УДК 519.677

О ЗАДАЧЕ ИОСИФА ФЛАВИЯ

Юркевич К. А., студент гр.378103, Рыльков И. Н., студент гр. 378101

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Романчук Т. А. – канд. физ.-мат. наук

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Иосифа Флавия, комбинаторная проблема с историческими корнями, описывающая способы выживания в экстремальных условиях. Анализируются различные методы решения этой задачи, от рекуррентных соотношений до вычислительных алгоритмов, и рассматривается её применение в современных технологиях, включая криптографию и алгоритмическую теорию игр. Работа подчеркивает актуальность задачи Иосифа Флавия для математики а также её прикладные аспекты.

Ключевые слова. Задача Иосифа Флавия, рекурсия, алгоритм, комбинаторика, история математики, практическое применение, криптография, теория игр.

Задача Иосифа Флавия представляет собой одну из самых занимательных и одновременно пронзительных задач в истории математики, находя свое начало в драматических событиях еврейской истории первого века нашей эры. Эта задача, названная в честь иудейского историка Иосифа Флавия, вовлекает нас в размышления о выживании, стратегии и математическом прогнозировании в условиях крайней опасности. История, лежащая в основе этой задачи, рассказывает о группе иудейских повстанцев, окруженных римскими войсками. Столкнувшись с неминуемым захватом, они предпочли смерть плену и решили совершить коллективное самоубийство, используя метод, который теперь известен как "задача Иосифа Флавия". В оригинальной задаче всего было 40 солдат и сам Иосиф, но в этой работе мы рассмотрим общий случай для любого числа солдат и любого шага.

Задача Иосифа Флавия формулируется следующим образом: имеется круг из n человек, стоящих в круге. Они начинают считаться по кругу, и каждый $m-$й человек выбывает из круга, после чего счет продолжается с последующего за ним. Процесс продолжается до тех пор, пока не останется один «выживший» участник, и, таким образом, задача состоит в том, чтобы определить его позицию. Далее приведена математическая формулировка задачи.

Обозначим позицию выжившего как $J(n,m)$, где n — общее количество человек в круге, а m — шаг счета. Для решения задачи можно использовать рекурсивный подход. Основное рекуррентное соотношение для задачи Иосифа Флавия: $J(n,m) = (J(n-1,m)+m) \bmod n$ для $n>1$, с начальным условием $J(1,m)=0$. Это соотношение основано на том, что после первого круга счета и удаления одного человека, задача уменьшается до $n-1$ человека. Однако, в этом случае начальная точка счета сдвигается на m позиций вперед. Операция взятия по модулю гарантирует, что номера остаются в пределах диапазона от 0 до $n-1$, что соответствует индексации в круге. В качестве примера рассмотрим задачу для пяти человек, где каждый второй человек выбывает $(n=5, m=2)$. Пронумеруем людей числами от 1 до 5 и начнем счет:

1) Первым выбывает человек под номером 2, а значит оставшиеся номера это 1, 3, 4, 5.
2) Затем выбывает человек под номером 4, оставшиеся – 1, 3, 5.
3) Следующим выбывает человек под номером 1, оставшиеся: 3, 5.
4) Наконец, выбывает человек под номером 5, и выживает человек под номером 3.

Таким образом, $J(5,2)=3$.

Отметим, что существует много различных способов решения задачи Иосифа Флавия. В данной работе будут рассмотрены способы решения перебором, рекуррентных соотношений и с помощью алгоритма, написанного на языке программирования C++.

Для решения задачи методом перебора воспользуемся формулой $i = (i+m-1) \bmod size$, где i – индекс текущего человека, m — шаг счета, т.е. количество людей, которые пропускаются перед тем, как следующий человек выбывает, $size$ – количество людей, оставшихся в круге. Выполнение данной задачи в виде кода на языке программирования C++ представлено на рисунке 1.

```cpp
int josephus(int n, int m) {
    vector<int> circle(n); // Создаем вектор для представления круга с людьми
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        circle[i] = i + 1; // Нумеруем людей в круге от 1 до n
    }

    int index = 0;
    while (circle.size() > 1) { // Пока в круге остается больше одного человека
        index = (index + m - 1) % circle.size(); // Вычисляем индекс следующего человека, который будет выбывать
        circle.erase(circle.begin() + index); // Удаляем выбывшего человека из круга
    }

    return circle[0]; // Возвращаем позицию оставшегося человека
}
```

Рисунок 1 – Решение методом перебора

Внутри функции $josephus$ создается вектор $circle$, который представляет собой круг с людьми, пронумерованными от 1 до n. Затем идет цикл while, который выполняется до тех пор, пока в круге остается больше одного человека. Внутри цикла вычисляется индекс следующего человека, который будет выбывать, с помощью формулы $(index + m - 1)\,\%\,circle.size()$. Выбывший человек удаляется из круга с помощью функции $erase$. После завершения цикла возвращается позиция оставшегося человека.

В частности, для начальных данных $n = 10, m = 3$ получим результат, представленный на рисунке 2.

```
Позиция последнего выжившего: 4

C:\VisualStudioLabs\Josephus-Flavian_problem\x64\Debug\Josephus-Flavian_problem.exe
(процесс 25268) завершил работу с кодом 0.
Нажмите любую клавишу, чтобы закрыть это окно…
```

Рисунок 2 – Результат решения методом перебора

Далее рассмотрим рекурсивный метод нахождения решения для задачи Иосифа Флавия. Для иллюстрации возможных ситуаций, которые могут возникнуть в ходе решения, упростим исходную задачу и рассмотрим несколько случаев.

Случай № 1: уменьшим круг солдат с сорока одного (сорок солдат и Иосиф) до десяти и предположим, что вместо каждого третьего солдата должен умереть каждый второй. Такая ситуация изображена на рисунке 3.

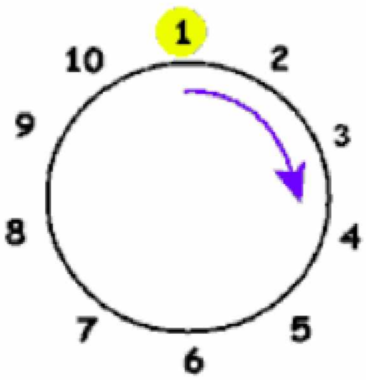

Рисунок 3 - Круг из 10 солдат, в котором должен «умереть» каждый второй

Если производить отсчет от 1-го солдата в круге, то порядок удаления будет следующим: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9. Солдат под номером 5 — в конечном итоге останется в живых. Этапы «уничтожения» солдат из круга графически представлены на рис. 4—6.

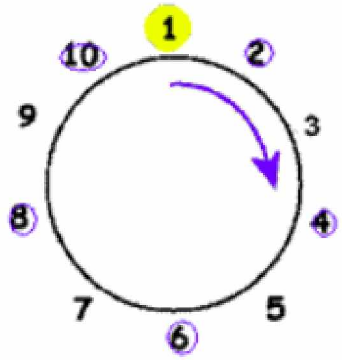

Рисунок 4 – 1-й этап удаления

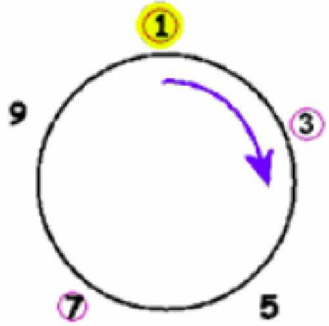

Рисунок 5 – 2-й этап удаления

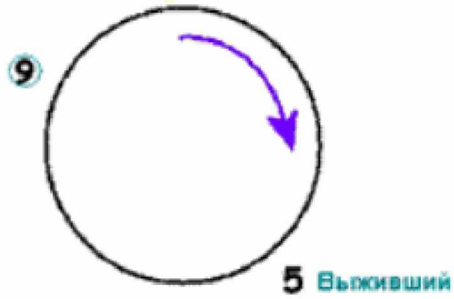

Рисунок 6 – 3-й этап удаления

Рассмотрим конкретную ситуацию и определим результаты, используя предопределенные условия. Задача состоит в том, чтобы установить зависимости между параметрами m, n (где n — это количество людей в круге, m — служит для определения каждого m –го солдата для «исключения» из круга), и решить задачу независимо от того, сколько солдат стоят в круге. Попробуем вывести общие формулы для решения задачи с любыми входными параметрами (на вход подаются значения m и n). Для этого определяем функцию $F(n)$, где $F(n)$ — возвращает номер «выжившего». Сразу возникает первое предположение, что $F(n)$ может быть в пределах $F(n) = n / 2$, что верно при $n = 10$ или $n = 2$. Однако при $n = 4$: $F(4) = 1$, что доказывает неправильность рассуждений. Следующее замечание из рассмотренной выше ситуации: полученный результат — нечётный номер, независимо от значения n. Так происходит вследствие того, что в результате 1-го этапа — были убраны все четные номера. Также следует учесть тот факт, что при $n = 1$: $F(1) = 1$.

Если солдат $2n$ человек, то номера, остающиеся после 1-го этапа, показаны на рис. 7.

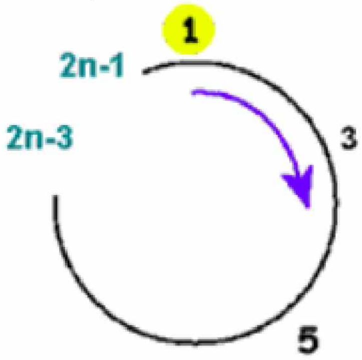

Рисунок 7 - 1-й этап при количестве солдат в круге $2n$

Аналогичная ситуация наблюдается и при $2n - 1$ солдатах (рис. 8). Однако вводится поправка — уменьшение на единицу и увеличение $F(n)$ в 2 раза.

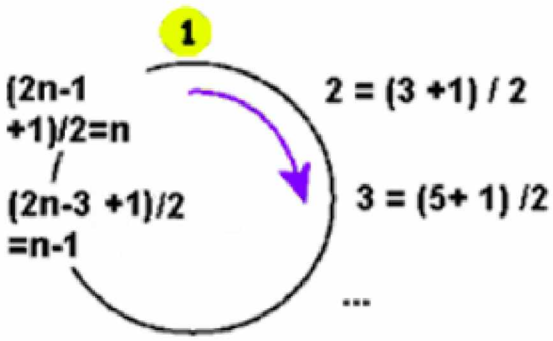

Рисунок 8 – солдат в круге $2n - 1$

Таким образом можно вывести формулу $F(2n) = 2\,F(n) - 1$ (для всех $n > 1$).

Случай № 2: число солдат равно $2n + 1$ (то есть нечётное). После 1-го этапа «исключения» солдат из круга получится ситуация, приведенная на рис. 9.

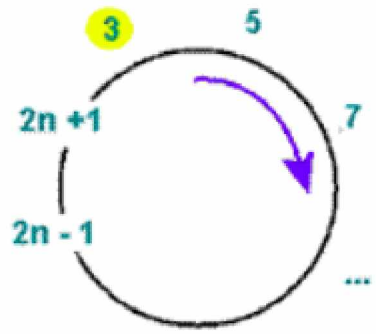

Рисунок 9 - 1-й этап при количестве солдат в круге $2n + 1$

Из чего можно вывести формулу $F(2n + 1) = 2F(n) + 1$ (для всех $n > 1$).

Рассмотренные выше ситуации (и их результат) можно записать в виде системы, позволяющей определить значение функции $F(n)$ для любых значений n:

$$\begin{cases} F(1) = 1, n = 1 \\ F(2n) = 2F(n) - 1, n > 1, \text{четн} \\ F(2n+1) = 2F(n) + 1, n > 1, \text{нечетн} \end{cases}$$

Записанные выше формулы могут быть применены и для решения исходной задачи Иосифа Флавия. А именно: $F(2m + k) = 2k + 1$ для любых m и k.

Теперь на рисунке 10 мы можем представить решение данной задачи в виде кода на языке программирования C++.

```
int josephusRecursion(int n, int m) {
    if (n == 1)
        return 1; // Если в круге остался только один человек, возвращаем его позицию 1
    else
        return (josephus(n - 1, m) + m - 1) % n + 1; // Рекурсивный вызов для уменьшения размера круга
}
```

Рисунок 10 – Решение методом рекурсии

Как можно заметить код стал немного короче по сравнению с предыдущим методом. Если в кругуе остается только один человек $(n = 1)$, то мы просто возвращаем его позицию, которая всегда равна 1. Если в круге больше одного человека, мы вызываем функцию $josephusRecursion$ для круга на одного человека меньше $(n - 1)$ и с тем же шагом счета m. Это позволяет нам рекурсивно уменьшать размер круга, пока не дойдем до базового случая. После возврата из рекурсивных вызовов мы добавляем к результату шаг счета $m - 1$ и берем остаток от деления на текущее количество людей в круге n. Таким образом, мы переходим к следующему человеку в круге.

При этом важно добавить 1 к результату, потому что позиции в круге начинаются с 1, а не с 0. Когда в круге остается только один человек, мы возвращаем его позицию как результат работы функции. Для начальных данных $n = 10, m = 3$ результат будет, как на рисунке 11.

```
Позиция последнего выжившего: 4

C:\VisualStudioLabs\Josephus-Flavian_problem\x64\Debug\Josephus-Flavian_problem.exe
(процесс 31700) завершил работу с кодом 0.
Нажмите любую клавишу, чтобы закрыть это окно…
```

Рисунок 11 – Результат решения методом рекурсии

В заключение отметим, что данная задача нашла широкое применение в различных прикладных аспектах не только математики, но и других наук. Задача Иосифа Флавия может использоваться для создания шифров, основанных на перестановке символов или элементов данных в определенном порядке (например, можно использовать эту задачу для перемешивания символов в текстовом сообщении перед его передачей для повышения безопасности). В сетевых протоколах можно использовать аналогичную задачу для решения проблемы избыточного использования ресурсов или сбоев в сети. Например, алгоритмы маршрутизации могут основываться на идее "выживания" определенного количества узлов или маршрутов в сети. Задача Иосифа Флавия может быть использована для моделирования различных дискретных процессов, таких как процессы эволюции популяции, банковские очереди или обработка данных в компьютерных системах. В теории игр задача Иосифа Флавия может использоваться для анализа стратегий выживания и оптимального выбора действий в условиях ограниченных ресурсов или конкуренции между участниками. В управлении ресурсами, например, в системах планирования и управления производством, задача Иосифа-Флавия может помочь оптимизировать распределение ресурсов и времени для достижения оптимальных результатов. В целом, задача Иосифа Флавия представляет собой простой и универсальный математический инструмент, который может быть применен в различных научных областях для решения самых разнообразных задач.

Список использованных источников:

1. Собеседование по алгоритмам: задача Иосифа Флавия [Электронный ресурс]. – Режим доступа – https://habr.com/ru/articles/709540/

2. Рекурсия [Электронный ресурс]. – Режим доступа – https://blog.skillfactory.ru/glossary/rekursiya/

3 Задача Иосифа Флавия [Электронный ресурс]. – Режим доступа - https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_Иосифа_Флавия

UDC 519.677

ABOUT THE JOSEPHUS-FLAVIAN PROBLEM

Yurkevich K. A., Rylkov I. N.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Romanchuk T.A.. – PhD in Physics and Mathematics

Annotation. This paper is devoted to the Josephus-Flavian problem, a combinatorial problem with historical roots that describes methods of survival in extreme conditions. Different methods (from recurrence relations to computational algorithms) for solving this problem are analyzed as well as its application in modern technologies, including cryptography and algorithmic game theory, is considered. The work emphasizes the relevance and importance of the Josephus-Flavian problem for mathematics and its applied aspects.

Keywords. Josephus problem, recursion, algorithm, combinatorics, history of mathematics, practical application, cryptography, game theory.