ПРИБЛИЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

Скавинский К.Е., студент, Кмит А.А., студент

Институт информационных технологий БГУИР
г. Минск, Республика Беларусь

Майсеня Л.И. – канд. физ-мат. наук, профессор, зав. каф. ФМД

Актуальность решения проблемы поиска приближённых комплексных корней алгебраических уравнений обусловлена необходимостью этой тематики в научных и практических работах.

Метод приближения комплексных корней уравнения. Для приближённого нахождения действительных корней алгебраических уравнений существует много методов — методы касательных, хорд, половинного деления, итераций и т.д.

Приближённое нахождение комплексных корней уравнения является достаточно сложным. Здесь известен метод Греффе, как эффективный алгоритм для нахождения корней многочлена. Иногда он называется по именам первооткрывателей метод — Данделена — Лобачевского — Греффе.

По сравнению с другими алгоритмами решения той же задачи, данный метод имеет несколько преимуществ. Он не требует предварительной работы по выяснению, где примерно находятся корни и сколько среди них комплексных. Данный метод даёт в результате все вещественные корни, а при некоторой модификации — также и комплексные.

Недостатками метода является сложность оценки точности результата.

История метода. Рассуждения, близкие к идее данного метода, высказывали ещё в XVII веке И. Ньютон (в «Универсальной арифметике») и Э. Варинг в «Аналитических этюдах». Первое краткое изложение идеи опубликовал французский математик Ж. Данделен в 1826 году. Этот мемуар остался незамеченным. Восемь лет спустя аналогичную идею более подробно из$\Sigma\alpha^n\beta^n\gamma^n \approx 2r^{2n}s^n\cos n\varphi$ Лобачевский в своём учебнике «Алгебра или вычисление конечных» (1834), но и его работа не привлекла внимания научной общественности.

В 1836 году Берлинская академия наук объявила конкурс на разработку удобного метода нахождения комплексных корней многочлена. Среди призёров была статья швейцарского профессора К. Греффе «Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen» (1837). Греффе изложил метод развёрнуто, с многочисленными примерами. Впервые имена всех трёх первооткрывателей были указаны в книге Э. Уиттекера и Г. Робинсона «Математическая обработка результатов наблюдений» («The calculus of observations», 1924). В дальнейшем этот алгоритм был несколько усовершенствован И. Энке (1841) и Э. Карвальо (1896).

Суть метода. Рассмотрим уравнение.

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0. \tag{1}$$

Предположим, что все его корни комплексные. Используем показательную форму комплексного числа. Пусть α и β будут значениями $re^{\pm\theta i}$, а γ и δ — $se^{\pm\varphi i}$, где $r > s$. Тогда α^n и β^n являются $r^n e^{\pm n\theta i}$; γ^n и δ^n являются $s^n e^{\pm n\varphi i}$ и, если n достаточно велико, r^n будет очень большим по сравнению с s^n.

В алгоритме авторами доказывается:

$$\Sigma\alpha^n \approx 2r^n\cos n\theta, \quad \Sigma\alpha^n\beta^n \approx r^{2n}.$$

$$\Sigma\alpha^n \approx 2r^n\cos n\theta, \quad \Sigma\alpha^n\beta^n \approx r^{2n}.$$

$$\Sigma\alpha^n\beta^n\gamma^n \approx 2r^{2n}s^n\cos n\varphi, \qquad \alpha^n\beta^n\gamma^n\delta^n = r^{2n}s^{2n}. \tag{2}$$

Если, α^n, β^n, γ^n и δ^n являются корнями уравнения,

$$X^4 - AX^3 + BX^2 - CX + D = 0, \tag{3}$$

то выполняется

$$\begin{cases} 2r^n\cos n\theta \approx A, \\ r^{2n} \approx B, \\ 2r^{2n}s^n\cos n\varphi \approx C, \\ r^{2n}s^{2n} \approx D. \end{cases} \tag{4}$$

из которого можем найти *r*, *s*, *θ* и *φ* (приближенно).

При переходе к алгебраической форме комплексного числа $re^{\theta i} = \upsilon_1 + \nu i_1$ и $se^{\varphi i} = \upsilon_2 + \nu i_2$ имеем по алгоритму

$$2\,(\upsilon_1 + \upsilon_2) = a \text{ и } 2(s^2\upsilon_1 + r^2\upsilon_2) = c. \tag{5}$$

Поскольку *r* и *s* уже найдены, эти два уравнения дают υ_1 и υ_2.
Тогда θ и φ можно найти из значений

$$\cos\,\theta\frac{\upsilon_1}{r},\ \cos\,\varphi\frac{\upsilon_2}{s} \tag{6}$$

или ν_1 и ν_2 из равенств

$$\nu_1^2 = r^2 - \upsilon_1^2 \text{ и } \nu_2^2 = s^2 - \upsilon_2^2 \tag{7}$$

Уравнения $2r^n\ cos\ n\theta\ = A$ и $2r^{2n}s^n\ cos\ n\varphi\ = C$ образуют полезную проверку.

При квадрировании корней каждый коэффициент преобразованного уравнения равен квадрату прежнего коэффициента, минус удвоенное произведение соседних с ним коэффициентов, плюс удвоенное произведение следующих в порядке близости коэффициентов и т.д. (если нужный коэффициент отсутствует, то он считается равным нулю).

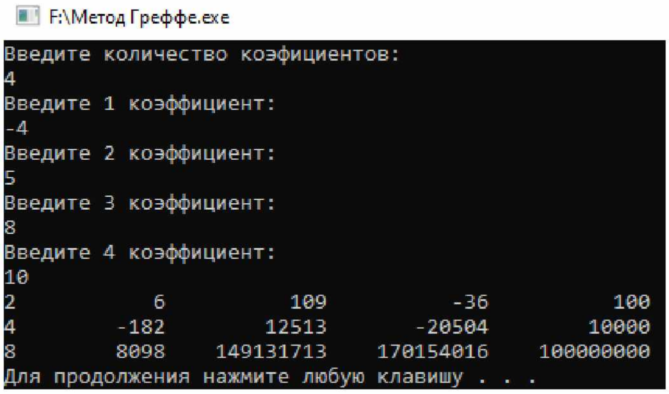
Процесс квадрирования корней следует прекратить, если коэффициенты некоторого преобразованного уравнения в пределах точности вычислений равны квадратам соответствующих коэффициентов последующего преобразованного уравнения за счет отсутствия удвоенных произведений.

С применением табличного процессора MS Excel получено следующее решение, представленное на рисунке 1.

Уравнение:	x^4 – 4x^3 + 5x^2 + 8x + 10			
Коэффициент	-4	5	8	10
2	6	109	-36	100
4	-182	12513	-20504	10000
8	8098	1,49E+08	170154016	1E+08

Рисунок 1 — Решение, полученное с помощью табличного процессора MS Excel

Для проверки работы было создано консольное приложение на языке программирования C++. Результат работы программы представлен на рисунке 2.



```
F:\Метод Греффе.exe
Введите количество коэфициентов:
4
Введите 1 коэффициент:
-4
Введите 2 коэффициент:
5
Введите 3 коэффициент:
8
Введите 4 коэффициент:
10
2         6        109         -36         100
4      -182      12513      -20504       10000
8      8098  149131713   170154016   100000000
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 2 — Программная реализация метода Греффе.

Ответ совпадает с предыдущим решением.

Список использованных источников:

1. Geary A., M. A. M., M. SC., Lowry H. V., M. A., Hayden H. A., D. Sc. // Advanced Mathematics for technical students part 1, 1950 – P. 311-312.
2. А. А. Беланов // Решение алгебраических уравнений методом ЛОБАЧЕВСКОГО, 1989. С. 14-18.
3. Метод Лобачевского — Греффе. 2022.https://ru.wikipedia.org/wiki//Метод_Лобачевского_—_Греффе