

УДК 621.391.26

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИГНАЛА, ОТРАЖЕННОГО ОТ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИ СОПРОВОЖДЕНИИ РЛС НИЗКОЛЕТАЮЩЕЙ ЦЕЛИ

А.А. ДЯТКО, С.М. КОСТРОМИЦКИЙ, П.Н. ШУМСКИЙ

ОАО «КБ Радар» – управляющая компания холдинга «Системы радиолокации»  
Коммунистическая, 11, Минск, 220029, Беларусь

Поступила в редакцию 26 мая 2015

Приведена математическая модель сигнала, отраженного от земной поверхности, при сопровождении радиолокационной станцией низколетящей цели в режиме обзора пространства и подсвета цели для головки самонаведения (ГСН) ракеты некоторого зенитно-ракетного комплекса. Представлена методика вычисления амплитуд составляющих сигнала, принятого антенной ГСН ракеты, для диффузной модели отражения электромагнитных волн от земной поверхности.

*Ключевые слова:* система координат, частота Доплера, мощность.

### Введение

В настоящее время все большее распространение получает использование аппаратно-программных комплексов для испытаний радиолокационных систем различного назначения. В этом случае совокупность сигналов, требуемых для анализа работы системы, вырабатывается с помощью специальных имитаторов, основанных на ЭВМ. Такой подход обеспечивает воспроизводимость условий испытаний и значительно уменьшает затраты на их проведение. В связи с этим важное значение приобретает разработка математических моделей сигналов, имеющих место для тех или иных условий функционирования радиолокационной системы, и алгоритмов для их реализации на ЭВМ.

Данная работа посвящена вопросу разработки математической модели сигнала, отраженного от плоской земной поверхности при сопровождении радиолокационной станцией (РЛС) низколетящей цели.

### Постановка задачи

Предположим, что некоторая РЛС с антенной А (Antenna) сопровождает цель Т (Target). При этом высота цели над земной поверхностью такова, что диаграмма направленности антенны задевает земную поверхность (рис. 1). Пусть в первом случае (рис. 1, а) РЛС выполняет обзор пространства. В рассматриваемой ситуации сигнал, излученный антенной А, будет достигать цели Т двумя путями: по трассе длиной  $|\vec{R}_t|$  и, отразившись от земной поверхности, по трассе длиной  $|\vec{R}_E| + |\vec{R}_1|$ . Во втором случае положим, что РЛС выполняет подсвет цели Т для головки самонаведения (ГСН) ракеты М (Missile) некоторого зенитно-ракетного комплекса (рис. 1, б) (ЗРК). В рассматриваемой ситуации на вход антенны ГСН ракеты придет сигнал, отраженный от цели Т и сигнал, отраженный от земной поверхности (трасса длиной  $|\vec{R}_E| + |\vec{R}_1|$ ).

Требуется получить математическую модель сигнала, излученного антенной РЛС, достигающего цели или антенны ГСН ракеты при отражении от земной поверхности.

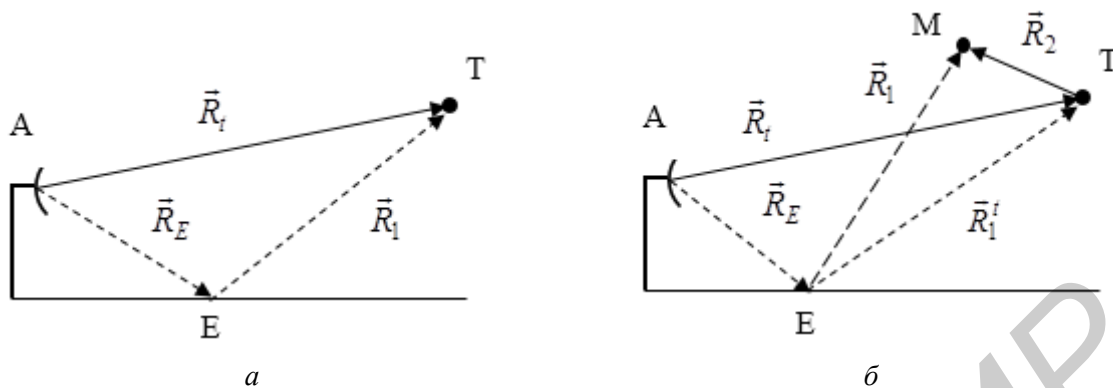


Рис. 1. Схема формирования трассы отраженного от земной поверхности сигнала РЛС в режиме обзора пространства (а) и режиме подсвета цели для ГСН ракеты (б)

Для определенности будем рассматривать сигнал, приходящий на антенну ГСН ракеты. Модель сигнала, достигающего цели, строится совершенно аналогично.

### Математическая модель сигнала

Рассмотрим правую декартову систему координат (СК РЛС), центр которой находится в точке стояния РЛС подсвета, ось  $Z$  направлена вверх, а ось  $Y$  – на север.

Пусть излученный антенной РЛС сигнал имеет вид:  $s(t) = A_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} = \sqrt{P_0} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}$ , где  $A_0 = \sqrt{P_0} = \text{const}$ ,  $\omega_0$  и  $\varphi_0$  соответственно амплитуда, частота и начальная фаза излучаемого сигнала,  $P_0$  – мощность радиопередающего устройства РЛС.

Будем полагать, что сигнал, достигающий антенны ГСН ракеты, представляет собой сумму сигналов, отраженных от элементарных участков земной поверхности, которой касается ДНА антенны РЛС. Принцип формирования этих участков будет рассмотрен ниже.

Сигнал, отраженный от элементарного участка земной поверхности и принятый антенной ГСН ракеты будет определяться выражением

$$s_m(t) = A_m(t - \tau_m) e^{j[\omega_0(t - \tau_m) + \varphi_0 + \phi_E(t - \tau_m)]}, \quad (1)$$

где  $A_m(t)$  – амплитуда сигнала, а  $\phi_E(t)$  – случайный набег фазы, обусловленный отражением от земной поверхности,

$$\tau_m = |\vec{R}|/c = R/c - \quad (2)$$

задержка распространения сигнала до ГСН ракеты,  $R = |\vec{R}| = |\vec{R}_E| + |\vec{R}_1|$  (рис. 1, б),  $c$  – скорость света. Задержка сигнала  $\tau_m = \tau_m(t)$  и длина трассы  $R = R(t)$  являются функциями времени в силу перемещения в пространстве ГСН ракеты и цели. При этом  $s_m(t) = 0$  при  $t < \tau_m$ .

Рассмотрим фазу сигнала (1):  $\psi_m(t) = \omega_0 [t - \tau_m(t)] + \varphi_0 + \phi_E [t - \tau_m(t)]$ . Определим частоту рассматриваемого сигнала:  $\omega_m(t) = \frac{d}{dt} \psi_m(t) = \omega_0 - \omega_0 \frac{d}{dt} \tau_m(t) + \frac{d}{dt} \phi_E(t)$ .

Функция  $\phi_E(t)$  описывает медленные флуктуации фазы, обусловленные флуктуациями геометрических размеров элементов земного покрова под действием различного рода атмосферных воздействий (порывы ветра, снежные заряды и т.д.). В силу этого скоростью изменения фазы  $\phi_E(t)$  во времени можно пренебречь и положить, что  $\frac{d}{dt} \phi_E(t) \approx 0$ . С учетом последнего замечания выражение (2) для частоты примет вид:

$$\omega_m(t) \approx \frac{d}{dt} \Psi_m(t) = \omega_0 - \omega_0 \frac{d}{dt} \tau_m(t). \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражение (2) для задержки распространения сигнала, получим

$$\omega_m(t) = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c} \frac{d}{dt} R(t) = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c} v_m(t). \quad (4)$$

Таким образом, как видно из (4), частота рассматриваемого сигнала определяется скоростью изменения длины трассы его распространения  $v_m(t)$ .

Представим длину трассы распространения сигнала  $R(t)$  в некоторой окрестности точки  $t_0$  в виде ряда Тейлора, ограничиваясь квадратичным приближением:

$$R(t) \approx R(t_0) + R'(t_0)(t-t_0) + 0,5R''(t_0)(t-t_0)^2 = R_0 + v_0(t-t_0) + 0,5a_0(t-t_0)^2, \quad (5)$$

где  $R_0 = R(t_0)$ ,  $v_0 = R'(t_0)$  и  $a_0 = R''(t_0)$ .

Подставляя в выражение для частоты сигнала (4) выражение (5) для длины трассы в квадратичном приближении, получим

$$\omega_m(t) = \omega_0 - (\omega_0/c)(v_0 + a_0 t) = \omega_0 - [(\omega_0/c)v_0 + (\omega_0/c)a_0 t] = \omega_0 - \Omega(t), \quad (6)$$

где  $\Omega(t) = \Omega_0 + qt$ ,  $\Omega_0 = (\omega_0/c)v_0$  – постоянный во времени доплеровский сдвиг частоты для случая  $a_0 = 0$ , т.е. для равномерного во времени изменения длины трассы распространения сигнала за время наблюдения  $\Delta t = t - t_0$ ,  $q = (\omega_0/c)a_0$  – коэффициент, характеризующий скорость изменения частоты Доплера во времени при  $a_0 \neq 0$ .

Из (6) следует, что в общем случае рассматриваемый сигнал будет иметь линейную частотную модуляцию. С учетом (6) выражение (1) для отраженного сигнала примет вид

$$s_m(t) = A_m(t - \tau_m) e^{j\{\omega_0 - \Omega(t)\}t + \varphi_0 + \varphi_E(t - \tau_m)}, \quad t > \tau_m. \quad (7)$$

Для вычисления амплитуды отраженного сигнала (7) необходимо принять предположение о модели отражения электромагнитной волны от земной поверхности. Различают зеркальное и диффузное отражения [1]. Известно, что конкретный тип отражения возникает при определенном соотношении между длиной падающей на поверхность волны и размерами неровностей на этой поверхности [1]. На практике размеры неровностей у одной и той же поверхности могут иметь широкий диапазон значений, поэтому реальные поверхности обычно дают смешанное отражение, в котором есть и диффузная и зеркальная компоненты. Для земной поверхности наиболее характерным является диффузное отражение (в основном, за счет растительности) [1].

В данной работе примем диффузную модель отражения электромагнитной волны от земной поверхности. Будем полагать, что элементарная площадка земной поверхности с номером  $i$ , формирующая соответствующий отраженный сигнал, имеет угловой размер по азимуту, равный ширине ДНА антенны и некоторую протяженность по горизонтальной дальности, размер которой будет определен ниже.

На рис. 2 и 3 представлены схемы для вычисления мощности отраженного от земной поверхности сигнала, где приняты следующие обозначения:  $R_{\max}$  – максимальная горизонтальная дальность, с которой формируется отраженный от земной поверхности сигнал;  $r_i$  – горизонтальная дальность до центра элементарного участка земной поверхности;  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(x_i^r, y_i^r, z_i^r) = \vec{r}_i(r_i \sin \beta, r_i \cos \beta, 0)$  – радиус-вектор, определяющий положение центра элементарной площадки земной поверхности относительно начала координат;  $\Delta r_i$  – протяженность элементарного участка земной поверхности вдоль горизонтальной дальности;  $\vec{R}_E^i = \vec{R}_E^i(x_E^i, y_E^i, z_E^i) = \vec{R}_E^i(r_i \sin \beta, r_i \cos \beta, -H_a)$  – радиус-вектор, определяющий положение элементарной площадки земной поверхности относительно антенны РЛС;  $\vec{R}_1^i$  – радиус-вектор,

направленный от центра элементарной площадки к ГСН ракеты;  $\vec{N} = \vec{N}(0,0,1)$  – вектор нормали к элементарной площадке с номером  $i$ ;  $\theta_i$  – угол между векторами  $\vec{N}$  и  $-\vec{R}_E^i$ ;  $\varphi_i^m$  – угол между векторами  $\vec{N}$  и  $\vec{R}_1^i$ ,  $\vec{R}_m = \vec{R}_m(x_m, y_m, z_m)$  – радиус-вектор ГСН ракеты относительно антенны РЛС, где  $(x_m, y_m, z_m)$  – измеренные декартовы координаты ГСН ракеты в СК РЛС;  $\vec{R}_t = \vec{R}_t(x_t, y_t, z_t)$  – радиус-вектор цели относительно антенны РЛС, где  $(x_t, y_t, z_t)$  – измеренные декартовы координаты цели в СК РЛС.

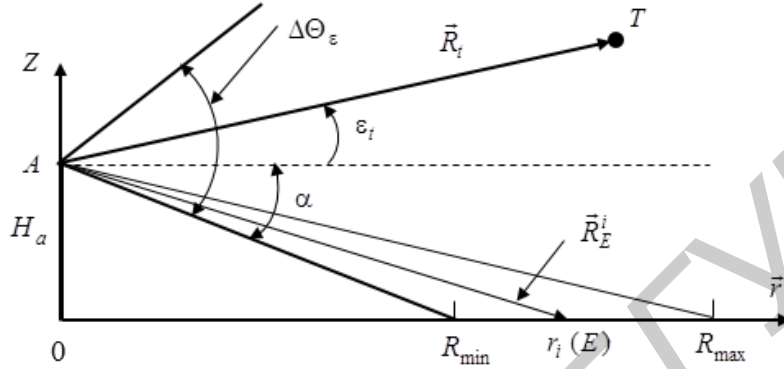


Рис. 2. Схема для расчета мощности отраженного от земной поверхности сигнала

С учетом принятых обозначений для ГСН ракеты определяются необходимые для дальнейших вычислений вектора (рис. 3):

$$\vec{R}_1^i = \vec{R}_m - \vec{R}_E^i = \vec{R}_1^i(x_1^i, y_1^i, z_1^i) = \vec{R}_1^i(x_m - x_E^i, y_m - y_E^i, z_m - z_E^i),$$

$$\vec{W} = \vec{R}_t - \vec{R}_m = \vec{W}(x_w, y_w, z_w) = \vec{W}(x_t - x_m, y_t - y_m, z_t - z_m).$$

Суммарный сигнал, принятый антенной ГСН ракеты, представим в виде

$$s_m(t) = \sum_{i=0}^{M-1} s_m^i(t) = \sum_{i=0}^{M-1} A_m^i(t - \tau_m^i) e^{j\{\omega_0 - \Omega_i(t) + \varphi_0 + \varphi_E^i(t - \tau_m^i)\}}, \quad (8)$$

где  $s_m^i(t) = A_m^i(t - \tau_m^i) e^{j\{\omega_0 - \Omega_i(t) + \varphi_0 + \varphi_E^i(t - \tau_m^i)\}}$  – сигнал от элементарной площадки с номером  $i$ ,  $M$  – число элементарных площадок земной поверхности, с которой собирается отраженный сигнал.

Из рис. 2 можно получить, что

$$R_{\min} = H_a / \operatorname{tg} \alpha, \quad (9)$$

где  $\alpha = \Delta\Theta_\varepsilon / 2 - \varepsilon_t$ . Отсюда следует, что отражения излученного антенной РЛС сигнала от земной поверхности могут иметь место только при  $\alpha > 0$ .

Полагаем земную поверхность плоской. Последнее означает, что различные неровности рельефа имеют высоты много меньшие, чем высота антенны РЛС подсвета ( $h \ll H_a$ ). В этом случае значение максимальной горизонтальной дальности, с которой может формироваться отраженный от земной поверхности сигнал, можно определить, воспользовавшись известным выражением [2], которое устанавливает максимальную горизонтальную дальность до радиогоризонта для объекта высотой  $h = 0$ :

$$R'_{\max} [\text{км}] \approx 4,12 \sqrt{H_a [\text{м}]}. \quad (10)$$

Однако использование выражения (9) для оценки значения  $R_{\max}$  может привести к тому, что выражение (8) для отраженного от земной поверхности сигнала будет содержать очень большое число слагаемых. Значительная часть этих слагаемых (сигналов от элементарных площадок) может иметь мощность, несущественную для результирующего сигнала (8). Поэтому используется другая оценка значения  $R_{\max}$ .

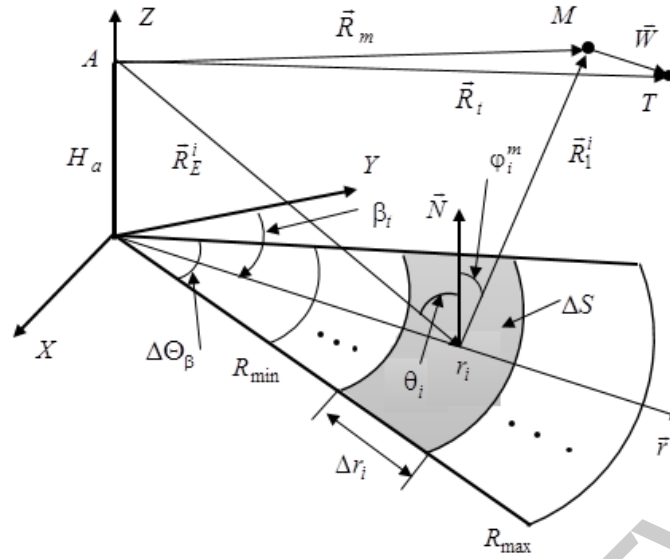


Рис. 3. Иллюстрация принципа формирования элементарных участков земной поверхности, отражающих сигнал

Пусть  $\Pi_1$  – плотность потока мощности электромагнитной волны, излученной антенной РЛС, в точке земной поверхности, соответствующей значению  $R_{\min}$ , а  $\Pi_2$  – плотность потока мощности в точке, соответствующей значению  $R_{\max}$ .

$$\Pi_1 = \frac{P_0 G_A}{4\pi(H_a^2 + R_{\min}^2)} \cos \theta_{\min}, \quad \Pi_2 = \frac{P_0 G_A}{4\pi(H_a^2 + R_{\max}^2)} \cos \theta_{\max},$$

где  $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$  – углы между

нормалью к поверхности в этих точках и направлением на антенну,  $G_A = 4\pi/\Delta\Theta_\beta\Delta\Theta_\epsilon$  – коэффициент усиления антенны РЛС,  $\cos \theta_{\max} = H_a/\sqrt{H_a^2 + R_{\max}^2}$ ,  $\cos \theta_{\min} = H_a/\sqrt{H_a^2 + R_{\min}^2}$ .  
Задавшись отношением  $k$  (0,1 ÷ 0,01) получаем, что

$$k = \frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{(H_a^2 + R_{\min}^2) \cos \theta_{\max}}{(H_a^2 + R_{\max}^2) \cos \theta_{\min}} \approx \left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^3, \quad (11)$$

так как обычно  $H_a \ll R_{\min}$ .

Из (11) получаем оценку для  $R_{\max}$ , которая с учетом (9) примет вид:

$$R_{\max} = H_a / \sqrt[3]{k} \operatorname{tg}(\Delta\Theta_\epsilon/2 - \epsilon_t). \text{ При этом следует иметь в виду, что при } R_{\max} > R'_{\max} \text{ необходимо положить } R_{\max} = R'_{\max}.$$

Разобьем фрагмент земной поверхности, отражающий сигнал РЛС, вдоль направления  $\vec{r}$  на  $M$  элементарных участков  $\Delta r_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, M-1$ , одинаковой площади  $\Delta S$ . При этом  $N = S/\Delta S$ , где  $S$  – площадь всей поверхности, формирующей отраженный сигнал:

$$S = 0,5(R_{\max}^2 - R_{\min}^2)\Delta\Theta_\beta.$$

Значение  $\Delta S$  следует выбирать, руководствуясь возможностями вычислительной системы, реализующей режим моделирования. Например, при моделировании в режиме реального времени выбор слишком малого значения  $\Delta S$  может привести к ненужному замедлению работы системы имитации, что будет обусловлено большим числом элементарных сигналов в (8).

Пусть  $R_i$  – горизонтальная дальность до переднего края площадки протяженностью  $\Delta r_i$ ,

$$R_i = R_{\min} + \sum_{k=0}^{i-1} \Delta r_k, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (12)$$

а  $r_i$  – горизонтальная дальность до центра этой площадки,

$$r_i = R_i + \Delta r_i/2, \quad (13)$$

$$\Delta S = r_i \Delta r_i \Delta \Theta_\beta. \quad (14)$$

Из (12)–(14) получаем значение протяженности  $i$ -й элементарной площадки  $\Delta r_i = -R_i + \sqrt{R_i^2 + 2\Delta S / \Delta \Theta_\beta}$ ,  $i = 0, 1, \dots, M-1$ .

Плотность потока мощности электромагнитного излучения антенны в точке  $r_i$  (рис. 2, 3) будет определяться как  $\Pi_i = \frac{P_0 G_A}{4\pi(H_a^2 + r_i^2)} \cos \theta_i$ . Выражение для мощности

сигнала, отраженного от земной поверхности, будет иметь вид:  $P_i = \frac{P_0 G_A \alpha_S \Delta S}{4\pi(H_a^2 + r_i^2)} \cos \theta_i$ ,

где  $\alpha_S$  – удельная эффективная площадь рассеивания (ЭПР) отражающей поверхности.

Плотность потока мощности электромагнитного излучения, отраженного от земной поверхности, на входе антенны ГСН ракеты

$$\Pi_i^m = \frac{P_i}{4\pi(R_i^i)^2} \cos \varphi_i^m = \frac{P_0 G_A \alpha_S \Delta S}{16\pi^2 (R_i^i)^2 (H_a^2 + r_i^2)} \cos \theta_i \cos \varphi_i^m, \text{ где } R_i^i = |\vec{R}_i^i| \text{ (рис. 3).}$$

Пусть  $S_A$  – площадь приемной антенны ГСН ракеты, а  $g(\Delta \vartheta)$  – функция, представляющая диаграмму направленности антенны (ДНА) в СК РЛС,  $\Delta \vartheta_i$  – рассогласование по углу между равносигнальным направлением ДНА (вектор  $\vec{W}$ , рис. 3) и направлением прихода сигнала (вектор  $-\vec{R}_i^i$ , рис. 3.),  $\Delta \vartheta_i = \arccos \left[ \frac{\vec{W} \cdot (-\vec{R}_i^i)}{|\vec{W}| |\vec{R}_i^i|} \right]$ .

Диаграмму направленности ГСН ракеты полагаем симметричной относительно равносигнального направления. Тогда выражение для мощности сигнала, принятого антенной,

$$\text{примет вид } P_i^m = \frac{P_0 G_A S_A \alpha_S \Delta S}{16\pi^2 (R_i^i)^2 (H_a^2 + r_i^2)} g^2(\Delta \vartheta_i) \cos \theta_i \cos \varphi_i^m. \text{ Из рис. 3 находим:}$$

$$\cos \theta_i = H_a / |\vec{R}_E^i| = H_a / \sqrt{H_a^2 + r_i^2}, \quad \cos \varphi_i^m = \vec{N} \cdot \vec{R}_i^i / |\vec{N}| |\vec{R}_i^i| = z_1 / \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Следует заметить, что при изменении состояния окружающей среды (например, колебания крон деревьев под действием порывов ветра) изменяется и удельная ЭПР земной поверхности с течением времени. В этих условиях ее следует рассматривать как функцию времени, значение которой колеблется относительно некоторого среднего значения. Поэтому удельную ЭПР фрагмента земной поверхности представим в виде

$$\alpha_i^S = \alpha_i^S(t) = \alpha_S^0 [1 + \xi_i(t)], \quad (15)$$

где  $\alpha_S^0$  – среднее значение удельной ЭПР,  $\xi_i(t)$  – безразмерные независимые гауссовы стационарные случайные процессы с  $M[\xi_i(t)] = 0$  и корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = D_\xi \exp(-|\tau|/\tau_\xi)$ , где  $\tau_\xi$  – время корреляции флуктуаций удельной ЭПР земной

поверхности. Так как всегда  $\alpha_i^S(t) \geq 0$ , то полагая, что значения  $\xi_i(t)$  изменяются в симметричных пределах, при моделировании необходимо обеспечить условие  $|\xi_i(t)| \leq 1$ .

Принимая во внимание последнее замечание, определим требуемое значение дисперсии  $D_\xi$  из условия  $3\sqrt{D_\xi} = 1$ . Откуда получаем, что  $D_\xi = 1/9$ . По причинам упомянутым выше, изменения

фаз  $\phi_E^i(t)$  будем аппроксимировать независимыми гауссовыми стационарными случайными с корреляционной функцией  $R_\phi(\tau) = D_\phi \exp(-|\tau|/\tau_\phi)$ , где  $\tau_\phi$  – время корреляции флуктуаций фазы. Требуемое значение дисперсии  $D_\phi$  определим из условия  $3\sqrt{D_\phi} = \pi$ . Отсюда следует, что

$D_\phi = \pi^2/9$ . Времена корреляции  $\tau_\xi$  и  $\tau_\phi$  следует выбирать исходя из тех или иных соображений относительно состояния окружающей среды.

Таким образом, требуемое в (8) выражение для амплитуды сигнала, отраженного от  $i$ -го фрагмента земной поверхности с учетом (15) и принятого антенной ГСН ракеты,

$$\text{принимает вид } A_i^m = A_i^m(t) = \frac{1}{4\pi R_i^i} g(\Delta\vartheta_i) \sqrt{\frac{P_0 G_A S_A \alpha_S^0 \Delta S}{H_a^2 + r_i^2}} [1 + \xi_i(t)] \cos \theta_i \cos \varphi_i^m .$$

### Заключение

Рассмотрен метод построения математической модели сигнала, отраженного от земной поверхности, при сопровождении РЛС низколетящей цели в режимах обзора пространства и подсвета цели для ГСН ракеты некоторого зенитно-ракетного комплекса. Метод основан на представлении рассматриваемого сигнала как суммы сигналов, отраженных от элементарных фрагментов поверхности. Представлена методика вычисления амплитуд составляющих сигнала, принятого антенной ГСГ ракеты для диффузной модели отражения электромагнитных волн от земной поверхности.

## MATHEMATICAL MODEL OF THE SIGNAL REFLECTED FROM THE GROUND DURING RADAR ACCOMPANYING LOW-FLYING TARGETS

A.A. DYATKO, S.M. KOSTROMITSKI, P.N. SHUMSKI

### Abstract

The mathematical model of the signal reflected from the earth's surface, accompanied by a low-flying radar targets in the browse mode of space end target illumination for homing of a missile anti-aircraft missile system. A procedure for calculating the amplitudes of the signal received by the antenna homing missiles for the diffuse reflection model of electromagnetic waves from the earth's surface.

### Список литературы

1. *Маковецкий П.В., Васильев В.Г.* Отражение радиолокационных сигналов. Л., 1975.
2. *Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник.* / Под ред. Я.Д. Ширмана. М., 2007.