

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра физики

В. В. Аксенов, А. В. Березин, В. И. Мурзов

ФИЗИКА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для специальности 1-40 81 02 «Интеллектуальные вычислительные
комплексы, системы и компьютерные сети»*

УДК 537.811:004.7(076)
ББК 22.336я73+32.973.202я73
А42

Рецензенты:
кафедра технической физики Белорусского национального технического
университета (протокол №4 от 22.11.2014);

доцент кафедры компьютерного моделирования Белорусского
государственного университета, кандидат физико-математических
наук, доцент Г. Г. Крылов

Аксенов, В. В.

А42 Физика информационных систем : учеб.-метод. пособие / В. В. Аксенов,
А. В. Березин, В. И. Мурзов. – Минск : БГУИР, 2015. – 66 с. : ил.
ISBN 978-985-543-149-8.

Включает материалы по следующим темам: электрическое поле в вакууме и веще-
стве, магнитное поле в вакууме и веществе, использование сегнетоэлектриков и маг-
нитных материалов в информационных технологиях.

УДК 537.811:004.7(076)
ББК 22.336я73+32.973.202я73

ISBN 978-985-543-149-8

© Аксенов В. В., Березин А. В., Мурзов В. И., 2015
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2015

Содержание

Сегнетоэлектрики.....	4
Магнитное поле в веществе	13
Основные формулы для электрического поля в веществе	26
Основные формулы для магнитного поля в веществе	28
Примеры решения задач.....	29
Контрольная работа	57
Литература	65

Библиотека БГУИР

СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ

Существует группа веществ, которые могут обладать спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью в отсутствие внешнего поля. Это явление было первоначально открыто для сегнетовой соли, в связи с чем все подобные вещества получили название *сегнетоэлектриков*. Первое детальное исследование электрических свойств сегнетовой соли было осуществлено советскими физиками И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко. Мощная школа по изучению сегнетоэлектриков во главе с В. М. Варикашем работала в свое время при кафедре физики в БГУИР.

Сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков рядом характерных особенностей:

1. В то время как у обычных диэлектриков диэлектрическая проницаемость ϵ составляет несколько единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (у воды, например, $\epsilon = 81$), диэлектрическая проницаемость диэлектриков может быть порядка нескольких тысяч.

2. Зависимость P от E не является линейной (рис. 1). Следовательно, диэлектрическая проницаемость оказывается зависящей от напряженности поля.

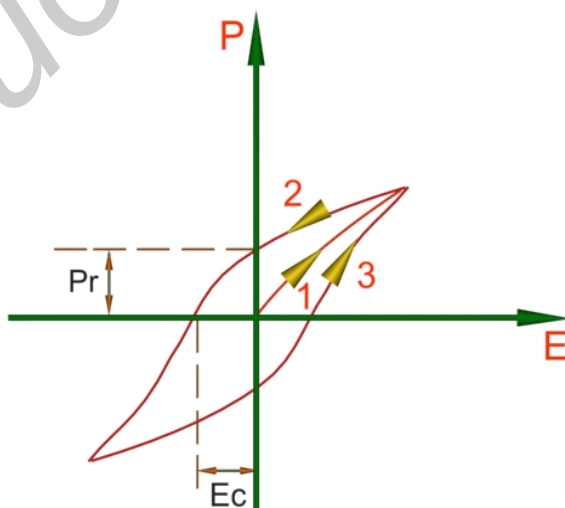


Рис. 1. Гистерезис

3. При изменении поля значения поляризованности P (а следовательно и D) отстают от напряженности E , в результате чего P и D определяются не только величиной E в данный момент, но и предшествующими значениями E , т. е. зависят от предыстории диэлектрика. Это явление называется гистерезисом (от греч. «гистерезис» – запаздывание).

При циклических изменениях поля зависимость P от E , изображенная на рис. 1 кривой, называется *петлей гистерезиса*. При первоначальном включении поля поляризованность растет с E в соответствии с ветвью 1 кривой. Уменьшение P происходит по ветви 2. При обращении E в нуль вещество сохраняет значение поляризованности P_r , называемое *остаточной поляризованностью*. Только под действием противоположно направленного поля напряженности E_c поляризованность становится равной нулю. Это значение напряженности называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем изменении E получается ветвь 3 петли гистерезиса и т. д.

Сегнетоэлектриками могут быть только кристаллические вещества, причем такие, у которых отсутствует центр симметрии. Так, например, кристаллы сегнетовой соли принадлежат к так называемой ромбической структуре. Взаимодействие частиц в кристалле сегнетоэлектрика приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В исключительных случаях одинаковая ориентация дипольных моментов распространяется на весь кристалл. Обычно же в кристалле возникают области, в пределах каждой из которых дипольные моменты параллельны друг другу, однако направления поляризации разных областей бывают различны, так что результирующий момент всего кристалла может быть равен нулю. Области спонтанной поляризации называются *доменами*. Под действием внешнего электрического поля моменты доменов поворачиваются как целое, устанавливаясь по направлению поля.

Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, при которой вещество утрачивает это необычное свойство и становится нормальным диэлектриком. Эта температура называется *точкой Кюри*. Сегнетова соль имеет две точки Кюри: $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $22\text{ }^{\circ}\text{C}$, причем она ведет себя как сегнетоэлектрик лишь в температурном интервале, ограниченном указанными значениями. При температурах вне этого интервала электрические свойства сегнетовой соли обычны.

Однако наибольшее многообразие возможностей открывает использование сегнетоэлектриков, т. е. веществ, кристаллическая структура которых допускает существование в некотором диапазоне температур и давлений спонтанной электрической поляризации, модуль и пространственная ориентация которой могут быть изменены под действием внешнего электрического поля. Сказанное поясняет рис. 1, где изображена характерная петля сегнетоэлектрического гистерезиса для значений температуры и давления из области существования сегнетоэлектрической фазы. Помимо электрически переключаемой спонтанной поляризации сегнетоэлектрики обладают целым спектром полезных для приложений физических свойств, среди которых особенно выделяются высокая, резко анизотропная и зависящая от внешнего электрического поля диэлектрическая проницаемость, прямой и обратный пьезоэлектрический, а также пироэлектрический эффекты. Уместно задать вопрос: «Почему же при таком многообразии уникальных свойств сегнетоэлектрики до сих пор получили столь узкое применение в микроэлектронике?». Ответ очень прост: сразу после их открытия инженеры проявляли интерес к этому классу веществ, но практическое использование в микроэлектронике оказалось невозможным из-за отсутствия технологии получения тонкопленочных сегнетоэлектрических материалов высокого качества с воспроизводимыми свойствами. И лишь в последнее десятилетие удалось добиться контролируемой совместимости тонких слоев сегнетоэлектриков с полупроводниковыми коммутационными матрицами в рамках планарной технологии полупроводниковых приборов. Такая интеграция, с одной стороны, открывает возможность создания целого ряда новых устройств,

а с другой – позволяет избежать дорогих и ненадежных гибридных конструкций.

В конце 50-х – начале 60-х годов были открыты сегнетоэлектрические материалы класса перовскитов, обладающие остаточной поляризацией, переключаемой внешним полем, и имеющие высокую диэлектрическую проницаемость. К сожалению, из-за отсутствия технологии получения тонких пленок таких материалов нанесение их на полупроводниковые подложки для создания энергонезависимой памяти было затруднено. Однако после появления в середине 80-х годов методов выращивания пленок высокотемпературных сверхпроводящих материалов оказалось, что их можно использовать и для получения тонких пленок сегнетоэлектриков. В связи с этим вновь возрос интерес к применению сегнетоэлектрических материалов в энергонезависимых устройствах памяти.

Принцип работы таких устройств состоит в следующем. Пленка сегнетоэлектрика содержит большое число доменов, обладающих определенным вектором электрической поляризации. Суммарная поляризация отдельных доменов дает самопроизвольную (спонтанную) поляризацию пленки. Модуль и пространственная ориентация спонтанной поляризации могут быть изменены при воздействии внешнего электрического поля. В сильных полях пленка становится однодоменной. Приложение сильного электрического поля противоположного направления на некотором участке поверхности может привести к переполяризации доменов сегнетоэлектрической пленки в границах этой площади, что поддается регистрации. Таким образом, эффект поляризации в сегнетоэлектрических пленках дает возможность создавать энергонезависимые устройства памяти, носителями информации в которых являются домены переполяризации. Такие устройства имеют ряд преимуществ перед традиционно используемыми магнитными и оптическими носителями информации.

Применение сегнетоэлектриков в микроэлектронике

В 1984 году Ramtron International – стремительно развивающаяся компания и мировой лидер в сфере разработки и производства электронных компонентов самого различного назначения по запатентованной технологии создания энергонезависимых сегнетоэлектрических ОЗУ (FRAM) выпустила первые коммерческие 4-килобитные FRAM. А совершенствование сегнетоэлектрических материалов привело к появлению коммерческих 256-килобитных FRAM на напряжение питания 3,0 В с высоким ресурсом по циклам записи/считывания (10^{16} – 10^{19}).

FRAM – оперативное энергонезависимое ЗУ, сочетающее высокое быстродействие и малую потребляемую мощность, присущие ОЗУ, со свойством хранения данных и в отсутствие приложенного напряжения, но без их периодического восстановления, что необходимо для схем постоянной памяти. Таким образом, в отличие от ОЗУ, FRAM не требует аварийного батарейного питания. В сравнении же с ЭСРПЗУ и флэш-памятью время записи данных в ЗУ этого типа и потребляемая им мощность намного меньше (менее 70 нс против нескольких миллисекунд), а ресурс по циклам записи намного выше (не менее 10^{11} против 10^5 – 10^6 циклов для ЭСРПЗУ). Объясняется это тем, что традиционные энергонезависимые микросхемы памяти представляют собой приборы с плавающим потенциалом затвора и операция записи требует высокого напряжения для «проталкивания» электронов через барьерный слой оксида. К тому же эта операция длительна, вызывает высокие механические напряжения в оксиде, что сокращает долговечность и ухудшает надежность прибора. Необычные и столь ценные свойства FRAM обеспечивает сегнетоэлектрик (перовскит), используемый в качестве диэлектрика накопительного конденсатора ячейки памяти. При этом сегнетоэлектрическое ЗУ хранит данные не только в виде заряда конденсатора (как в традиционных ОЗУ), но и в виде электрической поляризации кристаллической структуры сегнетоэлектрика. В отсутствие электрического поля подвижный атом удерживается высокоэнергетическим уровнем в

середине кристалла. В присутствии электрического поля подвижный атом перемещается в направлении этого поля. Схема считывания выполняет дампы содержимого памяти, сравнивает его с данными опорного устройства и регистрирует ячейку, заряд которой отличается от заряда опорного устройства (т. е. сформирован зарядом самого конденсатора и сегнетоэлектрического диэлектрика). Время изменения состояния сегнетоэлектрика составляет около 1 нс, время выборки данных менее 70 нс. Поскольку каждая операция считывания приводит к изменению состояния материала, схема памяти должна хранить это измененное состояние, что требует дополнительной операции – предварительной зарядки опорного конденсатора. Длительность этой операции менее 50 нс. При изменении направления электрического поля направление перемещения атома также изменяется. Но в отсутствие поля положение атома остается неизменным. Таким образом, сегнетоэлектрический кристалл имеет два стабильных состояния, которые могут соответствовать логическому 0 и логической 1. При этом разница в уровнях логического 0 и логической 1 намного больше, чем в запоминающем элементе ЭСПЗУ. Благодаря этому FRAM характеризуются повышенной устойчивостью к различным электромагнитным помехам, наводкам и излучениям, что в целом ряде применений оказывается их неоспоримым достоинством. Значения времени и мощности, требуемые для переключения между устойчивыми состояниями, малы. К тому же условия окружающей среды не оказывают сильного воздействия на параметры ЗУ. Операция записи аналогична операции считывания. Она проста и не требует непроизводительных задержек в отличие от ЭСПЗУ, нуждающихся в дополнительных программных циклах (формируемых управляющим микроконтроллером). Значения времени изменения состояния кристалла, доступа и предварительной зарядки – те же, что и при считывании. По значению времени записи FRAM намного превосходят ЭСПЗУ. Первые FRAM, выпущенные в 1993 году, имели 2Т/2С-архитектуру, на основе которой выполняется и большинство современных микросхем сегнетоэлектрической памяти. Ячейка такого типа, в которой каждому

биту соответствует индивидуальный опорный бит, позволяет определять разницу зарядов с высокой точностью. А благодаря считыванию дифференциального сигнала ячейки исключается влияние разброса параметров конденсаторов ячеек. В 2001 году на рынке появились FRAM с архитектурой 1Т/1С – 256-килобитные FM24C256 на напряжение 5 В с последовательным двухпроводным интерфейсом на частоту до 1 МГц. Достоинство микросхем с такой архитектурой – меньшая, чем в обычных схемах, площадь ячейки и, следовательно, меньшая стоимость микросхемы в пересчете на единицу хранимой информации.

Как уже указывалось, одна из важных отличительных особенностей FRAM – полное отсутствие каких-либо задержек при считывании и записи информации, выполняемых со скоростью передачи данных системной шины. Полный цикл считывания или записи занимает меньше времени, чем единственный тактовый цикл шины, так что любая операция может начинаться немедленно после цикла записи данных или адресации. Опроста для подтверждения окончания операции – техники, используемой в ЭСРПЗУ, – не требуется. Допустима и запись информации в FRAM-ячейки памяти в конвейерном режиме с использованием каналов прямого доступа к памяти и/или последовательных шин микроконтроллеров, обеспечивающих аппаратную поддержку передачи данных по шинам последовательного двухпроводного или периферийного (SPI) интерфейса.

Еще одна важная отличительная особенность FRAM – практически одинаковые токи, потребляемые в режимах считывания и записи. Так как напряжение, необходимое для записи информации, не превышает напряжения питания FRAM, мощность, потребляемая памятью в динамическом режиме, намного меньше, чем у любых ЭСРПЗУ. В результате и требования, предъявляемые к источнику питания микросхем, могут быть менее жесткими. Кроме того, благодаря возможности применения источника питания с низким напряжением, электромагнитный шум и помехи, генерируемые FRAM на шинах питания и интерфейса, намного меньше, чем у стандартных ЭСРПЗУ.

Методы получения сегнетоэлектрических пленок непрерывно развиваются и совершенствуются буквально в каждой лаборатории, но по основным чертам можно выделить четыре наиболее перспективных направления: магнетронное напыление, лазерную абляцию, химическое осаждение из газовой фазы металлоорганических соединений и золь-гель процесс. При магнетронном напылении атомы мишени выбиваются высокоэнергетическими ионами и осаждаются на поверхности подложки. Пленка растет довольно медленно и для больших площадей подложки может иметь значительные вариации микроструктуры и состава. В настоящее время разработаны многочисленные способы частичного преодоления этих трудностей, в результате чего качество пленок постоянно улучшается.

Другое активно развивающееся направление использования сегнетоэлектрических пленок в низкосимметричной фазе – микросхемы энергозависимой памяти. Запись информации осуществляется путем локального переключения внешним электрическим полем поляризации микроскопических доменов – ячеек памяти; в двоичном коде два противоположных направления вектора поляризации соответствуют значениям 0 или 1. Достоинствами подобных устройств являются: низкие управляющие напряжения; длительное время энергонезависимого хранения информации (не менее 5 лет); неизменность параметров при очень большом числе циклов запись – считывание ($> 10^{10} - 10^{12}$); высокая радиационная стойкость; высокая степень интеграции (минимальный размер домена значительно ниже предела разрешения процессов литографии). В настоящее время определились наиболее вероятные сегнетоэлектрические материалы для таких микросхем – это ЦТС (цирконат титанат свинца) и $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9$, предложенный фирмой "Symetrix". На базе этих материалов несколько фирм ("Matsushita", "Micron", "Symetrix", "Ramtron", "Seiko") начинают в ближайшее время выпуск микросхем небольшой степени интеграции (64–256 Кбит). Во всех этих разработках для считывания информации используется переключение поляризации электрическим полем, поэтому после считывания информации требуется ее регенерация. Для этого в запоминающую ячейку необходимо вво-

дить дополнительные элементы, что усложняет конструкцию и увеличивает топологические размеры. Кроме того, на сегнетоэлектрическую пленку накладываются весьма жесткие требования по числу циклов переключения поляризации ($>10^{12}$), что потребовало достаточно серьезных материаловедческих исследований. Имеется, однако, альтернативная возможность неразрушающего считывания, заключающаяся в использовании пироэлектрического эффекта. Если на сегнетоэлектрическую пленку нанести резистивный элемент, то при пропуске через него электрического тока в ячейке хранения за счет джоулева тепла возникнет пироэлектрический сигнал, а состояние поляризованности не изменится, т. е. считывание будет неразрушающим. Оценки показывают, что энергия считывания информации в такой микросхеме будет не слишком большой ($\sim 10^{-10}$ Дж/бит), а характерное время считывания – около 1 мкс. Такие параметры далеки от рекордных, но конструкция ячейки считывания существенно упрощается и по степени интеграции такая микросхема может приблизиться к DRAM. Не потребовалось долго искать сегнетоэлектрический материал для практической реализации такой микросхемы. Им оказался все тот же ЦТС! Исследования показали, что для пленок ЦТС петля пироэлектрического гистерезиса имеет вполне подходящий («квадратный») вид, а величина пироэлектрического коэффициента после некоторого спада сохраняется во времени. Таким образом, основные требования, предъявляемые к материалу для подобных запоминающих устройств, можно считать выполненными. Все рассмотренные выше варианты использования сегнетоэлектрических пленок в микросхемах памяти не требуют выхода за пределы стандартной планарной технологии, поэтому, естественно, на них распространяются все ограничения, присущие этой технологии. К их числу в первую очередь относятся ограничения по минимальным технологическим размерам и вероятностям отказа элемента, обуславливающие ограничения по степени интеграции. Минимальный размер, определяемый разрешением фотолитографии, составляет в лучшем случае 0,25 мкм.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Намагниченность, наблюдаемая в ферромагнетиках, гораздо больше, чем в парамагнетиках. Постоянные магниты обычно имеют поля порядка нескольких тысяч гаусс. Более характерной величиной является предельное значение намагниченности, т. е. магнитный момент, приходящийся на единицу объема, приобретаемый веществом в очень сильном поле. Эта величина называется намагниченностью насыщения. Можно оценить намагниченность насыщения железа. Предельная намагниченность, по-видимому, соответствует примерно двум выстроенным спином на атом. Поскольку большинство электронов в атоме группируются парами и не оказывают вообще никакого магнитного действия, то мы имеем дело, по существу, с полным выстраиванием тех электронных спинов в структуре атома, которые обладают возможностью свободно располагаться в одном и том же направлении.

Один из очень интересных фактов, касающихся ферромагнетиков, состоит в следующем: данное ферромагнитное вещество, например чистое железо, совершенно внезапно теряет свои ферромагнитные свойства при нагревании до определенной температуры. При температуре выше $770\text{ }^{\circ}\text{C}$ чистое железо ведет себя как парамагнитное вещество. При охлаждении же до температуры ниже $770\text{ }^{\circ}\text{C}$ его ферромагнитные свойства немедленно восстанавливаются. Эта переходная температура, называемая точкой Кюри, различна для разных веществ. Для чистого никеля она равна $358\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Что представляет собой «ферромагнитное свойство», которое так резко отличает железо при температуре ниже $770\text{ }^{\circ}\text{C}$ от железа при температуре выше $770\text{ }^{\circ}\text{C}$ и от меди при любой температуре? Это свойство заключается в *спонтанной* ориентации атомных магнитных моментов в одном направлении, которая сводится к выстраиванию осей спинов определенных электронов в каждом атоме железа. Понятие «*спонтанная*» подразумевает, что здесь не требуется наложение внешнего магнитного поля. В достаточно большом объеме железа, который содержит миллионы атомов, магнитные моменты почти всех атомов

направлены одинаково. Например, в железе при комнатной температуре, т. е. значительно ниже точки Кюри, выстраивание почти совершенно.

Что заставляет спины выстраиваться и что удерживает их в таком состоянии? По причине, связанной с квантовой механикой, спинам соседних атомов железа более выгодно с энергетической точки зрения, располагаться параллельно друг другу. Это не вызвано взаимодействием магнитных моментов, которое весьма слабо. Здесь играет роль взаимодействие значительно более сильное (так называемое обменное взаимодействие, не имеющее аналога в классической физике), которое благоприятствует параллельной ориентации спинов. Представим себе, что спин атома *A* (рис. 2) «хочет» быть направленным параллельно спину соседних с ним атомов *B*, *C*, *D*, *E* и каждый из них «предпочитает», чтобы направление его спина совпадало с направлением спинов его соседей, включая атом *A*.

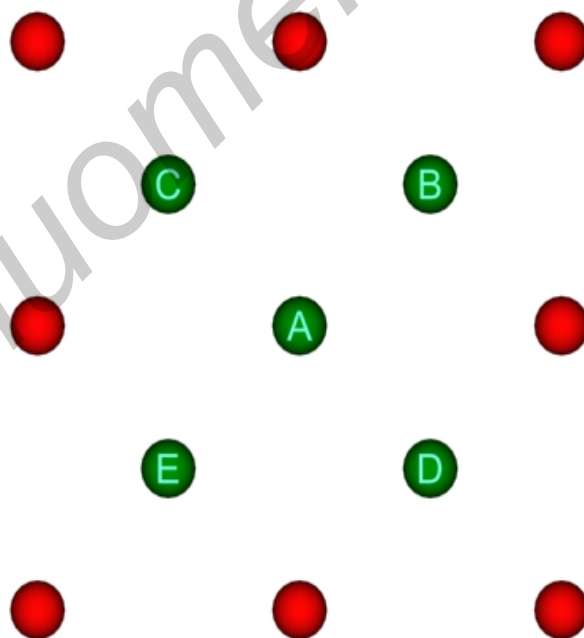


Рис. 2. Атом *A* и его ближайшие соседи в кристаллической решетке

Тогда легко понять, что как только образуется большинство, возникает сильная тенденция «сделать это единогласно».

Если начальное состояние является беспорядочным, например, если железо охлаждено ниже точки Кюри в отсутствие внешнего поля, то выбор одного из возможных направлений в кристалле случаен. Чистое железо построено из объемно-центрированных кубических кристаллов. Каждый атом имеет восемь ближайших соседей. Сама симметрия окружения оказывает влияние на физическое состояние атома, включая связи между спинами. В железе осями наиболее легкой намагниченности являются оси куба. Это значит, что спины стремятся расположиться в одном и том же направлении, но при этом предпочитают одно из шести. Из этого предпочтения следует, что ориентированным спинам не легко изменить данное направление на одно из эквивалентных ему направлений, которые расположены под прямым углом к данному (рис. 3).

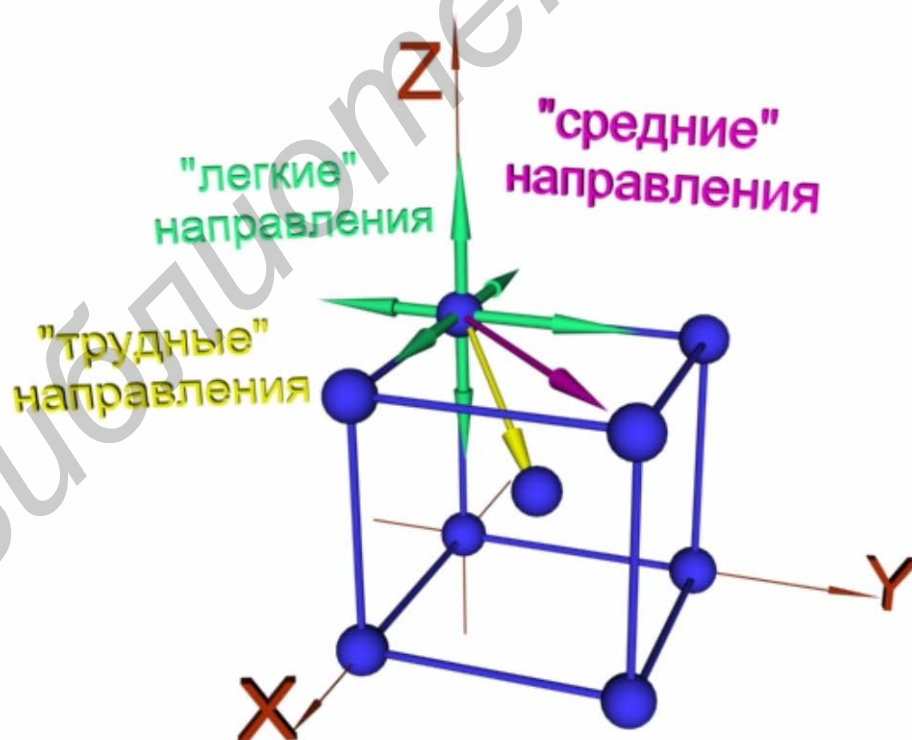


Рис. 3. Энергетически выгодное направление намагниченности в железе

Для этого спицам пришлось бы пройти через ряд менее предпочтительных направлений. Это как раз то препятствие, благодаря которому возможно существование постоянных магнитов. Кажущийся немагнитным кусок железа составлен в действительности из большого числа доменов, в каждом из которых все спины ориентированы одинаково, но направление их ориентации отличается от направлений спинов в соседних доменах. В среднем в куске железа одинаково представлены все направления, поэтому макроскопического магнитного поля не получается. Магнитные домены имеются даже в одиночном кристалле и являются микроскопическими образованиями; их можно увидеть даже через микроскоп со слабым увеличением. Но по атомным масштабам они огромны и содержат многие миллиарды элементарных магнитных моментов. Разделение вещества на домены происходит потому, что оно требует меньше энергии, чем расположение со спицами, ориентированными в одном направлении. Если намотать проволоку на железный стержень и пропустить по ней электрический ток, то мы можем создать магнитное поле. В этом поле магнитные моменты, параллельные полю, будут иметь меньшую энергию, чем моменты, антипараллельные полю или направленные как-нибудь иначе. Это дает преимущество некоторым доменам; те из них, которые обладают благоприятно ориентированными магнитными моментами, стремятся увеличиться за счет других, если это возможно. Домен «растет как ком», т. е. увеличивая число своих членов. Это происходит на границах. Спины, принадлежащие к неблагоприятно ориентированному домену, но расположенные на границе с благоприятно ориентированным доменом, проявляют солидарность, принимая благоприятное направление. Это сдвигает доменную границу, которая представляет собой разделяющую поверхность между двумя ориентациями спинов. В одиночных кристаллах сдвиги границ происходят довольно свободно. Таким образом, слабое приложенное поле может вызвать очень сильный рост доменов и, следовательно, большое общее изменение намагниченности. Если направление

приложенного поля не совпадает с одним из благоприятных направлений, то изменение формы (вытягивание) неблагоприятных доменов все же не дает моментам возможности расположиться точно параллельно полю. Для выстраивания моментов в одном направлении с полем и для получения максимально возможной намагниченности необходимо значительно более сильное поле. Рассмотрим последствия несовпадения направления приложенного поля с одним из «благоприятных» направлений в кристалле. Нас будет интересовать, как это отразится на магнитном поведении куска железа при различных приложенных полях. Для такого эксперимента удобно пользоваться железным тором, на который намотаны две катушки (рис. 4).

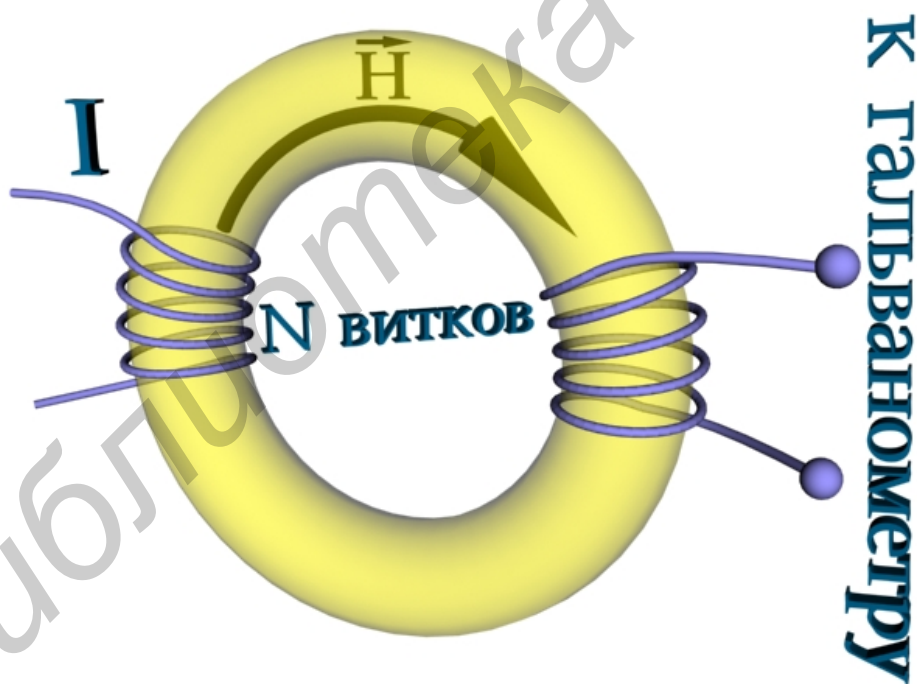


Рис. 4. Устройство для исследования соотношения между \vec{B} и \vec{H}

В этом случае в железе создается практически однородное поле без краевых эффектов, осложняющих ситуацию. Измеряя напряжение, индуцированное

в одной из катушек, мы можем определить изменение магнитного потока Φ и, следовательно, поле \vec{B} внутри железа. Если просуммировать изменения поля \vec{B} , начиная с $\vec{B} = 0$, мы всегда будем знать, чему оно равно. Ток, протекающий в другой катушке, определяет величину \vec{H} , которую мы примем за независимую переменную. Если нам известны \vec{B} и \vec{H} , мы всегда можем вычислить M (намагниченность). На графиках предпочитают изображать \vec{B} как функцию \vec{H} , а не \vec{M} . Типичная кривая намагничивания для железа изображена на рис. 5.

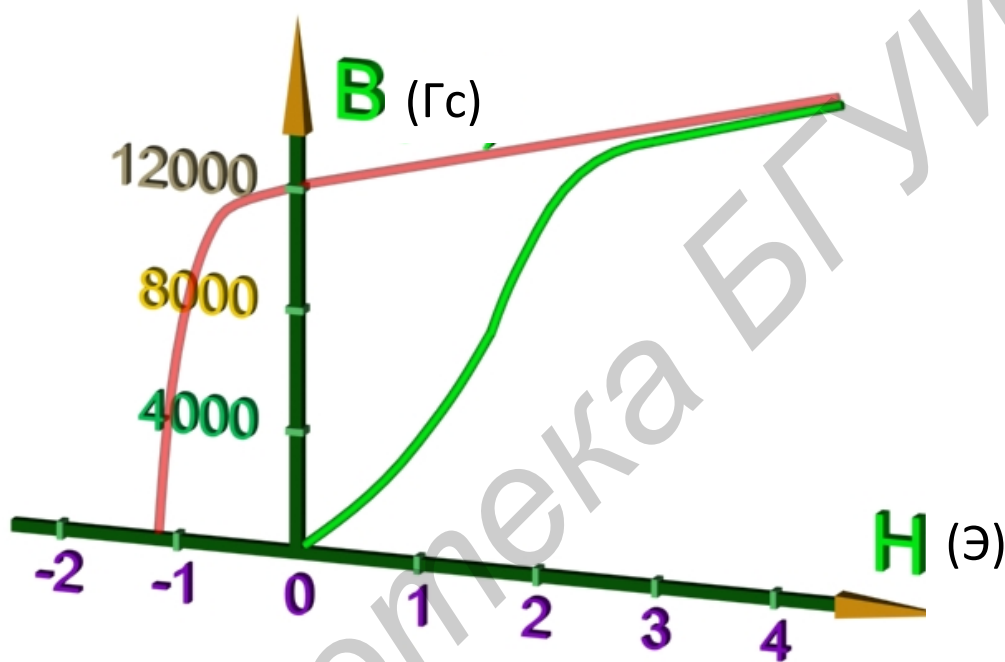


Рис. 5. Кривая намагничивания для чистого железа

В «ненамагниченном» железе $B = 0$ и $H = 0$. Увеличение H вызывает заметное нелинейное возрастание B , вначале медленное, потом более быстрое, затем очень медленное. В пределе постоянной оказывается намагниченность M , а не B . Однако на этой кривой, поскольку $M = B/\mu_0 - H$ и $H \ll B$, разница между M и B незаметна. Нижняя часть кривой $B-H$ зависит от движения доменных границ, т. е. от роста доменов, направленных благоприятно, за счет доменов, направленных «неблагоприятно». В верхней части кривой произошло поворота-

чивание магнитных моментов «грубой силой» в направлении, параллельном полю. Если мы теперь будем медленно уменьшать ток в катушке, тем самым уменьшая и H , то кривая не пойдет обратно по тому же самому пути. Вместо этого мы обнаружим поведение, указанное на рис. 5 верхней линией. Эта необратимость называется гистерезисом и объясняется в основном движением доменных границ, которое частично необратимо. Причины этого явления не следуют из вышесказанного, но хорошо понятны физикам, работающим в области ферромагнетизма. Намагниченный кусок железа или другого магнитного образца может сохранять намагниченность бесконечно долго. Благодаря явлению ферромагнетизма вся информация, записанная на магнитных пленках, от музыки до вычислительных программ может быть сохранена.

Использование магнитных материалов

Принято считать, что тонкой магнитной пленкой называется слой магнитного материала толщиной от нескольких ангстрем (\AA) до $10\ 000\ \text{\AA}$ ($1\ \text{\AA} = 10^{-10}\ \text{нм}$). До настоящего времени эти образцы являются объектом интенсивных исследований в России и за рубежом (США, Япония, ФРГ, Англия, Франция и др.). Ежегодно результаты изучения физических свойств пленок обсуждаются на международных и российских конференциях. Описанию их кристаллической структуры и свойств посвящаются многочисленные статьи, обзоры, монографии. Естественно возникает вопрос: «Чем же примечательны эти пленки? Почему к их исследованию проявляется такой интерес?». Прежде всего это связано с тем, что изучение физических свойств ферромагнитных пленок способствует решению фундаментальных проблем физики магнитных явлений, развитию теории ферромагнетизма. Исследование пленок позволяет получать новую и ценную информацию о магнитных свойствах ферромагнетиков, углублять наши знания по многим вопросам в области магнетизма. Например, изучение тонких пленок существенно расширило представления о физической природе анизотропии ферромагнетиков, позволило выявить и исследовать разнообразные процессы перемагничивания, обнаружить новые физические явления.

Одно из таких явлений – гигантское магнитосопротивление, которое привлекло особенно большое внимание и в последние несколько лет стало предметом всестороннего исследования. Также очень важно, что в пленках можно реализовать структурные состояния, которые трудно или невозможно получать в обычных (массивных или объемных) магнитных образцах. Это существенно расширяет возможности исследования связи между структурными характеристиками и физическими свойствами магнитных материалов. Изучение физических свойств тонких ферромагнитных пленок также актуально с точки зрения их практического применения в микроэлектронике и вычислительной технике. Важнейшим применением пленок является их использование в качестве магнитной среды для записи и хранения информации в запоминающих устройствах (ЗУ). Магнитные пленки имеют особенности, благодаря которым их использование способствует повышению плотности записи информации и быстродействия ЗУ. Запоминающие устройства должны обеспечивать надежное и длительное хранение информации, малое время доступа, низкую стоимость хранения единицы информации, высокую плотность и скорость записи. Чтобы отвечать этим требованиям, пленки должны обладать вполне определенным набором структурных и магнитных характеристик. Получить такие пленки можно, только зная механизмы формирования их свойств. Поэтому до настоящего времени не ослабевает интерес к исследованиям в этой области.

Что же представляет собой тонкая магнитная пленка? Как протекает процесс ее формирования? Каковы особенности ее свойств? В настоящее время существуют следующие методы получения тонких пленок: термическое испарение материала пленки в вакууме; катодное распыление; магнетронное распыление; ионно-плазменное распыление; электролитическое осаждение; молекулярно-лучевая эпитаксия с надежной аттестацией атомной и магнитной структуры. Чтобы лучше понять специфику тонких пленок, рассмотрим один из методов их получения подробнее.

Этот метод заключается в испарении металла или сплава в вакууме и конденсации его паров на поверхности пластинки (подложки). Качество и прочность пленок в большей степени зависят от чистоты подложки. Поэтому поверхность подложки предварительно полируется и тщательно очищается. Часто во время напыления подложка нагревается при помощи специального нагревателя до температуры 100–300 °С. При подогретой подложке частично снимаются внутренние напряжения в пленке и улучшается ее сцепление с подложкой. Подложки могут быть изготовлены из стекла, кварца, слюды и немагнитных металлов. В качестве подложки в некоторых случаях используются сколы монокристаллов поваренной соли NaCl. Простейшая схема установки для получения тонких магнитных пленок методом термического испарения металлов и сплавов в вакууме показана на рис. 6.

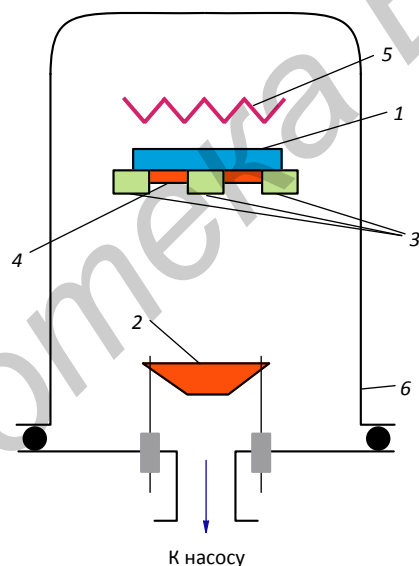


Рис. 6. Схема испарительной части вакуумной установки для получения пленок:

- 1 – подложка; 2 – лодочка с испаряемым сплавом; 3 – маска; 4 – пленка;
5 – нагреватель; 6 – корпус вакуумной камеры

Сплав или металл, который должен быть осажден на подложку 1, помещают в испаритель 2. В рассматриваемом случае он имеет форму лодочки, изготовленной из тугоплавкого металла, например вольфрама. Через лодочку пропускают электрический ток, пока она не приобретет достаточно высокую температуру, при которой исходный материал начинает плавиться. Пары от

расплавленного металла в виде атомарного пучка, распространяясь от лодочки, попадают на подложку 1 и осаждаются на ее поверхности, образуя слой в виде тонкой пленки (вакуумного конденсата). Если подложку предварительно поместить на пластинку (маску) с отверстиями 3, например круглыми, то в процессе конденсации на подложке образуются пленки, имеющие форму в виде круглых пятен, т. е. в соответствии с формой отверстий в маске. Таким образом, с помощью маски 3 можно придавать пленкам различные размеры и форму.

Вся система помещается в вакуумную камеру 6, откачанную до достаточно высокого вакуума. Вакуум должен быть таким, чтобы атомы металла не сталкивались с молекулами остаточного газа при своем движении к подложке, т. е. их траектории должны быть прямолинейными. Это условие выполняется, если в камере создается давление порядка 10^{-5} мм рт. ст. В этом случае расстояние от испарителя до подложки достаточно мало по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул газа и большая часть атомов металла будет достигать подложки, не испытывая столкновений с молекулами остаточного газа. Такой вакуум легко получить в обычной лабораторной вакуумной установке. При осаждении паров на подложку происходит переход атомов металла из паровой фазы в конденсированное состояние. Рассмотренный метод позволяет получать пленки разной толщины.

Поскольку электрон имеет два магнитных момента, важно установить, какой из них определяет магнитные свойства ферромагнетиков. Специально проведенные опыты показали, что в металлах группы железа (Fe, Ni, Co) основной вклад в магнитный момент атома вносят спиновые магнитные моменты. Атомы этих металлов имеют незаполненные электронные *d*-оболочки. В этих оболочках число электронов со спинами одного направления не равно числу электронов, имеющих спины, направленные антипараллельно. В результате в *d*-оболочках часть спиновых магнитных моментов остается нескомпенсированной. Их векторная сумма и определяет магнитный момент атома. Остается рассмотреть причины, определяющие одно из основных свойств ферромагнети-

ков – их способность сильно намагничиваться в относительно слабых магнитных полях. В ферромагнитных металлах между d -электронами соседних атомов существует квантовое электростатическое взаимодействие, благодаря которому спиновые магнитные моменты электронов ориентируются параллельно друг другу. Квантовомеханические расчеты показывают, что в этом случае состояние системы электронов является энергетически выгодным. Силы взаимодействия между электронами, имеющие квантовую природу, называются обменными силами. Такое название они получили потому, что в процессе взаимодействия d -электроны соседних атомов как бы обмениваются местами. Эти силы поддерживают параллельность спиновых магнитных моментов в отдельных малых областях ферромагнетика. Поэтому каждая область является намагниченной до насыщения и имеет определенный результирующий магнитный момент. Магнитный момент единицы объема ферромагнетика называется намагниченностью. Так как рассмотренные области намагничиваются до насыщения без участия внешнего магнитного поля, они называются областями самопроизвольной намагниченности, или доменами. В ненамагниченном состоянии ферромагнетик бывает разбит на множество доменов, имеющих различную ориентацию намагниченности. Поэтому результирующий магнитный момент всего магнитного образца может быть равен нулю. При помещении ненамагниченного ферромагнетика во внешнее магнитное поле магнитные моменты доменов начинают ориентироваться в направлении этого поля. Ферромагнетик в целом приобретает магнитный момент, равный векторной сумме магнитных моментов всех доменов. Происходит намагничивание образца. При возрастании внешнего магнитного поля процесс будет продолжаться, пока весь объем ферромагнетика не превратится в один большой домен. Поскольку области самопроизвольной намагниченности являются намагниченными еще до действия внешнего магнитного поля, намагничивание ферромагнетика происходит в относительно слабых магнитных полях. Когда векторы намагниченности всех доменов приобретают направление, совпадающее с ориентацией внешнего магнитного поля,

наступает так называемое техническое насыщение. Известно большое число различных ферромагнитных материалов, используемых в технике. Ограничимся рассмотрением поликристаллических пленок, полученных из хорошо известных ферромагнетиков (железо, никель, кобальт) и их сплавов. Как уже отмечалось, физические свойства вещества в виде пленки могут существенно отличаться от свойств этого вещества в обычном (массивном) состоянии. Рассмотрим некоторые особенности тонких магнитных пленок и причины, которые их обуславливают. Прежде всего следует отметить, что пленки можно рассматривать как образцы, обладающие двумерной геометрией, т. е. малым отношением толщины пленки d к ее линейным размерам. Например, если диаметр круглой пленки $D = 1$ мм, а толщина $d = 100$ нм, то отношение

$$d / D = 10^{-4}.$$

При такой геометрической форме образца энергетически выгодным становится состояние пленки, при котором векторы намагниченности при отсутствии внешнего магнитного поля лежат в плоскости пленки. Благодаря этому для намагничивания пленки в ее плоскости необходимо приложить магнитное поле, значение напряженности которого значительно меньше, чем для случая, когда пленка намагничивается по нормали к ее плоскости. То есть процесс намагничивания тонких пленок существенно зависит от направления, в котором приложено внешнее магнитное поле. Таким образом, специфика геометрической формы пленок приводит к образованию анизотропии формы. При этом все направления в плоскости пленок эквивалентны (пленка обладает плоскостной магнитной анизотропией). Такая особенность пленок играет большую роль при их использовании в качестве среды для продольной магнитной записи в ЗУ. Пленка играет роль рабочего слоя носителя магнитной записи (например в магнитном диске). В пленках наряду с анизотропией формы существуют и другие виды анизотропии, создание которых обусловлено рядом причин. Если к пленке в процессе ее формирования приложить магнитное поле, то в ней возникает одноосная магнитная анизотропия. В плоскости поликристаллической пленки,

например имеющей форму круглого пятна, становится энергетически выгодной не любая ориентация векторов намагниченности, а только такая, при которой намагниченность пленки направлена вдоль одного преимущественного направления. Ось, совпадающая с этим направлением, называется осью легкого намагничивания (ОЛН). При этом векторы намагниченности M могут ориентироваться вдоль ОЛН как в одном, так и в противоположном направлении. Оба эти направления являются одинаково устойчивыми. ОЛН, как правило, совпадает с направлением намагниченности пленки, которое определяется ориентацией внешнего магнитного поля, приложенного в процессе формирования пленки. На анизотропию влияют различные факторы: кристаллическая структура пленки, упругие напряжения, преимущественная ориентация пар атомов определенного сорта в сплаве, например пар атомов железа в железоникелевом сплаве. При отклонении магнитного момента намагниченной пленки от ОЛН ее энергия возрастает. Изменение энергии W пленки при отклонении намагниченности от ОЛН имеет вид

$$W = kV\sin\varphi,$$

где k – постоянная анизотропии; V – объём пленки; φ – угол между направлением намагниченности и ОЛН.

Ось, перпендикулярная ОЛН ($\varphi = 90^\circ$), называется осью трудного намагничивания (ОТН). При ориентации векторов намагниченности вдоль ОТН энергия одноосной анизотропии максимальна. Анизотропия является важнейшим свойством ферромагнитных материалов и оказывает существенное влияние на процессы перемагничивания, коэрцитивную силу и другие физические характеристики пленок. В пленках при некоторых условиях (наличие ориентированных упругих напряжений, столбчатой структуры и др.) может сформироваться ОЛН, направленная перпендикулярно к ее плоскости. Анизотропия таких пленок называется перпендикулярной. Пленки с перпендикулярной анизотропией могут использоваться в запоминающих устройствах с вертикальным способом записи. В этом случае локальные участки пленки, выполняющей роль рабочего

слоя магнитного носителя, перемагничиваются не в ее плоскости, а в направлении, перпендикулярном к поверхности носителя. Последовательность таких локальных участков малого размера представляет записанную цифровую информацию. Ориентация намагниченности по нормали к плоскости пленки обеспечивает малые размеры перемагниченных участков и, следовательно, высокую информационную емкость магнитных носителей.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

Связь между вектором электрического смещения \vec{D} и напряженностью электрического поля \vec{E} в кристаллическом диэлектрике в наиболее общем виде задается выражением

$$\vec{D} = \vec{D}_s + \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \vec{E}, \quad (1)$$

где \vec{D}_s – постоянный вектор; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ ф/м – электрическая постоянная; $\hat{\varepsilon}$ – симметричный тензор второго ранга, представляемый в декартовой системе координат $\{x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3\}$ симметричной матрицей 3×3 :

$$\|\hat{\varepsilon}\| = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

так что

$$D_i = D_{si} + \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j,$$

где $i, j = 1, 2, 3$, а по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование,

т. е. $\varepsilon_{ij} E_j = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j$ (правило Эйнштейна).

Тензор $\hat{\varepsilon}$ называют тензором диэлектрической проницаемости (или, короче, диэлектрическим тензором) среды.

Как известно, всякую симметричную матрицу путем подходящего поворота координатных осей можно привести к диагональному виду. Поэтому в общем случае тензор $\hat{\varepsilon}$ определяется тремя независимыми величинами – тремя главными значениями $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}$. Все эти величины всегда больше единицы.

В зависимости от той или иной симметрии кристалла число различных главных значений может оказаться и меньше трех. В кристаллах триклинной, моноклинной и ромбической систем, называемых в связи с их оптическими свойствами также *двухосными*, все три главных значения диэлектрического тензора различны. В кристаллах тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной систем (*одноосные* кристаллы) два из трех главных значений совпадают. Наконец, в кристаллах кубической системы все три главных значения совпадают. Это значит, что диэлектрические свойства таких кристаллов определяются одной скалярной величиной ε , называемой *диэлектрической проницаемостью* среды, и по своим диэлектрическим свойствам кристаллы кубической симметрии ничем не отличаются от изотропных тел. Наличие в выражении (1) постоянного члена \vec{D}_s означает, что диэлектрик спонтанно (самопроизвольно) поляризован и в отсутствие внешнего электрического поля. Такие диэлектрики называют *пироэлектриками*. Среди различных кристаллических модификаций одного и того же вещества могут быть как пироэлектрические, так и непироэлектрические. Если переход между такими модификациями совершается путем фазового перехода второго рода, то вблизи точки перехода вещество обнаруживает ряд своеобразных свойств, отличающих его от обычных пироэлектриков. Эти свойства называют сегнетоэлектрическими, а тела, обладающие такими свойствами, – *сегнетоэлектриками*. В частности, зависимость электрического смещения \vec{D} от напряженности \vec{E} в сегнетоэлектриках является нелинейной и обладает важным с информационной точки зрения свойством *гистерезиса*. Величина спонтанной поляризации, однако, фактически всегда очень мала. Это обстоятельство связано с тем, что большие значения модуля \vec{D}_s приводили бы к существованию сильных полей внутри тела, что энергетически весьма невыгодно и поэтому не могло бы соответствовать термодинамическому равновесию.

В основе описания электростатического поля в диэлектриках лежат уравнения

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0},$$

или, используя оператор набла $\vec{\nabla}$,

$$(\vec{\nabla}, \vec{D}) = \rho, \quad [\vec{\nabla}, \vec{E}] = \vec{0}.$$

Из них следуют граничные условия, связывающие значения D_{1n} и D_{2n} нормальной составляющей $D_n = (\vec{D}, \vec{n})$ вектора электрического смещения и значения $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ тангенциальной составляющей $E_\tau = (\vec{E}, \vec{\tau})$ вектора напряженности электрического поля в любой точке границы раздела двух сред при предельном переходе к этой точке соответственно в среде 1 и среде 2:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.$$

В приведенных формулах ρ и σ – объемная и поверхностная плотности сторонних зарядов, \vec{n} и $\vec{\tau}$ – единичные векторы нормали и касательной к границе раздела двух сред (вектор \vec{n} по определению направлен из среды 1 в среду 2), а круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

При помещении вещества во внешнее магнитное поле \vec{B}_0 оно приобретает магнитный момент – намагничивается. Степень намагничивания магнетика характеризуется *намагниченностью*

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m,$$

равной магнитному моменту единицы объема вещества. Намагничивание вещества приводит к возникновению *токов намагничивания* (молекулярных токов), которые являются суммой молекулярных токов отдельных молекул. Для намагниченности справедлива теорема о циркуляции:

$$\oint_L (\vec{M}, d\vec{l}) = I', \quad [\vec{\nabla}, \vec{M}] = \vec{j}',$$

где I' и \vec{j}' – ток намагничивания и его плотность.

Токи намагничивания создают дополнительное магнитное поле \vec{B}' . Индукция \vec{B}' может быть найдена на основании закона Био – Савара. Результирующее поле $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ создается как макроскопическими токами, так и токами намагничивания. Теорема о циркуляции для напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

включает только токи проводимости

$$\oint_{(l)} (\vec{H}, d\vec{l}) = I, \quad [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j}.$$

При определенных условиях выполняется соотношение $\vec{M} = \chi \vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость. Тогда

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu\mu_0\vec{H},$$

где $\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость вещества.

На границе раздела двух магнетиков выполняются граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих полей

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N, \quad M_{2\tau} - M_{1\tau} = i'_N,$$

где индекс N обозначает проекцию вектора на направление $\vec{N} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$.

Граничные условия в векторном виде с учетом токов проводимости, протекающих по границе раздела магнетиков:

$$(\vec{n}, (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)) = 0, \quad [\vec{n}, (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \vec{i}, \quad [\vec{n}, (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)] = \vec{i}'.$$

Здесь \vec{n} – вектор нормали к границе раздела магнетика, направленный из первой среды во вторую; \vec{i}, \vec{i}' – плотность поверхностных токов проводимости и намагничивания.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Точечный заряд q , находящийся в полубесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε_2 , расположен на расстоянии h от плоской границы, отделяющей эту среду от другого полубесконечного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1 . Найти: 1) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на границе раздела сред как функцию расстояния l от точечного заряда q ; 2) полную величину Q' связанного заряда.

Для решения задачи воспользуемся *методом изображений*. Этот метод применим в тех задачах, где нужно найти поле одного или нескольких точечных зарядов при наличии граничных поверхностей. Его суть состоит в надлежащем подборе системы точечных зарядов, называемых *зарядами-изображениями*, имеющих такую величину и так расположенных вне области расположения заданных зарядов, что их действие обеспечивает требуемые граничные условия.

Решение. Примем граничную поверхность за плоскость $z=0$ (рис. 7). При этом единичный вектор нормали $\vec{n} = \vec{e}_z$. Точечный заряд q находится в точке с координатами $(0,0,h)$. Поскольку на границе раздела $\sigma = 0$, а при нашем выборе системы координат $D_{1n} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \varepsilon_1 E_z$, $D_{2n} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \varepsilon_2 E_z$, $E_{1\tau} = \lim_{z \rightarrow 0^-} E_x$ (или E_y), $E_{2\tau} = \lim_{z \rightarrow 0^+} E_x$ (или E_y), то будем искать решение, удовлетворяющее граничным условиям $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$, $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$, записанным в виде

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix}.$$

При использовании метода изображений поместим заряд – изображение q' в зеркально симметричную точку с координатами $(0,0,-h)$. Тогда в области $z > 0$ потенциал поля зарядов q и q' в точке с радиусом-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$ определяется выражением $\varphi(\vec{r}) = \frac{k}{\varepsilon_2} \left(\frac{q'}{R'} + \frac{q}{R} \right)$, где $k = 1/4\pi\varepsilon_0$,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (h - z)^2}, \quad R' = \sqrt{x^2 + y^2 + (h + z)^2}.$$

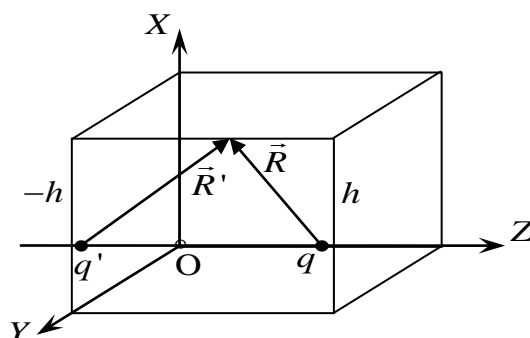


Рис. 7. Метод зеркального отображения

Предположим теперь, что потенциал в области $z < 0$ эквивалентен потенциалу некоторого фиктивного заряда q'' , расположенного в точке с координатами $(0, 0, h)$, где находится истинный заряд:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k q''}{\varepsilon_1 R}.$$

Тогда, учитывая равенство $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$, для нормальных составляющих вектора напряженности электрического поля в областях $z > 0$ и $z < 0$ получаем

$$E_z(\vec{r})\Big|_{z>0} = -\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}\Big|_{z>0} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{\varepsilon_2} \left(\frac{q'}{R'} + \frac{q}{R} \right)\Big|_{z>0},$$

$$E_z(\vec{r})\Big|_{z<0} = -\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}\Big|_{z<0} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{\varepsilon_1} \left(\frac{q''}{R} \right)\Big|_{z<0}.$$

Учитывая теперь условие на границе $\lim_{z \rightarrow 0^+} \varepsilon_2 E_z = \lim_{z \rightarrow 0^-} \varepsilon_1 E_z$, а также

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{h-z}{(x^2 + y^2 + (h-z)^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R'} \right) = -\frac{h+z}{(x^2 + y^2 + (h+z)^2)^{3/2}},$$

находим первое уравнение для определения q' и q'' :

$$q' + q'' = q.$$

Далее, поскольку также в соответствии с условием непрерывности

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x},$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right)\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R'} \right)\Big|_{z=0} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + h^2)},$$

приходим ко второму уравнению для q' и q'' :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} q'' - q' = q.$$

Теперь для зарядов очевидно получаем

$$q'' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad q' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q.$$

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов на границе раздела сред определяется граничным условием

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

где P_{1n} и P_{2n} – значения нормальной составляющей $P_n = (\vec{P}, \vec{n})$ вектора поляризованности в любой точке границы раздела двух сред при предельном переходе к этой точке соответственно в среде 1 и среде 2.

Но в изотропной среде векторы \vec{P} и \vec{E} связаны соотношением

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}$$

и поэтому $P_{1n} = \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) \lim_{z \rightarrow 0^-} E_z$, а $P_{2n} = \varepsilon_0 (\varepsilon_2 - 1) \lim_{z \rightarrow 0^+} E_z$. Следовательно, окончательно будем иметь

$$\sigma' = \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Расстояние l от точечного заряда q до любой точки плоскости $z = 0$ определяется формулой $l = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$ и, следовательно,

$$\sigma'(l) = \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{h}{l^3}.$$

Полный связанный заряд Q' на границе раздела диэлектриков $z = 0$ определяется поверхностным интегралом

$$Q' = \int_{(z=0)} \sigma' ds.$$

Для его вычисления введем на плоскости $z = 0$ полярные координаты $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$. Тогда $x^2 + y^2 = \rho^2$, $ds = \rho d\rho d\phi$ и находим

$$Q' = \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)h}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Ответ: 1) $\sigma'(l) = \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{h}{l^3}$; 2) $Q' = \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$.

Пример 2. Шар радиусом R из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε помещен в вакууме в первоначально однородное электрическое поле, напряженность которого на больших расстояниях от шара направлена вдоль

оси z и равна по модулю E_0 . Найти: 1) напряженность электрического поля внутри и вне шара; 2) поверхностную плотность связанных зарядов.

Решение. Для решения задачи воспользуемся соотношением

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}).$$

Поскольку ε не меняется, а внутри и вне шара сторонних зарядов нет, то потенциал электрического поля всюду удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$$

с граничными условиями на поверхности сферы, как в предыдущей задаче. Эти условия, принимая во внимание аксиальную симметрию задачи, удобно сформулировать в сферических координатах, так как в них $E_r = -\partial\varphi/\partial r$, $E_\theta = -(1/r)\partial\varphi/\partial\theta$, $E_\phi = -(1/r\sin\theta)\partial\varphi/\partial\phi = 0$. Тогда, учитывая, что на поверхности шара $E_r = E_n$, $E_\theta = E_\tau$, а $\sigma = 0$, соответственно получаем

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow R+0} \frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

$$\lim_{r \rightarrow R-0} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \lim_{r \rightarrow R+0} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.$$

Кроме того, так как по условию поле на больших расстояниях от шара однородно, нужно учитывать асимптотическое условие

$$\varphi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 z = -E_0 r \cos\theta.$$

Три последних соотношения представляют собой граничные условия, с которыми нужно решать уравнение Лапласа, принимающего в сферических координатах с учетом независимости потенциала $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r, \theta)$ от азимутального угла ϕ , следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial\varphi(r, \theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\varphi(r, \theta)}{\partial\theta^2} \right) = 0.$$

Ищем решение этого уравнения в виде произведения

$$\varphi(r, \theta) = f(r)F(\theta).$$

Тогда получаем

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} F(\theta) + \frac{2}{r} \frac{df(r)}{dr} F(\theta) + \frac{f(r)}{r^2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dF(\theta)}{d\theta} + \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} \right) = 0,$$

откуда очевидно следует

$$\frac{r^2}{f(r)} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2r}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} = - \frac{1}{F(\theta)} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dF(\theta)}{d\theta} + \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} \right).$$

Поскольку переменные r и θ независимые, то равенство возможно, если обе его части равны некоторой константе λ , т. е.

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2r \frac{df(r)}{dr} - \lambda f(r) &= 0, \\ \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dF(\theta)}{d\theta} + \lambda F(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет при значениях $\lambda = l(l+1)$, где $l = 0, 1, 2, \dots$, бесчисленное множество решений $F(\theta) = P_l(\cos \theta)$, называемых *полиномами Лежандра*. Если ввести переменную $t = \cos \theta$, то

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l.$$

Уравнение для $f(r)$ при $\lambda = l(l+1)$ имеет для каждого значения l , как легко проверить, два частных линейно независимых решения r^l и $r^{-(l+1)}$. Таким образом, всюду конечное и непрерывное решение уравнения можно представить в виде

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), & 0 \leq r \leq R, \\ \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta), & r > R. \end{cases}$$

Из асимптотического условия находим, что *единственным* отличным от нуля коэффициентом B_l является $B_l = -E_0$. Остальные коэффициенты разложения определяются из граничных условий для производных от потенциала:

$$\begin{aligned} A_l &= B_l + C_l R^{-(2l+1)}, \\ A_l &= \frac{2l+1}{(\varepsilon+1)l+1} B_l, \end{aligned}$$

$$C_l = \frac{(1-\varepsilon)lR^{2l+1}}{(\varepsilon+1)l+1} B_l.$$

Поскольку $B_1 = -E_0$, а для всех $l \neq 1$ $B_l = 0$, то отличными от нуля коэффициентами в разложениях являются

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon+2}$$

и

$$C_1 = \frac{(\varepsilon-1)E_0}{\varepsilon+2} R^3.$$

В результате решение для потенциала имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{3}{\varepsilon+2} E_0 r \cos \theta, & 0 \leq r \leq R, \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2} E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & r > R. \end{cases}$$

Для того чтобы записать полученный результат в виде, не зависящем от выбора системы координат, введем в рассмотрение вектор

$$\vec{p} = \frac{1}{k} \frac{(\varepsilon-1)E_0 R^3}{(\varepsilon+2)} \vec{e}_z,$$

где $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, а \vec{e}_z — орт координатной оси z .

Легко заметить, что \vec{p} имеет размерность электрического дипольного момента. Учитывая также то, что вектор \vec{E}_0 направлен вдоль оси z , выражение для потенциала можно представить в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{3}{\varepsilon+2} (\vec{E}_0, \vec{r}), & 0 \leq r \leq R, \\ -(\vec{E}_0, \vec{r}) + k \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}, & r > R, \end{cases}$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Используя соотношение $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$ для напряженности поля, получим

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0, & 0 \leq r \leq R, \\ \vec{E}_0 - \frac{k}{r^3} \left(\vec{p} - \frac{3(\vec{p}, \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right), & r > R, \end{cases}$$

Таким образом, поле внутри шара является однородным, а вне шара представляет собой суперпозицию внешнего поля и поля, эквивалентного полю точечного диполя, расположенного в начале координат.

Вектор поляризованности шара $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}$ имеет вид

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0,$$

и, следовательно, поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P_n = \left(\vec{P}, \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \frac{(\vec{E}_0, \vec{r})}{r}.$$

Ответ: 1) $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0, & 0 \leq r \leq R, \\ \vec{E}_0 - \frac{k}{r^3} \left(\vec{p} - \frac{3(\vec{p}, \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right), & r > R, \end{cases}$; 2) $\sigma' = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \frac{(\vec{E}_0, \vec{r})}{r}$.

Пример 3. Заряды на двух concentрических тонких проводящих сферических оболочках с внутренним и внешним радиусами a и b равны $q > 0$ и $-q$ соответственно. Пространство между оболочками наполовину заполнено слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 8). Найти: 1) напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ между проводящими оболочками; 2) распределение заряда на поверхности внутренней оболочки; 3) плотности связанных зарядов на поверхностях диэлектрика $r = a$ и $r = b$.

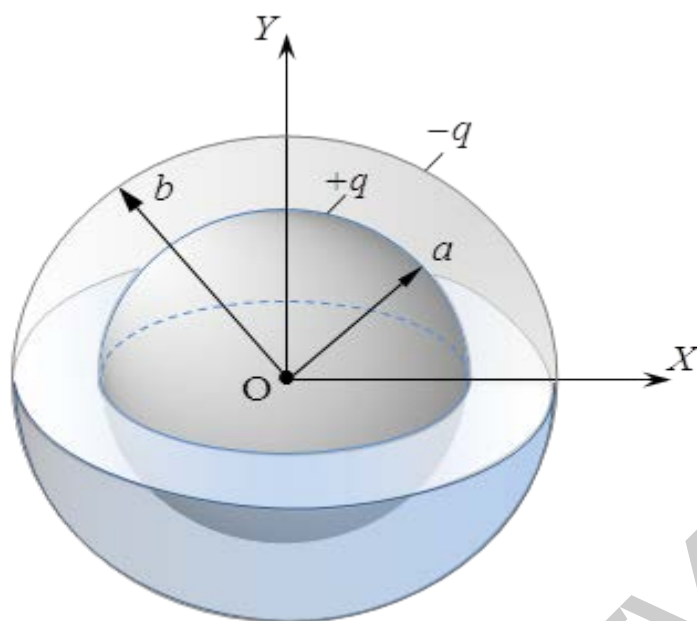


Рис. 8. Поле внутри сферической оболочки

Решение. Если из области пространства между проводящими сферическими оболочками удалить диэлектрик, то электрическое поле в этой области будет очевидно сферически симметричным. Внесение в нее диэлектрика любой формы вызовет перераспределение в оболочках свободных зарядов и приведет их к новому равновесному состоянию, при котором сферические оболочки станут эквипотенциальными. Следовательно, электрическое поле между ними будет снова сферически симметричным. Ясно, что при этом граничные условия для E_r и D_n на плоской границе, разделяющей пустое и занятое диэлектриком полупространства между проводящими оболочками, будут выполнены автоматически. Тогда для любой концентрической сферы S радиусом r в области $a < r < b$ в соответствии с теоремой Гаусса можно записать

$$\oint_{(S)} D_r dS = \varepsilon_0 E_r(\vec{r}) 2\pi r^2 + \varepsilon_0 \varepsilon E_r(\vec{r}) 2\pi r^2 = q,$$

откуда находим

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})(\vec{r}/r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + 1)r^3} \vec{r}.$$

Проекции векторов электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ и поляризованности $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}$ на внешнюю нормаль к поверхности проводника и диэлектрика равны $D_n = \sigma$ и $P_n = \sigma'$ соответственно. Но $D_n(\vec{r})|_{r=a} = D_r(\vec{r})|_{r=a}$, тогда как $P_n(\vec{r})|_{r=a} = -P_r(\vec{r})|_{r=a}$, а $P_n(\vec{r})|_{r=b} = P_r(\vec{r})|_{r=b}$. Учитывая это, получим

$$\sigma = \begin{cases} \frac{q}{2\pi(\varepsilon+1)a^2} & \text{для верхней полусферы,} \\ \frac{\varepsilon q}{2\pi(\varepsilon+1)a^2} & \text{для нижней полусферы.} \end{cases}$$

$$\sigma' = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)q}{2\pi(\varepsilon+1)a^2}, & r = a, \\ \frac{(\varepsilon-1)q}{2\pi(\varepsilon+1)b^2}, & r = b. \end{cases}$$

Таким образом, $\sigma'|_{r=a} < 0$, а $\sigma'|_{r=b} > 0$.

Ответ: 1) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+1)} \frac{\vec{r}}{r^3}$;

2) $\sigma = \begin{cases} \frac{q}{2\pi(\varepsilon+1)a^2} & \text{для верхней полусферы,} \\ \frac{\varepsilon q}{2\pi(\varepsilon+1)a^2} & \text{для нижней полусферы;} \end{cases}$

3) $\sigma' = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)q}{2\pi(\varepsilon+1)a^2}, & r = a, \\ \frac{(\varepsilon-1)q}{2\pi(\varepsilon+1)b^2}, & r = b. \end{cases}$

Пример 4. Шар радиусом R из однородного изотропного диэлектрика равномерно заряжен сторонними зарядами. Найти отношение поверхностной и объемной плотностей связанных зарядов.

Решение. Найдем прежде всего напряженность электрического поля внутри шара, используя уравнение

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Так как по условию $\rho = \text{const}$, то поле обладает сферической симметрией, т. е. $\vec{D}(\vec{r}) = D_r(\vec{r})(\vec{r}/r)$. Но в сферических координатах

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

и, поскольку $D_\theta = D_\phi = 0$, то уравнение для дивергенции D переписывается в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_r) = \rho.$$

Интегрируя это уравнение, очевидно получаем

$$r^2 D_r = \rho \frac{r^3}{3} + C.$$

Если считать, что поле внутри шара всюду конечно, т. е. $D_r(\vec{r})|_{r=0} < \infty$, то, устремляя радиальную переменную r к нулю, заключаем, что $C = 0$. Таким образом, внутри шара

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} \vec{r}$$

и, следовательно, вектор поляризованности

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}(\vec{r}) = \frac{(\epsilon - 1)\rho}{3\epsilon} \vec{r}.$$

Учтем теперь, что $\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$, а $P_r(\vec{r})|_{r=R} = \sigma'$. Поскольку $\operatorname{div} \vec{r} = 3$, а $P_r = (\vec{P}, \vec{r})/r$, то находим

$$\rho' = -\frac{(\epsilon - 1)\rho}{\epsilon}, \quad \sigma' = \frac{(\epsilon - 1)\rho}{3\epsilon} R,$$

откуда получаем искомый ответ

$$\frac{\sigma'}{\rho'} = -\frac{R}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sigma'}{\rho'} = -\frac{R}{3}.$

Пример 5. Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом R . Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ . Найти поверхностный молекулярный ток $I'_{\text{пов}}$.

Решение. Молекулярные токи создают объемные и поверхностные токи намагничивания $I'_{\text{об}}$ и $I'_{\text{пов}}$ (рис. 9). Для их вычисления воспользуемся теоремами о циркуляции для \vec{H} и \vec{M} . В качестве замкнутого контура L выберем окружность радиусом $r < R$ с центром на оси цилиндра

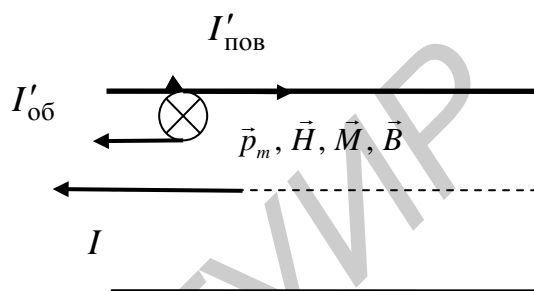


Рис. 9. Электрический ток

и лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси. При условии $r \rightarrow R$ получим

$$H \cdot 2\pi R = I, J \cdot 2\pi R = I'_{\text{об}}.$$

С учетом связи $\vec{M} = \chi \vec{H}$ получаем

$$H = I / 2\pi R, I'_{\text{об}} = 2\pi R M = 2\pi R \chi H = \chi I.$$

Итак, по объему провода протекают в одном направлении токи I и $I'_{\text{об}}$.

Выделим замкнутый контур L в виде окружности радиусом $r > R, r \rightarrow R$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра и с центром на оси. Контур лежит вне магнетика. Поэтому намагниченность во всех точках контура равна нулю. Следовательно, по теореме о циркуляции для \vec{M} получаем

$$0 = I' = I'_{\text{об}} + I'_{\text{пов}}.$$

Поверхностный молекулярный ток равен

$$I'_{\text{пов}} = -I'_{\text{об}} = -\chi I.$$

Знак «минус» указывает на то, что этот ток течет в обратном направлении по отношению к I .

Ответ: $I'_{\text{пов}} = -\chi I$.

Пример 6. Контур с током лежит в плоскости раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Определить напряженность магнитного

поля \vec{H} во всем пространстве, считая известным поле \vec{H}_0 , создаваемое этим контуром в вакууме.

Решение. В силу однородности магнетиков и отсутствия токов проводимости в каждом из них отсутствуют и токи намагничивания внутри каждого магнетика. Следовательно, токи намагничивания, как и ток проводимости, протекают только в плоскости раздела.

Выберем произвольную точку A , принадлежащую плоскости раздела, через которую не протекает ток проводимости. Определим связь между $B_{1\tau}$ и $B_{2\tau}$ вблизи точки A . Должно выполняться граничное условие для $H_{1\tau}$ и $H_{2\tau}$. Следовательно, $B_{1\tau} / \mu_1 = B_{2\tau} / \mu_2$. С другой стороны, в тангенциальную составляющую индукции магнитного поля у поверхности дает вклад только поверхностный ток, протекающий вблизи рассматриваемой точки. В соответствии с законом Био – Савара остальные токи создают магнитное поле, индукция \vec{B} которого перпендикулярна к плоскости раздела магнетиков. Следовательно, $B_{1\tau} = B_{2\tau}$.

Два уравнения для тангенциальных составляющих индукции магнитного поля имеют решение $B_{1\tau} = B_{2\tau} = 0$. В данной задаче токи намагничивания I' могут протекать только вдоль контура с током проводимости. Значит, индукция \vec{B} в соответствии с законом Био – Савара будет прямо пропорциональна индукции поля нашего контура, помещенного в вакуум: $\vec{B} = \frac{(I + I')\vec{B}_0}{I}$.

Выберем замкнутый контур L в виде окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к границе раздела магнетиков с центром, лежащим на этой границе. Пусть окружность охватывает один раз ток. Циркуляция вектора \vec{H} по окружности равна

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_{L_1} (\vec{H}_1, d\vec{l}_1) + \int_{L_2} (\vec{H}_2, d\vec{l}_2) = \frac{1}{\mu_0 \mu_1} \int_{L_1} (\vec{B}_1, d\vec{l}_1) + \frac{1}{\mu_0 \mu_2} \int_{L_2} (\vec{B}_2, d\vec{l}_2).$$

Здесь L_1 и L_2 – полуокружности в средах с μ_1 и μ_2 , соответственно образующие окружность L .

Возьмем произвольную точку A_1 на окружности в среде с μ_1 и ее зеркальное отражение относительно границы раздела магнетиков – точку A_2 в среде с проницаемостью μ_2 . Произвольный участок $d\vec{l}$ контура с током создает поле, индукция которого в выбранных точках имеет одинаковые нормальные составляющие и противоположно направленные тангенциальные составляющие. В этом легко убедиться, воспользовавшись законом Био – Савара. Это свойство в силу принципа суперпозиции будет выполняться и для магнитного поля всего контура с током. Поэтому поля в точках A_1 и A_2 можно представить в виде $\vec{B}_1 = \vec{B}_n + \vec{B}_\tau$ и $\vec{B}_2 = \vec{B}_n - \vec{B}_\tau$. Элементарные перемещения по окружности L можно представить в виде $d\vec{l}_1 = d\vec{l}_n + d\vec{l}_\tau$ и $d\vec{l}_2 = d\vec{l}_n - d\vec{l}_\tau$. Поэтому $(\vec{B}_1, d\vec{l}_1) = (\vec{B}_2, d\vec{l}_2)$

и

$$\int_{L_1} (\vec{B}_1, d\vec{l}_1) = \int_{L_2} (\vec{B}_2, d\vec{l}_2) = \frac{1}{2} \oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{1}{2} \mu_0 (I + I').$$

Следовательно,

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(I + I')}{2\mu_1\mu_2} = I.$$

Последнее равенство следует из теоремы о циркуляции. Следовательно,

$$\frac{(I + I')}{I} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \vec{B} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{B}_0,$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_1} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{H}_0, \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_2} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \vec{H}_0.$$

Ответ: $\vec{H}_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{H}_0, \quad \vec{H}_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \vec{H}_0.$

Пример 7. Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком, восприимчивость которого зависит только от расстояния r до оси соленоида как $\chi = ar^2$, где a – постоянная. На оси соленоида индукция магнитного поля равна B_0 . Найти зависимость от r намагниченности магнетика $M(r)$ и плотности тока намагничивания $j'(r)$ внутри магнетика.

Решение. В силу симметрии и условия задачи векторы $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$ направлены параллельно оси соленоида и образуют правовинтовую систему с током I , текущим по обмотке соленоида. В плоскости, содержащей ось соленоида, выбираем прямоугольный контур L , две стороны которого длиной l параллельны оси соленоида. Одна из сторон находится на расстоянии r от оси внутри соленоида, другая на расстоянии R от оси вне соленоида. Две другие стороны прямоугольного контура длиной $R - r$ перпендикулярны к оси контура. Контур охватывает N витков. В соответствии с теоремой о циркуляции вектора \vec{H} получаем

$$Hl = NI, \quad H = \frac{NI}{l}, \quad B = \mu_0(1 + \chi) \frac{NI}{l}, \quad B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}.$$

Следовательно, напряженность магнитного поля равна

$$\vec{H} = \vec{B} / \mu_0.$$

Намагниченность

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = \frac{\chi ar^2 \vec{B}_0}{\mu_0}.$$

Плотность тока намагничивания

$$\vec{j}' = [\vec{\nabla}, \vec{M}]$$

вычислим в цилиндрической системе координат, ось OZ которой совпадает с осью соленоида. Вектор намагниченности имеет одну ненулевую компоненту $M_z = ar^2 B_0 / \mu_0$. Поэтому \vec{j}' имеет только одну ненулевую компоненту:

$$j'_\varphi = -\frac{\partial M_z}{\partial r} = -\frac{2arB_0}{\mu_0}.$$

Следовательно,

$$j' = \frac{2arB_0}{\mu_0}.$$

Плотность тока намагничивания можно найти также, воспользовавшись теоремой о циркуляции \vec{M} :

$$\oint_L (\vec{M}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}', d\vec{S}).$$

Циркуляцию вычислим по ранее введенному прямоугольному контуру L . Очевидно, что плотность тока намагничивания зависит только от r . Она перпендикулярна к плоскости контура. Тогда

$$\frac{ar^2 B_0 l}{\mu_0} = \int_r^R j'(r) l dr + I'_{\text{вв}}.$$

Взяв производную по r от этого выражения, получаем

$$j' = -\frac{2arB_0}{\mu_0}.$$

Знак минус указывает на то, что направление \vec{j}' и обход контура образуют левовинтовую систему.

Ответ: $M(r) = aB_0 r^2 / \mu_0$, $j'(r) = 2aB_0 r / \mu_0$.

Пример 8. В однородное магнитное поле \vec{H}_0 вносится шар радиусом a с магнитной проницаемостью μ . Определить результирующее поле \vec{H} , индуцируемый магнитный момент p_m и плотность токов намагничивания \vec{j}' , эквивалентных приобретаемой шаром намагниченности.

Решение. Задачу решаем в сферической системе координат, центр которой совпадает с центром шара, а ось OZ , от которой отсчитывается полярный угол θ , направлена по \vec{H}_0 . Так как токи проводимости отсутствуют, то $[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{0}$ во всем пространстве. Следовательно, напряженность магнитного поля можно представить как градиент скалярного потенциала $\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi$. Взяв дивергенцию этого выражения, получаем уравнение Лапласа для скалярного потенциала:

$$\Delta \psi = 0.$$

Учтем, что вне шара магнетики отсутствуют, а внутри шара магнитная проницаемость постоянна и поэтому $(\vec{\nabla}, \vec{H}) = (\nabla, \mu_0 \mu \vec{B}) = \mu_0 \mu (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0$. В сферической системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

В силу симметрии задачи относительно вращений вокруг оси OZ потенциал не зависит от азимутального угла ϕ . Поэтому третье слагаемое в уравнении Лапласа равно нулю. Уравнение решаем методом разделения переменных, представив потенциал в виде произведения $\psi(r, \theta) = R(r)P(\theta)$. Подстановка в уравнение дает

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0.$$

Первое слагаемое зависит только от r , второе от θ . Сумма равна нулю. Поэтому должны выполняться уравнения

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1), \quad \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = -l(l+1).$$

Здесь $l(l+1)$ некоторая, пока произвольная, постоянная. Второе уравнение системы после замены переменной $x = \cos \theta$ принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + l(l+1)P = 0.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение Лежандра. Оно имеет однозначные, конечные и непрерывные решения при $-1 \leq x \leq 1$, если l равно нулю или положительному целому числу. Решениями являются полиномы Лежандра $P_l(x)$. Решение первого уравнения системы представим в виде

суммы $R(r) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k r^k$. Подстановка в уравнение показывает, что при заданном

l в сумме остаются только слагаемые с $k = l$ и $k = -(l+1)$. Таким образом, при заданном l

$$R(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}.$$

Следовательно, общее решение уравнения Лапласа, не зависящее от азимутального угла ϕ , имеет вид

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta).$$

Вне шара при $r \rightarrow \infty$ должно выполняться условие $\vec{H} \rightarrow \vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$. Следовательно, потенциал вне шара имеет вид

$$\psi_2(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta).$$

Учтем, что $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$. Требованию конечности потенциала внутри шара будет удовлетворять потенциал вида

$$\psi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

Граничные условия $H_{2r} = H_{1r}, H_{2n} = \mu H_{1n}$ приводят к условиям, накладываемым на потенциал

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \quad -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = -\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial r}$$

на границе магнетика с вакуумом, когда $r = a$. Подстановка выражений для потенциала дает

$$H_0 \frac{d \cos \theta}{d \theta} - \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+2)} \frac{d P_l(\cos \theta)}{d \theta} = - \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^{l-1} \frac{d P_l(\cos \theta)}{d \theta},$$

$$H_0 \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l (l+1) a^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) = -\mu \sum_{l=0}^{\infty} A_l l a^{l-1} P_l(\cos \theta).$$

Функции $P_l(\cos \theta)$ линейно независимы. Это справедливо и для их первых производных. Следовательно, для каждого значения l получаем систему двух линейных алгебраических уравнений для неизвестных A_l и B_l . Для $l \neq 1$ система однородна:

$$B_l a^{-(l+2)} = A_l a^{l-1},$$

$$B_l (l+1) a^{-(l+2)} = -\mu A_l l a^{l-1}.$$

Она имеет только тривиальное решение $A_l = 0, B_l = 0$. Для $l = 1$ система уравнений неоднородна:

$$H_0 - a^{-3} B_1 = -A_1,$$

$$H_0 + 2a^{-3} B_1 = -\mu A_1.$$

Отсюда находим

$$A_1 = -\frac{3H_0}{\mu + 2}, B_1 = \frac{(\mu - 1)a^3 H_0}{\mu + 2}.$$

Подставив эти значения в выражения для потенциала, получаем

$$\psi_1 = -\frac{3H_0 r \cos \theta}{\mu + 2} = -\frac{3(\vec{H}_0, \vec{r})}{\mu + 2},$$

$$\psi_2 = -H_0 r \cos \theta + \frac{(\mu - 1)a^3 H_0 \cos \theta}{(\mu + 2)r^2} = -(\vec{H}_0, \vec{r}) + \frac{(\mu - 1)a^3 (\vec{H}_0, \vec{r})}{(\mu + 2)r^3}.$$

Напряженность магнитного поля внутри шара

$$\vec{H}_1 = -\vec{\nabla} \psi_1 = \frac{3\vec{H}_0}{\mu + 2}.$$

Поле внутри шара однородно. Намагниченность также однородна:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}_1 = \frac{3(\mu - 1)\vec{H}_0}{\mu + 2}.$$

Магнитный момент шара

$$\vec{p}_m = \vec{M}V = \frac{4\pi(\mu - 1)a^3 \vec{H}_0}{\mu + 2}.$$

Здесь $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ – объем шара.

В силу однородности \vec{M} объемная плотность токов намагничивания равна нулю:

$$\vec{j}' = \vec{0}.$$

Поверхностную плотность токов намагничивания найдем из граничного условия $[\vec{n}, (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)] = \vec{i}'$. Так как $\vec{M}_2 = \vec{0}$, а $\vec{M}_1 = \vec{J}$, \vec{n} – вектор нормали к поверхности шара, направленный наружу, получаем

$$\vec{i}' = [\vec{n}, \vec{J}] = \frac{3(\mu - 1)[\vec{n}, \vec{H}_0]}{\mu + 2}, \quad i' = \frac{3(\mu - 1)H_0 \sin \theta}{\mu + 2}.$$

Снаружи шара напряженность магнитного поля

$$\vec{H}_2 = -\vec{\nabla} \psi_2 = \vec{H}_0 + \frac{(\mu - 1)a^3}{\mu + 2} \left(\frac{3(\vec{H}_0, \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{H}_0}{r^3} \right) = \vec{H}_0 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m, \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right).$$

$$\text{Ответ: } \vec{H}_2 = \vec{H}_0 + \frac{(\mu - 1)a^3}{\mu + 2} \left(\frac{3(\vec{H}_0, \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{H}_0}{r^3} \right) = \vec{H}_0 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_m, \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right),$$

$$\vec{H}_1 = \frac{3\vec{H}_0}{\mu + 2}, \quad \vec{p}_m = \frac{4\pi(\mu - 1)a^3 \vec{H}_0}{\mu + 2}, \quad i' = \frac{3(\mu - 1)H_0 \sin \theta}{\mu + 2}.$$

Пример 9. Бесконечно длинная полая цилиндрическая оболочка с внутренним радиусом a и внешним радиусом b находится во внешнем однородном магнитном поле \vec{H}_0 , перпендикулярном к ее оси. Магнитная проницаемость цилиндра μ_1 , окружающего пространства μ_2 . Найти напряженность поля H в полости. Рассмотреть, в частности, случай μ_1 значительно больше μ_2 .

Решение. В силу отсутствия токов проводимости $[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{0}$. Поэтому напряженность магнитного поля можно представить как градиент: $\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi$. Скалярный потенциал при условии однородности магнетика удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \psi = 0.$$

Потенциал должен быть конечной и непрерывной функцией, удовлетворяющей соответствующим граничным условиям на поверхностях магнетиков, вытекающих из граничных условий для \vec{B} и \vec{H} . В соответствии с симметрией задачи выбираем цилиндрическую систему координат, ось OZ которой направлена по оси цилиндров. Азимутальный угол ϕ будем отсчитывать от оси OX , направленной по \vec{H}_0 , r – расстояние точки до оси OZ . Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

В силу симметрии потенциал не зависит от z . Поэтому третье слагаемое в уравнении равно нулю:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0.$$

Уравнение решаем методом разделения переменных, положив

$$\psi(r, \phi) = R(r)Q(\phi).$$

Подстановка решения уравнения в таком виде в уравнение Лапласа приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = \frac{A}{r^2} R, \quad \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -AQ,$$

где A – постоянная.

Решение второго уравнения $Q = \alpha \cos \sqrt{A}\phi + \beta \sin \sqrt{A}\phi$ будет однозначным, если $\sqrt{A} = k$ – целое число. При заданном значении k решение имеет вид $Q_k = \alpha_k \cos k\phi + \beta_k \sin k\phi$. Решение первого уравнения при $A = k^2 \neq 0$ имеет вид $R_k = \gamma_k r^k + \delta_k r^{-k}$. При $k = 0$ решением первого уравнения будет $R = \eta \ln r + \sigma$. Здесь $\eta, \sigma, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ – постоянные. Решение уравнения Лапласа представим в виде $\psi(r, \phi) = \eta \ln r + \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) Q_k(\phi)$. Решение не должно меняться при отражении от плоскости, параллельной \vec{H}_0 и проходящей через ось OZ ($\phi \rightarrow -\phi$). Следовательно, коэффициенты β_k равны нулю. При $r \rightarrow \infty$ напряженность поля $\vec{H} \rightarrow \vec{H}_0$. Поэтому потенциал при $r > b$ имеет вид

$$\psi_1(r, \phi) = \eta_1 \ln r + \sigma_1 - H_0 r \cos \phi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{-k} \cos k\phi.$$

Внутри оболочки при $a < r < b$ потенциал

$$\psi_2(r, \phi) = \eta_2 \ln r + \sigma_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k r^k + \tilde{N}_k r^{-k}) \cos k\phi.$$

В полости при $r < a$ потенциал в силу требования конечности имеет вид

$$\psi_3(r, \phi) = \sigma_3 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k r^k \cos k\phi.$$

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя

$$H_{1r} = H_{2r} \Rightarrow \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} = \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi}; B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \Rightarrow \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r}$$

приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} H_0 \sin \phi - \sum_{k=1}^{\infty} A_k b^{-k-1} k \sin k\phi &= - \sum_{k=1}^{\infty} (B_k b^{k-1} + C_k b^{-k-1}) k \sin k\phi, \\ \mu_1 \frac{\eta_1}{b} - \mu_1 H_0 \cos \phi - \mu_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_k k b^{-k-1} \cos k\phi &= \\ = \mu_2 \frac{\eta_2}{b} + \mu_2 \sum_{k=1}^{\infty} (B_k k b^{k-1} - C_k k b^{-k-1}) \cos k\phi. \end{aligned}$$

Аналогично граничные условия на внутренней поверхности цилиндрического слоя дают уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_k a^{k-1} + C_k a^{-k-1}) k \sin k\phi = \sum_{k=1}^{\infty} D_k a^{k-1} k \sin k\phi,$$

$$\mu_2 \frac{\eta_2}{a} + \mu_2 \sum_{k=1}^{\infty} (B_k k a^{k-1} - C_k k a^{-k-1}) \cos k\phi = \mu_1 \sum_{k=1}^{\infty} D_k k a^{k-1} \cos k\phi.$$

В силу линейной независимости множества функций $\cos k\phi$ и $\sin k\phi$ получаем для каждого значения k систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов. Для $k = 0$

$$\mu_1 \frac{\eta_1}{b} = \mu_2 \frac{\eta_2}{b}; \mu_2 \frac{\eta_2}{b} = 0 \Rightarrow \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

Для $k = 1$

$$\begin{aligned} H_0 - A_1 b^{-2} &= -B_1 - C_1 b^{-2}, \\ -\mu_1 H_0 - \mu_1 A_1 b^{-2} &= \mu_2 B_1 - \mu_2 C_1 b^{-2}, \\ B_1 + C_1 a^{-2} &= D_1, \\ \mu_2 B_1 - \mu_2 C_1 a^{-2} &= \mu_1 D_1. \end{aligned}$$

Система имеет единственное решение, причем

$$D_1 = -\frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2} H_0.$$

Для каждого значения $k = 2, 3, \dots$ получается система четырех однородных уравнений для неизвестных коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k . Легко убедиться, что эти системы имеют только тривиальные нулевые решения. Таким образом, в полости скалярный потенциал

$$\psi_3 = -\frac{4\mu_1\mu_2 H_0 r \cos \phi}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 a^2 b^{-2}} = -\frac{4\mu_1\mu_2 H_0 z}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 a^2 b^{-2}}.$$

Здесь $z = r \cos \phi$ проекция точки наблюдения на ось OZ . Напряженность магнитного поля в полости

$$\vec{H}_3 = -\vec{\nabla} \psi_3 = \frac{4\mu_1\mu_2 H_0 \vec{k}}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 a^2 b^{-2}} = \frac{4\mu_1\mu_2 \vec{H}_0}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 a^2 b^{-2}}.$$

Здесь \vec{k} – орт оси OZ и $\vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$.

$$\text{Ответ: } \vec{H}_3 = \frac{4\mu_1\mu_2 \vec{H}_0}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 a^2 b^{-2}}.$$

Пример 10. Бесконечный прямолинейный провод радиусом a с магнитной проницаемостью μ_1 находится во внешнем однородном поперечном поле

\vec{H}_0 в среде с магнитной проницаемостью μ_2 . По проводу течет постоянный ток I . Найти результирующее магнитное поле внутри и вне провода.

Решение. В соответствии с симметрией задачи выбираем цилиндрическую систему координат, ось OZ которой направлена по оси цилиндра. Азимутальный угол ϕ будем отсчитывать от оси OX , направленной по \vec{H}_0 , r – расстояние точки до оси OZ . Так как присутствуют токи проводимости, воспользуемся методом векторного потенциала. Из уравнения $(\vec{\nabla}, \vec{B})$ следует, что вектор магнитной индукции можно задать через векторный потенциал \vec{A} :

$$\vec{B} = [\vec{\nabla}, \vec{A}].$$

В областях, где магнетик однороден, из уравнения $[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j}$ следует уравнение для векторного потенциала:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \mu \vec{j}.$$

Из интегрального представления векторного потенциала через токи следует, что отлична от нуля только компонента A_z , которая в силу симметрии задачи не зависит от z , а зависит только от r и ϕ . В области $r > a$ токи отсутствуют. Поэтому выполняется уравнение Лапласа:

$$\Delta \vec{A} = \vec{0}.$$

В цилиндрической системе координат при условии нулевых компонент A_r, A_ϕ уравнение Лапласа для векторного потенциала $A_z(r, \phi)$ сведется к уравнению Лапласа для скалярного поля:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$A_z(r, \phi) = \eta \ln r + \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k r^k + \delta_k r^{-k})(\alpha_k \cos k\phi + \beta_k \sin k\phi).$$

При $r \rightarrow \infty$ должно выполняться условие $\vec{B} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] \rightarrow \vec{B}_0 = \mu_0 \mu_2 \vec{H}_0$. В проекциях

$$B_r = ([\vec{\nabla}, \vec{A}])_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \rightarrow B_0 \cos \phi, \quad B_\phi = ([\vec{\nabla}, \vec{A}])_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \rightarrow B_0 \sin \phi.$$

Следовательно, общий вид решения в области $r > a$, удовлетворяющий условию задачи, имеет вид

$$A_{2z}(r, \phi) = B_0 r \sin \phi + \eta_2 \ln r + \sigma_2 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} (C_k \cos k\phi + D_k \sin k\phi).$$

В области $r < a$ вместо уравнения Лапласа получаем уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial \phi^2} = -\mu_0 \mu_1 \frac{I}{\pi a^2}, \text{ с } j = \frac{I}{\pi a^2}.$$

Решением уравнения Пуассона будет сумма общего решения уравнения Лапласа и частного решения уравнения Пуассона. Легко заметить, что частным решением уравнения Пуассона является функция $-\frac{\mu_0 \mu_1 I}{2\pi a^2} r^2$. С учетом требования конечности потенциала получаем общее решение в рассматриваемой области:

$$A_{1z}(r, \phi) = -\frac{\mu_0 \mu_1 I}{4\pi a^2} r^2 + \sigma_1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (F_k \cos k\phi + G_k \sin k\phi).$$

Потребуем выполнения граничных условий на поверхности цилиндра:

$$H_{1r} = H_{2r} \Rightarrow \frac{B_{1\phi}}{\mu_1} = \frac{B_{2\phi}}{\mu_2} \Rightarrow \mu_2 \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} = \mu_1 \frac{\partial A_{2z}}{\partial r};$$

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_{1r} = B_{2r} \Rightarrow \frac{1}{a} \frac{\partial A_{1z}}{\partial \phi} = \frac{1}{a} \frac{\partial A_{2z}}{\partial \phi}.$$

Подстановка решений в эти условия приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} -\mu_2 \frac{\mu_0 \mu_1 I}{2\pi a} + \mu_2 \sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1} (F_k \cos k\phi + G_k \sin k\phi) = \\ = \mu_1 B_0 \sin \phi + \frac{\mu_1 \eta_2}{a} - \mu_1 \sum_{k=1}^{\infty} ka^{-k-1} (C_k \cos k\phi + D_k \sin k\phi), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k k (-F_k \sin k\phi + G_k \cos k\phi) = B_0 a \cos \phi + \sum_{k=1}^{\infty} ka^{-k} (-C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi).$$

Воспользовавшись линейной независимостью функций $\sin k\phi$, $\cos k\phi$, получим независимые системы линейных алгебраических уравнений. При $k = 0$

$$-\mu_2 \frac{\mu_0 \mu_1 I}{2\pi a} = \frac{\mu_1 \eta_2}{a} \Rightarrow \eta_2 = -\frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi}.$$

При $k = 1$ получаем одну линейную неоднородную систему алгебраических уравнений (коэффициенты при $\sin \phi$):

$$\begin{aligned}\mu_2 G_1 &= \mu_1 B_0 - \mu_1 a^{-2} D_1, \\ a G_1 &= B_0 a + a^{-1} D_1.\end{aligned}$$

Решение

$$D_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2) a^2 B_0}{(\mu_1 + \mu_2)}, G_1 = \frac{2 \mu_1 B_0}{(\mu_1 + \mu_2)}.$$

Вторая система для C_1, F_1 , как и системы для остальных $k = 2, 3, \dots$, имеет только нулевые решения. Следовательно, векторный потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}A_{2z}(r, \phi) &= B_0 r \sin \phi + \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r} + \frac{(\mu_1 - \mu_2) a^2 B_0 \sin \phi}{(\mu_1 + \mu_2) r} \text{ при } r > a, \\ A_{1z}(r, \phi) &= -\frac{\mu_0 \mu_1 I r^2}{4\pi a^2} + \frac{2 \mu_1 B_0 r \sin \phi}{(\mu_1 + \mu_2)} \text{ при } r < a.\end{aligned}$$

Проекции индукции магнитного поля

$$B_{2r} = B_0 \cos \phi + \frac{(\mu_1 - \mu_2) a^2 B_0 \cos \phi}{(\mu_1 + \mu_2) r^2}, B_{2\phi} = -B_0 \sin \phi + \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi r} + \frac{(\mu_1 - \mu_2) a^2 B_0 \sin \phi}{(\mu_1 + \mu_2) r^2},$$

$$B_{1r} = \frac{2 \mu_1 B_0 r \cos \phi}{(\mu_1 + \mu_2) r}, B_{1\phi} = \frac{\mu_0 \mu_1 I r}{2\pi a^2} - \frac{2 \mu_1 B_0 \sin \phi}{(\mu_1 + \mu_2)}.$$

$$\text{Ответ: } B_{1r} = \frac{2 \mu_1 B_0 r \cos \phi}{(\mu_1 + \mu_2) r}, B_{1\phi} = \frac{\mu_0 \mu_1 I r}{2\pi a^2} - \frac{2 \mu_1 B_0 \sin \phi}{(\mu_1 + \mu_2)},$$

$$B_{2r} = B_0 \cos \phi + \frac{(\mu_1 - \mu_2) a^2 B_0 \cos \phi}{(\mu_1 + \mu_2) r^2}, B_{2\phi} = -B_0 \sin \phi + \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi r} + \frac{(\mu_1 - \mu_2) a^2 B_0 \sin \phi}{(\mu_1 + \mu_2) r^2}.$$

Пример 11. Шар радиусом a из сверхпроводника I рода внесен в постоянное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 . Определить индукцию магнитного поля \vec{B} вне шара, если поле \vec{B}_0 еще не разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхностную плотность сверхпроводящего тока i .

Решение. Вне шара токи отсутствуют. Поэтому $[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{0}$ и, следовательно, напряженность магнитного поля может быть выражена через потенциал магнитного поля:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi.$$

Потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \psi = 0.$$

В соответствии с симметрией задачи выбираем сферическую систему координат, центр которой расположен в центре шара. Ось $OZ \uparrow \vec{B}_0$. С учетом требования $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \rightarrow \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ при $r \rightarrow \infty$ общее решение уравнения Лапласа можно представить в виде

$$\psi = -H_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta).$$

Компоненты вектора напряженности равны

$$H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = H_0 \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} A_l (l+1) r^{-l-2} P_l(\cos \theta),$$

$$H_\theta = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = -H_0 \sin \theta + \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^{-l-2} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} \sin \theta.$$

Здесь i плотность поверхностного тока, протекающего по поверхности шара.

Внутри сверхпроводящего шара $\vec{H} = \vec{0}$. Граничные условия запишем в виде

$$H_0 \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} A_l (l+1) a^{-l-2} P_l(\cos \theta) = 0,$$

$$-H_0 \sin \theta + \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^{-l-2} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} \sin \theta = -i.$$

В силу линейной независимости множества функций, образованного полиномами Лежандра P_l , а также линейной независимости множества функций, образованного первыми производными этих полиномов, получаем для каждого значения l систему двух линейных алгебраических уравнений для неизвестных A_l и i . При $l \neq 1$ системы имеют только нулевые решения $A_l = 0$. При $l = 1$ система имеет вид

$$H_0 + 2A_1 a^{-3} = 0,$$

$$(-H_0 + A_1 a^{-3}) \sin \theta = -i.$$

Ее решение

$$A_1 = -a^3 H_0 / 2, \quad i = 3H_0 \sin \theta / 2 = -3B_0 / 2\mu_0.$$

Следовательно, потенциал

$$\psi = -H_0 r \cos \theta - \frac{a^3 H_0 r \cos \theta}{2r^3} = -(\vec{H}_0, \vec{r}) - \frac{a^3 (\vec{H}_0, \vec{r})}{2r^3}.$$

Напряженность и индукция магнитного поля соответственно равны

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi = \vec{H}_0 + \frac{a^3 \vec{H}_0}{r^3} - \frac{3(\vec{H}_0, \vec{r}) \vec{r}}{r^5}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{a^3 \vec{B}_0}{r^3} - \frac{3(\vec{B}_0, \vec{r}) \vec{r}}{r^5}.$$

Ответ: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{a^3 \vec{B}_0}{r^3} - \frac{3(\vec{B}_0, \vec{r}) \vec{r}}{r^5}, i = \frac{3H_0 \sin \theta}{2}.$

Пример 12. Бесконечно длинный цилиндр радиусом a из сверхпроводника I рода внесен в постоянное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , перпендикулярное к оси цилиндра. Определить индукцию магнитного поля \vec{B} вне цилиндра, если поле \vec{B}_0 еще не разрушает сверхпроводимость в цилиндре. Найти также поверхностную плотность сверхпроводящего тока i .

Решение. Вне сверхпроводника токи проводимости отсутствуют. Поэтому вне цилиндра $[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{0}$. Следовательно, напряженность магнитного поля можно представить как градиент: $\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi$. Скалярный потенциал при условии однородности магнетика удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \psi = 0.$$

Потенциал должен быть конечной и непрерывной функцией, удовлетворяющей соответствующим граничным условиям на поверхностях магнетиков, вытекающих из граничных условий для \vec{B} и \vec{H} . В соответствии с симметрией задачи выбираем цилиндрическую систему координат, ось OZ которой направлена по оси цилиндров. Азимутальный угол ϕ будем отсчитывать от оси OX , направленной по \vec{B}_0 , r – расстояние точки до оси OZ . Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

В силу симметрии потенциал не зависит от z . Поэтому третье слагаемое в уравнении равно нулю:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0.$$

Уравнение решаем методом разделения переменных, положив

$$\psi(r, \phi) = R(r)Q(\phi).$$

Подстановка в уравнение Лапласа приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = \frac{A}{r^2} R, \quad \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -AQ.$$

где A – постоянная.

Решение второго уравнения $Q = \alpha \cos \sqrt{A}\phi + \beta \sin \sqrt{A}\phi$ будет однозначным, если $\sqrt{A} = k$ – целое число. При заданном значении k решение имеет вид $Q_k = \alpha_k \cos k\phi + \beta_k \sin k\phi$. Решение первого уравнения при $A = k^2 \neq 0$ имеет вид $R_k = \gamma_k r^k + \delta_k r^{-k}$. При $k = 0$ решением первого уравнения будет $R = \eta \ln r + \sigma$. Здесь $\eta, \sigma, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ – постоянные. Решение уравнения Лапласа представим в виде $\psi(r, \phi) = \eta \ln r + \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r)Q(\phi)$. Решение не должно меняться при отражении от плоскости, параллельной \vec{H}_0 и проходящей через ось OZ ($\phi \rightarrow -\phi$). Следовательно, коэффициенты β_k равны нулю. При $r \rightarrow \infty$ напряженность поля $\vec{H} \rightarrow \vec{H}_0 = \vec{B} / \mu_0$. Поэтому потенциал при $r > a$ имеет вид

$$\psi_1(r, \phi) = \eta_1 \ln r + \sigma_1 - H_0 r \cos \phi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{-k} \cos k\phi.$$

В сверхпроводнике магнитное поле отсутствует. Поэтому скалярный потенциал при $r < a$

$$\psi_2 = \sigma_2.$$

Подстановка выражений для потенциала в граничные условия дает

$$B_{1r} = B_{2r} \Rightarrow -\frac{\eta_1}{a} + H_0 \cos \phi + \sum A_k k a^{-k-1} \cos k\phi = 0,$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = -i \Rightarrow -H_0 \sin \phi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k k a^{-k-1} \sin k\phi = -i.$$

Воспользовавшись линейной независимостью множества функций $\cos k\phi$ и $\sin k\phi$, получим для каждого значения k систему двух линейных алгебраических уравнений для неизвестных η_1, A_k, i . Решение имеет вид

$\eta_1 = 0$; при $k > 1$ $A_k = 0$, при $k = 1$ $A_1 = -a^2 H_0$, $i = 2H_0 \sin \theta$.
Следовательно, потенциал вне проводника

$$\psi_1 = -H_0 r \cos \phi - \frac{a^2 H_0 r \cos \phi}{r^2} = -(\vec{H}_0, \vec{r}) - \frac{a^2 (\vec{H}_0, \vec{r})}{r^2}.$$

Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi = \vec{H}_0 - \frac{2a^2 (\vec{H}_0, \vec{r}) \vec{r}}{r^4} + \frac{a^2 \vec{H}_0}{r^2}.$$

Вектор индукции магнитного поля

$$\vec{B} = \frac{\vec{H}}{\mu_0} = \vec{B}_0 - \frac{2a^2 (\vec{B}_0, \vec{r}) \vec{r}}{r^4} + \frac{a^2 \vec{B}_0}{r^2}.$$

Ответ: $\vec{B} = \vec{B}_0 - \frac{2a^2 (\vec{B}_0, \vec{r}) \vec{r}}{r^4} + \frac{a^2 \vec{B}_0}{r^2}$, $i = 2H_0 \sin \phi$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Таблица 1

Выбор вариантов заданий

Вариант	Номера задач				
1	1	3	11	13	15
2	2	4	12	16	37
3	5	6	14	17	35
4	7	8	18	20	28
5	1	9	19	21	24
6	6	9	22	25	27
7	2	9	23	26	30
8	5	10	24	28	36
9	4	8	32	33	34
10	3	8	12	22	38

Задачи

1. Шар радиусом R из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , окруженный безграничной непроводящей средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , помещен в первоначально однородное электрическое поле, напряженность которого на больших расстояниях от шара направлена вдоль оси z и равна по модулю E_0 . Найти: 1) максимальную поверх-

- ностную плотность связанных зарядов; 2) полный связанный заряд одного знака.
2. В безграничной диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью ε имеется сферическая полость радиусом R . В диэлектрике имеется электрическое поле, переходящее на больших расстояниях от полости в однородное, с напряженностью $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$. Найти: 1) напряженность электрического поля внутри и вне полости; 2) поверхностную плотность связанных зарядов.
 3. Экваториальная плоскость проводящего шара радиусом a , заряд которого равен q , совпадает с плоской границей раздела двух бесконечных изотропных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Найти: 1) емкость шара; 2) плотности σ'_1 и σ'_2 связанных зарядов на прилегающих к шару поверхностях.
 4. Шар радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε заряжен сторонними зарядами с объемной плотностью $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, где r – расстояние от его центра. Найти: 1) поверхностную плотность связанных зарядов; 2) объемную плотность связанных зарядов в точках, где модуль поляризованности максимален.
 5. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε имеется сферическая полость, изображенная на рис. 10, центр которой смещен относительно центра шара на вектор $\vec{a} = a\vec{e}_z$. Радиус полости равен a . Диэлектрик равномерно заряжен сторонними зарядами с объемной плотностью ρ . Найти поверхностную плотность связанных зарядов на стенке полости как функцию полярного угла θ .

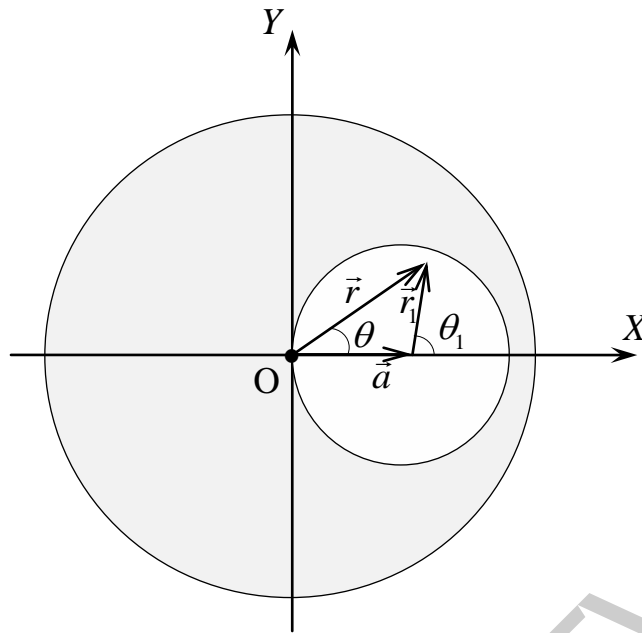


Рис. 10. Поле в полости

6. Пространство между двумя concentricкими проводящими сферами радиусами a и b ($a < b$) заполнено изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \frac{1}{1 - r/(a + b)}$, где r – расстояние от их центра. Заряд внутренней сферы равен $q > 0$, а внешняя сфера заземлена. Найти: 1) напряженность и потенциал электрического поля в области $a < r < b$; 2) объемную плотность связанных зарядов между сферами; 3) полные связанные заряды на внутренней и внешней поверхности диэлектрика.
7. Длинный диэлектрический цилиндр с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 + \beta r$ статически поляризован так, что во всех его точках поляризованность $\vec{P} = \alpha \vec{r}$, где α и β – положительные константы, \vec{r} – радиус-вектор точки относительно оси цилиндра, а отношение поверхностной и объемной плотностей связанных зарядов равно η . Найти: 1) радиус цилиндра; 2) объемную плотность сторонних зарядов

8. Проводник произвольной формы, имеющий заряд q , окружен изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε . Найти полные связанные заряды на внутренней и внешней поверхности диэлектрика.
9. Плоский конденсатор с квадратными пластинами заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого изменяется в направлении оси x , параллельной одной из сторон пластины по линейному закону от ε_1 до $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Расстояние между пластинами $d \ll a$, где a – сторона квадрата. Найти: 1) емкость конденсатора; 2) отношение полного поверхностного связанного заряда q' к заряду q прилегающей пластины.
10. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного магнетика равна \vec{B}_0 , причем вектор \vec{B}_0 составляет угол α_0 с нормалью к поверхности (рис. 11). Магнитная проницаемость магнетика равна μ . Найти модуль вектора индукции магнитного поля в магнетике вблизи поверхности.

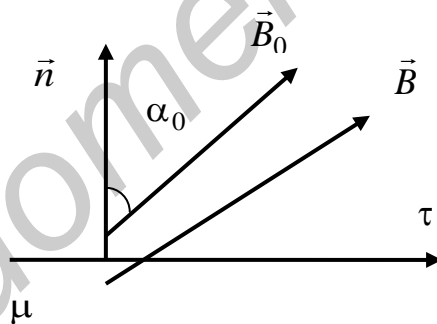


Рис. 11. Поле вблизи поверхности

11. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика равна B_0 (рис. 12), и вектор \vec{B}_0 составляет угол α с нормалью \vec{n} к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика

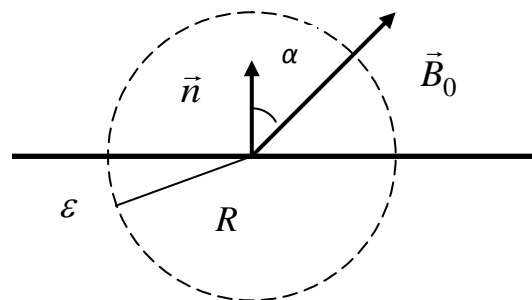


Рис. 12. К вычислению потока вектора напряженности

- равна μ . Считая поле внутри и вне магнетика однородным, найти поток вектора \vec{H} через поверхность сферы S радиусом R , центр которой лежит на поверхности магнетика.
12. Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом R . Материалом провода является парамагнетик с восприимчивостью χ . Найти зависимость индукции B от расстояния r до оси провода и плотность тока намагничивания j' внутри провода.
 13. Прямой бесконечно длинный проводник с током I лежит в плоскости раздела двух непроводящих сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Найти модуль вектора индукции магнитного поля во всем пространстве в зависимости от расстояния r до провода. Иметь в виду, что линии вектора \vec{B} являются окружностями с центром на оси проводника.
 14. Бесконечный тонкий прямой провод с током I расположен параллельно плоской границе двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Расстояние от провода до границы a . Определить магнитное поле во всем пространстве. Провод расположен в среде с проницаемостью μ_1 . Применить метод зеркальных изображений.
 15. Ось прямого круглого цилиндра совпадает с осью Z декартовой системы координат, начало которой находится в центре цилиндра. Цилиндр однородно намагничен. Вектор намагниченности \vec{M} совпадает с положительным направлением оси Z . Найти магнитную индукцию на оси цилиндра, если радиус его поперечного сечения R , а длина l . Цилиндр находится в вакууме.
 16. Сферический слой из магнетика, радиусы внутренней и внешней поверхностей которого равны a и b , однородно намагничен. Вектор намагниченности \vec{M} совпадает с положительным направлением оси Z декартовой си-

- стемы координат, центр которой совпадает с центром сфер. Найти напряженность магнитного поля на оси Z для положительных значений z .
17. Если шар из однородного магнетика поместить во внешнее однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , он намагнитится однородно. Найти индукцию \vec{B} внутри шара с магнитной проницаемостью μ , имея в виду, что в случае однородно намагниченного шара магнитное поле внутри него является однородным и его напряженность $\vec{H} = -\vec{M} / 3$.
18. Найти векторный потенциал и индукцию магнитного поля, создаваемого прямолинейным участком линейного проводника длиной L , по которому протекает ток I .
19. Найти векторный потенциал и индукцию магнитного поля, создаваемого током I , текущим по коаксиальному кабелю. Ток течет по центральной жиле радиусом r_1 и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой равны r_2 и r_3 . Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком. Все материалы немагнитны.
20. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца d . Ширина зазора b , индукция магнитного поля в зазоре B . Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, найти модуль вектора напряженности магнитного поля внутри магнита.
21. На железном сердечнике в виде тора со средним радиусом R имеется обмотка с общим числом витков N . В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной b . При токе I через обмотку индукция магнитного поля в зазоре равна B . Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти магнитную проницаемость железа при этих условиях.
22. Длинный тонкий цилиндрический стержень из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ и площадью поперечного сечения S расположен вдоль оси катушки с током. Один конец стержня находится в центре катушки, где индукция магнитного поля равна B , а другой конец – в об-

ласти, где магнитное поле практически отсутствует (рис. 13). С какой силой катушка действует на стержень?

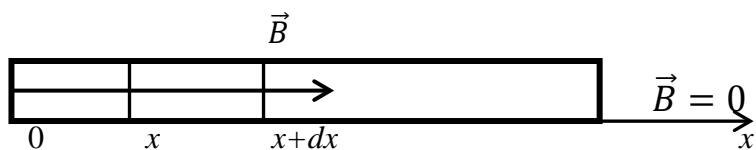


Рис. 13. Конфигурация магнитного поля

23. Небольшой шарик объемом V из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ медленно переместили вдоль оси катушки с током из точки, где индукция магнитного поля равна B , в область, где магнитное поле практически отсутствует. Какую при этом совершили работу?
24. Полая сфера с внутренним радиусом a и наружным радиусом b помещена во внешнее однородное магнитное поле \vec{H}_0 . Магнитная проницаемость сферы μ_1 , окружающего пространства μ_2 . Найти напряженность поля H в полости. Рассмотреть случай, когда μ_1 значительно больше μ_2 .
25. Найти поле равномерно намагниченного постоянного магнита сферической формы. Магнитная проницаемость магнита μ_1 , внешней среды μ_2 , намагниченность постоянного магнита \vec{M}_0 .
26. Найти поле, создаваемое бесконечным цилиндром радиусом a , намагниченным однородно. Вектор намагниченности \vec{M}_0 перпендикулярен к оси цилиндра. Магнитная проницаемость цилиндра μ_1 , внешней среды μ_2 .
27. Диамагнитная восприимчивость меди (в твердом состоянии) равна $\chi = -8,8 \cdot 10^{-8}$. Определить среднее расстояние электронов от ядра в атоме меди.
28. Магнитный момент молекулы кислорода равен $p_m = 2,6 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{ м}^2$. Определить парамагнитную восприимчивость кислорода при нормальных условиях.

29. Магнитный дипольный момент молекулы имеет порядок одного магнетона Бора $\mu = e\hbar / (2m_e) = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Принимая, что молекулы идеального газа имеют постоянный магнитный момент μ , найти максимально возможную намагниченность при $t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ и $p = 101,3 \text{ кПа}$.

30. Рассчитать значение $\langle r^2 \rangle$ для электрона в атоме водорода в основном состоянии. Сравнить эту величину с квадратом радиуса боровской орбиты электрона в атоме водорода. Рассчитать диамагнитную восприимчивость моля атомарного водорода.

31. Рассчитать диамагнитную восприимчивость моля газообразного гелия в основном состоянии. Использовать атомную волновую функцию

$$\Psi(r_1, r_2) = \frac{Z'^2}{\pi a_0^2} \exp\left(-\frac{Z'(r_1 + r_2)}{a_0}\right).$$

32. Обмотка соленоида имеет стальной сердечник и содержит 600 витков, а его длина 40 см. Во сколько раз увеличится индуктивность соленоида, если сила тока возрастет с 0,2 до 1 А?

33. На длинный чугунный стержень сечением 10 см^2 намотан соленоид. Магнитный поток при силе тока 2 А составляет 250 мкВб. Найти число витков на единицу длины соленоида.

34. Объем соленоида со стальным сердечником 500 см^2 . При силе тока соленоида 0,6 А напряженность магнитного поля равна 1200 А/м . Найти индуктивность соленоида. Как она изменится, если ток уменьшится в два раза?

35. Какое сечение должен иметь соленоид длиной $l = 50 \text{ см}$ с железным сердечником, чтобы при токе $I = 0,2 \text{ А}$ энергия магнитного поля в нем была $W = 0,3 \text{ Дж}$, если обмотка соленоида имеет $N = 4000$ витков?

36. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода параллельно этой поверхности подвешен тонкий прямолинейный провод на расстоянии h от плоскости, по которому течет постоянный ток I . Найти линейную

плотность сверхпроводящего тока i , текущего по поверхности сверхпроводника. Применить метод зеркальных изображений.

37. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R из сверхпроводника I рода внесен в постоянное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , направленное параллельно оси цилиндра. Определить силу f , действующую на единицу площади боковой поверхности цилиндра.
38. На какой высоте h постоянный магнит с магнитным моментом \vec{p}_m и массой m будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника I рода? Магнит считать точечным диполем. Применить метод зеркальных изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И. В. Курс физики. В 3 т. Т. 2 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 430 с.
2. Парселл, Э. Электричество и магнетизм / Э. Парселл ; пер. с англ. – М. : Наука, 1971. – 447 с.
3. Тикадзуми, С. Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и применение / С. Тикадзуми ; пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 287 с.
4. Квасов, Н. Т. Лекции по физике / Н. Т. Квасов. – Минск : БГУИР, 2006. – 166 с.
5. Сиаккоу, М. Физические основы записи информации / М. Сиаккоу ; пер. с англ. – М. : Мир, 1980. – 234 с.
6. Головин, Ю. И. Введение в нанотехнологию / Ю. И. Головин. – М. : Наука, 2003. – 140 с.

Учебное издание

Аксенов Валерий Васильевич
Березин Александр Васильевич
Мурзов Виктор Иванович

ФИЗИКА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоля*

Подписано в печать 06.11.2015. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс»
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,07. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 50 экз. Заказ 53.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6