

¹Санкт-Петербургский государственный экономический университет;
²ГБОУ СОШ № 87, г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. В работе сравнивается подход к изложению дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», которая изучается в вузе студентами инженерных и экономических специальностей, с построением предмета «Вероятность и статистика», выделенного из уроков алгебры для учащихся 7–9 классов, и элективного курса «Комбинаторика. Статистика. Вероятность» для 10–11 классов.

Ключевые слова: комбинаторика; вероятность; случайная величина; генеральная совокупность; выборка

Содержание и форма математических дисциплин в средней школе год от года меняются. В связи с этим преподавателю высшей математики в вузе приходится подстраиваться под эти изменения, вносить дополнения и коррективы в багаж знаний и умений, которыми должны будут овладеть его студенты.

В отечественных университетских учебниках (например, в [1]) курс теории вероятностей и математической статистики состоит из двух частей. Первая часть посвящена теории вероятностей: сначала изучаются случайные события и их вероятности, затем – случайные величины (их распределения и числовые характеристики), потом – закон больших чисел и центральная предельная теорема. После этого переходят ко второй части – математической статистике, о которой невозможно вести речь, пока не будут введены её основные понятия: генеральная совокупность и выборка. Их можно определить как в рамках теории множеств, так и на теоретико-вероятностном языке.

С точки зрения теории множеств, генеральная совокупность – это обширное множество объектов, изучить каждый из которых трудно или вообще невозможно, а выборка является подмножеством этого множества (её элементы доступны для изучения). Те выводы, которые можно сделать на основании анализа выборки, затем распространяются на всю генеральную совокупность. Чтобы выборка правильно представляла генеральную совокупность (т.е. была репрезентативной), в качестве процедуры выбора в математике используется простой случайный выбор.

Гораздо чаще применяется другой подход к определению генеральной совокупности и выборки. Генеральную совокупность определяют как случайную величину, а выборку – как набор независимых случайных величин, распределённых так же, как и генеральная случайная величина, либо как набор значений выборочных случайных величин. После этого можно осмысленно говорить о методах описательной статистики, призванных дать недостающую (хоть и приближённую) информацию о генеральной случайной величине, рассказывать об оценивании неизвестных параметров генеральной совокупности, о проверке статистических гипотез, касающихся параметров генеральной случайной величины или генерального распределения в целом.

Что касается комбинаторики, обычно её дают в самом начале курса, т.к. этот раздел не входит ни в теорию вероятностей, ни в математическую статистику; однако её основные понятия и формулы используются при непосредственном вычислении вероятностей событий.

Аналогичную школьную дисциплину «Вероятность и статистика» выделили из курса алгебры совсем недавно. Её проходят в 7, 8 и 9 классах общеобразовательных школ по учебнику [2, 3].

С точки зрения преподавателя высшей школы, читающего лекции по теории вероятностей и математической статистике, очень хорошо, что в [2, 3] даны начальные сведения о графах (главы IV и X), о логических утверждениях и высказываниях (главы V и XI), о множествах (глава VII). Это означает, что можно не тратить время на подробные разъяснения студентам понятий из этих разделов математики, когда они встретятся в теории вероятностей, а сосредоточить внимание именно на теоретико-вероятностных задачах.

Другим несомненным достоинством книг [2, 3] является обилие примеров из окружающего учеников мира. Это и приобретение школьной мебели, и измерение роста и веса учеников, и баллы, полученные учениками за выполнение какого-либо задания, а также примеры из области техники, демографии, социологии, экономики, сельского хозяйства, лингвистики, спорта.

Однако в школьном учебнике [2, 3] главы, посвящённые теории вероятностей, и главы о статистике расположены в обратном порядке (по сравнению с курсом высшей школы). В первых трёх главах говорится о различных способах представления статистических данных (таблицах, диаграммах, статистических числовых характеристиках, погрешностях). Там же впервые появляется термин «выборка» – как набор значений некоторой величины, которые выбраны для изучения всей совокупности объектов. Только в шестой главе авторы переходят к начальным понятиям теории вероятностей, описывая случайные опыты и случайные события, которые в них происходят. Такое построение школьного курса связано с позицией авторов учебника [2, 3]; отталкиваясь от нужд статистики, они переходят к теории вероятностей. Они пишут: «Опираясь на математические законы вероятностей, специалисты-статистики могут не только собирать данные и выдвигать предположения, но и проверять их, а также делать достоверные выводы и полезные прогнозы». В той же шестой главе вводится понятие частоты (т.е. относительной частоты) события, а вероятностью случайного события называется числовая мера правдоподобия этого события; при этом говорится, что частота близка к вероятности. Только четырнадцатая глава посвящена элементам комбинаторики; она стоит перед главой об испытаниях Бернулли.

Наряду с книгами [2, 3] школьникам предназначено пособие А. Х. Шахмейстера «Комбинаторика. Статистика. Вероятность» [4] для углублённого изучения этих разделов в 10–11 классах. Она входит в серию книг «Математика. Элективные курсы», которая охватывает практически все разделы школьного курса математики. Хорошо, что эта книга начинается с задач по комбинаторике, потому что формулы комбинаторики активно используются при решении вероятностных задач. К сожалению, не все эти формулы приводятся с доказательством, но это можно объяснить тем, что для этого потребовалось бы знание метода математической индукции, о котором говорится в другой (последней) книге этой серии. Видимо, следуя логике учебника [2, 3], Шахмейстер после комбинаторики помещает тему «Элементы статистики», а тема «Элементы теории вероятностей» расположена в конце книги.

С точки зрения преподавателя высшей математики, главным недостатком всех школьных учебников [2, 3, 4] как раз является размещение статистических сведений перед вероятностными. Возможно, такое расположение глав ориентировано на так называемого «среднего школьника», который в своём восприятии школьного курса отталкивается от того, что он видит в окружающей действительности, а такая абстракция, как случайные события и их вероятности, требует дополнительных оправданий при появлении в школьном курсе. Казалось бы, дроби (и обыкновенные, и десятичные) изучаются ещё в 5 и 6 классах, так что уже в 7 классе можно говорить и о комбинаторике, и о классическом определении вероятности события. В противном случае непонятно, что же описывает статистика. К тому же учеников, интересующихся математикой, такое обилие фактической информации, как в первых главах [2], может отпугнуть от этих разделов математики если не навсегда, то до тех

пор, пока они не поймут, что цель математической статистики – не устройство свалки каких-то частных сведений и приёмов их обработки, а получение недостающей информации о вероятностной модели процессов.

В заключение сделаем вывод о том, на чём стоит акцентировать внимание преподавателю в высшей школе, читающему курс лекций по теории вероятностей и математической статистике, а что можно лишь упомянуть. Когда лектор (или преподаватель, ведущий практические занятия) выписывает формулы комбинаторики, следует хотя бы на словах сказать, как они выводятся.

Затем надо перейти к теории вероятностей, вскользь упомянув о случайном эксперименте и случайных событиях (если позволяет время и уровень математической подготовки студентов, то нужно ввести не только операции над событиями, но и сигма-алгебру событий). После этого следует перейти к определению вероятности случайного события (хотя бы классическому и геометрическому; а если возможно, то и аксиоматическому), доказать свойства вероятности, ввести условные вероятности, привести (с доказательством) формулу полной вероятности и формулу Байеса. Обо всём этом упомянуто, по крайней мере, в школьном учебнике [4], но недостаточно последовательно; зато в [2, 3, 4] приведено очень много примеров, так что о них можно не заботиться. После этого принято говорить о последовательностях испытаний, в особенности о серии испытаний Бернулли. В [3] авторы школьного курса посвятили им шестнадцатую главу, однако в ней формула Бернулли приводится без доказательства, а о наивероятнейшем числе успехов и о предельных теоремах в схеме Бернулли студентам придётся сообщать отдельно.

Теперь уже всё готово для того, чтобы заняться случайными величинами: их распределениями и числовыми характеристиками (в рамках имеющихся возможностей). Надо учесть, что авторы [3] пишут о дискретных случайных величинах лишь в последней главе, а о нормальном распределении упоминают мимоходом (они рисуют в [2] график плотности нормальной случайной величины в связи с обработкой выборки и построением гистограммы).

Завершающим этапом рассказа о теории вероятностей должны быть закон больших чисел и центральная предельная теорема, после чего следует переходить к математической статистике. Обязательно нужно сделать упор на определение генеральной совокупности как случайной величины и на соответствующее определение выборки, на сходимость выборочной функции распределения к генеральной функции распределения. Детально на методах описательной статистики можно не останавливаться, но важно проводить параллели между генеральными и выборочными характеристиками. Наконец, про оценку параметров и проверку статистических гипотез нужно рассказывать подробно, т.к. эти разделы не вошли (и не могли войти) в школьную программу.

Список литературы:

1. Фадеева Л. Н. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2006. – 400 с.
2. Высоцкий И. Р., Яценко И. В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях. – М.: Просвещение, 2023. Ч. 1. – 176 с.: ил.
3. Высоцкий И. Р., Яценко И. В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях. – М.: Просвещение, 2024. Ч. 2. – 112 с.: ил.
4. Шахмейстер А. Х. Комбинаторика. Статистика. Вероятность. – СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс»: М.: Издательство МЦММО, 2022. – 304 с.: ил.

L. M. Mogileva¹, A. M. Mogileva²

A look at the discipline "Probability Theory and Mathematical Statistics" through the eyes of a high school mathematics teacher

¹Saint Petersburg State University of Economics;

²School № 87, Saint Petersburg, Russia

Abstract. The paper compares the approach to the presentation of the discipline "Probability Theory and Mathematical Statistics", which is studied at the university by students of engineering and economics, with the construction of the subject "Probability and Statistics", isolated from algebra lessons for students in grades 7-9, and the elective course "Combinatorics. Statistics. Probability" for grades 10-11.

Keywords: combinatorial analysis; probability; random variable; population; sample