УДК 514.765.1

Н. П. Можей, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУИР, г. Минск)

РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

В работе обсуждается существование и свойства инвариантных связностей на однородных пространствах, результаты Вана [1] применяются к ситуации, когда существует инвариантная структура на однородном пространстве, а именно, на редуктивном пространстве. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П.К. Рашевским, М. Куритой, Э.Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [2] и др. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан (для риманова многообразия, см. [3]).

Класс пространств с симметрическим тензором Риччи значительно шире класса римановых пространств, это так называемые пространства эквиаффинной связности. Они, вообще говоря, не обладают метрикой, но в их касательных пространствах можно ввести измерение объемов так, что объем $\mathfrak{n}$-мерного параллелепипеда, построенного на $\mathfrak{n}$ векторах, сохраняется при параллельном перенесении этих векторов по любому пути.

Соответствующее свойство можно принять за определение пространств эквиаффинной связности. Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [4]). Трехмерные редуктивные однородных пространства разрешимых групп Ли изучались в [5], в данной работе определяется, при каких условиях пространство допускает нормальную связность, но не допускает эквиаффинную.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пространство редуктивно, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$–инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является

$\mathfrak{g}$-инвариантным. Тензор кручения $T \in InvT^1_2(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT^1_3(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$ имеет вид $Ric(y,z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является локально эквиаффинной, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна.

Под эквиаффинной связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$, тогда $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\ldots,e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\ldots,e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [5], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$).

Теорема. Все трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, но не допускающие эквиаффинную, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

$2.9.4, \mu = 0$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	0	$-u_1$	0	u_3	0

,

$2.9.5, 2.9.6$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$
u_2	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	$-u_1$	$\mp e_2$	$-\alpha u_2$	0

$, \alpha \geq 0$,

2.9.7	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1 .
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

Доказательство для случая нормальной связности приведено в [5]. Выберем из пространств, найденных в [5], не допускающие эквиаффинных связностей.

В частности, для пар 2.9.4 (μ=0), 2.9.5, 2.9.6, 2.9.7 аффинные связности имеют вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0 & p_{12} & p_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}q_{11} & 0 & 0\\ 0 & q_{22} & q_{23}\\ 0 & 0 & q_{11}\end{pmatrix},\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}r_{11} & 0 & 0\\ 0 & r_{22} & r_{23}\\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13}\end{pmatrix},$$

где $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}, i, j = \overline{1,3}$. В табл. 0 приведены тензоры кручения указанных связностей.

Таблица 1 – Тензоры кручения

Пара	Тензоры кручения $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$
2.9.4 при μ=0	$(p_{12}-q_{11}-1,0,0),(p_{13}-r_{11},0,0),(0,q_{23}-r_{22},q_{11}-p_{12}+1)$
2.9.5, 2.9.6.	$(p_{12}-q_{11},0,0),(p_{13}-r_{11},0,0),(0,q_{23}-r_{22}-\alpha,q_{11}-p_{12})$
2.9.7.	$(p_{12}-q_{11},0,0),(p_{13}-r_{11},0,0),(0,q_{23}-r_{22}-1,q_{11}-p_{12})$

Тогда локально эквиаффинные связности (без кручения) на трехмерных редуктивных однородных пространствах разрешимых групп Ли, приведенных в теореме, принимают вид, приведенный в табл. 2. Во всех приведенных случаях $\mathrm{tr}\Lambda(e_1)\neq 0$, поэтому пары не допускают эквиаффинных связностей.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных редуктивных однородных пространств разрешимых групп Ли, допускающих нормальную связность, но не допускающих эквиаффинную, не существует.

Таблица 2 – Локально эквиаффинные связности

Пара	**Локально эквиаффинная связность (без кручения)** $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$
1	2
2.9.4, μ=0	$\begin{pmatrix}0 & p_{12} & p_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,2}-1 & 0 & 0\\ 0 & q_{22} & -3p_{13}\\ 0 & 0 & p_{1,2}-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{13} & 0 & 0\\ 0 & -3p_{13} & r_{23}\\ 0 & p_{12} & 2p_{13}\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 2

1	2
2.9.5, 2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23}-\alpha & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix},$ при $\alpha \neq 0 \quad q_{22} = -2p_{12}$
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{12} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23}-1 & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$

Найдены и описаны в явном виде трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, но не допускающие эквиаффинную, рассмотрен случай разрешимой группы Ли преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang, H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No 13. – P. 1–19.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т.

3. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.

4. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263p.

5. Можей, Н.П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, № 6 (99), 2016, С. 74–81.