УДК 519.6

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Новицкий З. Я. [1], *студент гр.253501, Рабец И. О.* [2], *студент гр.253501*

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники[1]
г. Минск, Республика Беларусь

Анисимов В.Я. — канд. ф.-м. н., доцент каф. информатики

Аннотация. В данной статье рассматривается проблема восстановления производных гравитационного потенциала на дискретной сетке. Предлагается использовать численные методы дифференцирования и интегрирования для вычисления производных и интегралов на основе доступных значений потенциала. Предложенный подход может быть полезен для исследования гравитационных полей и изучения их свойств.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, численное дифференцирование, численное интегрирование, оценка погрешности.

Гравитационный потенциал — скалярная функция координат и времени, достаточная для полного описания гравитационного поля в классической механике. Имеет размерность квадрата скорости, обычно обозначается буквой φ. Гравитационный потенциал в данной точке пространства, задаваемой радиус-вектором $\vec{r}$, численно равен работе, которую выполняют гравитационные силы при перемещении пробного тела единичной массы по произвольной траектории из данной точки в точку, где потенциал принят равным нулю

Геометрически, вторая производная гравитационного потенциала указывает на изгибание пространства под воздействием массы. Положительные значения вторых производных указывают на выпуклость пространства (концентрацию массы), а отрицательные значения указывают на вогнутость (распределение массы вдоль впадин).

Однако зачастую является весьма проблематичным раздельное измерение вторых производных гравитационного потенциала $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y,z), \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y,z)$. Поэтому важным является исследование вопроса о возможности восстановления производных с помощью доступных для измерения $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y,z)$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y,z) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y,z)$.

Итак, необходимо восстановить $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y,z), \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y,z)$ в множестве S по заданным в том же множестве значениям $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y,z)$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y,z) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y,z)$. То есть полагаем, что:

$$\begin{cases} \varphi_{xy}''(t,\omega) = f_1(t,\omega) \\ \varphi_{xx}''(t,\omega) - \varphi_{yy}''(t,\omega) = f_2(t,\omega) \end{cases}, \qquad (1)\ (2)$$

где точка $T(t,\omega) \in S.$ Рассмотрим случай, когда множество S представляет собой прямоугольную дискретную сетку с шагом $h = h_x i + h_y j$ на плоскости $Z = const$.

Из уравнения (1) получим

$$\varphi(t_0,\omega_0) = p_1(t_0,z) + p_2(\omega_0,z) + \int_{t_0}^{t}\int_{\omega_0}^{\omega} f_1(x,y)dxdy. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), имеем:

$$p_{1tt}''(t,z) - p_{2\omega\omega}''(\omega,z) + \int_0^{\omega} \frac{\partial f_1(t,y)}{\partial t}dy - \int_0^{t} \frac{\partial f_1(x,\omega)}{\partial \omega}dx = f_2(t,\omega). \qquad (4)$$

При $\omega = 0$ соотношение (4) имеет вид:

$$p_{1tt}''(t,z) - p_{2\omega\omega}''(0,z) - \int_0^{t} \frac{\partial f_1(t,y)}{\partial \omega}|_{\omega=0}dx = f_2(t,0). \qquad (5)$$

А при $t = 0$:

$$p_{1tt}''(0, z) - p_{2\omega\omega}''(\omega, z) - \int_0^{\omega} \frac{\partial f_1(x, \omega)}{\partial t}|_{t=0} dx = f_2(0, \omega) \quad (6)$$

Из (3), (5) и (6), полагая $\omega_0 = 0$ и $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \varphi_{tt}''(t, \omega) = p_{1tt}''(t) + \int_0^{\omega} \frac{\partial f_1(x,\omega)}{\partial t} dy = p_2''(0) + f_2(t, 0) + \int_0^t \frac{\partial f_1(x,\omega)}{\partial \omega}|_{\omega=0} dx + \int_0^{\omega} \frac{\partial f_1(t,y)}{\partial t} dy, \\ \varphi_{\omega\omega}''(t, \omega) = p_{2\omega\omega}''(\omega) + \int_0^t \frac{\partial f_1(t,y)}{\partial \omega} dx = p_1''(0) + f_2(0, \omega) + \int_0^{\omega} \frac{\partial f_1(t,y)}{\partial t}|_{t=0} dy + \int_0^t \frac{\partial f_1(x,\omega)}{\partial \omega} dx \end{cases}.$$

Перепишем в окончательном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = c + f_2(t, 0) + \int_0^{\omega} \frac{\partial f_1(t,y))}{\partial t} dy + \int_0^t \frac{\partial f_1(x,\omega)}{\partial \omega})|_{\omega=0} dx, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = c + f_2(0, \omega) + \int_0^t \frac{\partial f_1(x,\omega))}{\partial \omega} dx + \int_0^{\omega} \frac{\partial f_1(t,y)}{\partial t})|_{t=0} dy \end{cases} \quad (7)\ (8)$$

Формулы (7) и (8) являются точными в случае безошибочных измерений $f_1(t, \omega)$, $f_2(t, \omega)$, а также при условии аналитического нахождения определенного интеграла и частных производных.

При численном дифференцировании мы можем разностными методами односторонней разности и двусторонней разности.

Пусть требуется найти численные значения y_k' производной функции $f(x)$ в узлах $x_0 < x_1 < ... < x_n$ отрезка $[a, b]$, в которых известны значения $y_0, y_1, \cdots, y_n$ функции. В таком случае мы можем воспользоваться следующими формулами.

Метод односторонней разности.

Если функция дважды дифференцируема, то:

$y_k' \approx \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h}$, где $x_k = x_0 + kh, k = 0..n$ с точностью $O(h)$ (9)

Метод двусторонней разности.

Если же функция трижды дифференцируема, то:

$y_k' \approx \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$, где $x_k = x_0 + kh, k = 0..n$ с точностью $O(h^2)$ (10)

Формула (10) дает большую точность, но требует, чтобы функция была трижды дифференцируема, когда для формулы (9) достаточно того, чтобы функция была дифференцируема дважды.

Для численного интегрирования также существует несколько способов.

Формула прямоугольников:

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i - \frac{h}{2})$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $x_k = x_0 + kh, k = 0..n$, точность $O(h^2)$ (11)

Формула трапеций:

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$, (12) где $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $x_k = x_0 + kh, k = 0..n$, точность $O(h^2)$

Формула Симпсона:

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + f(x_{2n}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}))$, (13) где $h = \dfrac{b-a}{2n}$, точность $O(h^4)$

Как можно видеть, формула (13) дает максимальную точность по сравнению с (11) и (12), но требует большую трудоемкость.

Метод Гаусса

В предыдущих формулах численного интегрирования используются равноотстоящие узлы. В случае квадратурных формул Гаусса узлы интегрирования x_i на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ располагаются не равномерно, а выбираются таким образом, чтобы при наименьшем возможном числе узлов точно интегрировать многочлены наивысшей возможной степени. Таким образом, общая формула имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \quad (14)$$

Узлы x_i являются корнями полинома Лежандра степени n, а веса вычисляются интегрированием полиномов Лежандра по формуле $c_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P_n'(x_1))^2}$, (15)

где P_n' – первая производная полинома Лежандра. Данные значения узлов x_i являются табличными.

Узлы и веса, рассчитанные для отрезка $[-1,1]$. Для интегрирования на произвольном частичном отрезке необходимо пересчитать значения узлов для данного частичного отрезка $[x_{j-1}, x_j]$:

$$x_i = x_{j-1} + \frac{(x_{i[-1,1]}+1)(x_{j-1}-x_j)}{2}. \quad (16)$$

Таким образом, конечная формулу для численного интегрирования методом Гаусса на отрезке $[a,b]$ можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i f(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}), \quad (17)$$

где c_i – веса полинома Лежандра степени *n*, которые можно вычислить с помощью формулы (15), x_i – корни полинома Лежандра степени *n*, точность метода $O(h^{2n+1})$. В данной работе мы будем использовать метод Гаусса с количеством узлов $n = 5$, поэтому точность метода будет $O(h^{11})$

Оценка погрешностей методов численного дифференцирования.

В следующих формулах справедливо равенство для шага разбиения $h = \frac{b-a}{n}$, где n – количество отрезков разбиения, и для M_n – максимального значения *n*-ой производной на отрезке [a, b].

Метод односторонней разности:

Оценка погрешности вычислений имеет вид $R \le \frac{M_2}{2}h$.

Метод двусторонней разности:

Оценка погрешности вычислений имеет вид $R \le \frac{M_3}{2}h^2$.

Оценка погрешностей методов численного интегрирования.

Метод прямоугольников:

Оценка погрешности вычислений имеет вид $R \le \frac{M_2(b-a)}{24}h^2$.

Метод трапеций:

Оценка погрешности вычислений имеет вид $R \le \frac{M_2}{12}h^2$.

Метод Симпсона:

Оценка погрешности вычислений имеет вид $R \le \frac{M_4(b-a)}{2880}h^4$.

Метод Гаусса:

Оценка погрешности вычислений имеет вид $R \le \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{[(n+1)(n+2)\ldots 2n]^3}M_{2n}h^{2n+1}$, где *n* – количество узлов. В данной работе мы будем использовать метод Гаусса с количеством узлов $n = 5$.

Теперь оценим погрешность в формулах (7) и (8).

Предположим, что функция $f_1(t,\omega)$ задана аналитически. В таком случае мы всегда можем аналитически найти ее производную и у нас появляется необходимость лишь в вычислении интеграла.

В зависимости от использования формул (11), (12), (13) или (17) мы можем получить точность от $O(h^2)$, используя метод прямоугольников или трапеций, до $O(h^{11})$, используя метод Гаусса.

Если же функция $f_1(t,\omega)$ не задана аналитически, то вычисление ее производной аналитически невозможно. В таком случае нам нужно построить таблицу аргументов и значений этой функции (если ее у нас нет) в узлах $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ отрезка $[a,b]$, в которых известны значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ функции.

Для достижения минимальной точности в контексте используемых методов, для численного дифференцирования мы можем использовать метод односторонней разности, а для численного интегрирования метод прямоугольников. Таким образом, оценка погрешности будет иметь вид:

$$R = R_1 + R_2 \le \frac{M_2}{2}h + \frac{M_2(b-a)}{24}h^2$$

, где R_1 – оценка погрешности для метода односторонней разности, R_2 – оценка погрешности для метода прямоугольников.

В итоге, получаем общую оценку погрешности вычислений с точностью $O(h)$

Для достижения максимальной точности в контексте используемых методов, для численного дифференцирования мы можем использовать метод двусторонней разности, а для численного интегрирования метод Гаусса для 5-ти точек. Таким образом, оценка погрешности будет иметь вид:

$$R = R_1 + R_2 \le \frac{M_3}{2}h^2 + \frac{5!}{(6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10)^3}M_{11}h^{11}$$

, где R_1 – оценка погрешности для метода двусторонней разности, R_2 – оценка погрешности для метода Гаусса.

В итоге, получаем общую оценку погрешности вычислений с точностью $O(h^2)$

Вторые производные гравитационного потенциала играют ключевую роль в изучении распределения массы во Вселенной. Измерение вторых производных помогает обнаруживать массивные скопления галактик, черные дыры и другие концентрации материи во Вселенной, позволяет исследовать распределение темной материи, которая вносит существенный вклад в гравитационные поля галактик и скоплений. Анализ второй производной дает возможность визуализировать деформации пространства-времени, связанные с гравитационными волнами.

Список использованных источников:

1. Решение задач по численным методам: методическое указание / Чернышев В.А. – Екатеринбург: Уральский университет, 2005 – 52 с.

2. Введение в теорию гравитационного потенциала / Кащеев Р.А. – Казань: Казанский государственный университет, 2009 – 46 с.

3. Краткий курс численного анализа: учебное пособие / Минченко Л.И. – БГУИР, 2006 – 139 с.

4. Оценка погрешностей определения параметров сильно аномального гравитационного поля Земли / Старосельцев Л.П., Яшникова О.М. – Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016 – 8 с.

UDC 519.6

ESTIMATION OF ERROR IN THE RECONSTRUCTION OF SECOND DERIVATIVES OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL

Novickiy Z.Y.[1], Rabets I.O.[2]

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics[1], Minsk, Republic of Belarus

Anisimov V.Y. — PhD in Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Infotmatics

Annotation. *This article considers the problem of recovering the derivatives of the gravitational potential on a discrete grid. It is proposed to use numerical methods of differentiation and integration to calculate derivatives and integrals on the basis of available values of the potential. The proposed approach can be useful for investigating gravitational fields and studying their properties.*

Keywords. *gravitational potential, numerical differentiation, numerical integration, error estimation.*