О. А. Меркулова[1], В. Л.Трегуб[2], Е. А. Шевченко[2]

Видео-визуализация решения телеграфного уравнения для линии с потерями

[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого;
[2]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *В докладе рассматривается решение телеграфного уравнения в случае неискажающей длинной линии с потерями. Представлены видео ролики, наглядно описывающие процесс подключения длинной линии под напряжение в случае, когда конец линии заземлён (короткое замыкание) и в случае, когда он разомкнут (холостой ход).*

Ключевые слова: телеграфное уравнение; длинная линия с потерями; линия без искажений; уравнение гиперболического типа

Целью настоящей работы является дать наглядное представление будущему инженеру-электрику о том, как выглядит решение уравнения математической физики гиперболического типа, а именно телеграфного уравнения с учетом потерь (которым соответствует первая производная по времени).

Пусть начало координат совпадает с началом длинной линии, x - расстояние от начала линии до рассматриваемой точки ($0 < x < l$), где l – длина линии,t – время ($t > 0$). Обозначим через C – ёмкость, G – проводимость утечки, L – индуктивность, R – сопротивление единицы длины.

Тогда телеграфные уравнения, описывающие процесс распространения тока I(x,t) и напряжения $U(x,t)$ вдоль провода, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -L\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} - R \cdot I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - G \cdot U(x,t) \end{cases}.$$

После преобразования эти уравнения можно привести к линейным дифференциаль- ным уравнениям второго порядка в частных производных гиперболического типа для тока и напряжения. Мы будем рассматривать уравнение для напряжения, имеющее вид:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + RGU(x,t).$$

Если сделать замену $U(x,t) = e^{-\mu t}V(x,t)$,где $\mu = \frac{CR+LG}{2LC}$, то уравнение примет более простой вид: $\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + b^2 V(x,t)$, где $a^2 = \frac{1}{LC}, b^2 = \left(\frac{CR-LG}{2LC}\right)^2$.

Поведение решения качественно различно при $b \neq 0$ и при $b = 0$.Мы будем рассматривать случай длинной линии без искажений, когда $b = 0$, то есть CR=LG, тогда $\mu = \frac{R}{L}$и уравнение сводится к каноническому гиперболическому уравнению

$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}$, общее решение которого, полученное по методу Даламбера, равно сумме прямой и обратной волн: $V(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$, где $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – скорость распространения сигнала [2, 3], а напряжение в длинной линии без искажений будет иметь вид:

$$U(x,t) = e^{\frac{-R}{L}t}\big(\varphi(x-at) + \psi(x+at)\big).$$

Видно, что волна распространяется со скоростью a затухая с течением времени, но не изменяя своей формы.

Рассмотрим постановку начально-краевой задачи для конечной линии длины l, которая в момент времени $t = 0$ подключается слева под постоянное напряжение, правый конец линии заземлён (короткое замыкание):

$$\begin{cases} U(x,0) = 0, U_t'(x,0) = 0, \\ U(0,t) = U_0, U(l,t) = 0. \end{cases}$$

В этом случае прямая волна, дойдя до правого конца, отражается в противофазе. Если правый конец линии свободен (холостой ход), последнее условие заменяется на $U_x'(l,t) = 0$. В этом случае прямая волна, дойдя до правого конца, отражается в фазе. Изменение напряжения по всей длине линии с течением времени представлено в роликах [4] и [5] соответственно.

Ролики [4] и [5] наглядно демонстрируют, что поставленная в работе цель – визуализировать решение телеграфного уравнения – выполнена.

Если же правый конец линии подключить к сопротивлению нагрузки $R_{н} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (так называемая согласованная нагрузка), то отражённая волна будет отсутствовать. Этому случаю соответствуют оба ролика до появления отраженной волны.

Список литературы:

1. Меркулов А.Л., Трегуб В.Л., Червинская Н.М. Методы математической физики: учебное пособие. Спб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2016.
2. O.A. Merkulova, V.L. Tregub, E.A. Shevchenko Application of video visualization tools in the study of thermal conductivity and vibrations in the course of methods of mathematical physics.
3. https://youtu.be/0wp0YwD_NSwURL.
4. https://disk.yandex.ru/i/lQLqp_hKbaXsnw.
5. https://disk.yandex.ru/i/0qmfK0Pl9Ze4Hw.

O. A. Merkulova[1], V. L. Tregub[2], E. A. Shevchenko[2]

Video visualization of the solution of the telegraphic equation for a lossy line

[1]Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University;
[2]Saint Petersburg Electrotechnical University, Russia

Abstract. The report examines the solution of the telegraphic equation in the case of a non-distorting long line with losses. Video clips are presented that clearly describe the process of connecting a long line under voltage when the end of the line is grounded (short circuit) and when it is open (idle).

Keywords: telegraphic equation; long line with losses; line without distortion; hyperbolic equation