УДК 519.688, 514.765

Н.П. Можей
mozheynatalya@mail.ru
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Работа посвящена описанию возможностей изучения симплектических однородных пространств с применением математических пакетов, в частности, с использованием системы Maple. Описаны основные команды и подпакеты с тесно интегрированными инструментами для вычислений в области исследований на многообразиях, тензорного анализа, алгебр Ли и групп Ли и их преобразований.

Ключевые слова: *пакеты символьной математики, дифференциальная геометрия, система Maple, почти симплектическое пространство.*

Natalya P. Mozhey
mozheynatalya@mail.ru
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

APPLICATION OF MATHEMATICAL PACKAGES IN THE STUDY OF SYMPLECTIC SPACES

The work describes the possibilities of studying symplectic homogeneous spaces using mathematical packages, in particular, using the Maple system. The main commands and subpackages with closely integrated tools for computing in the field of research on manifolds, tensor analysis, Lie algebras and Lie groups and their transformations are described.

Keywords: *symbolic mathematics packages, differential geometry, Maple system, almost symplectic space.*

Введение

Современное программное обеспечение, предназначенное для использования в математических вычислениях, представляет собой систему, включающую в себя метод представления символьных данных, язык, позволяющий ими манипулировать, и библиотеку функций для выполнения базисных операций. Наиболее широкое применение получили универсальные математические системы, такие как Maple, Mathematica, MathCad, MatLab и другие.

Дифференциальная геометрия является объединением аналитической геометрии и математического анализа, она богата различными приложениями, как геометрическими, так и механическими, и оптическими. Продемонстрировать приложения и дать их графические представления позволяют пакеты символьной математики, одним из которых является пакет Maple. Системы символьной математики все чаще используются и для решения геометрических задач. Опишем возможности применения пакета Maple для изучения симплектических однородных пространств.

Основная часть

Симплектической структурой на гладком четномерном многообразии называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на нем. Многообразие, снабженное симплектической структурой, называется симплектическим многообразием. Симплектическая геометрия дает математический аппарат для таких областей физики, как классическая механика, геометрическая оптика, термодинамика и др. Она, в частности, упрощает формальный аппарат гамильтоновой динамики и вариационного исчисления, также как обычная геометрия линейных пространств сводит громоздкие координатные вычисления к простым основным принципам. В случае, если на многообразии транзитивно действует группа Ли, то такое многообразие является однородным пространством. Продемонстрируем использование новейших разработок компьютерной алгебры, в частности, применение алгоритмов и программ в среде пакета Maple для изучения изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой.

Пусть $(\bar{G},M)$ – четырехмерное однородное пространство, здесь M – многообразие, $\bar{G}$ – группа Ли, а $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Паре $(\bar{G},G)$ поставим в соответствие пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе Ли G. Рассмотрим для заданной подалгебры $\mathfrak{g}$ задачу классификации (с точностью до эквивалентности) пар $\bar{\mathfrak{g}}\ \mathfrak{g}$ у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$. Пара $\bar{\mathfrak{g}}\ \mathfrak{g}$ является изотропно-точной, если ее изотропное представление – инъекция. В дальнейшем рассматриваются только такие пары. Известно, что (с точностью до сопряженности) на четырехмерном пространстве существует единственная невырожденная кососимметрическая билинейная форма b, множество всех эндоморфизмов четырехмерного пространства, сохраняющих форму b, является алгеброй Ли. Над полем C эта алгебра Ли обозначается $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$. Решение задачи классификации четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой разбивается на следующие этапы: классификация (с точностью до сопряженности) подалгебр $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, для каждой найденной подалгебры $\mathfrak{g}$ производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$. Описание первого этапа приведено в работе [1].

Для нахождения изотропно-точных пар можно использовать пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor и другие. Например, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ применяется пакет DifferentialGeometry. Этот пакет представляет собой набор команд и подпакетов с тесно интегрированными инструментами для вычислений в области исследований на многообразиях (работа с векторными полями, дифференциальными формами и преобразованиями), в области тензорного анализа, вычислений на пространствах джетов, изучения алгебр Ли и групп Ли и их преобразований и др. Группы и алгебры Ли играют существенную роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях, пакет DifferentialGeometry дает возможность применять пакет LieAlgebra, содержавший команды для определения алгебр Ли и для создания новых алгебр Ли по существующим. Его подпакет GroupActions предоставляет базовые возможности для работы с группами Ли. Важную геометрическую информацию дают подалгебры изотропии, а также представления в касательном пространстве, их можно рассчитать с помощью пакета GroupActions. Подпакет Tensor содержит набор команд для работы с тензорами на касательном расслоении многообразия (или на любом векторном расслоении), он дает возможность использования команд для стандартных алгебраических операций над тензорами, для вычисления ковариантного дифференцирования, кривизны и др.

Для того, чтобы задать алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, вводятся ее структурные константы и используется команда DGsetup для инициализации алгебры. После инициализации можно проводить любые вычисления и проверки. Для подалгебры $\mathfrak{g}$ указывается базис. Команда LieGroup пакета GroupActions непосредственно строит глобальную группу Ли $\bar{G}$ по заданной алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. С помощью команды LeftMultiplication можно получить явную формулу для левого умножения элементов группы в координатах. Лево- и правоинвариантные векторные поля на $\bar{G}$ вычисляются командой InvariantVectorsAndForms. Команда LieAlgebraData находит структурные константы для правоинвариантных векторных полей, совпадающие со структурными константами алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Фактор группы $\bar{G}$ по подгруппе G является четырехмерным многообразием. Действие группы Ли $\bar{G}$ на многообразии M является композицией проекции, левого умножения (dotLeft) группы $\bar{G}$ на $\bar{G}$ и сечения. Локальное действие $\bar{G}$ на M вычисляется с использованием команды InfinitesimalTransformation. Результат можно проверить, поскольку структурные константы алгебры Ли векторных полей совпадают со структурными константами алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Единица группы $\bar{G}$ проектируется в точку на многообразии M и позволяет найти стабилизатор (подгруппу), используя команду IsotropySubalgebra. Используя эти и другие команды пакета Maple для подалгебр линейной алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, можно найти соответствующие изотропно-точные почти симплектические однородные пространства.

Заключение

Таким образом, описаны основные команды и подпакеты системы Maple с тесно интегрированными инструментами для вычислений в области исследований на многообразиях, тензорного анализа, алгебр Ли и групп Ли и их преобразований и показано, как с их помощью изучать в явном виде изотропно-точные почти симплектические однородные пространства.

Список литературы

1. Можей Н. П. Почти симплектические однородные пространства // Труды БГТУ. Сер. 6, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. № 6. С. 17–20.