Изучение вещественных и комплексных алгебр Ли с применением пакетов аналитических вычислений

Н. П. Можей, email: mozheynatalya@mail.ru

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Аннотация. *Работа посвящена применению пакетов аналитических вычислений к исследованию вещественных и комплексных алгебр Ли. Наиболее эффективное решение этой задачи возможно в системе Maple. В работе приведен алгоритм описания абстрактных алгебр Ли, основанный на классификациях полупростых и нильпотентных алгебр, и описана классификация неразрешимых алгебр Ли размерности семь. Указанные алгебры также соответствуют однородным вещественным гиперповерхностям четырехмерного комплексного пространства, стабилизатор которых тривиален.*

Ключевые слова: *неразрешимая алгебра Ли, расщепление Мальцева, почти алгебраическая алгебра Ли, алгоритм классификации.*

Введение

Группы и алгебры Ли играют существенную роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях, их исследовать помогают пакеты прикладных программ. Например, применение системы компьютерной математики Maple позволяет облегчить трудоемкие вычисления и справиться с проблемами, которые многие ученые ранее считали неразрешимыми. Maple незаменим как для проверки окончательных и промежуточных результатов, получаемых аналитически, так и для поиска методов решения.

В теории алгебр Ли наиболее изученным классом являются полупростые алгебры, полная классификация которых существует для каждой фиксированной размерности. Для разрешимых алгебр Ли и для полупрямых сумм полупростых и разрешимых алгебр Ли известны лишь отдельные классификационные результаты. Алгебры Ли размерности четыре над полем комплексных чисел были получены еще Софусом Ли, четырехмерные алгебры Ли над полем действительных чисел и пятимерные алгебры Ли над полями комплексных и действительных чисел – Мубаракзяновым, им же была проведена классификация разрешимых шестимерных алгебр Ли над полем

действительных чисел, отдельно шестимерные нильпотентные алгебры Ли над полем комплексных чисел описаны Умлауфом, а над полем нулевой характеристики – Морозовым. Неразрешимые алгебры Ли в малых размерностях описаны Турковским [1]. В данной работе описывается применение пакетов аналитических вычислений к исследованию вещественных и комплексных алгебр Ли и, в частности, к классификации неразрешимых алгебр Ли размерности семь.

1. Применение пакетов аналитических вычислений

Пакет LieAlgebra является подпакетом пакета DifferentialGeometry, содержащим большое количество команд для определения алгебр Ли и создания новых алгебр из существующих, например, DirectSum, Extension, LieAlgebraData, MatrixAlgebras, QuotientAlgebra, SimpleLieAlgebraData, SemiDirectSum и др. В пакете LieAlgebras команда DGsetup используется для инициализации алгебры Ли, то есть для определения базисных элементов алгебры и для сохранения структурных констант алгебры Ли в памяти. Первым аргументом DGsetup является структура данных алгебры, которая содержит структурные константы в стандартном формате, используемом пакетом LieAlgebras. Команда LieAlgebraData(Subalgebra) вернет структуру данных алгебры Ли для подалгебры, таким образом, подалгебра может быть изучена как самостоятельная алгебра Ли, независимая от исходной внешней алгебры. В общем случае команда LieAlgebraData преобразует различные реализации алгебры Ли, например, алгебру Ли векторных полей на многообразии в абстрактную алгебру Ли. Ее таблицу умножения можно посмотреть с использованием MultiplicationTable. Общую структуру алгебры Ли можно исследовать с помощью команд Decompose, Query, Series, Nilradical, Radical и др., а структуру полупростой алгебры Ли – с помощью команд CartanDecomposition, CartanSubalgebra, CartanMatrix, CompactRoots, PositiveRoots, RootSpaceDecomposition, RestrictedRootSpaceDecomposition. С помощью этих и других команд можно построить фактор–алгебру, полупрямое произведение алгебр Ли, найти различные подалгебры и идеалы (центр, централизатор, нильрадикал, радикал, производный ряд, нижний центральный ряд, верхний центральный ряд алгебры или подалгебры Ли, нормализатор подалгебры), найти форму Киллинга, разложение Леви, разложить алгебру на прямую сумму неразложимых алгебр Ли и др. Когомологии алгебр Ли могут быть вычислены с помощью команд Cohomologies, CohomologyDecomposition, KostantCodifferential, KostantLaplacian и др. Для исследования линейных алгебр Ли можно использовать команды нахождения централизатора и нормализатора для набора матриц, нахождения наименьшего идеала или наименьшей подалгебры, содержащих данный набор векторов. Для работы с представлениями можно использовать вычисление инвариантных векторов и тензоров представления алгебры Ли, ограничение представления на подалгебру, находить индуцированное представление на инвариантном подпространстве, базис пространства представлений, в котором матрицы представления разрешимой алгебры являются верхнетреугольными, и др. В дальнейшем будем использовать указанные команды для получения искомой классификации.

2. Классификация вещественных и комплексных алгебр Ли

Рассмотрим классификацию с точностью до изоморфизма абстрактных неразрешимых алгебр Ли размерности семь (над полем нулевой характеристики) с использованием системы Maple. Предлагаемый классификационный алгоритм основывается на понятиях почти алгебраической алгебры Ли и расщепления Мальцева для абстрактной алгебры Ли.

В работе рассматривается общий подход к классификации произвольных алгебр Ли. С помощью расщепления Мальцева задача описания алгебр Ли над полем нулевой характеристики сводится к описанию почти алгебраических алгебр Ли, для которых, в свою очередь, необходимо знание полупростых и нильпотентных алгебр. Полупростые алгебры Ли описываются в терминах систем корней и задаются с помощью образующих и соотношений. Для них существует невырожденная форма Киллинга, диаграммы Дынкина, корневое разложение, теория старших весов представлений, различные формулы характеров конечномерных представлений и многое другое. Нильпотентные алгебры Ли не обладают такими хорошими свойствами. Например, уже в размерности семь можно привести примеры нильпотентных алгебр, не имеющих полупростых дифференцирований. Существующие методы классификации нильпотентных алгебр Ли индуктивны по размерности и для малых размерностей позволяют быстро получить результат. Однако с каждым следующим шагом возникают большие вычислительные сложности. Классификация семимерных нильпотентных алгебр Ли приводилась многими авторами, однако содержала ошибки и неточности, исправленные в работе Гонга. В больших размерностях известны лишь частичные классификационные результаты, получены отдельные классы алгебр.

Основываясь на классификациях полупростых и нильпотентных алгебр Ли, далее приведем алгоритм описания абстрактных алгебр Ли и проведем саму классификацию семимерных неразрешимых алгебр Ли над полями комплексных и действительных чисел. Вместе с работами Парри [2], Хинделе и Томпсона [3], а также совместной работой Ву, Туан, Ту, Туйен и Тьеу [4] это завершит классификацию семимерных алгебр Ли. Рассматриваемая в работе задача также тесно связана, например, с проблемой описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей четырехмерного комплексного пространства, абстрактные алгебры Ли размерности семь соответствуют однородным гиперповерхностям, стабилизатор которых тривиален (поверхности с нетривиальным стабилизатором описывались, например, в [5]).

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется почти алгебраической, если существует редуктивная подалгебра $\mathfrak{m}$ этой алгебры Ли, такая, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой $\mathfrak{m}$ и наибольшего нильпотентного идеала. При этом подалгебра $\mathfrak{m}$ называется подалгеброй Мальцева почти алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а указанное разложение – ее разложением Мальцева. Расщеплением Мальцева алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее вложение в почти алгебраическую алгебру Ли, такое, что не существует собственных почти алгебраических подалгебр, содержащих образ $\mathfrak{g}$.

Назовем алгебру Ли точной, если ее наибольший полупростой идеал равен нулю. Любая алгебра Ли является прямой суммой наибольшего полупростого идеала и точной алгебры. Классификация полупростых алгебр Ли известна, поэтому достаточно ограничиться классификацией точных алгебр Ли, которая, в свою очередь, разбивается на классификацию нильпотентных алгебр Ли, классификацию точных почти алгебраических алгебр Ли с данным наибольшим нильпотентным идеалом и классификацию точных алгебр Ли, не являющихся почти алгебраическими, с данным расщеплением Мальцева.

Пусть g – неразрешимая алгебра Ли размерности семь. Тогда размерность наибольшего нильпотентного идеала ее расщепления Мальцева не превосходит четырех, соответственно, для классификации неразрешимых алгебр Ли размерности семь достаточно знать классификацию нильпотентных алгебр Ли до размерности четыре. Пусть поле k=R или C.

Если семимерная неразрешимая алгебра не является точной, то она либо имеет 6-мерную подалгебру Леви и, соответственно, изоморфна алгебрам Ли sl(2, k) x sl(2, k) x k, sl(2, R) x su(2) x R, su (2) x su(2) x R, sl(2, C)R x R, либо она изоморфна sl(2, k) x $\mathfrak{h}$ или su(2) x $\mathfrak{h}$, где размерность алгебры $\mathfrak{h}$ равна четырем, а классификация четырехмерных алгебр Ли известна.

Пусть $\mathfrak{g}$ – семимерная неразрешимая точная алгебра Ли. Если размерность нильрадикала ее расщепления Мальцева не более двух, получаем, что таких семимерных неразрешимых алгебр Ли нет, если размерность нильрадикала ее расщепления Мальцева равна трем, получаем, что g изоморфна одной и только одной из 4 комплексных или 5 вещественных алгебр Ли, если размерность нильрадикала равна четырем, то g изоморфна одной и только одной из 5 комплексных или 7 вещественных алгебр Ли.

Заключение

Таким образом, найдены все семимерные неразрешимые алгебры Ли над полями R и C. Вместе с работами [1-2] это завершает классификацию семимерных алгебр Ли. Описанные в работе алгоритмы также могут быть использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Список литературы

1. Turkowski, P. Low-dimensional real Lie algebras / P. Turkowski. – J. Math. Phys. – № 29 (1988) – P. 2139-2144.
2. Parry, A. R. A classication of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals. Master's thesis / A. R. Parry. – Logan, Utah: Utah State University. – 2007. arXiv:1311.6069.
3. Hindeleh, F. Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical / F. Hindeleh, G. Thompson // Algebras Groups Geom. – 2008. – № 25(3). – P. 243–265.
4. Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals / A. Le Vu [и др.] // Math. – 2021. arXiv:2107.03990.
5. Mozhei, N. Homogeneous submanifolds in the four-dimensional affine and projective geometry / N. Mozhei // Russian Mathematics. – 2000. – Vol. 44. No.7. – P. 39–49.