34. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Сытая Д.Д., студент гр. 373902, Крюкова А.А., студент гр. 373903, Русина Н.В., аспирант

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Ефремов А.А. – канд. экон. наук, доцент каф. ЭИ

Аннотация. В данной статье рассмотрены свойства чисел Фибоначчи, их практическое значение в разных предметных областях таких, как математика, зоология, ботаника, экономика, программирование, дизайн; предложен способ шифрования букв с помощью чисел Фибоначчи.

Ключевые слова. числа Фибоначчи, золотое сечение, треугольник Паскаля, веб-разметка, решетка Фибоначчи, комбинаторика, шифрование.

Некоторые изобретения, которые используются в повседневной жизни, были позаимствованы человеком у природы. Стремление найти идеальную зависимость и описать основные процессы через математические модели привело к определению понятия «золотое сечение», а в двенадцатом веке к понятию «числа Фибоначчи».

Числа Фибоначчи представляют собой числовую последовательность, в которой первыми двумя числами являются числа 0 и 1, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.

Одной из особенностей чисел Фибоначчи является зависимость между их значениями: начиная с четвертого, отношение числа к следующему в последовательности стремится к значению 0,618. Пример: 2 : 3 = 0,67; 3 : 5 = 0,6; 5 : 8 = 0,625; 8 : 13 = 0,615; 13 : 21 = 0,619 и т.д. То же самое можно сказать и об отношении числа Фибоначчи к предыдущему в последовательности, оно стремится к значению 1,618. Чем больше номер числа в последовательности, тем ближе результаты их деления приближаются к двум взаимообратным величинам.

Этими же числами описывается отношение отрезков в золотом сечении, соответственно, каждый раз при делении стороны на два отрезка отсекается квадрат. Стороны этих квадратов равны числам из последовательности Фибоначчи.

Еще одной особенностью чисел Фибоначчи является их отображение в треугольнике Паскаля. Если представить треугольник Паскаля таким образом, чтобы единицы левого ряда размещались одна под одной, можно заметить, что сумма диагоналей равна числам Фибоначчи.

Изучив некоторые свойства чисел Фибоначчи, следует перейти к исследованию их практического значения.

Первое упоминание чисел Фибоначчи напрямую связано с задачей о кроликах [1]. Условие задачи звучит так: «В огороженный загон посадили двух кроликов — самку и самца. Каждый месяц пара являет миру ещё одну пару кроликов. Сколько пар кроликов от одной пары будет в загоне через год?» Также изначально известны следующие условия: в начале первого месяца появляется первая пара кроликов (самец и самка). Со второго месяца кролики начинают ежемесячно производить новую пару. Кролики бессмертны.

Задача решается посредством чисел Фибоначчи. Каждый месяц число кроликов соответствует одному из чисел последовательности. Пусть число кроликов в первый месяц равно M_1, во второй – M_2 и так далее до M_n. Изначально $M_0 = 0$, далее при появлении первой пары в начале первого месяца $M_1 = 1$, происходит их рост и количество кроликов не меняется на момент начала второго месяца, лишь на третьем месяце с появлением первой рожденной пары $M_3 = 2$, на четвертом месяце вторая пара кроликов еще не дает новое потомство, а первая пара являет еще одну пару кроликов $M_4 = 3$. Дальнейший процесс показывает соотношения закономерности рождения потомства с числами Фибоначчи: число кроликов в каждом месяце равно сумме их количества в двух предыдущих месяцах $M_i = M_{i-1} + M_{i-2}$. На момент начала тринадцатого месяца, то есть по прошествию года количество кроликов оценивается суммой их количества в двенадцатом и одиннадцатом месяцах. Ответом является число 233.

Фибоначчи рассматривал задачу как одну из математических моделей идеального условия размножения, где кролики не умирали и при этом рождали двух крольчат разного пола строго каждый месяц. Сам того не подозревая, Фибоначчи создал первую в истории популяционную модель.

В зоологии числа Фибоначчи встречаются и у пчел [2]. Самка имеет двух родителей, самец же одного. Трутень рождается от матки непарным путем. Если проследить за родословной самца, то можно наткнуться на знакомую последовательность. У трутня один родитель матка, у которой, в свою очередь, два родителя. Матка снова имеет двух родителей, в то время как трутень одного и так далее. Соответственно, можно установить, что P_{n-1} – количество мужских особей в колене, P_n – количество женских особей в колене, P_{n+1} – количество всех особей в колене, где n – номер искомого колена генеалогии.

К числам Фибоначчи прибегают и при рассмотрении двух групп спиралей у растений, завивающиеся по часовой и против часовой стрелке. Количество спиралей в каждой такой группе представляет собой соседние числа Фибоначчи. Такую особенность можно заметить у хвоинок сосны, где спирали идут в вертикальном и горизонтальном направлениях, а также по диагонали; у семян шишек, расположенных в три ряда; у маргариток, ромашек и других сложноцветных, для которых характерно расположение цветков по спирали. Наиболее наглядными примерами являются количества семян в спиралях соцветий-корзинок подсолнуха, ветви и стебли в процессе создания новых посредством их удвоения.

Эпоха античности и эпоха Возрождения дали толчок к использованию чисел Фибоначчи в контексте золотого сечения в искусстве, архитектуре, скульптуре, дизайне и моделировании. Следы золотого сечения находят в Парфеноне, где размерные соотношения элементов близки к пропорциям золотого сечения. Работы Микеланджело и Леонардо да Винчи также пропитаны магическими числами.

В настоящее время числа Фибоначчи активно используются в брендинге. В логотипах просматривается всем известная спираль, тем самым создавая приятную глазу картинку. Часто прибегают к использованию круговой модели золотого сечения: система остается той же, только вместе квадратов выступают круги, диаметры которых равны числам Фибоначчи. В некоторых логотипах элементы располагаются по спирали, в других же используется комбинация кругов или квадратов нужных размеров с использованием наложения, пересечения, исключения и других элементарных операций.

Еще одной сферой применения чисел Фибоначчи является веб-дизайн. Сайт состоит из различных блоков таких, как хедер, футер, меню, сноска, секция, текст и др. UI-дизайнеры используют различные подходы к расположению элементов на странице, чтобы создать оптимальные условия использования сайта пользователем, один из которых – золотое сечение. Один из методов использования заключается в делении страницы на блоки, ширина и высота которых соответствует числам Фибоначчи. Деление страницы происходит вплоть до окон, кнопок, панелей, изображений, текста. Текст, в свою очередь, также можно отрегулировать в соответствии с необходимой пропорцией. Вторым методом является регулирование расположения элементов на веб-странице. Наиболее значимая информация располагается в центре спирали. Чем ближе спираль к центральным блокам, тем более сгруппирован контент.

В моделировании существует понятие решётки Фибоначчи – способ равномерного распределения точек на двухмерных и трехмерных объектах для произвольного количества точек [3]. Точки распределяются в прямоугольной системе координат внутри единичного квадрата согласно формуле (1), а затем накладываются на единичный диск либо сферу при помощи равноплощадных преобразований.

$$M_i = (x_i; y_i) = \left(\left\{\frac{i}{\varphi}\right\}; \frac{i}{n}\right), \tag{1}$$

где $M_i = (x_i; y_i)$ – координаты расположения точек внутри единичного квадрата;

i – произвольное число от 0 до n;

n – количество точек на ограниченной плоскости;

$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – отношение соседних чисел Фибоначчи.

В числах Фибоначчи также замечают свойства фракталов. Связь наблюдается через рекурренцию в качестве самоорганизующейся системы и дробную размерность. Некоторые связывают свойства чисел с нумерологией и магическим применением таблицы Пифагора в форме ведического квадрата.

В силу связи чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля последовательность пользуется популярностью и в комбинаторике. Рассмотрим тип задач, решение которых кроется в числах Фибоначчи.

Условие задачи: «Первокурсник поднимается по лестнице из n ступенек. За один раз он поднимается вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами студент может подняться по лестнице?» Для начала следует рассмотреть случаи с конечным числом ступенек. Пусть l_n – количество различных способов подняться по лестнице из n ступенек. В случае одной ступеньки $l_1 = 1$, когда студент просто поднимается вверх на 1 ступеньку; когда ступенек 2, первокурсник может подниматься каждый раз на одну ступеньку или за один раз подняться сразу на две и $l_2 = 2$.

Далее рассмотрим уже не такой очевидный случай для 3 ступенек лестницы. Можно заметить, что сначала лестницы первокурсник будет идти одним из уже описанных ранее способов для преодоления первой и второй ступенек, однако стоит учитывать, что на какие-то ступеньки в процессе подъёма студент не попадет. В случае, когда он наступает на 2 ступеньку лестницы, до третьей у него остается только одна ступенька, соответственно, количество способов $l = 2$. Остается еще один вариант, когда можно стоять на 1 ступеньке и подняться вверх сразу на две ступеньку. Учитывая количество способов подняться на первую ступеньку, получаем $l_3 = 1 + 2 = 3$.

Рассмотрев случаи для большего числа ступенек, можно заметить такую же закономерность: для подсчета способов подъёма на n ступенек необходимо сложить количество способов у двух предыдущих значений: $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$.

Числа Фибоначчи используют в программировании, как один из самых эффективных способов генерации псевдослучайных чисел. С появлением необходимости генерации больших массивов случайных чисел и мощной вычислительной техники запрограммировать случайные числа стало сложнее, чем кинуть монетку или бросить игральные кости. Компьютер не способен самостоятельно сгенерировать случайные числа, поэтому ученые нашли способ выводить псевдослучайные числа, которые все же имеют определенный алгоритм вывода и период повторения.

В экономике ряд Фибоначчи тоже имеет особое значение. Числа используют в биржевой торговле и финансах [4]. Многие инструменты оценки и прогнозирования изменения цен, анализа с целью поиска уровней коррекций, курса валют имеют в своем названии Фибоначчи. Анализ производится на основе построения линий, однако утверждается, что числа Фибоначчи не так эффективны для прогнозирования будущего рынка, как их применение относительно прошлых отношений, сложившихся на рынке. Также найдена закономерность между числами Фибоначчи и продолжительностью экономических циклов в рамках разных периодов и особенностей.

Ряд Фибоначчи всячески расширяли и дополняли, используя совершенно разные способы сложения элементов. Например, существует отрицательный ряд Фибоначчи в качестве начала для уже знакомых чисел. А также так называемые ряды «Трибоначчи», где последовательность описывается через сумму более двух элементов.

Хотелось бы напоследок затронуть тему шифрования букв алфавита и предложить способ, основанный на числах Фибоначчи. Для рассмотрения можно взять буквы русского алфавита. Первый вариант шифрования заключается в том, чтобы вместо порядкового номера присваивать букве последовательные числа Фибоначчи, начиная со второй единицы, чтобы не возникла проблема присвоения разным буквам одно и того же числа, как представлено в таблице 1.

Таблица 1 – Числовые значения букв алфавита, присвоенные в результате первого способа шифрования.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З
1	2	3	5	8	13	21	34	55
И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р
89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181
С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ
6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811
Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	–	–	–
514229	832040	1346269	2178309	3524578	5702887			

При таком варианте представления алфавита слово «университет» может быть записано таким численным значением: 17711987893134181676589109461310946.

В силу громоздкости такого варианта стоит представить второй способ шифрования на основе принципа сложения чисел. На первом этапе следует присвоить каждой букве свое порядковое значение, а затем изменить его на сумму предыдущих значений. Изменять значения удобнее с конца алфавита. Результат представлен в таблице 2.

Таблица 2 – Числовые значения букв алфавита, присвоенные в результате второго способа шифрования.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З
1→0	2→1	3→3	4→6	5→10	6→15	7→21	8→28	9→36
И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р
10→45	11→55	12→66	13→78	14→91	15→105	16→120	17→136	18→153
С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ
19→171	20→190	21→210	22→231	23→253	24→276	25→300	26→325	27→351
Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	–	–	–
28→378	29→406	30→435	31→465	32→496	33→528			

Если использовать второй вариант шифрования, слово «университет» можно представить уже следующим образом: 210105453151531714519015190. Число стало короче, однако все еще представляется большим количеством входящих в него цифр. Для еще большего упрощения можно считать сумму не всех порядковых номеров чисел, стоящих до данного чисел, а только сумму 2, 3 или 4 предыдущих.

Подводя итог, можно заметить, что числа Фибоначчи, изначально описанные как простая последовательность чисел, привнесла свой вклад в развитие многих предметных сфер современного научного сообщества. Числа Фибоначчи пользуются успехом при решении многих задач в области ботаники, зоологии, комбинаторике, физики, алгебры и геометрии. Решетка Фибоначчи используется в моделировании, позволяет выполнить огранку ювелирных камней с крайне высокой точностью, построить модель молекулярных решеток химических веществ. На основе фракталов строятся объекты, напоминающие ветви, в компьютерной графике. Числа Фибоначчи усовершенствовали экономику, программирование, веб-дизайн, кто знает, какие тайны, связанные с числами Фибоначчи, еще предстоит изучить.

Список использованных источников:

1. Воробьев, Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. – Изд. 5-е. – М. : Наука, 1984. – 8 с.

2. Златопольский Д. М. Числа Фибоначчи – не только кролики / Мир информатики – 2019. – №33. – С. 2–5.

3. Extreme Learning [Electronic resource] : How to evenly distribute points on a sphere more effectively than the canonical Fibonacci Lattice. – Mode of access: https://extremelearning.com.au/how-to-evenly-distribute-points-on-a-sphere-more-effectively-than-the-canonical-fibonacci-lattice/. – Date of access: 06.04.2024.

4. Подкорытов, В. Н. Экономические циклы и числа Фибоначчи [Электронный ресурс] / В. Н. Подкорытов // КиберЛенинка: Российская научная электронная библиотека. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/ekonomicheskie-tsikly-i-chisla-fibonachchi/viewer. – Дата доступа: 08.04.2024.