ \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y)dxdy. & НСВ \end{cases} \tag{11.4}$$

где p_{ij} - элементы матрицы вероятностей дискретной величины (*X*, *Y*);
$f(x, y)$-совместная плотность вероятности непрерывной величины (*X*, Y).

Рассмотрим наиболее часто используемые начальные и центральные моменты:

$$\alpha_{0,0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mu_{0,0}(x, y) = 1;$$

Первые начальные моменты представляют собой уже известные нам ***математические ожидания*** величин *X и У*, входящих в систему:

$$\alpha_{1,0}(x, y) = m_x; \qquad \alpha_{0,1}(x, y) = m_y. \tag{11.5}$$

Совокупность математических ожиданий представляет собой характеристику положения системы. Геометрически это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание случайных точек (*X,У*).

$$\mu_{1,0}(x, y) = M[X-m_x]=0 \qquad \mu_{0,1}(x, y)= M[Y-m_y)=0; \qquad (11.6)$$
$$\alpha_{2,0}(x, y) = \alpha_2(x) \qquad \alpha_{0,2}(x, y) = \alpha_2(y)$$

На практике широко используются вторые центральные моменты системы. Два из них представляют собой ***дисперсии***, которые характеризуют ***рассеивание*** случайной точки в направлении осей $0X$ и $0Y$:

$$\mu_{2,0}(x, y) = M[X-m_x)^2=D[X]=D_X; \quad \mu_{0,2}(x, y) = M[Y-m_y)^2]=D[Y]=D_y; \quad (11.7)$$

Особую роль играет центральный момент порядка 1+1 или второй смешанный центральный момент, который называется ***ковариацией или корреляционным моментом***

$$\mu_{1,1}(x, y) = K_{xy}= M[\overset{\circ}{X}\cdot\overset{\circ}{Y}] \qquad (11.8)$$

Ковариация представляет собой математическое ожидание произведения центрированных случайных величин X и Y и характеризует степень линейной статистической зависимости величин X и Y и рассеивание относительно точки (m_x, m_y):

$$K_{xy} = \mu_{xy} = M[(X - m_x)\cdot(Y - m_y)], \qquad (11.9)$$

Или

$$\begin{aligned} K_{xy} &= M[(X - m_x)\cdot(Y - m_y)] = M[XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y] = \\ &M[XY] - M[Xm_y] - M[Ym_x] + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y. \end{aligned} \qquad (11.10)$$

Расчетные формулы для определения ковариации:

$$K_{xy} = \begin{cases} \sum_i\sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij} = \sum_i\sum_j x_i y_j - m_x m_y. \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - m_x)(y_j - m_y) f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - m_x m_y. \end{cases} \qquad (11.11)$$

Свойства корреляции:

1. $K_{xy} = K_{yx}$. Это свойство очевидно.

2. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и У равен нулю.*

Доказательство: т.к. случайные величины X и Y – независимы, то и их совместная плотность распределения представляется произведением плотностей распределения случайных величин $f_x(x)$ и $f_y(y)$. Тогда:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - m_x m_y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x)dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} yf_y(y)dy\right) - m_x m_y = 0.$$

3. *Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин не превышает среднего геометрического их дисперсий*

$\left|K_{xy}\right| \le \sigma_x \cdot \sigma_y$ или $\left|K_{xy}\right| \le \sqrt{D_x \cdot D_y}$

Доказательство: Введем в рассмотрение случайные величины $Z_1 = \sigma_y X - \sigma_x Y$, $Z_2 = \sigma_y X + \sigma_x Y$, и вычислим их дисперсии

$$D(Z_1) = M[Z - m_z]^2 = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y \cdot K_{xy}$$

$$D(Z_2) = M[Z - m_z]^2 = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y \cdot K_{xy}$$

Т. к. дисперсия всегда неотрицательна, то

$$2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y \cdot K_{xy} \ge 0 \Rightarrow \sigma_x\sigma_y \ge K_{xy}$$

и

$$2\sigma_x^2\sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y \cdot K_{xy} \ge 0 \Rightarrow -\sigma_x\sigma_y \le K_{xy}.$$

Отсюда $-\sigma_x\sigma_y \le K_{xy} \le \sigma_x\sigma_y \Rightarrow \left|K_{xy}\right| \le \sigma_x\sigma_y$.

Если $K_{xy} \ne 0$, случайные величины X и Y называются *коррелированными.* Если $K_{xy} = 0$, то необязательно, что X и Y независимы. В этом случае они называются *некоррелированными.* Итак, из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, но из зависимости еще не вытекает их коррелированность. Из независимости двух случайных величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя заключить о независимости этих величин.

Величина ковариации зависит единиц измерения каждой из случайных величин, входящих в систему и от того, насколько каждая из случайных величин отклоняется от своего математического ожидания (одна – мало, вторая – сильно, все равно K_{xy} будет мал).

Поэтому для характеристики связи между X и Y в чистом виде переходят к безразмерной характеристике, которая называется ***Коэффициент корреляции r_{xy}*** характеризует степень линейной зависимости величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \tag{11.12}$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. Абсолютная величина коэффициента корреляции двух случайных величин не превышает единицы: $\left|r_{xy}\right| \le 1$
2. $\left|r_{xy}\right| = 1$ если $Y = aX + b \Rightarrow$

Доказательство: $M(Y) = M[aX + b] = aM(X) + b$ подставим в выражение

$K_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\} = M\{[X - M(X)][aX + b - aM(X) - b]\} =$

$= aM\{[X - M(X)][X - M(X)]\} = aM[X - M(X)]^2 = aD(X) = a\sigma_x^2$

т.к. $[Y - M(Y)] = [aX + b - aM(X) - b]\} == a[X - M(X)]$

Найдем дисперсию Y: $D(Y) = M[Y - M(Y)]^2 = a^2 M[X - M(X)]^2 = a^2\sigma_x^2$, т.е. $\sigma_y = |a|\sigma_x$, коэффициент корреляции: $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{a\sigma_x^2}{\sigma_x(|a|\sigma_x)} = \dfrac{a}{|a|} \Rightarrow$

$$|r_{xy}| = 1$$

Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между X и Y: чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к 1, тем связь сильнее, чем ближе к 0, тем слабее.

3. Если величины X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$.

11.2. Условные числовые характеристики

Пусть (X, У) – 2-мерная СВ с известным законом распределения F(X,Y) или f(x,y). *Условным математическим ожиданием компоненты X называется математическое ожидание СВ X, вычисленное при условии, что СВ Y приняла определенное значение Y = y и обозначается M(X/Y).* Аналогично определяется условное математическое ожидание и для СВ *Y*.

Используя формулы для вычисления числовых характеристик случайных величин можно вычислить и условные числовые характеристики, заменив безусловные законы распределения на условные.

$$M(X|Y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i / Y = y_j) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x/y)dx \end{cases} \quad \text{и} \quad M(Y|X) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \cdot p(y_j / X = x_i) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y/x)dy \end{cases} \qquad (11.13)$$

Условное математическое ожидание СВ *Y* при заданном $X=x$: $M[Y/x] = m_{y/x}$ называется регрессией *Y* на *x*; аналогично $M[X/y] = m_{x/y}$ называется регрессией *X* на *y*. Графики этих зависимостей от *x* и y называются ***линиями регрессии*** или ***«кривыми регрессии»***.

Регрессионный анализ позволяет выявить характер связи между величинами. Представим СВ *Y* в виде линейной функции *X*:

$$Y \cong g(x) = \alpha X + \beta,$$

где α и β - неизвестные величины.

Теорема. *Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид*

$$g(x) = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(X - m_x),$$

здесь $\beta = r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ - ***коэффициент регрессии Y на X.***

а прямую $y - m_y = r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(X - m_x)$ - называют ***прямой среднеквадратической регрессии Y на X.*** Аналогично можно получить прямою среднеквадратической регрессии *X* на *Y*.

Обе прямые проходят через точку (m_x, m_y), которую называют центром совместного распределения величин *X* и *Y*.

Пример 11.1. Определить коэффициент корреляции величин *X* и *Y* (См. пример 10.1).

Решение. Определим математические ожидания величин *X* и *Y* по формуле (11.3):

$$m_x = \alpha_{1,0}(x, y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i p_{ij} = 0\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0{,}2 +$$
$$+ 1\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}2 = 0{,}7,$$
$$m_y = \alpha_{0,1}(x, y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} y_j p_{ij} = -1\cdot 0{,}1 - 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}3 +$$
$$+ 1\cdot 0 + 1\cdot 0{,}2 = -0{,}1.$$

Найдем значение K_{xy} по формуле (11.11):

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} - m_x m_y = 0\cdot(-1)\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 1\cdot 0 +$$
$$1\cdot(-1)\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 1\cdot 0{,}2 - 0{,}7\cdot(-0{,}1) = 0{,}07.$$

Определим дисперсии величин *X* и *Y* по формуле (11.4):

$$D_x = \mu_{2,0}(x, y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (x_i - m_x)^2 p_{ij} = (-0{,}7)\cdot 2\cdot 0{,}1 + (-0{,}7)\cdot 2\cdot 0{,}2 +$$
$$+ (-0{,}7)\cdot 2\cdot 0 + (0{,}3)\cdot 2\cdot 0{,}2 + (0{,}3)\cdot 2\cdot 0{,}3 + (0{,}3)\cdot 2\cdot 0{,}2 = 0{,}21,$$
$$D_y = \mu_{0,2}(x, y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (y_j - m_y)^2 p_{ij} = (-1{,}1)\cdot 2\cdot 0{,}1 + (-1{,}1)\cdot 2\cdot 0{,}2 +$$
$$+ (0{,}1)\cdot 2\cdot 0{,}2 + (0{,}1)\cdot 2\cdot 0{,}3 + (0{,}9)\cdot 2\cdot 0 + (0{,}9)\cdot 2\cdot 0{,}2 = 0{,}49.$$

Значение коэффициента корреляции R_{xy} вычислим по формуле

$$r_{xy} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = \frac{0{,}07}{\sqrt{0{,}21\cdot 0{,}49}} \approx 0{,}22 \qquad (11.14)$$

Пример 11.2. Двумерная случайная величина равномерно распределена в области *D*, ограниченной прямыми *X* = 0, *Y* = 0 и *X* + *Y* = 4. Определить коэффициент корреляции величин *X* и *Y*.

Решение. Запишем в аналитической форме совместную плотность вероятности:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4 - x \\ 0, x \notin [0,4], y \notin [0,4 - x] \end{cases}.$$

Определим c, используя свойства плотности распределения (условие нормировки):

$$\int_0^4\int_0^{4-x} c\,dxdy = c\int_0^4 (4-x)dx = c\cdot 8 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{8}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X по формулам (10.3) и (10.4) соответственно:

$$m_X = \alpha_{1,0}\,(x,y) = \int_0^4\int_0^{4-x} x\frac{1}{8}dxdy = \frac{1}{8}\int_0^4 xdx\int_0^{4-x} dy = \frac{1}{8}\int_0^4 x(4-x)dx = \frac{4}{3};$$

$$D_X = \mu_{2,0}\,(x,y) = \int_0^4\int_0^{4-x} (x-m_x)^2\frac{1}{8}dxdy = \frac{1}{8}\int_0^4 (x-\frac{4}{3})^2(4-x)dx = \frac{8}{9}.$$

Так как область D симметрична относительно осей координат, то величины X и Y будут иметь одинакровые числовые характеристики: $m_X = m_y = 4/3$, $D_X = D_y = 8/9$.

Определим корреляционный момент K_{xy} по формуле (11.11):

$$K_{xy} = \int_0^4\int_0^{4-x} xy\frac{1}{8}dxdy - m_x\cdot m_y = \frac{1}{8}\int_0^4 xdx\int_0^{4-x} ydy - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{16}\int_0^4 x(4-x)^2dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$$

Коэффициент корреляции величин X и Y будет равен (2.6):

$$r_{xy} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = -\frac{1}{2}$$

ЗАДАЧИ

11.1. В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 3%, а вследствие дефекта B - 4.5%. Годная продукция составляет 95%. Найти коэффициент корреляции дефектов A и B. (*Ответ*: $r_{ab} = 0.669$).

11.2. Число X выбирается случайным образом из множества (1,2,3). Затем из того же множества выбирается наудачу число Y, равное или большее X. Найти коэффициент корреляции X и Y. (*Ответ*: $R_{xy} = 0{,}594$).

11.3. Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0,\ x\notin[0,1], y\notin[0,1] \end{cases}.$$

Найти коэффициент корреляции X и Y. (*Ответ*: $r_{xy} = 0{,}091$).

11.4. Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x,y) = \begin{cases} 0{,}25xy & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & x\notin[0,1], y\notin[0,1] \end{cases}.$$

Найти коэффициент корреляции X и Y.*Ответ*: $r_{xy} = 0$.

12. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

12.1. Числовые характеристики функций многих переменных

Пусть $Y = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$, где $X_1, X_2, \dots X_n$ - случайные величины с известной совместной n-мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2 \dots x_n)$.

Начальные и центральные моменты для случайной величины Y можно вычислить, используя следующие соотношения:

$$\alpha_k(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^k(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \qquad (12.1)$$

$$\mu_k(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x_1, \dots, x_n) - m_y)^k \cdot f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \qquad (12.2)$$

Основные числовые характеристики:

1. Математическое ожидание функции от произвольного числа случайных аргументов для непрерывных величин определяется так:

$$m_y = M[\varphi(X_1, X_2 \dots X_n)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} .. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \qquad (12.3)$$

где $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ - плотность распределения системы СВ $(X_1, X_2 \dots X_n)$.

2. Дисперсия функции от произвольного числа случайных аргументов для непрерывной случайной величины определяется следующими соотношениями:

$$D_y = D[\varphi(X_1, X_2 \dots X_n)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2 \dots x_n) - m_\varphi]^2 f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

или аналогичная форма

$$D[\varphi(X_1, X_2 \dots X_n)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)]^2 f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n - m^2{}_\varphi$$

На практике редко известна совместная плотность вероятности; известны лишь числовые характеристики. Определение числовых характеристик функций по заданным числовым характеристикам аргументам значительно упрощает решение задач теории вероятностей. Чаще всего такие упрощенные функции относятся к линейным функциям, однако некоторые элементарные нелинейные функции также подразумевают подобный подход.

Пусть известны векторы М $[x_i] = m_i$ и D $[x_i] = D_i$ системы случайных величин {X_1, X_2, …X_n Ъ - с известной совместной n-мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2 \dots x_n)$.

$||$ K_{ij} $||$ - корреляционная матрица

Задача определения числовых характеристик Y в таком случае разрешима только для определения классов функций φ.

12.2. Числовые характеристики суммы случайных величин

1. *Математическое ожидание суммы случайных величин.*

Пусть случайная величина $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Тогда математическое ожидание суммы М[$У$] равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M[Y]=M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} M[X_i] \tag{12.4}$$

2. *Математическое ожидание линейной функции нескольких случайный величин* $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b$, ($a_i, b$ неслучайные коэффициенты) равно линейной функции их математических ожиданий:

$$m_y=M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i m_{xi}+b, m_{xi}=M\left[X_i\right]. \tag{12.5}$$

2. *Дисперсия суммы случайных величин* определяется так:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{xy} \tag{12.6}$$

или

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij}, \tag{12.7}$$

где двойная сумма распространяется на все элементы корреляционной матрицы системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots X_n)$.

Докажем это соотношение.

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-\sum_{i=1}^{n} m_{xi}\right)^2\right]=M\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_{xi}\right)^2\right]=$$

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}(X_i-m_{xi})(Y_j-m_{yj})\right]=\sum_{i-1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M[(X_i-m_{xi})(Y-m_{yj})]=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij}.$$

Если все случайные величины $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, входящие в систему, некоррелированы, т.е. $K_{ij}=0, i \neq j$, то формула (12.7) принимает вид:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i], \tag{12.8}$$

т.е. дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

4. *Дисперсия линейной функции* случайных величин определяется соотношением

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}. \qquad (12.9)$$

Доказательство: Рассмотрим дисперсию случайной величины $Y = \sum_{i=1}^{n}(a_i X_i) + b$. Согласно свойствам дисперсий можно записать:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right].$$

Дисперсия этой случайной величины

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i m_{xi}\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 (X_i - m_{xi}\right)^2\right] =$$

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (X_i - m_{xi})(Y_j - m_{yj})\right] = \sum_{i-1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j M[(X_i - m_{xi})(Y - m_{yj})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j K_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}.$$

Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i].$$

12.3. Числовые характеристики произведения случайных величин

Пусть $Z=XY$, где X и Y – случайные величины с известными числовыми характеристиками.

1. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс их ковариация:

$$M[XY] = M[X]M[Y] + K_{xy} \qquad (12.10)$$

Доказательство:

$$K_{xy} = M[\dot{X}\dot{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - m_x M[Y] -$$
$$- m_y M[X] + m_x m_y = M[XY] - M[Y]M[X]$$

Математическое ожидание произведения некоррелированных (независимых) величин равно произведению математических ожиданий

$$\text{M}[X_1 \cdot \text{X}_\text{n}] = m_\text{j} \cdot m_\text{i}$$

2. Дисперсия произведения независимых случайных величин X_1, X_2, …, X_n выражается формулой:

$$D\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n}(D[X_i] - m_{xi}^2) - \prod_{i=1}^{n} m_{xi}^2 . \qquad (12.11)$$

Пример 12.1. Случайная величина X равномерно распределена от -1 до +1. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = X^2$. Вычислить корреляционный момент величин X и Y.

Решение. Плотность вероятности X равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5, -1 \le x \le 1 \\ 0, x < -1, x > 1 \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание Y

$$m_y = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 0{,}5dx = \frac{1}{3}$$

и дисперсию D у

$$D_y = \int_{-1}^{1} (x^2)^2 \, 0{,}5dx - m_y^2 = \frac{4}{45}$$

Вычислим корреляционный момент K_{xy} по формуле (11.11):

$K_{xy} = \text{M}[XY] - m_x m_y = \text{M}[X \cdot X^2] - m_x m_y = \text{M}[X^3] - m_x m_y$.

Так как $m_x = (a + b)/2 = (-1 + 1)/2 = 0$, то

$$K_{xy} = M\left[X^3\right] = \int_{-1}^{1} x^3 \, 0{,}5dx = 0.$$

Пример 12.2. Величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют следующие числовые характеристики:

$m_1 = 2$, $m_2 = -3$, $m_3 = 0$, $D_1 = 4$, $D_2 = 13$, $D_3 = 9$.

Определить коэффициент корреляции r_{zy} величин Y и Z:

$$Y = 3X_1 - X_2,$$
$$Z = X_3 - 2X_1.$$

Решение. Вычислим математические ожидания Y и Z по формуле (12.5):

$$m_y = 3 \cdot m_1 - 1 \cdot m_2 = 9,$$
$$m_z = m_3 - 2 \cdot m_1 = -4.$$

Вычислим дисперсию D_y и D_z по формуле (12.9)

$$D_y = (3)^2 \cdot D_1 + (-1)^2 \cdot D_2 = 49,$$
$$D_z = D_3 + (-2)^2 D_1 = 25.$$

Рассчитаем корреляционный момент K_{yz}. Для этого определим M[YZ]

$$\text{M}[YZ] = \text{M}[(3X_1 - X_2)(X_3 - 2X_1)] = \text{M}[3X_1X_3 - 6X_1^2 -$$
$$- X_2X_3 + 2X_2X_1] = 3m_1m_3 - 6\text{M}[X_1^2] -$$
$$- m_2m_3 + 2m_2m_1 = -6\text{M}[X_1^2] - 12.$$

Так как $D_1 = \text{M}[X_1^2] - m_1^2$, то $\text{M}[X_1^2] = D_1 + m_1^2 = 8$.

Таким образом M[YZ] = -60. Тогда

$K_{yz} = \text{M}[YZ] - m_y\, m_z = -60 - 9(-4) = -24$.

Величину r_{yz} определим так:

$$r_{YZ} = \frac{K_{YZ}}{\sqrt{D_y D_Z}} = -\frac{24}{35}.$$

ЗАДАЧИ

12.1. Случайная величина X равномерно распределена от 0 до 1. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = |X - 0{,}2|$.
(Ответ: $m_y = 0{,}34$, $D_y = 0{,}0574$).

12.2. Точка U, изображающая объект на круглом экране радиолокатора, распределена равномерно в пределах круга единичного радиуса. Найти дисперсию расстояния Y от точки U до центра экрана. *(Ответ*: $D_y = 1/18$).

12.3. Независимые случайные величины X и Y имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Найти коэффициент корреляции случайных величин $U = 2X + Y$ и $V = 2X - Y$. (*Ответ*: $r_{uv} = 0{,}6$).

12.4. В треугольник с вершинами (0, 0), (0, 4), (4, 0) наудачу ставится точка (X, Y). Вычислить M[XY] и D[$X + Y$]. (*Ответ*: M[XY] = 12/9, D[$X + Y$] = 8/9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 1988. – 416 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. - 5-е изд., стереотип. - М.: Высш. шк., 1999. - 576 с.

3. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

4. Герасимович А.И. Математическая статистика. – Мн.: Выш. шк., 1983. - 279 с.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.

6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. – 5-е изд. - М.: Высш. шк., 1999. – 276 с.

7. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 223 с.

8. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Унукович В.Т. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для студентов. инж.-экон. спец. – Мн.: Харвест, 2000. – 384 с.

9. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3.: Теория вероятностей и математическая статистика/ Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. - 428 с.

10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А. Свешникова. - М.: Наука, 1965. – 656 с.

11. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике/ Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1992. – 191 с.

12. Справочник по теории вероятностей и математической статистике/ В.С. Королюк и др. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

13. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум по ЭВМ по математической статистике. – Мн.: Университетское, 1987. – 304 с.

14. Аксенчик А.В., Волковец А.И. и др. Методические указания к практическим занятиям по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика” для студентов радиотехнических специальностей. Ч.1. - Мн.: МРТИ, 1994. – 49 с.

15. Аксенчик А.В., Волковец А.И. и др. Методические указания к практическим занятиям по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика” для студентов радиотехнических специальностей. Ч.2. - Мн.: МРТИ, 1995. – 47 с.

16. Аксенчик А.В., Волковец А.И. и др. Методические указания и контрольные задания по курсу “ Теория вероятностей и математическая статистика” для студентов всех специальностей БГУИР заочной формы обучения. – Мн.: БГУИР, 1999. – 61 с.

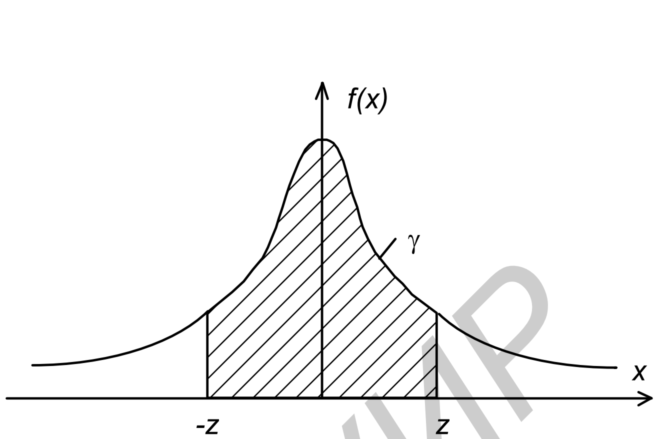
Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3987	3973
0,1	397	3965	3961	3956	3951	3945	3949	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3774	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1517
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0978	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0816	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0038	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица функции Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \gamma$$



z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,66	0,4907	1,32	0,8132	1,98	0,9523
0,02	0,0160	0,68	0,5035	1,34	0,8198	2,00	0,9545
0,04	0,0319	0,70	0,5161	1,36	0,8262	2,05	0,9596
0,06	0,0478	0,72	0,5285	1,38	0,8324	2,10	0,9643
0,08	0,0638	0,74	0,5407	1,40	0,8385	2,15	0,9684
0,10	0,0797	0,76	0,5527	1,42	0,8444	2,20	0,9722
0,12	0,0955	0,78	0,5646	1,44	0,8501	2,25	0,9756
0,14	0,1113	0,80	0,5763	1,46	0,8557	2,30	0,9786
0,16	0,1271	0,82	0,5878	1,48	0,8611	2,35	0,9812
0,18	0,1428	0,84	0,5991	1,50	0,8664	2,40	0,9836
0,20	0,1585	0,86	0,6102	1,52	0,8715	2,45	0,9857
0,22	0,1741	0,88	0,6211	1,54	0,8764	2,50	0,9876
0,24	0,1897	0,90	0,6319	1,56	0,8812	2,55	0,9892
0,26	0,2051	0,92	0,6424	1,58	0,8859	2,60	0,9907
0,28	0,2205	0,94	0,6528	1,60	0,8904	2,66	0,9920
0,30	0,2358	0,96	0,6629	1,62	0,8948	2,70	0,9931
0,32	0,2510	0,98	0,6729	1,64	0,8990	2,75	0,9940
0,34	0,2661	1,00	0,6827	1,66	0,9031	2,80	0,9949
0,36	0,2812	1,02	0,6923	1,68	0,9070	2,85	0,9956
0,38	0,2961	1,04	0,7017	1,70	0,9109	2,90	0,9963
0,40	0,3108	1,06	0,7109	1,72	0,9146	2,95	0,9968
0,42	0,3255	1,08	0,7199	1,74	0,9181	3,00	0,9973
0,44	0,3401	1,10	0,7287	1,76	0,9216	3,10	0,9981
0,46	0,3545	1,12	0,7373	1,78	0,9249	3,20	0,9986
0,48	0,3688	1,14	0,7457	1,80	0,9281	3,30	0,9990
0,50	0,3859	1,16	0,7540	1,82	0,9312	3,40	0,9993
0,52	0,3969	1,18	0,7620	1,84	0,9342	3,50	0,9995
0,54	0,4108	1,20	0,7699	1,86	0,9371	3,60	0,9997
0,56	0,4245	1,22	0,7775	1,88	0,9399	3,70	0,9998
0,58	0,4381	1,24	0,7850	1,90	0,9426	3,80	0,9999
0,60	0,4515	1,26	0,7923	1,92	0,9451	3,90	0,9999
0,62	0,4647	1,28	0,7995	1,94	0,9476	4,00	0,9999
0,64	0,4778	1,30	0,8064	1,96	0,9500		

Св. план 2006, поз. 61

Учебное издание

Волорова Наталья Алексеевна,
Летохо Александр Сергеевич

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальности «Информатика»
дневной формы обучения

В 2-х частях
Часть 1

Ответственный за выпуск А.С. Летохо

Подписано в печать 27.06.06.	Формат 60x84 1/16	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ.л. 4,53.
Уч.-изд.л. 4,2.	Тираж 100 экз.	Заказ 359.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6