УДК 621.391.01

УСТРАНЕНИЕ ОШИБОК В КОДОВЫХ СЛОВАХ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПРОВЕРОК НА ЧЕТНОСТЬ

А.С. ПОЛЯКОВ, В.Е. САМСОНОВ

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси
Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь

Поступила в редакцию 25 мая 2015

Предлагается алгоритм нахождения ошибочных символов в кодовых словах, основанный на использовании результатов проверок на четность по осям и главной диагонали кодовой плоскости. Алгоритм позволяет находить однократные ошибки и, при определенных условиях, групповые ошибки в строках и столбцах кодовой плоскости.

Ключевые слова: кодовые слова, кодовая плоскость, ошибочные символы (ошибки), четность.

Введение

При передаче кодированной информации одной из главных является задача коррекции ошибочных символов (ошибок) в получаемых после передачи кодовых словах. Ошибочными называются символы кодовых слов, значения которых на приемной стороне отличаются от значений на передающей. Ошибочные строки и столбцы – это строки и столбцы, в которых имеются ошибочные символы. Будем рассматривать двумерные коды (турбокоды), представляемые в виде кодовой плоскости (булевой матрицы), строки которой соответствуют кодовым словам по оси X, а столбцы – кодовым словам по оси Y. Для увеличения возможностей поиска ошибочных символов в кодовые слова могут добавляться проверочные символы четности по осям X и Y [1–7], которые используются во многих достаточно сложных помехоустойчивых кодах, в том числе, при декодировании расширенных кодов Хэмминга, а также для поиска ошибочных символов по номерам ошибочных строк и столбцов. Использование проверочных символов четности по осям кодовой плоскости для поиска ошибок возможно при наличии только одной ошибки в матрице, поскольку по номерам ошибочной строки и ошибочного столбца можно однозначно вычислить адрес только одного символа. Если число ошибок больше одной, определение их адресов с использованием проверочных символов четности по осям кодовой плоскости невозможно.

Определения и описание подхода

Таким образом, для нахождения адресов ошибочных символов в матрице необходимы дополнительные сведения о координатах элементов матрицы, в качестве которых предлагается использовать результаты проверки на четность по главным диагоналям, которая предложена в работе [8]. Под главной диагональю понимаются как основная главная диагональ матрицы, так и все параллельные ей диагонали. Схема вычисления проверочных символов четности по главным диагоналям представлена на рис. 1, где D – информационные, E – проверочные символы, «enchanced-parity row» – проверочные символы четности по главным диагоналям (*ePRD*). Штриховой линией показаны переходы с крайних правых позиций строк на крайние левые позиции следующих строк.

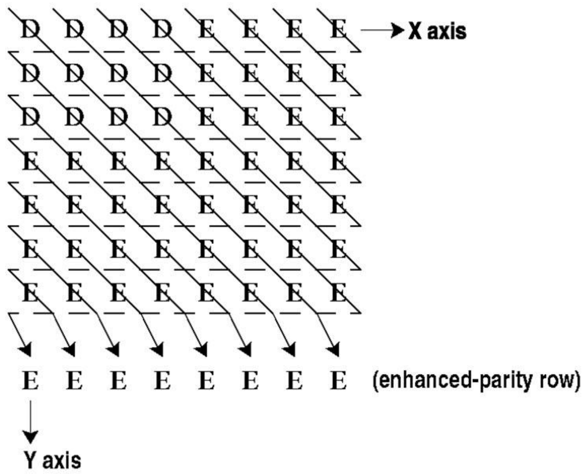

Рис. 1. Схема вычисления проверочных символов в матрице (*ePRD*)

Соответствие номеров главных диагоналей элементам матрицы представлено на рис. 2, в последней строке указано расположение проверочных символов четности по главным диагоналям (*ePRD*) для приведенной матрицы.

столбцы (*b*) → / диагонали (*d*)	1	2	3	4	5	6	7	*n* 8	строки (*a*) ↓
	1	2	3	4	5	6	7	8	1
	8	1	2	3	4	5	6	7	2
	7	8	1	2	3	4	5	6	3
	6	7	8	1	2	3	4	5	4
	5	6	7	8	1	2	3	4	5
	4	5	6	7	8	1	2	3	6
	3	4	5	6	7	8	1	2	7
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	8 *ePRD*

Рис. 2. Соответствие номеров главных диагоналей элементам матрицы

Проверка на четность по главным диагоналям увеличивает число доступных координат для вычисления адресов элементов матрицы, поскольку можно использовать не только номера строк и столбцов, но и номера главных диагоналей.

Введем обозначения: m – количество строк; n – количество столбцов; a – номер строки; b – номер столбца; d – номер главной диагонали; (a,b) – элемент матрицы, на пересечении строки a и столбца b; $d\ (a,b)$ – номер главной диагонали, соответствующий элементу (a,b); $N\ (a,b)$ – порядковый номер элемента (a,b) в матрице; SX – список номеров ошибочных строк; SY – список номеров ошибочных столбцов; SE – список номеров ошибочных главных диагоналей.

С учетом указанных обозначений выведем следующие, достаточно очевидные, формулы для вычисления номеров диагоналей и адресов элементов матрицы:

$$d\ (a,b) = (n - a + b + 1)\ mod\ n, \tag{1}$$

$$N\ (a,b) = (a - 1) * n + b;\ N(1,1) = 1. \tag{2}$$

Необходимо учитывать, что если $y < 0$, то $y\ mod\ n = n - y\ mod\ n$, если $y = 0$, или $y = n$, то $y\ mod\ n = n$.

Благодаря увеличению числа координат, можно предложить способ нахождения адресов одиночных ошибок в строках и столбцах матрицы, основанный на использовании результатов проверок на четность по осям X, Y и диагоналям, представленным в списках SX, SY и SE соответственно.

Алгоритм поиска ошибочных элементов в матрице

Будем рассматривать матрицы с одиночными ошибками в строках, столбцах и диагоналях. Признаком отсутствия двойных ошибок является равенство чисел элементов в списках *SX, SY* и *SE*. Способ поиска ошибок основан на анализе всех возможных вариантов размещения ошибочных символов в матрице, которые определяются номерами ошибочных строк и столбцов, и отбрасывании «ложных» вариантов, используя данные о соответствии номеров главных диагоналей рассматриваемым элементам матрицы и их наличием в списке *SE*. Для этого производится формирование и анализ множества строк *S*1–*S*2–*S*3, составленных из элементов списков *SX*, *SY* и *SE*, в которых *S*1–*S*2 представляют всевозможные пары элементов из *SX* и *SY*, а *S*3 – номера диагоналей, соответствующие элементам матрицы на пересечении строк и столбцов, номера которых указаны в *S*1 и *S*2.

Из множества строк *S*1–*S*2–*S*3 необходимо удалить строки, которые указывают адреса несуществующих ошибок. Для этого воспользуемся представленными в списке *SE* значениями номеров главных диагоналей элементов матрицы.

Вычисление номеров диагоналей, соответствующих элементу (a, b), производится с помощью формулы (1), адресов элементов матрицы – с помощью формулы (2).

С учетом изложенного подхода предлагается алгоритм поиска ошибочных элементов.

1. Анализируется состояние списков *SX*, *SY* и *SE*. Если во всех списках нет элементов, то это означает отсутствие ошибок и переход в п.5, иначе переход в п.2.

2. Используя значения списков *SX* и *SY*, формируется множество строк *S*1–*S*2–*S*3, где *S*1–*S*2 представляют собой всевозможные пары значений из элементов *SX* и *SY*, а *S*3 – номера главных диагоналей, соответствующих элементам матрицы, адреса которых определяются значениями столбцов *S*1 и *S*2. Вычисления номеров диагоналей, соответствующих элементам матрицы, производится с помощью формулы (1).

3. Из множества *S*1–*S*2–*S*3 последовательно удаляются:

– строки, в которых значения в столбце *S*3 отсутствуют в списке *SE*;

– строки, которые имеют одинаковые значения в столбце *S*3, поскольку наличие таких строк свидетельствует о неоднозначности определения координат ошибочных элементов;

– строки, которые имеют одинаковые значения в столбце *S*2.

4. Если после произведенных удалений в множестве *S*1–*S*2–*S*3 строк не осталось, то это означает, что ошибки не найдены, переход в п.5. В противном случае оставшиеся строки представляют адреса ошибочных элементов. По номерам строк и столбцов, указанным в *S*1 и *S*2, с помощью формулы (2) вычисляются адреса ошибочных элементов и производится коррекция значений обнаруженных ошибок. Из списков *SX, SY* и *SE* удаляются элементы, значения которых присутствуют в оставшихся строках, а сами строки удаляются из *S*1–*S*2–*S*3. Переход в п.1

5. Останов алгоритма.

Результаты и их обсуждение

В качестве примера рассмотрим матрицу М1, представленную на рис. 3, в которой символами ■ отмечены ошибочные элементы, символами •• – номера ошибочных диагоналей. В элементах матрицы указаны соответствующие им номера главных диагоналей. В крайнем правом столбце представлены проверочные символы четности по оси *X*, а в предпоследней строке – проверочные символы четности по оси *Y*.

1. В списках *SX*, *SY* и *SE* имеются элементы, переход в п. 2.

2. Сформируем множество строк *S*1–*S*2–*S*3.

3. Удалим из него строки, в которых значения столбца *S*3 отсутствуют в списке *SE* (отмечены значком **x**), и строки, в которых значения столбца *S*3 совпадают (отмечены значками -- и ---). В итоге осталась строка 6, отмеченная значком +, которая и представляет ошибочный элемент (4,6).

Матрица М1

1	2	3	4	5	6	7		
1	2	3	4	5	6	7	1	
7	1	2	3	4	5	6	2	
6	7	1	2	3	4	5	3	
5	6	7	1	2	3	4	4	
4	5	6	7	1	2	3	5	
3	4	5	6	7	1	2	6	
2	3	4	5	6	7	1	7	
1	2	3	4	5	6	7	8	
7	1	2••	3••	4	5••	6	9	*ePRD*

Списки

SX	*SY*	*SE*
2	2	2
4	3	3
5	6	5
------	------	------
2	2	2
5	3	5

Строки

	S1 –	S2 –	S3	
1)	2	2	1	x
2)	2	3	2	--
3)	2	6	5	---
4)	4	2	6	x
5)	4	3	7	x
6)	**4**	**6**	**3**	+
7)	5	2	5	---
8)	5	3	6	x
9)	5	6	2	--
------	------	------	------	------
10)	2	2	1	x
11)	**2**	**3**	**2**	+
12)	**5**	**2**	**5**	+
13)	5	3	6	x

Рис. 3. Матрица М1 и схема поиска ошибок

4. Удаляем из списка *SX* значение 4, из *SY* – значение 6, из списка *SE* – значение 3. Новые значения списков *SX, SY* и *SE* представлены ниже штриховой черты. Переход в п. 1.

Производим описанную выше процедуру с новыми значениями этих списков и получаем множество строк *S*1–*S*2–*S*3. После удаления строк, в которых значения столбца *S*3 отсутствуют в *SE*, остались строки 11 и 12, которые и представляют ошибочные элементы (2,3) и (5,2). Удаляем из *SX, SY* и *SE* содержащиеся в этих строках значения, в результате чего в списках *SX, SY* и *SE* не остается элементов, следовательно, все ошибки найдены.

Если в матрицу М1 добавить еще одну ошибку (8,7), то результат получается хуже (матрица М2, рис. 4). После удаления из множества *S*1–*S*2–*S*3 строк в соответствии с приведенным выше алгоритмом выясняется, что в *S*1–*S*2–*S*3 не осталось строк. Следовательно, ошибки не обнаружены.

Матрица М2

1	2	3	4	5	6	7		
1	2	3	4	5	6	7	1	
7	1	2	3	4	5	6	2	
6	7	1	2	3	4	5	3	
5	6	7	1	2	3	4	4	
4	5	6	7	1	2	3	5	
3	4	5	6	7	1	2	6	
2	3	4	5	6	7	1	7	
1	2	3	4	5	6	7	8	
7••	1	2••	3••	4	5••	6	9	*ePR*

Списки

SX	*SY*	*SE*
2	2	2
4	3	3
5	6	5
8	7	7

Строки

S1–	S2 –	S3	
2	2	1	x
2	3	2	--
2	6	5	---
2	7	6	x
4	2	6	x
4	3	7	--
4	6	3	--
4	7	4	x
5	2	5	---
5	3	6	x
5	6	2	--
5	7	3	--
8	2	2	--
8	3	3	--
8	6	6	x
8	7	7	--

Рис. 4. Матрица М2 и схема поиска ошибок

Но если вместо ошибки (8,7) добавить ошибку (8,4), то ошибки обнаруживаются после трех итераций. Соответствующая матрица М3 и схема поиска ошибок представлены на рис. 5. Если рассмотреть матрицу на рис. 5, то можно заметить, что многим элементам матрицы соответствуют одинаковые значения диагоналей. Например, элементам (2,3), (3,4), (4,5) и ряду других соответствует значение $d = 2$, а элементам (2,4), (3,5), (4,6) и другим значение $d = 3$ и т.д. Таким образом, в матрице есть много элементов, имеющих одинаковые значения номеров главных диагоналей. Точнее – есть n множеств (по количеству столбцов матрицы), каждое из которых содержит m элементов с одинаковыми значениями номеров главных диагоналей. Наличие большого количества одинаковых значений номеров диагоналей является причиной образования в $S1$–$S2$–$S3$ нескольких строк с одинаковыми значениями в столбце $S3$. Поэтому среди строк, удаляемых из $S1$–$S2$–$S3$, находятся как строки с адресами ошибочных элементов, так и строки с адресами «правильных» элементов, которым соответствуют номера диагоналей, совпадающие с номерами диагоналей, соответствующими ошибочным элементам.

Матрица М3

1	2	3	4	5	6	7		
1	2	3	4	5	6	7	1	
7	1	2■	3	4	5	6	2	
6	7	1	2	3	4	5	3	
5	6	7	1	2	3■	4	4	
4	5■	6	7	1	2	3	5	
3	4	5	6	7	1	2	6	
2	3	4	5	6	7	1	7	
1	2	3	4■	5	6	7	8	
7••	1	2••	3••	4	5••	6	9	*ePRD*

Списки			Строки			
SX	*SY*	*SE*	S1–	S2 –	S3	
2	2	2	2	2	1	x
4	3	3	2	3	2	--
5	6	5	2	6	5	---
8	4	4	2	4	3	--
			4	2	6	x
			4	3	7	x
			4	6	3	--
			4	4	1	x
			5	2	5	---
			5	3	6	x
			5	6	2	--
			5	4	7	x
			8	2	2	--
			8	3	3	--
			8	6	6	x
			8	**4**	**4**	**+**
2	2	2	2	2	1	x
4	3	3	2	3	2	--
5	6	5	2	6	5	---
			4	2	6	x
			4	3	7	x
			4	**6**	**3**	**+**
			5	2	5	---
			5	3	6	x
			5	6	2	--
2	2	2	2	2	1	x
5	3	5	**2**	**3**	**2**	**+**
			5	**2**	**5**	**+**
			5	3	6	x

Рис. 5. Матрица М3 и схема поиска ошибок

Априори понятно, что чем больше размер матрицы, тем менее вероятно размещение ошибок в элементах матрицы с одинаковыми номерами главных диагоналей. Действительно, при небольших размерах матрицы расстояние между такими элементами небольшое, поэтому вероятность появления строк с одинаковыми значениями в столбце S3 выше, поскольку вероятность расположения двух ошибок в элементах матрицы с одинаковыми значениями номеров диагоналей равна $1/n^2$. Следовательно, вероятность такого события в матрице с числом столбцов $n = 20$ будет в 11 раз меньше, чем в матрице с числом столбцов $n = 6$.

Вместе с тем, следует заметить, что наличие строк с одинаковыми значениями в столбце $S3$ еще не означает, что ошибки не будут найдены, что наглядно представлено на рис.3 и рис. 5, где имеются строки с одинаковыми значениями элементов в столбце $S3$, но после выполнения нескольких итераций алгоритма все ошибки были обнаружены.

Если имеются двойные ошибки в строках или столбцах, то их поиск с помощью предлагаемого алгоритма невозможен, в связи с тем, что в таких случаях уменьшается число координат для определения адресов ошибочных элементов, поскольку отсутствуют номера строк или столбцов соответственно.

При определенных условиях, а именно в тех случаях когда количество ошибок в строках (столбцах) нечетное и отсутствуют двойные ошибки в главных диагоналях, алгоритм позволяет находить кратные ошибки в строках и столбцах матрицы. В таких случаях п. 2 алгоритма необходимо дополнить условием:

– строки, которые имеют одинаковые значения в столбце S2 (при наличии кратных ошибок в строках) или S1 (при наличии кратных ошибок в столбцах).

Пример представлен на рис. 6.

Матрица М4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
9■	1■	2■	3	4	5	6	7	8	2
8	9	1	2	3	4	5	6	7	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6	4
6	7	8	9	1	2	3■	4■	5■	5
5	6	7	8	9	1	2	3	4	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3	7 *ePR*

Списки

SX	*SY*	*SE*
2	1	9
5	2	1
	3	2
	7	3
	8	4
	9	5

Строки

S1	S2	S3	
2	**1**	**9**	+
2	**2**	**1**	+
2	**3**	**2**	+
2	7	6	x
2	8	7	x
2	9	8	x
5	1	6	x
5	2	7	x
5	3	8	x
5	**7**	**3**	+
5	**8**	**4**	+
5	**9**	**5**	+

Рис. 6. Матрица М4 и схема поиска ошибок

Заключение

Успешность поиска адресов ошибок в матрице с помощью предложенного алгоритма зависит от конкретного расположения ошибок в матрице, т.е. алгоритм в принципе является «ситуационным», и не гарантирует нахождение ошибок во всех случаях, но позволяет находить много одиночных ошибок, и как было отмечено выше, тем успешнее, чем больше размер матрицы. Алгоритм может быть использован в комбинации с другими кодами в качестве их расширения, поскольку незначительно увеличивает размер кодового слова (требует добавления в кодовое слово лишь одного проверочного символа) и позволяет находить адреса ошибок с небольшими затратами вычислительных ресурсов. В таких случаях целесообразно вначале произвести поиск ошибок с помощью предлагаемого алгоритма, а оставшиеся необнаруженные ошибки искать с помощью средств применяемого алгоритма кодирования (декодирования).

ELIMINATION OF ERRORS IN CODEWORDS ACCORDING TO THE RESULTS OF PARITY CHECKING

A.S. POLJAKOV, V.E. SAMSONOV

Abstract

An algorithm for finding wrong symbols in codewords based on using the results of checking for parity on axes and main diagonal of code plane is proposed. This algorithm allows to find the single errors and, under certain conditions, the group errors in the lines and columns of code plane.

Список литературы

1. *Морелос-Сарагоса Р.* Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. М., 2005.
2. *Вернер М.* Основы кодирования. М., 2004.
3. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. М., 1976.
4. *Шульгин В.И.* Основы теории передачи информации. Помехоустойчивое кодирование. Харьков, 2003.
5. *Назаров Л.Е., Головкин И.В.* // Журнал радиоэлектроники. 2011. № 1.
6. Сорока Н.И., Кривинченко Г.А. Телемеханика. Конспект лекций для студентов специальности 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» всех форм обучения. Часть 2. Коды и кодирование. Минск. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.bsuir.by/m/12_100229_1_62250.pdf. – Дата доступа: 10.03.15.
7. *Золотарев В.В., Овечкин Г.В.* Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы / Под ред. Ю.Б. Зубарева. М., 2004.
8. «Enchanced» Turbo Product Codes (eTPC). – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.aha.com/Uploads/ANtpc12_03063.pdf. – Дата доступа: 10.02.2015.