С. С. Каянович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДВУХМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Под редакцией академик НАН Беларуси
В. И. Корзюка

Минск
«БЕСТПРИНТ»
2024

УДК 532.51:51+517.958

Каянович, С. С. Математические вопросы двухмерной гидродинамики / С. С. Каянович. – Минск : Бестпринт, 2024. – 432 с : ил. – ISBN 978-985-7267-35-4.

Книга посвящена двухмерным уравнениям Навье – Стокса, разрешимость начально-краевой задачи для которых в плоской прямоугольной области доказана в четвёртой главе. Этот результат является новым и получен автором книги. В первых трёх главах и в начале главы четвёртой доказываются леммы и теоремы классической математики, позволяющие проследить всю цепочку промежуточных утверждений, приводящих к итоговому результату. Доходчивость и строгость изложения призваны сыграть благотворную роль в воспитании молодых учёных.

Предназначено для студентов, аспирантов, молодых ученых.

Ил. 11. Библиогр: 97 назв.

Рекомендовано к изданию Советом БГУИР, протокол № 11 от 31.05.2024 г.

Рецензенты:

А. М. Крот – заведующий лабораторией ОИПИ НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор;

Н. Н. Гринчик – ведущий научный сотрудник отдела теплофизики ГНУ «Институт тепло- и массообмена» им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, доктор физико-математических наук

ISBN 978-985-7267-35-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Введение 9

ГЛАВА I

Исходные понятия и вспомогательные утверждения 19

§ 1. Измеримые множества 19
§ 2. Измеримые функции 36
§ 3. Интеграл Лебега от ограниченных функций 51
§ 4. Интеграл Лебега от неограниченных функций 62
§ 5. Теорема Витали. Производные числа 72
§ 6. Функции с ограниченным изменением. Теоремы Хелли. Абсолютно непрерывные функции 83
§ 7. Неопределённый интеграл. Равностепенная непрерывность. Интеграл Пуассона – Стилтьеса 95

ГЛАВА II

Аналитические функции. Задача Дирихле в круге 106

§ 1. О выборе длины дуги в качестве параметра 106
§ 2. Регулярные функции 119
§ 3. Принципы компактности и соответствия границ. Теорема Руше 134
§ 4. Конформные отображения. Теорема Римана 154
§ 5. Внутренняя теорема единственности. Формулы Коши и Пуассона 169
§ 6. Решение задачи Дирихле в круге 181
§ 7. Теорема единственности и теорема Фату. Угловые граничные значения аналитических функций 196

ГЛАВА III

Классы функций A и H_δ. Теоремы Гарнака. Неванлинна, Фихтенгольца, Банаха 214

§ 1. Логарифмические полюсы. Функция Бляшке 214
§ 2. Классы функций A и H_δ. Теорема Рисса 225
§ 3. Теоремы Гарнака, Неванлинна, Фихтенгольца 239
§ 4. Теорема Банаха. Формула Коши для функций класса E_1 259
§ 5. Топологические пространства. Соответствие границ . . 282
§ 6. Конформное отображение аналитической функции . . 295
§ 7. О принадлежности интеграла типа Коши классу $C_{m+\alpha}(\overline{G})$ 317

ГЛАВА IV

О разрешимости уравнений Навье – Стокса 331

§ 1. Оценки производных и их коэффициентов Гёльдера функций класса $C_{n+\lambda}(\overline{\overline{\Omega}})$ 331
§ 2. Теоремы Хаусдорфа и Арцеля – Асколи. Полнота $C_\alpha(D)$ 346
§ 3. Априорная оценка для функций класса $C^0_{2+\alpha}(D)$ 363
§ 4. Оценки Шаудера 374
§ 5. Неравенство Шаудера для полного эллиптического оператора 391
§ 6. Разрешимость уравнений Навье – Стокса на временных сечениях 405
§ 7. Разрешимость уравнений Навье – Стокса в канале . . 414

Предметный указатель 422
Список сокращений для указателя 424
Литература 425

Ды пойдуць надал*е*й тым шл*я*хам развіцц*я*,
Як*і*м ад разум*е*ння *а*льфы-бэты,
Спасц*і*гшы на шлях*у*, што сэнс жыцц*я* –
Не дасягн*е*нне мэты, … рух да мэты,
Да разум*е*ння ксі і л*а*мбды дараст*у*ць,
Зраб*і*ўшы розум свой жыв*ым*, як ртуць,
Што ёсць … і толькі ёсць …
сапр*а*ўднае баг*а*цце.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ

С получения уравнений движения вязкой жидкости, представляющих математическое выражение законов сохранения импульса и массы, какими являются уравнения Навье – Стокса, существует проблема математического анализа разрешимости для них краевых задач. В связи со сложностью проблемы для многих классов задач механики жидкости стали создаваться более простые механические модели. На этом пути в задачах какого-либо одного класса выделялись основные факторы, от которых могло зависеть движение жидкости, и согласно этому в уравнениях и краевых условиях сохранялись лишь слагаемые, учитывающие влияние именно этих выделенных факторов.

Так, например, в одном из классов задач гидродинамики, представляющих практический интерес, сила инерции, действующая на элемент жидкости, мала по сравнению с силами давления или вязкости (в критериях подобия этому соответствуют малые значения числа Рейнольдса), так что в первом приближении ею можно пренебречь (теория Стокса). В результате приходим к задачам о нахождении скорости и давления жидкости в некоторой области из системы уравнений, не содержащих слагаемых вида $u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$. С использованием указанной системы уравнений были решены, в частности, многие задачи, служащие основой гидродинамической теории смазки и имеющие важное значение в химической технологии, в биологических и других приложениях.

Подход, связанный с решением некоторой упрощённой системы уравнений, имеет двоякую ценность:

1) он позволяет получить важные практические результаты для некоторого класса задач;

2) он заостряет внимание как на тех из слагаемых в уравнениях, которые были сохранены при упрощении модели, так и на тех из них, которыми пренебрегли и они оказались выброшенными. Общеизвестный пример, связанный с последним высказыванием, относится к течению в канале или, что то же самое, в плоской трубе, а также к течению в трубе кругового сечения (одинакового вдоль всей длины трубы).

При решении стационарной системы уравнений Навье – Стокса в трубе кругового сечения считается очевидным, что уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, оно не участвует в решении, т. е. оказывается выброшенным, как и некоторые из слагаемых в других уравнениях решаемой системы. Переходя к полярным координатам, получают решение вида:

$$v_x = a(R^2 - r^2), \quad v_r = v_\varphi = 0, \tag{1}$$

где R – радиус трубы, $a = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l}$, Δp – разность давлений на концах трубы, l – её длина, η – коэффициент вязкости [17]. Это решение приводит к известному парадоксу.

Парадокс состоит в следующем: при любом значении числа Рейнольдса Re единственно возможными решениями уравнений Навье – Стокса в бесконечно длинной трубе, когда вектор скорости $\bar{V} = (v_r, v_\varphi, v_x)$ параллелен оси трубы и равен нулю на её твёрдой поверхности, являются решения (1). Однако соответствующие им течения (течения Пуазейля) наблюдаются в экспериментах только для чисел Рейнольдса, не превосходящих некоторого критического значения, при переходе через которое они (течения) становятся турбулентными [15_1].

Анализируя парадокс, введём в рассмотрение два числа: $\mathrm{Re}'_{кр}$ – критическое число Рейнольдса, определяющее границу устойчивости течения по отношению к возмущениям конечной интенсивности (для трубы кругового сечения $\mathrm{Re}'_{кр} \approx 1800$) [17] и $\mathrm{Re}_{кр}$ – критическое число Рейнольдса, при котором течение фактически переходит в турбулентный режим (для той же трубы $\mathrm{Re}_{кр} \approx 10^5$ при очень тщательном устранении возмущений у входа в трубу и достаточно гладкой её внутренней поверхности) [19]. Обратим внимание, в связи со сформулированным парадоксом, на выброшенные при получении (1) слагаемые и проведём рассуждения, опирающиеся на экспериментальные данные. В результате придём к выводу: нет оснований считать, что решения (1) являются возможными решениями системы Навье – Стокса при значениях числа Рейнольдса, удовлетворяющих двойному неравенству $\mathrm{Re}'_{кр} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ (рассуждения проводятся в работе [43_2]). Указанный выше вывод позволяет сделать анализ граничных условий на твёрдой стенке плоской трубы, показывающий, что рассматриваемая краевая задача может быть переопределена уравнением неразрывности.

Диапазон $\mathrm{Re}'_{кр} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ чисел Рейнольдса является, на наш взгляд, самым интересным для исследования. В монографии доказывается разрешимость уравнений Навье – Стокса именно при этихзначениях числа Рейнольдса, которые назовём *большими числами Рейнольдса*. Мы старались сделать доказательство исчерпывающим. Под исчерпывающим понимается доказательство, охватывающее определениями все используемые понятия и содержащее все (точнее сказать почти все) доказательства применяемых утверждений (без обоснования оставлялись утверждения, доказательства которых достаточно громоздки, а также утверждения, доказательства которых имеются в учебной литературе). Такое доказательное изложение материала призвано не только привести в соответствие течение и его математическую модель, но и сделать монографию читаемой.

Техническая сторона вопроса просматривается при чтении. Отметим лишь следующее: нумерация формул является сквозной внутри каждой главы и начинается каждый раз с единицы; начало доказательства утверждения указывается символом $\triangleright$, окончание доказательства – символом $\blacktriangleleft$, отсутствие этих символов говорит об отсутствии доказательства; определения даются по необходимости, жирным шрифтом выделяются первые слова и определяемые понятия; в предметный указатель не вошли определения, известные из курса высшей математики технического университета.

Выражаю свою искреннюю благодарность академику НАН Беларуси Корзюку В. И. за проделанную работу, за существенные замечания, которые учтены автором, за ценные советы, использованные при написании монографии.

ВВЕДЕНИЕ

В монографии изучаются течения вязкой несжимаемой жидкости на основе решения полной системы двумерных уравнений Навье – Стокса. Исходная система уравнений, в силу сложности определения давления, разными исследователями записывалась в двух формулировках. В одной из них система записывалась в естественных физических переменных: скорость – давление, в другой – в переменных: вихрь – функция тока (существующий третий вариант мы не упоминаем).

Большинство исследований проводилось за счёт использования численных методов, причём подавляющая часть из них выполнялась в переменных: вихрь – функция тока. Общими недостатками этого подхода являются необходимость применения граничного условия для вихря, которое представляет собой условие первого порядка точности относительно шага сетки, и исключает возможность обобщения его на трёхмерный случай. Это обусловливает повышенный интерес исследователей к решению уравнений Навье – Стокса в физических переменных: скорость – давление, хотя этот путь и связан с трудностями расчёта поля давления, согласованного с полем скоростей. Последнее приводит к необходимости использования уравнения Пуассона для давления.

Кроме этого, существует сложность получения решения нестационарных уравнений Навье – Стокса , которая, наряду с нелинейностью исходной системы, связана с трудностью одновременного решения уравнений количества движения и уравнения неразрывности на текущем временном шаге.

Укажем некоторые работы, в которых рассматриваемые уравнения решаются в переменных: скорость – давление. В [35] рассматривается система Навье – Стокса в прямоугольной декартовой системе координат. Исходные нестационарные уравнения движения несжимаемой жидкости (вместе с уравнением неразрывности) записывается в дивергентной тензорной форме в безразмерных величинах. Уравнения движения записывают в разностном виде на прямоугольной сетке и для замыкания этой системы получают разностное уравнение типа Пуассона. Далее предлагается такой алгоритм решения разностных уравнений, в котором скорость, рассчитываемая на каждой новой итерации по времени, уже удовлетворяет уравнению неразрывности, и нет необходимости строить какие-либо поправки. Однако важным моментом расчётов является контроль выполнения этого уравнения.

В последних пунктах рассматриваемой работы для тестирования предложенной численной схемы рассматривается задача о расчёте начального участка течения в плоском прямолинейном канале. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что она имеет простейшую геометрию и в то же время содержит всю сложность и особенности решения полных уравнений Навье – Стокса. Движение жидкости в канале происходит под действием продольного перепада давления. Однако заданной величиной в рассматриваемом классе течений принимается не перепад давления, а расход жидкости через поперечное сечение канала. Следовательно, при такой постановке задачи число Рейнольдса будет задано, а давление должно определяться в процессе решения. Для завершения постановки задачи задаются начальные и граничные условия на всех границах расчётной области. Граничные условия для давления в постановке задачи отсутствуют. Но при указанном подходе значения давления в граничных узлах определяются с помощью уравнений движения в комбинации с граничными условиями для скоростей.

На рисунках в работе [35] представлены результаты расчётов профилей продольной и поперечной скоростей в различных сечениях канала на участке гидродинамической стабилизации. С удалением от входного сечения профиль продольной скорости постепенно эволюционирует в параболу, которая реализуется в конце участка стабилизации в результате соединения пограничных слоёв. Рассчитывается и поперечная скорость течения, которая, как видно на рисунке, имеет место вблизи входного сечения в канал, а затем быстро стремится к нулю. Рассматриваемый в работе метод позволяет охватить диапазон изменения чисел Рейнольдса от 1 до 1000.

Мы ещё вспомним [35], а сейчас вкратце остановимся на работах первого 25-летия третьего тысячелетия и посмотрим, на что были направлены усилия исследователей при рассмотрении задач, связанных с уравнениями Навье – Стокса.

В [52] построены квазигазодинамические (КГД) уравнения для описания течения вязкого газа с внешними источниками энергии. Эти уравнения можно рассматривать как модификации уравнений Навье – Стокса. Дополнительные слагаемые, отличающие КГД уравнения от системы Навье – Стокса, носят диссипативный характер и выполняют роль искусственных регуляризаторов для разностных алгоритмов решения задач вязкой аэродинамики.

В [51] анализируется эффективность применения неявного итерационного полинейного рекуррентного метода решения систем разностных эллиптических уравнений, возникающих при численном моделировании двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости. Исследование проводится на примере задачи о стационарном двумерном течении (ищется методом установления, исходя из системы нестационарных двумерных уравнений Навье – Стокса) в квадратной каверне с подвижной крышкой. Задача формулируется в естественных переменных (u, v, p). Алгоритм решения является «многоитерационным»: итерации по слоям времени; на каждом временном слое решаются три системы линейных уравнений, получаемые путём разностной дискретизации двух уравнений движения и уравнения Пуассона. Системы эти решаются неявным итерационным полинейным рекуррентным методом.

Отмечается, что среди работ на эту тему до сих пор большой популярностью заслуженно пользуется работа [56], сформировавшая современный подход к изложению материалов исследования. В ней удалось построить решение задачи по числам Рейнольдса вплоть до значения Re=10 000. В самой же работе [51] в качестве иллюстрации возможностей использования применяемого авторами метода была решена задача при значении числа Рейнольдса Re=15 000.

Имеется ряд работ, посвящённых поиску точных решений уравнений Навье – Стокса, например, некоторые из них: [34, 44, 50]; [46_1, 46_2, 46_3].

В [34] рассматривается широкий класс двумерных и трёхмерных стационарных и нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Считается, что компоненты скорости жидкости линейно зависят от двух пространственных координат. Получено много новых точных решений нестационарных уравнений Навье – Стокса. Указывается, что точные решения уравнений гидродинамики используются, в частности, для математического моделирования многих процессов химической и нефтехимической технологий.

В работе [44] в рамках уравнений Навье – Стокса рассмотрены винтовые течения вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле внешних сил. Показано, что можно суммировать векторные поля скоростей двух винтовых решений (при выполнении определённого условия) и в результате получать поле скорости некоторого «нового» винтового решения уравнений Навье – Стокса. Точные решения, полученные этим методом (методом векторного суммирования), могут использоваться для тестирования численных алгоритмов и компьютерных программ.

В [50] предложен новый класс точных решений нелинейных и линеаризованных уравнений Навье – Стокса, обобщающий известное семейство точных решений, в котором скорость линейна по части координат. Получены формулы для построения точных решений с произвольной зависимостью скоростей от горизонтальных координат. Известно, отмечается в работе, что не существует алгоритмов аналитического решения системы уравнений Навье – Стокса, поэтому на первый план при интегрировании уравнений движения вышли классы точных решений.

В [46_1] предложен метод построения решений 3D уравнений Навье – Стокса для случая неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. Задача построения решений указанных уравнений сводится к решению совокупности более простых задач.

В [46$_2$] представлено решение начально-краевой задачи для 3D уравнений Навье – Стокса с краевыми условиями на бесконечности:

$$x = \frac{c_x}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ y = \frac{c_y}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ z = \frac{c_z}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right);\ \ u \to u_0,\ v \to v_0,\ w \to w_0 \quad (\varepsilon \to +0), \qquad (*)$$

где u_0, v_0, w_0 – предельные значения скоростей на бесконечности, которые изначально должны быть заданы. Предлагается способ нахождения решения, который приводит к дополнительному условию

$$u_0 c_x + v_0 c_y + w_0 c_z < 0. \qquad (**)$$

Если оно не выполнено, то решений указанного в работе вида, удовлетворяющих условиям (*), не существует. Если же (**) выполнено, то существует множество решений.

Далее рассматривается нестационарная задача и отмечается, что она имеет решения, если условие (**) выполнено. При анализе возможных особенностей получающихся решений отмечается, в частности, следующее: найденные в работе решения не могут существовать при условии $\mathrm{Re} \to +\infty$.

И, наконец, в работе [46$_3$] того же автора А.В. Коптева получено одно уравнение с двумя неизвестными, которое порождает решения двумерных уравнений Навье – Стокса и которое названо генератором решений. Автор обращает внимание на тот факт, что при предложенном им подходе все нелинейные слагаемые уравнений полностью сохраняются, и мы получаем точное решение уравнений Навье – Стокса.

В трёх последних из указанных выше работ отмечается следующее. На сегодняшний день теоретическое исследование уравнений Навье – Стокса значительно отстаёт от потребностей практики. Не ясна структура решений. К изученным не до конца проблемам следует отнести и ламинарно-турбулентный переход, который предположительно должен возникать при больших значениях числа Рейнольдса. Забегая вперёд, скажем, что как раз данным вопросам и посвящена настоящая монография. Ниже об этом говорится более подробно.

Как подтверждение значимости теоретического исследования рассматриваемых уравнений можно привести следующий факт. Известный центр изучения математики – Математический институт Клэя, США (Clay Mathematical Institute, USA) в 2000 году определил проблему существования гладкого решения уравнений Навье – Стокса как одну из семи главных математических проблем третьего тысячелетия. Об этой задаче, которая предложена как задача тысячелетия, см. [55].

В [49] исследуются точные решения уравнений Навье – Стокса для слоя вязкой жидкости между параллельными пластинами, расстояние между которыми увеличивается по закону $h = k\sqrt{t}$. Рассматривается двумерная краевая задача с условиями прилипания на обеих пластинах. Пластина $y = 0$ является неподвижной, вторая пластина $y = h$ движется по указанному закону, где t – время.

В [40] численно исследовано частично инвариантное решение уравнений Навье – Стокса для плоского случая, которое описывает неустановившееся движение в слое, ограниченном прямой твёрдой стенкой и параллельной ей свободной границей.

В [37] рассматривается решение уравнений движения ньютоновской жидкости (уравнения Навье – Стокса) в векторной форме, содержащих лишь проекции скорости и ротора скорости. Анализируется осесимметричное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости на начальном участке входа в круглую трубу. Данные уравнения (уравнения Навье – Стокса), пишет автор, могут быть рассмотрены с физической точки зрения, и с этой стороны можно указать на их неполноту, которая заключается в том, что они не описывают и не используют такую особенность движения как возможность движения вязких частиц по траекториям, имеющим кручение. По поводу последнего высказывания можно заметить, что скорость $\bar{v}(x, y, z, t)$ есть скорость жидкости в каждой данной точке x, y, z пространства в момент времени t, т. е. относится к определённым точкам пространства, а не к определённым частицам жидкости (то же самое относится к величинам ρ и p) [17, гл. I, § 1]. На странице 39 автор пишет следующее. Отметим также (его слова), что переход от ламинарного течения в турбулентное очень сильно зависит от времени предварительного отстоя жидкости в основной ёмкости, из которой и происходит истечение в круглую трубу. Поэтому критическое число Рейнольдса в трубах, как свидетельствуют опыты на воде, может меняться от 2 300 до значения почти 50 000. По поводу этого замечания хотелось бы сказать вот что. Во-первых, суспензии (жидкости с включёнными твёрдыми частицами) отличаются по своим свойствам от ньютоновских жидкостей, которые рассматриваются в данной работе. Во-вторых, многократными экспериментами установлено, что при очень тщательном устранении возмущений у входа в трубу (и достаточно гладкой её внутренней поверхности) удаётся поддерживать течение, не переходящее в турбулентное, до очень больших значений числа Рейнольдса Re (фактически такое течение удавалось наблюдать вплоть до значения $Re \approx 100\,000$) (см., например, [19]). На странице 40 читаем такое. Помимо изложенного имеются и другие причины для сомнений в том, что уравнения Навье – Стокса достаточно адекватно описывают поведение вязкой жидкости.

Подобные сомнения высказываются и в работе [39]. Но здесь претензии предъявляются уравнению неразрывности. Найдя *последовательно* выражения для скорости, затем – для давления, автор начинает решать уравнение неразрывности и получает условие, означающее, что решение для давления равно нулю. Далее автор пишет: «Получив нулевое решение для давления, мы пришли к противоречию с ранее полученным решением уравнения движения. Следовательно, наш метод получения решений неверен. Но не будем торопиться с выводами. Исследуем вопрос о получении уравнения неразрывности и его решении более тщательно».

В результате более тщательного исследования, вводя в уравнение неразрывности поправку на неупругие процессы, не обращая внимания на *последовательность* своего решения, автор строит нелинейное уравнение неразрывности. А, например, в [35] читаем: «Большинство эффективных численных методов интегрирования уравнений Навье – Стокса основывается на использовании асимптотического метода установления, когда для установившихся течений решается нестационарная задача. Основная сложность получения решения нестационарных уравнений Навье – Стокса, наряду с нелинейностью исходной системы уравнений, связана с трудностью *одновременного решения уравнений количества движения и уравнения неразрывности* на текущем временном шаге. Но именно такое решение даёт тот значимый результат, который отмечается в работе [35].

В работе [36] снова выражаются сомнения в том, что уравнения Навье – Стокса адекватно описывают поведение вязкой жидкости. В пункте 6 этой работы читаем:

«Для замыкания общего уравнения движения жидкости и его частных случаев предлагается использовать теорию деформационного движения, аналог которой плодотворно используется в другой области механики сплошной среды – теории упругости».

Итак, как показано выше, в ряде работ присутствует сомнение в том, что уравнения Навье – Стокса представляют собой математическую модель, находящуюся в соответствии с реальным течением вязкой несжимаемой жидкости. Модифицированная модель указанного течения предлагается и в одной из работ О.А. Ладыженской. Ссылка на эту работу есть в [41, ссылка 4]. Но связано это не с недоверием к уравнениям Навье – Стокса, а с невозможностью доказательства разрешимости (и единственности решения) для них начально-краевых задач. Ниже цитируем работы, в которых отсутствует указанное выше сомнение.

В [33] рассматривается краевая задача для системы уравнений Навье – Стокса в переменных скорость-давление и предлагается аддитивный разностный метод полной аппроксимации для расщепления по физическим процессам и по размерности. Предложенный алгоритм дает возможность построить цепочку упрощенных алгоритмов реализации по физическим процессам и по времени. Доказана устойчивость этого алгоритма при естественных требованиях на операторы расщепления. Остановимся на некоторых моментах этой работы.

На сетках ω_h, Ω_h рассматриваемая дифференциальная задача аппроксимируется разностной схемой (см. (7, 8) в [35]:

$$\frac{\hat{y}_k - y_k}{\tau} - \nu\Delta_h \hat{y}_k + K_k(\hat{y}, \hat{y}_k) = -q_{\bar{x}_k} + f_k \;, \quad x \in \omega_h \,, \quad k = 1{,}2 \,; \tag{7}$$

$$y_{1\bar{x}_1} + y_{2\bar{x}_2} = 0, \quad x \in \Omega_h, \quad y_k = 0, \quad x \in \gamma_h. \tag{8}$$

На основе (7) – (8) строится аддитивный разностный алгоритм (9), уравнения которого позволяют получить следующую задачу для определения давления $\hat{q}$ (см. (10) в [33]):

$$\hat{q}_{\bar{x}_1\bar{x}_1} + \hat{q}_{\bar{x}_2\bar{x}_2} = F_1, \quad x \in S_h, \quad \hat{q}_n = \hat{f}_2, \quad x \in T_h. \tag{10}$$

Затем (10) записывается в операторном виде (12) и, с использованием теории операторных уравнений, доказывается теорема 1 о существовании решения задачи (12). После этого доказывается теорема 2 об устойчивости разностной схемы (9), в которой даётся оценка для решения этой разностной схемы.

В работе [38] рассматривается начально-краевая задача для обобщенной системы уравнений Навье – Стокса, а именно: (1), (2), (3):

$$\bar{v}_t - \nu\Delta\bar{v} + v_i\bar{v}_{x_i} + grad\ p = \bar{f}(x,t); \quad \bar{v}\big|_{S_T} = 0, \quad \bar{v}\big|_{t=0} = \bar{a}(x); \quad div\ \bar{v} = 0$$

в области Q_T, $\bar{f} \in \mathring{\bar{J}}(Q_T)$, $\bar{L}_2(Q_T) = \overline{G}(Q_T) \oplus \mathring{\bar{J}}(Q_T)$ – ортогональное разложение на градиентную составляющую и соленоидальную составляющую части пространства $\bar{L}_2(Q_T)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$. В п. 2 уравнение (1) заменяется уравнением (8):

$$\bar{v}_t - \nu\Delta\bar{v} + \alpha_R(t, \bar{v}_x)v_i\bar{v}_{x_i} + grad\ p = \bar{f}. \tag{8}$$

Для решения задачи (8), (2), (3) строится итерационный процесс ((9-11) в [38]):

$$\bar{v}_t^{k+1} - \nu\Delta\bar{v}^{k+1} + \alpha_k v_i^k \bar{v}_{x_i}^{k+1} + grad\ p_{k+1} = \bar{f}; \tag{9}$$

$$\bar{v}^{k+1}\big|_{S_T} = 0, \qquad \bar{v}^{k+1}\big|_{t=0} = \bar{a}(x); \tag{10}$$

$$div\ \bar{v}^{k+1} = 0. \tag{11}$$

Ниже читаем: «Пользуясь теоремой 1ʿ гл. 4 работы [15$_1$], убеждаемся в существовании и единственности решения задачи (9) – (11) в классе функций $\overline{W}_2^{2,1}(Q_T)$, $\bar{p}_x \in \bar{L}_2(Q_T)$». В п. 3: «В работе [15$_1$] вводится оператор $\tilde{\Delta}$ как расширение по Фридрихсу оператора $P_j\Delta$, где $P_j\Delta$ – проекция из $\bar{L}_2(\Omega)$ в $\mathring{\bar{J}}(\Omega)$, определенного на $\overline{W}_2^{\,2}(\Omega) \cap \mathring{\bar{J}}(\Omega)$». В п. 4 читаем: «Обозначим $\bar{w}^k = \bar{v}^k - \bar{v}^{k-1}$, $\delta\ p_k = p_k - p_{k-1}$ и заметим, что $\bar{w}^{k+1} \in \mathring{\bar{J}}(Q_T)$ удовлетворяет уравнению (31);

$$\bar{w}_t^{k+1} - \nu\Delta\bar{w}^{k+1} + \alpha_k v_i^k \bar{w}_{x_i}^{k+1} + grad\ \delta p_k = -(\alpha_k v_i^k - \alpha_{k-1}v_i^{k-1})v_{x_i}^k,$$

однородным начальным и краевым условиям». После интегрирования по частям этого уравнения приходим к соотношению (32), не содержащему давления. Чуть ниже появляется переменная $\overline{w}^{k,l}$, которая удовлетворяет уравнению (40), содержащему слагаемое $grad \delta p_{k,l}$, где $p_{k,l} = p_{k+l} - p_k$. Затем от (40) следует переход к (41), в котором нет слагаемого, содержащего давление (этот переход аналогичен переходу от (31) к (32)). После получения ещё нескольких неравенств, заметив, что уравнение (40) почти всюду по переменной t на $[0,T]$ есть решение системы Стокса, приходим, в силу известного неравенства для оператора Стокса, к оценке (45) для величины $\|p_{k,l}\|_{\overline{W}_2^{1,0}(Q_T)}$. В аннотации статьи [38] читаем: «Показано, что предлагаемый метод может быть использован для доказательства существования и единственности решения».

Из вышесказанного следует актуальность теоретического исследования разрешимости уравнений Навье – Стокса, чему и посвящена настоящая монография. До сих пор наиболее полное и глубокое математическое исследование этих уравнений было выполнено в работе [15_1], однако в ней рассматривались обобщённые решения, а также не были затронуты течения при больших числах Рейнольдса. В данной монографии изучаются классические решения и как раз при больших числах Рейнольдса.

Несколько слов о построении монографии. Внутри каждой главы материал расположен в порядке, при котором доказательство любой леммы или теоремы опирается на утверждения, уже доказанные выше. При этом в каждой главе доказывается лишь то, что будет востребовано в главах последующих, и не доказывается ничего лишнего.

И ещё. Поскольку монография предназначена, в первую очередь, молодым учёным Беларуси, изложение материала ведётся достаточно доходчиво для понимания и, в то же самое время, со скрупулёзной математической точностью. И по той же причине изложение должно охватывать весь путь движения от начальных понятий до достижения конечного результата.

ГЛАВА I

ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

§ 1. Измеримые множества

1. Замкнутое множество. Жорданова мера

Ниже даются определения, относящиеся к множеству действительных чисел (точек числовой прямой) $R = R^1$, где $R^1 = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ и параллельно даются определения для точек и множеств, принадлежащих плоскости R^2, где $R^2 = \{(x_1, x_2) \mid -\infty < x_j < +\infty, j = 1,2\}$. Утверждения формулируются и доказываются только для множеств из R^1.

Окрестностью точки ξ *числовой прямой* $R^1 = R$ *называется* ***всякий интервал****, принадлежащий* R *и содержащий эту точку, т. е. такой интервал* $(\alpha, \beta) \subset R$, что $\xi \in (\alpha, \beta)$. ***Окрестностью точки*** $\xi = (x_1', x_2')$ *плоскости* R^2 *называется* ***внутренность любого круга*** $K \subset R^2$*, содержащего внутри себя эту точку, т. е. такое множество* $K = \left\{(x_1, x_2) \mid \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < \delta\right\} \subset R^2$*, что* $(x_1', x_2') \in K$ $\left((x_1^0, x_2^0) \in R^2, \delta > 0\right)$.

Точка $\xi \in R$ *(или* $\xi \in R^2$*) называется* ***предельной точкой*** *множества* $E \subset R$ *(или* $E \subset R^2$*), если* ***во всякой окрестности точки*** ξ *содержится хотя бы одна точка* $\tilde{x} \in E$*, отличная от точки* ξ *(в случае плоскости* $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$*).*

Из определения следует, что во всякой окрестности предельной точки множества E содержится бесконечное число точек этого множества. Значит, только бесконечные множества могут иметь предельные точки.

Множество $F \subset R$*, содержащее* ***все свои предельные точки****, называется* ***замкнутым множеством*** (определение 1).

Заметив, что пустое множество и множество, состоящее из конечного числа точек, являются замкнутыми, дадим ещё одно определение замкнутого множества.

Последовательность *точек* $\{\xi_n\} = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ *называется* ***сходящейся к точке*** ξ, *если* ***для любой окрестности*** (x', x'') ***точки*** ξ ***все*** ξ_n, *начиная с некоторого натурального числа* n_0, *попадают в интервал* (x', x''), *т.е.* $\xi_n \in (x', x'')$, *если* $n \ge n_0$. ***Множество*** $F \subset R$ *называется* ***замкнутым,*** *если из того, что* ***все точки любой*** *сходящейся к точке* ξ *последовательности* $\{\xi_n\}$ *принадлежат* F, *следует* $\xi \in F$ (определение 2).

В дальнейшем словосочетание «натуральное число n_0» будем записывать более кратко: «номер n_0».

Теорема 1.1. *Определения замкнутого множества* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

$\triangleright$ Допустим, что F замкнуто в смысле определения 1, но не замкнуто в смысле определения 2. Тогда существуют последовательность $\{\xi_n\}$ и точка ξ такие, что $\xi_k \in F$ $(k = 1,2,...,n,...)$, $\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi$, но $\xi \notin F$. Однако, если $\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi$, то в любой окрестности точки ξ содержится бесконечное множество точек множества F и, значит, точка ξ есть предельная точка множества F. По определению 1 $\xi \in F$. Полученное противоречие показывает, что из определения 1 следует определение 2.

Пусть теперь F замкнуто согласно определению 2 и ξ – предельная точка множества F. Тогда, в силу определения, для каждого номера k $(k = 1,2,...)$ имеется точка $\xi_k \in F$, для которой $0 < |\xi_k - \xi| < \dfrac{1}{k}$ и $|\xi_k - \xi| < |\xi_{k-1} - \xi|$. Очевидно, что $\xi_k \underset{k\to\infty}{\to} \xi$. Согласно определению 2, $\xi \in F$, т. е. любая предельная точка множества F принадлежит этому множеству. Последнее означает, что из определения 2 следует определение 1. ◀

Справедлива легко доказываемая теорема.

Теорема «*». *Произвольные две точки* ξ *и* η $(\xi \ne \eta)$ *числовой прямой* R *всегда можно отделить друг от друга непересекающимися* ε*-окрестностями, т. е. можно построить две такие* ε*-окрестности* $U_\varepsilon(\xi)$ *и* $U_\varepsilon(\eta)$, *что* $U_\varepsilon(\xi) \cap U_\varepsilon(\eta) = \varnothing$, $\xi \in U_\varepsilon(\xi)$, $\eta \in U_\varepsilon(\eta)$ $(U_\varepsilon(\zeta) = \{x \mid x \in R, |x - \zeta| < \varepsilon\})$ ($\varnothing$ – *пустое множество*).

Эта теорема позволяет заметить, что любая сходящаяся последовательность точек, принадлежащих сегменту $[a,b]$, может сходиться только либо к точке, принадлежащей интервалу (a,b), либо к одной из точек a или b. Поскольку любая из указанных точек принадлежит сегменту $[a,b]$, то, согласно определению 2, ***сегмент – замкнутое множество.***

Рассмотрим теперь числовую прямую R. Обозначим сегмент $[a,b]$ через Δ, т. е. $\Delta = \{x | x \in R, a \le x \le b\}$, где $a,b \in R, a < b$. Отдельные точки сегментами не считаются. Объединение конечного числа непересекающихся сегментов (общими у них могут быть только крайние точки) будем называть ***элементарным множеством*** σ, а сумму длин этих сегментов – ***мерой*** $m\sigma$ этого множества. Таким образом, если $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$, то $m\sigma = \sum_{k=1}^{n} m\Delta_k$, где $m\Delta_k = b_k - a_k$ $(a_k < b_k)$. Сумма $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$ понимается в смысле теории множеств, т. е. в смысле $\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k$. Из вышесказанного следует, что элементарное множество есть множество замкнутое. Разность же двух элементарных множеств не обязательно замкнута, поэтому она не обязательно является элементарным множеством.

Зададим натуральное число N (чаще символ N будет применяться для обозначения множества натуральных чисел) и рассмотрим разбиение Q_N числовой прямой R_1 вида $Q_N : x = kh \;\; (h = 2^{-N}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Это разбиение определяет бесконечное семейство S_N сегментов вида: $\Delta_h = [kh, (k+1)h]$. Пусть $E \subset R$ есть произвольное непустое ***ограниченное*** множество. Обозначим через $\underline{\omega}_N(E) = \underline{\omega}_N$ множество, состоящее из тех сегментов Δ_h указанного семейства, которые полностью входят во множество E, а через $\overline{\omega}_N(E) = \overline{\omega}_N$ – множество, состоящее из тех Δ_h, каждый из которых содержит хотя бы одну точку множества E. Может оказаться, что $\underline{\omega}_N$ есть пустое множество. Будем считать, по определению, что пустое множество имеет меру, равную нулю. Заметим, что при переходе от семейства S_N к семейству S_{N+1} каждый сегмент семейства S_N делится на два равных сегмента и что при фиксированном числе N мера $m\underline{\omega}_N$ равна сумме мер (длин) соответствующих сегментов (аналогично для меры $m\overline{\omega}_N$).

Очевидно, что имеют место следующие включения:

$$\underline{\omega}_1 \subset \underline{\omega}_2 \subset \dots \;;\quad \overline{\omega}_1 \supset \overline{\omega}_2 \supset \dots \;;\quad \underline{\omega}_N(E) \subset E \subset \overline{\omega}_{N'}(E),$$

где N и N' – произвольные натуральные числа. Отсюда следует, что существуют конечные пределы:

$$\lim_{N\to\infty} m\underline{\omega}_N = m_J E\,,\quad \lim_{N\to\infty} m\overline{\omega}_N = m^J E \quad \text{и} \quad m_J E \le m^J E\,.$$

Число $m_J E$ *называется* ***внутренней жордановой мерой множества*** E***,*** *а* ***число*** $m^J E$ – ***внешней жордановой мерой множества*** E***.***

Если *для множества* $E \subset R$ ***выполняется равенство*** $m_J E = m^J E$, *то* E *называется* ***жорданово измеримым****, а число* $\overset{j}{m} E$*, равное* $\overset{j}{m} E = m_J E = m^J E$*, называется* ***жордановой мерой*** *множества* E***.***

Жорданово неизмеримое множество. Пусть $E \subset (0{,}1)$ есть множество всех рациональных точек, принадлежащих интервалу $(0{,}1)$. Тогда E – непустое ограниченное множество. Очевидно, что $\underline{\omega}_N(E)$ есть пустое множество для любого натурального N и $m_J E = 0$. С другой стороны, пусть точка $x_k \in E$, тогда найдется сегмент Δ_h^* семейства S_N, содержащий точку x_k. В этом случае $\overline{\omega}_N(E) \supset \Delta_h^*$, $m\overline{\omega}_N \ge m\Delta_h^* > 0$, $m^J E \ge m\Delta_h^* > 0$. Так что $m^J E > m_J E$ и потому множество E есть жорданово неизмеримое множество.

2. Открытое множество. Мера Лебега открытого и замкнутого множеств

Отметим, что в этом параграфе мы рассматриваем только ***ограниченные*** множества, принадлежащие прямой R (плоскости R^2). Потому можем считать: ***все*** они помещаются на сегменте $[a,b] \subset R$ (во множестве $\Omega \subset R^2$).

Точной верхней гранью *множества* E *будем называть* ***наименьшее число,*** *ограничивающее это множество* ***сверху*** (*она обозначается* $\sup E$), ***точной нижней гранью*** – ***наибольшее число,*** *ограничивающее его* ***снизу*** (*она обозначается* $\inf E$).

Пусть E – непустое множество. Из определений сегмента, точных нижней и верхней граней множества следует утверждение.

Утверждение. *Нет ни одной точки множества* E*, расположенной слева от* $\inf E$*, но всякий сегмент, имеющий* $\inf E$ *своим левым концом, содержит, по крайней мере, одну точку* ξ *множества* E.

Нет ни одной точки множества E, *расположенной справа от* $\sup E$, *но всякий сегмент, имеющий* $\sup E$ *своим правым концом, содержит хотя бы одну точку* η *множества* E.

Доказательство этого утверждения следует из рассмотрения рисунка 1, на котором $\inf E = \alpha(E)$, $\sup E = \beta(E)$, δ и γ – правый и левый концы сегментов, о которых говорится в утверждении, соответственно.

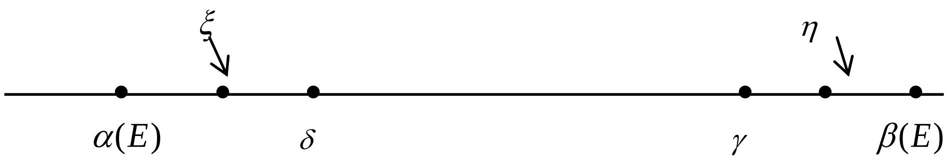


Рис. 1

Вышеприведённое утверждение позволяет доказать теорему.

Теорема 1.2. *Если точная верхняя* (*точная нижняя*) *грань* $\beta(E)$ $(\alpha(E))$ *множества* E *не содержится в* E, *то* $\beta(E)$ $(\alpha(E))$ *есть предельная точка для множества* E.

$\triangleright$ Докажем теорему, например, для точной верхней грани. Пусть (x', x'') есть произвольная окрестность точки $\beta(E)$. Возьмем точку γ такую, что $x' < \gamma < \beta(E)$. Тогда сегмент $[\gamma, \beta(E)]$ содержит хотя бы одну точку множества E (вышеприведённое утверждение, рис. 1). Эта точка отлична от точки $\beta(E)$ (по предположению $\beta(E) \notin E$). Так как (x', x'') есть произвольная окрестность точки $\beta(E)$, то $\beta(E)$ есть предельная точка множества E. ◀

Следствие 1.1. *Всякое непустое ограниченное замкнутое множество содержит свою точную верхнюю и свою точную нижнюю грани.*

Пусть *есть множества* E_1 *и* E_2, *где* $E_2 \subset E_1$ $(E_1 \subset [a,b])$. ***Множество*** $E_1 - E_2$, ***содержащее все точки множества*** E_1, *не принадлежащие множеству* E_2, *называется* ***дополнительным множеством (дополнением)*** *к множеству* E_2 *(относительно* E_1*).* ***Интервал, не содержащий никакой точки*** *замкнутого множества* F, *но имеющий конечные точки, принадлежащие* F, *называется* ***смежным интервалом*** *к множеству* F.

При формулировке следующей теоремы потребуется понятие счётного множества. В связи с этим дадим несколько определений.

Два множества *называют* ***эквивалентными*** (***равномощными***), *если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие.*

***Множество**, **эквивалентное множеству** N всех натуральных чисел, называют **счётным.** Если **множество** A **эквивалентно части множества** B, тогда как множество B **не эквивалентно** никакой части множества A, то говорят, что **мощность множества** B **больше мощности множества** A. **Множество** A называют **несчётным**, если его мощность **больше мощности множества** N.*

Пусть F есть замкнутое непустое множество $(F \subset [a,b])$, и пусть α и β – точные нижняя и верхняя грани множества F. Точки α и β как точные грани замкнутого множества принадлежат этому множеству (следствие 1.1).

Возможны два случая: 1) Множество F содержит все точки интервала (α,β) и тогда совпадает с сегментом $[\alpha,\beta]$. 2) В интервале (α,β) содержится хотя бы одна точка $\xi \notin F$.

Можно показать, что в случае 2 существует конечное или счетное число смежных к множеству F попарно непересекающихся интервалов $V_1,V_2,...,V_n$ или $V_1,V_2,...,V_n,...$. При этом каждая точка сегмента $[\alpha,\beta]$, не принадлежащая к множеству F, попадает в один и только в один интервал V_j. Отсюда следует теорема.

Теорема 1.3. *Всякое непустое ограниченное замкнутое множество F с точной нижней гранью α и точной верхней гранью β либо совпадает с сегментом $[\alpha,\beta]$, либо получается вычитанием из этого сегмента конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов, смежных к множеству F.*

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 1.4. *Вычитая из сегмента $[\alpha,\beta]$ конечное или счетное число попарно непересекающихся интервалов, получим замкнутое множество F, для которого точки α,β являются точными нижней и верхней гранями, а интервалы, которые вычитались из сегмента $[\alpha,\beta]$, – смежными интервалами к этому множеству.*

Множество, дополнительное** к некоторому замкнутому множеству, называется **открытым множеством.

Из вышесказанного вытекает: всякое открытое множество G есть сумма конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов $(G \subset [a,b])$. Все эти интервалы есть интервалы, смежные к замкнутому множеству $[a,b]-G$. Обратно, всякое множество, являющееся суммой конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов, есть открытое множество (так как дополнительное множество замкнуто). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Если G есть открытое множество, то множество $[a,b]-G$ замкнуто.*

Точка $\xi\in[a,b]$ (*или* $\xi\in\Omega\subset R^2$) *называется* ***внутренней точкой*** *множества* $E\subset[a,b]$ (*или* $E\subset\Omega$), *если* ***существует окрестность точки*** ξ, *целиком принадлежащая множеству* E, *т.е. существует такой интервал* (α,β), *что* $\xi\in(\alpha,\beta)$, а $(\alpha,\beta)\subset E$. (*В случае плоскости существует такой круг* $K=\left\{(x_1,x_2)\,|\,\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}<\delta\right\}$, *что* $\xi\in K$, а $K\subset E$ $(\delta>0)$).

Теорема 1.6. *Множество внутренних точек любого множества E есть открытое множество.*

▷ Пусть G есть множество внутренних точек множества E и точка $\xi\in G$ (точка ξ есть произвольная точка множества G). Так как ξ есть внутренняя точка множества E, то существует окрестность (x',x'') точки ξ, целиком принадлежащая E $(x'<\xi<x'')$. Для каждой точки интервала (x',x'') существует окрестность (сам этот интервал), целиком принадлежащая множеству E. Следовательно, каждая эта точка является внутренней точкой множества E и, значит, весь интервал (x',x'') принадлежит множеству G. Отсюда вытекает, что интервал (x',x'') не содержит ни одной точки множества $[a,b]-G$. Точка ξ поэтому не может быть предельной точкой множества $[a,b]-G$ и, значит, это множество содержит все свои предельные точки. Таким образом, по определению, множество $[a,b]-G$ есть множество замкнутое. Это означает, что G – множество открытое. ◀

Дадим «определение» того факта, что точка не является предельной точкой множества.

Точка ξ ***не является предельной точкой множества*** $E\subset[a,b]$, *если* ***существует окрестность точки*** ξ, *в которой не содержится ни одной точки множества* E, *отличной от самой точки* ξ (*ср. с определением предельной точки*).

Теорема 1.7. *Множество G является открытым тогда и только тогда, когда все его точки являются внутренними.*

▷ Пусть G – открытое множество и точка ξ есть произвольная точка множества G. Тогда точка ξ не принадлежит множеству $[a,b]-G$, а поскольку это последнее множество замкнуто (теорема 1.5), то точка ξ не является его предельной точкой. Отсюда следует (см.

только что данное «определение»), что существует окрестность (x',x'') точки ξ, которая не содержит ни одной точки множества $[a,b]-G$ и, значит, весь интервал $(x',x'')\subset G$. Поэтому точка ξ является внутренней точкой множества G.

Пусть теперь все точки множества G являются внутренними. Значит, оно, в силу теоремы 1.6, является открытым.◄

Дадим другое определение открытого множества (эквивалентное, согласно теореме 1.7, определению, данному ранее).

Множество $G\subset[a,b]$ *(или* $G\subset\Omega$*) называется* ***открытым,*** *если* ***все его точки*** *являются* ***внутренними.***

Из вышесказанного вытекает справедливость утверждения: *если множество* $F\subset[a,b]$ *является замкнутым, то дополнение* $(a,b)-F$ *к нему (относительно* (a,b)*) открыто. Если множество* $G\subset[a,b]$ *является открытым, то дополнение* $[a,b]-G$ *к нему замкнуто.*

Справедлива и следующая **фундаментальная** теорема, аналогичная теореме «*».

Теорема «».** *Любые два замкнутых множества* F_1 и F_2 *без общих точек* $(F_1\cap F_2=\varnothing)$, *можно отделить друг от друга непересекающимися открытыми множествами, т. е. можно построить два открытых множества* G_{F_1} *и* G_{F_2}, *что* $G_{F_1}\cap G_{F_2}=\varnothing$, $G_{F_1}\supset F_1$, $G_{F_2}\supset F_2$.

Если каждая точка *замкнутого множества* F *содержится* ***хотя бы в одном*** *из интервалов некоторой их совокупности, то говорят, что эта* ***совокупность интервалов покрывает множество*** F.

Теорема 1.8 (теорема Бореля – Лебега). *Если имеется некоторая бесконечная совокупность интервалов, покрывающая ограниченное замкнутое множество* F, *то среди этих интервалов существует их конечное число, покрывающее множество* F.

Для упрощения дальнейших обозначений будем предполагать, что ***все*** рассматриваемые ниже ***множества принадлежат сегменту*** $[0,1]$ числовой прямой R. Все определения и выводы легко переносятся на множества, лежащие целиком на любом сегменте $[a,b]\subset R$, то есть на произвольные ***ограниченные*** множества прямой R.

Итак, пусть множество S представляет собой сегмент $[0,1]$ $(S=[0,1])$, а F есть непустое замкнутое множество (как оговорено выше,

$F \subset [0,1]$ и, значит, является ограниченным множеством). Пусть α и β – точные нижняя и верхняя грани множества F.

Ниже мы будем рассматривать всевозможные конечные или бесконечные (счётные) суммы интервалов $G_k = (\alpha_k, \beta_k)$, принадлежащих множеству S и попарно не имеющих общих точек. Такие суммы будем записывать в виде $G = \sum G_k$ (запись $\sum G_k$ используется вместо записи $\sum_{k=1}^{n} G_k$ или записи $\sum_{k=1}^{\infty} G_k$, если неизвестно, конечно или счётно множество $\{G_k\}$). Отметим, что всякое множество вида $G = \sum G_k$, где $G_k = (\alpha_k, \beta_k)$ является открытым и что при рассмотрении интервалов из $S = [0,1]$ два крайних полуинтервала $[0,\beta),(\alpha,1]$ относим к интервалам.

Если открытое множество *G имеет вид $G = \sum G_k$, то его* ***мерой*** *(по Лебегу) называется* ***сумма длин всех интервалов, входящих в*** $\sum G_k$**,** *т. е. $mG = \sum mG_k$, где $mG_k = \beta_k - \alpha_k$ – длина интервала $G_k = (\alpha_k, \beta_k)$ (интервалы (α_k, β_k) попарно не пересекаются).*

Отметим, что причисление двух крайних полуинтервалов к интервалам не влияет на определение меры Лебега открытого множества, так как длина, например, $(\alpha,1]$, равная $1-\alpha$, равна длине $(\alpha,1)$, тоже равной $1-\alpha$. Ещё отметим, что если интервалов G_k бесконечно много, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} mG_k$ с положительными слагаемыми сходится, так как последовательность его частичных сумм $\{S_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} mG_k\right\}$ является возрастающей и ограниченной. Теперь определим меру (по Лебегу) замкнутого множества и определим ее так, чтобы сумма мер произвольного множества $E \subset S$ и множества $S - E$ была равна мере (длине) отрезка $S = [0,1]$, то есть единице. Пусть дано замкнутое множество $F \subset S$; тогда множество $S - F$, для которого введем обозначение G, является открытым и его мера уже определена.

Мерой замкнутого множества *$F \subset S$ называется* ***число*** *mF, равное* $1 - m(S-F)$, т.е. $mF = 1 - mG$, где $G = S - F$; $F + G = S$, $mF + mG = mS = 1$.

3. Теоремы о мерах Лебега замкнутого и открытого множеств. Мера произвольного множества

Сформулируем теперь теоремы, подводящие к естественному определению меры произвольного множества.

Теорема 1.9. *Мерой (по Лебегу) замкнутого множества* $F \subset S$ *является точная нижняя грань мер всевозможных открытых множеств, содержащих* F *и содержащихся в* S, *т. е.* $mF = \inf mG_F$, *где* G_F *есть произвольное открытое множество такое, что* $F \subset G_F \subset S$, *а* $\inf$ *берется по всем таким* G_F.

$\triangleright$ Покажем сначала, что если $F \subset G_F$, то $mF \le mG_F$. Предположим, что $mG_F < mF$. Пусть открытое множество $G = S - F$ распадается на интервалы $U_1, U_2, ..., U_n, ...$, а G_F – на интервалы $V_1, V_2, ..., V_n, ...$. Каждая точка $x \in S$ принадлежит некоторому интервалу V_k, если $x \in F$, или принадлежит некоторому интервалу U_i, если $x \in G$. Значит, совокупность всех интервалов U_i и V_k удовлетворяет условиям теоремы Бореля – Лебега и, значит, существует конечное число интервалов U_i и V_k, покрывающих в своей совокупности весь отрезок S; пусть это будут интервалы $U_1, U_2, ..., U_p$, $V_1, V_2, ..., V_q$. Тогда справедливы неравенства:

$$\sum_{k=1}^{q} mV_k \le mG_F < mF, \quad \sum_{k=1}^{p} mU_k \le mG$$

($mG_F < mF$ по предположению), откуда $\sum_{k=1}^{q} mV_k + \sum_{k=1}^{p} mU_k < mF + mG = 1$, т. е. сегмент $[0,1]$ оказался покрыт конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше единицы. Из полученного противоречия следует, что $mF \le mG_F$. А поскольку G_F – произвольное открытое множество, удовлетворяющее условиям $F \subset G_F \subset S$, то $mF \le \inf_{G_F} mG_F$.

Покажем теперь, что в действительности $mF = \inf_{G_F} mG_F$. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $G_F \supset F$, мера которого меньше, чем $mF + \varepsilon$. Пусть $G = \sum_{k=1}^{\infty} U_k$. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} mU_k$ следует существование столь большого натурального $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что (если $G = \sum_{k=1}^{n} U_k$, то берем $n_0 = n$):

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} mU_k < \frac{\varepsilon}{2} . \qquad (1)$$

Множество $S - \sum_{k=1}^{n_0} U_k$ есть сумма $n_0 + 1$ сегментов $[a_k, b_k] = \Delta_k$ $(k = \overline{1, n_0 + 1})$. Эта сумма содержит множество F,

где $F = S - \sum_{k=1}^{\infty} U_k$. Для каждого сегмента Δ_k рассматриваем его содержащий интервал $\delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$. Здесь:

$$\alpha_k = a_k - \frac{\varepsilon}{4(n_0 + 1)} \qquad \beta_k = b_k + \frac{\varepsilon}{4(n_0 + 1)} .$$

Тогда: $$m\delta_k = m\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2(n_0 + 1)};$$

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} m\delta_k = \sum_{k=1}^{n_0+1} m\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + (1 - \sum_{k=1}^{n_0} mU_k) .$$

Используя последнее равенство и неравенство (1), получаем:

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} m\delta_k = \frac{\varepsilon}{2} + (1 - \sum_{k=1}^{n_0} mU_k) < \frac{\varepsilon}{2} + (1 - \sum_{k=1}^{n_0} mU_k) + \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} mU_k =$$

$$= \varepsilon + (1 - \sum_{k=1}^{\infty} mU_k) = \varepsilon + mF .$$

Так как справедливо включение $G_F = \sum_{k=1}^{n_0+1} \delta_k \supset F$, теорема доказана. ◀

Теорема 1.10. *Мерой* (*по Лебегу*) *открытого множества* $G \subset S$ *является точная верхняя грань мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся в* G, *т. е.:*

$$mG = \sup mF^G ,$$

где F^G *есть произвольное замкнутое множество такое, что* $F^G \subset G \subset S$, *а* $\sup$ *берется по всем таким* F^G .

Переходя к определению меры произвольного множества $E \subset S$, будем придерживаться следующих обозначений: G_E всегда будет обозначать произвольное открытое множество, содержащее E, а F^E – произвольное замкнутое множество, содержащееся в E. Итак, $E \subset S$ есть любое множество.

Внешней мерой *множества* E *называется* ***точная нижняя грань*** *множества всех неотрицательных чисел* mG_E, *а его* ***внутренней мерой*** – ***точная верхняя грань*** *множества всех неотрицательных чисел* mF^E.

Введем обозначения: m^*E – внешняя мера E, m_*E – его внутренняя мера. Легко показать, что $m^*E \geq m_*E$ для любого множество E.

Если $m^*E = m_*E$, *то множество* E *называют* ***измеримым*** (по Лебегу), *а неотрицательное число* $mE = m^*E = m_*E$ – ***мерой*** (Лебега) ***множества*** E.

Отметим, что, на основании доказанного, ***произвольные открытые и замкнутые множества измеримы.***

Теорема 1.11. *Если множество* E *измеримо, то измеримо и его дополнение, т. е. множество* $S-E$, *и выполняется равенство* $mE + m(S-E) = 1$.

▷ Сначала докажем равенство:

$$m_*E = 1 - m^*(S-E) \qquad (2)$$

(для произвольного множества $E \subset S$). Замечаем, что открытое множество $S - F^E$ содержит $S-E$. Отсюда следует, что $mF^E = 1 - mG_{S-E}$, т. е. всякое число mF^E, где F^E есть произвольное замкнутое множество, содержащееся в E, может быть рассмотрено как некоторое число $1 - mG_{S-E}$, где G_{S-E} есть некоторое открытое множество, содержащее $S-E$.

Обратно, всякое число вида $1 - mG_{S-E}$ есть некоторое число mF^E, так как если $G_{S-E} \supset S-E$, то замкнутое множество $S - G_{S-E} \subset E$, т. е. $S - G_{S-E} = F^E$. Таким образом, множество всех чисел mF^E совпадает с множеством всех чисел $1 - mG_{S-E}$ и, поэтому:

$$m_*E = \sup mF^E = \sup(1 - mG_{S-E}) = 1 - \inf mG_{S-E} = 1 - m^*(S-E).$$

Равенство (2) доказано. Поскольку E – произвольное множество, содержащееся в S, то множества E и $S-E$ равноправны, а потому доказано и равенство $m_*(S-E) = 1 - m^*E$.

Пусть теперь множество E измеримо. Тогда:

$$mE = m_*E = 1 - m^*(S-E) \quad \text{или} \quad m^*(S-E) = 1 - mE.$$

Следовательно:

$$m_*(S-E) = 1 - m^*(S-(S-E)) = 1 - m^*E = 1 - mE = m^*(S-E),$$

т. е. множество $S-E$ измеримо. Поэтому, $mE = 1 - m(S-E)$. ◀

4. Основные теоремы о мере множеств и их следствия

Теорема 1.12. *Если* $A \subset B$, *то* $m^*A \le m^*B$.

Теорема 1.13. *Пусть дано конечное (или счетное) число множеств* $E_1, E_2, ..., E_n$ *(или* $E_1, E_2, ..., E_n, ...$*), удовлетворяющих условию:* $\sum m^*E_k$ *есть сходящийся ряд. Тогда справедливо неравенство:*

$$m^*\left(\sum E_k\right) \le \sum m^*E_k \tag{3}$$

(суммирование производится по всем данным множествам).

Теорема 1.14. *Если множества* A *и* B *отделимы непересекающимися открытыми множествами, т. е. если существуют два открытых множества без общих точек* G_A *и* G_B *такие, что* $G_A \supset A$, $G_B \supset B$, *то:*

$$m^*(A+B) = m^*A + m^*B . \tag{4}$$

Теоремы 1.12, 1.13, 1.14 *назовём* ***основными.***

Рассуждения, которые необходимо провести при доказательстве теоремы 1.13, несложные сами по себе, являются достаточно длинными. Докажем только теоремы 1.12 и 1.14. При доказательстве теоремы 1.14 будем считать, что теорема 1.13 доказана.

Доказательство теоремы 1.12.

▷ Пусть для двух множеств A и B имеет место включение $A \subset B$. Так как всякое G_B является некоторым G_A, то множество M_B всех mG_B есть часть множества M_A всех mG_A. Поэтому:

$$m^*A = \inf M_A \le \inf M_B = m^*B . \quad ◀$$

Доказательство теоремы 1.14.

▷ Пусть G_1 и G_2 есть некоторые непересекающиеся открытые множества и $G_1 = \sum U_n$, $G_2 = \sum V_m$, $U_1, U_2, ..., U_n, ...$ – попарно непересекающиеся интервалы, $V_1, V_2, ..., V_m, ...$ – также попарно непересекающиеся интервалы. Тогда $m(G_1 + G_2) = mG_1 + mG_2$ и, так как $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, то произвольный интервал U_n не пересекается с произвольным интервалом V_m. Таким образом, открытое множество:

$$G_1 + G_2 = \sum U_n + \sum V_m$$

распадается на попарно непересекающиеся интервалы U_n, V_m и

$$m(G_1 + G_2) = \sum mU_n + \sum mV_m = mG_1 + mG_2 . \tag{5}$$

Пусть теперь A и B есть два множества, удовлетворяющие условиям теоремы. По определению числа $m^*(A+B)$ существует такое открытое множество $G^{(\varepsilon)}_{A+B} \supset (A+B)$, что $mG^{(\varepsilon)}_{A+B} < m^*(A+B)+\varepsilon$, где ε – произвольное положительное число. Рассмотрим открытые множества $G_1 = G^{(\varepsilon)}_{A+B} \bigcap G_A$ и $G_2 = G^{(\varepsilon)}_{A+B} \bigcap G_B$. Так как множества G_1, G_2 лежат соответственно в G_A, G_B и $G_A \bigcap G_B = \varnothing$, то $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$. В силу (5):

$$mG_1 + mG_2 = m(G_1 + G_2).$$

С другой стороны: $A \subset G_1 \subset G^{(\varepsilon)}_{A+B}$ и $B \subset G_2 \subset G^{(\varepsilon)}_{A+B}$.

Поэтому:

$$m^*A \le mG_1, \qquad m^*B \le mG_2 \quad \text{и} \quad G_1 + G_2 \subset G^{(\varepsilon)}_{A+B}.$$

Отсюда следует:

$$m^*A + m^*B \le mG_1 + mG_2 =$$

$$= m(G_1 + G_2) \le mG^{(\varepsilon)}_{A+B} < m^*(A+B)+\varepsilon.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то

$$m^*A + m^*B \le m^*(A+B).$$

Но в силу (3) имеет место неравенство:

$$m^*(A+B) \le m^*A + m^*B.$$

Из последних двух неравенств получаем равенство (4). ◄

Из этой теоремы и теоремы «**» (см. пункт 1) следует, что если F_1 и F_2 есть два замкнутых множества без общих точек, то:

$$mF_1 + mF_2 = m(F_1 + F_2).$$

Из основных теорем, только что рассмотренных, и равенства $mE + m(S-E) = 1$ может быть получен ряд следствий.

Следствие 1.2. *Если* A *и* B *есть два измеримых множества без общих точек, то* $A+B$ *также измеримо, причем* $mA + mB = m(A+B)$.

Следствие 1.3. *Если* $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ *есть измеримые множества попарно без общих точек, то* $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ *измеримо, причем* $mE = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$.

Следствие 1.4. *Пусть* $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ *измеримые множества и* $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

Если: $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n \subset ...$, *то* $mE_n \underset{n\to\infty}{\to} mE$.

Следствие 1.5. *Пусть* $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ *измеримые множества и* $E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$. *Если:* $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$, *то:* $mE_n \underset{n\to\infty}{\to} mE$.

Следствия доказываются последовательно: при доказательстве следующего используется предыдущее. Из них докажем только 1.4.

$\triangleright$ Замечаем, что:

$$E = E_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_{n+1} - E_n\right) \ ,$$

причем все слагаемые правой части последнего равенства не имеют попарно общих точек. Согласно следствию 1.3 множество E измеримо и ряд $\sum m(E_{n+1} - E_n)$ сходится. Пользуясь определением суммы ряда, получаем:

$$mE = mE_1 + \sum_{n=1}^{\infty} m\left(E_{n+1} - E_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(mE_1 + \sum_{k=1}^{n} m\left(E_{k+1} - E_k\right)\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(E_1 + \sum_{k=1}^{n}\left(E_{k+1} - E_k\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} mE_{n+1}, \text{ т.е. } \quad \lim_{n\to\infty} mE_n = mE. \ \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е 1.1. Из неравенств

$$m_j E \le m_* E \le m^* E \le m^j E$$

(эти неравенства легко обосновать), следует, что если множество E жорданово измеримо, то оно измеримо и по Лебегу и $\overset{j}{m} E = mE$.

5. Структура совершенных множеств

Множество *предельных точек множества* E *называется* ***производным множеством*** *множества* E *и обозначается* E'. ***Точка*** *множества* E, ***не являющаяся предельной точкой*** *этого множества, называется его* ***изолированной точкой*** (*т. е. изолированными являются точки из* $E - E \cdot E'$).

Множество, не содержащее ни одной изолированной точки, *называется* ***плотным в себе.*** *Другими словами, множество* E *плотно в себе тогда и только тогда, когда* $E \subset E'$. ***Множество, одновременно замкнутое и плотное в себе****, называется* ***совершенным.***

Совершенное множество E – это множество, содержащее все свои предельные точки и не содержащее ни одной изолированной точки, т. е. множество, совпадающее с множеством всех своих предельных точек.

Точку ξ *называют* ***точкой конденсации*** *множества* E, *если* ***в любой окрестности*** *точки* ξ *содержится* ***несчётное множество*** *точек* E.

Теорема 1.15. *Всякое несчётное множество* E *содержит не более чем счётное множество точек, не являющихся точками конденсации множества* E (остальные точки E, которых несчётное множество, есть точки конденсации).

Теорема 1.16. *Множество точек конденсации любого множества* E *есть совершенное множество.*

Теорема 1.17. *Всякое замкнутое множество* F *есть сумма совершенного множества* P *своих точек конденсации и не более чем счётного множества остальных точек.*

Теоремы 1.15 – 1.17 доказываются последовательно (так же, как и следствия 1.2 – 1.5). Теорему 1.15 примем без доказательства. Доказательство этой теоремы несложно. Оно базируется на том факте, что множество всех рациональных интервалов, лежащих на числовой оси, есть счётное множество. Рациональным интервалом называется всякий интервал с концами в рациональных точках. Теоремы 1.16 и 1.17 докажем.

Доказательство теоремы 1.16.

$\triangleright$ Множество всех точек конденсации множества E обозначим P (множество P является пустым, если E есть конечное или счётное множество). Покажем: первое, что P – замкнутое множество, и второе, что P не содержит никакой изолированной точки.

1. Пусть ξ есть произвольная предельная точка множества P и (x', x'') есть произвольная окрестность точки ξ. Тогда в окрестности (x', x'') существует по крайней мере одна точка η множества P, и указанный интервал является окрестностью точки η. Но $\eta \in P$ и, значит, интервал (x', x'') содержит несчетное множество точек, принадлежащих множеству E. Поскольку же (x', x'') – произвольная окрестность точки ξ, то ξ есть точка конденсации множества E, то есть $\xi \in P$. Следовательно, P есть множество замкнутое.

2. Пусть ξ есть произвольная точка, принадлежащая множеству P, и (x', x'') есть произвольная окрестность этой точки. Множество всех точек E, попавших на интервал (x', x''), обозначим E_0. Множество E_0 несчетно (точка ξ – точка конденсации множества E). В силу теоремы 1.15 среди точек множества E_0 имеется несчетное множество его точек конденсации. Все эти точки конденсации принадлежат интервалу (x', x''). Каждая точка конденсации множества E_0 есть и подавно точка конденсации множества E, т. е. она принадлежит множеству P. Отсюда: произвольная окрестность (x', x'') точки ξ содержит несчетное множество точек, принадлежащих P. Это значит, что любая точка $\xi \in P$ есть предельная точка множества P, т. е. множество P не содержит ни одной изолированной точки. ◀

Доказательство теоремы 1.17.

▷ Пусть F есть несчетное замкнутое множество. Совершенное множество P всех его точек конденсации содержится во множестве F (каждая точка конденсации есть предельная точка). С другой стороны, множество $F-P$ всех остальных точек F не более чем счётно. ◀

Теорема 1.18. *Всякое непустое ограниченное совершенное множество P с точной нижней гранью α и точной верхней гранью β либо совпадает с сегментом $[\alpha,\beta]$, либо получается вычитанием из этого сегмента конечного или счётного числа интервалов, не имеющих попарно ни общих точек,* ***ни общих концов;*** *эти интервалы являются смежными интервалами к совершенному множеству P. И, обратно, вычитая из сегмента $[\alpha,\beta]$ конечное или счётное число интервалов, не имеющих попарно ни общих точек,* ***ни общих концов,*** *получим множество P. Для этого множества точки α,β являются точными нижней и верхней гранями, а интервалы, которые вычитались из $[\alpha,\beta]$, – смежными интервалами к этому множеству.*

Из основной теоремы 1.13 вытекает, что сумма счётного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль. Так как множество, состоящее из одной точки, имеет, очевидно, меру нуль, то справедлива теорема.

Теорема 1.19. *Любое счётное множество имеет меру нуль.*

Поскольку теорема 1.13 у нас не доказана и доказать теорему 1.19 можно непосредственно, то докажем ее ниже.

▷ Пусть есть счётное множество (например, множество всех рациональных точек из интервала $(0{,}1)$): $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ (счётное множество будем обозначать Σ). Возьмем любое $\varepsilon>0$ и построим вокруг каждой точки x_n интервал с центром x_n длины $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Состоящее из этих интервалов множество имеет, очевидно, меру $\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$. ◀

З а м е ч а н и е 1.2. Из теорем 1.17 и 1.19 следует, что если F есть замкнутое множество и $mF>0$, то множество F несчётно и, следовательно, является суммой совершенного множества P и не более чем счётного множества Σ, так что $mF=mP$. Поэтому, в предыдущих рассуждениях, касающихся меры множеств, можно вместо замкнутых множеств говорить о множествах совершенных. Отметим еще, что множество Σ, которое жорданово неизмеримо (п. 1), измеримо по Лебегу и имеет меру нуль (в смысле Лебега) . По поводу § 1 см. [26_2, гл. 12, § 12.2; 2; 25].

§ 2. Измеримые функции

1. Предварительные понятия и вспомогательные утверждения

Функция *$f(x)$, определенная на множестве E, называется* ***непрерывной в точке*** *$\xi \in E$***,** *если* ***для каждого числа*** *$\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ при условиях $|\xi - x| < \delta$ и $x \in E$.* ***Функцию, непрерывную в каждой точке*** *множества E, будем называть функцией,* ***непрерывной на множестве*** *E***.**

Пусть дана последовательность определенных на некотором множестве E функций:

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots . \tag{6}$$

Последовательность *функций* (6) *называется* ***сходящейся на множестве*** *E* ***к предельной функции*** *$f(x)$, если* ***для любого*** *$\varepsilon > 0$* ***и любой точки*** *$x_0 \in E$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$ такой, что для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.* ***Последовательность*** (6) *называется* ***равномерно сходящейся на множестве*** *E к предельной функции $f(x)$, если* ***для любого*** *$\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для любого $n \ge n_0$ во всех точках x множества E выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Теорема 1.20. *Если последовательность функций, непрерывных на множестве E, сходится на этом множестве равномерно, то предельная функция этой последовательности также непрерывна на множестве E.*

$\triangleright$ Пусть дана последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, определенных и непрерывных на множестве E функций, которая на этом множестве равномерно сходится к предельной функции $f(x)$, и ε – любое положительное число. Пусть $x_0 \in E$ есть произвольная точка. Докажем, что функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Выберем натуральное число n_0 настолько большим, что для любой точки $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, если выполнено условие $n\ge n_0$. В частности, для любой точки $x\in E$ имеем:

$$\left|f_{n_0}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Функция $f_{n_0}(x)$ непрерывна в точке x_0. Значит, существует такая окрестность (x',x'') точки x_0, что для любой точки x, принадлежащей одновременно этой окрестности и множеству E, выполняется неравенство:

$$\left|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{8}$$

(и неравенство (7)). Подставляя в (7) x_0 вместо x, поучим:

$$\left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Из (7), (8) и последнего неравенства находим:

$$|f(x_0)-f(x)|\le\left|f(x_0)-f_{n_0}(x_0)\right|+\left|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)\right|+\left|f_{n_0}(x)-f(x)\right|<\varepsilon.\ \blacktriangleleft$$

Теорема 1.21. *Произведение любого (конечного или бесконечного) числа замкнутых множеств есть замкнутое множество (которое может оказаться и пустым).*

$\triangleright$ Пусть дана произвольная совокупность $\Re=\{F\}$ замкнутых множеств и пусть Φ есть произведение всех множеств, входящих в эту совокупность, то есть Φ – это множество всех точек, каждая из которых принадлежит всем множествам совокупности $\Re$. Если ξ есть предельная точка множества Φ, то она есть предельная точка любого множества F совокупности $\Re$, так как $\Phi\subset F$ при любом $F\in\Re$, и, следовательно, содержится в множестве F, так как F замкнуто. Таким образом, каждая предельная точка множества Φ содержится в любом множестве F совокупности $\Re$. Отсюда следует, что она содержится во множестве Φ, то есть Φ является замкнутым множеством. $\blacktriangleleft$

Теорема 1.22. *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом множестве F, то, каково бы ни было действительное число c, множество тех точек, принадлежащих множеству F, в которых $f(x)\ge c$ (в которых $f(x)\le c$), есть замкнутое множество.*

$\triangleright$ Докажем, например, замкнутость множества T, состоящего из всех точек x, в которых $f(x)\ge c$. Для этого докажем, что никакая точка, не принадлежащая множеству T, не может быть предельной для него. Пусть точка $x_0 \notin T$. Если точка $x_0 \notin F$, то x_0 не может быть предельной точкой для множества F, значит, и для множества T. Если точка $x_0 \in F$, но $x_0 \notin T$, то $f(x_0) < c$. Положим $\varepsilon = c - f(x_0) > 0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то можно найти такую окрестность (x', x'') точки x_0, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех точек x этой окрестности. Из последнего неравенства, в частности, находим, что:

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon = c, \quad \text{т. е.} \quad f(x) < c$$

для любой точки $x \in (x', x'')$. Отсюда следует, что (x', x'') не может содержать ни одной точки множества T, т. е. точка x_0 не может быть предельной для T. ◀

***Говорят**, что **числовая последовательность** $\{x_n\}$ **удовлетворяет условию Коши** (или является **фундаментальной последовательностью**), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров n и m, удовлетворяющих условию $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Условие фундаментальности последовательности:

«для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq n_0$ и $m \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$»

можно сформулировать и так:

«для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq n_0$ и всех целых $p \geq 0$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$».

Чтобы получить последнюю формулировку достаточно обозначить: $p = n - m$, если $n \geq m$, и $p = m - n$, если $m > n$.

Теорема 1.23 (критерий Коши сходимости последовательности). *Для того чтобы числовая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

▷ *Необходимость*. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой номер, что для всех номеров $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (такой номер существует согласно определению предела последовательности). Если $n \geq n_0$ *и* $m \geq n_0$, то $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т. е. выполняется условие Коши.

Достаточность. Пусть есть числовая последовательность

$$\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ... \qquad (9)$$

и пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров n и m, удовлетворяющих условию $n \ge n_0$, $m \ge n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем, например, значение $\varepsilon = 1$. Тогда существует такой номер n_1, что при условии $n \ge n_1$, $m \ge n_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$. В частности, если $n \ge n_1$, $m = n_1 + 1$, то $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$, т.е. $x_{n_1+1} - 1 < x_n < x_{n_1+1} + 1$. Значит, последовательность $x_{n_1}, x_{n_1+1},...$ ограничена.

Для значений $k = 1,2,3,...$ обозначим E_k множество точек $x_k, x_{k+1}, x_{k+2},...$ последовательности (9), $\alpha_k = \inf E_k$, $\beta_k = \sup E_k$. Очевидно,

$$E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_k \supset E_{k+1} \supset ...$$

Так как последовательность $x_{n_1}, x_{n_1+1},...$ ограничена, то ограничены все множества E_k. Действительно, E_{n_1} ограничено, E_k (при $k > n_1$) содержатся в E_{n_1}, а E_k (при $k < n_1$) отличается от E_{n_1} лишь на конечное число точек и, поэтому, они также ограничены. Очевидны следующие простые свойства точных верхней и нижней граней:

1) если множество E ограничено сверху и $E_1 \subset E$, то $\sup E_1 \le \sup E$;

2) если E ограничено снизу и $E_1 \subset E$, то $\inf E_1 \ge \inf E$. На основании последней цепочки вложений и сформулированных свойств точных верхней и нижней граней имеем:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \alpha_k \le ..., \qquad \beta_1 \ge \beta_2 \ge ... \ge \beta_k \ge ...,$$

причем $\alpha_k \le \beta_k$.

Если $\alpha_k = \beta_k$, то все точки $x_k, x_{k+1},...$ совпадают и тогда (9) сходится к точке $\xi = x_k = x_{k+1} = ...$. Если же ни при каком значении k точка α_k не совпадает с β_k, то сегменты $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, …, $[\alpha_k, \beta_k]$, … образуют последовательность вложенных сегментов. Докажем, что сегменты образуют последовательность стягивающихся отрезков, т. е. докажем, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такой номер n^*, что для всех $k \ge n^*$ длина сегмента $[\alpha_k, \beta_k]$ меньше, чем ε.

Возьмем номер q таким большим, чтобы было $\frac{3}{q} < \varepsilon$, n^* возьмем таким, чтобы для номеров $n \ge n^*$, $m \ge n^*$ выполнялось неравенство $|x_n - x_m| < \frac{1}{q}$, и выберем точки x', x'' так, чтобы для данного номера $k > n^*$ было $\alpha_k < x' < x'' < \beta_k$, $x' - \alpha_k < \frac{1}{q}$, $\beta_k - x'' < \frac{1}{q}$. Так как $\alpha_k = \inf E_k$, $\beta_k = \sup E_k$, то имеются точки x_n, x_m множества E_k такие, что $\alpha_k \le x_n \le x'$ и $x'' \le x_m \le \beta_k$; $\Rightarrow$ $x_n - \alpha_k < \dfrac{1}{q}$ и $\beta_k - x_m < \dfrac{1}{q}$. Т.к. n и m больше, чем n^*, то $|x_n - x_m| < \dfrac{1}{q}$. Очевидно, что длина отрезка $[\alpha_k, \beta_k]$ равна $\beta_k - \alpha_k = (x_n - \alpha_k) + (x_m - x_n) + (\beta_k - x_m) < \dfrac{3}{q} < \varepsilon$. Доказано, что рассматриваемые отрезки образуют последовательность вложенных стягивающихся отрезков. Значит, существует (и притом единственная) точка a, принадлежащая всем отрезкам $[\alpha_k, \beta_k]$. Осталось доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем произвольную окрестность (x', x'') точки a и столь большое число k, чтобы длина сегмента $[\alpha_k, \beta_k]$ была меньше, чем каждое из чисел $a - x'$ и $x'' - a$; тогда весь сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$, содержа точку a, необходимо содержится в интервале (x', x''). Все точки множества E_k содержатся в сегменте $[\alpha_k, \beta_k]$, значит, и подавно в интервале (x', x''). Отсюда следует, что все точки последовательности (6), начиная с k-й, попали в этот интервал. Так как (x', x'') – произвольная окрестность точки a, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ◀

Функция $f(x)$ называется ***измеримой,*** *если множество* E*, на котором она определена,* ***есть измеримое множество*** *и для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти замкнутое множество* $F \subset E$ *меры, большей, чем* $mE - \varepsilon$*, на котором* $f(x)$ ***непрерывна*** (определение 1).

В частности, измерима всякая функция $f(x)$, определённая на измеримом множестве и непрерывная на нём**.**

Лемма 1.1. *Если* $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ *есть последовательность измеримых множеств, каждое из которых содержится в измеримом множестве* P*, причем* $mE_n > mP - \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ *, то* $m\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) > mP - \varepsilon$.

▷ $$m\left(P - \prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(P - E_k\right)\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m\left(P - E_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \ . \ ◀$$

2. О равномерной сходимости

Лемма 1.2. *Пусть*

$$\{f_n(x)\} = f_1(x)\,,\, f_2(x), \dots,\, f_n(x)\,, \dots \qquad (10)$$

есть сходящаяся последовательность функций, непрерывных на замкнутом множестве F *(положительной меры). Тогда для любого числа*

$\varepsilon > 0$ *можно найти совершенное множество* $P \subset F$ *меры большей, чем* $mF - \varepsilon$*, на котором данная последовательность сходится равномерно.*

$\triangleright$ Пусть даны три произвольных натуральных числа h, p, q. Обозначим $E_{p,q}^h$ множество всех тех точек множества F, в которых непрерывная функция $f_p(x) - f_q(x)$ удовлетворяет условию:

$$\left| f_p(x) - f_q(x) \right| \le \frac{1}{h}. \qquad (11)$$

Множество $E_{p,q}^h$ замкнуто (теорема 1.22). Пусть множество E_r^h (r – произвольное натуральное число) является произведением всех множеств $E_{p,q}^h$ $(q \ge p \ge r)$. Другими словами, множество E_r^h есть множество всех точек x множества F, удовлетворяющих условию (11) при любых натуральных числах p, q, которые не меньше, чем число r. Таким образом, множество E_r^h – это множество всех тех точек множества F, в которых условие (11) выполняется для всех p и q, начиная со значений $p = q = r$. Множество E_{r+1}^h – это множество всех тех точек множества F, в которых условие (11) выполняется для всех p и q, начиная со значений $p = q = r + 1$. Отсюда следует:

$$E_1^h \subset E_2^h \subset ... \subset E_r^h \subset ... \qquad (12)$$

Докажем равенство $\sum_{r=1}^{\infty} E_r^h = F$. Для этого достаточно показать, что каждая точка $x \in F$ принадлежит множеству $\sum_{r=1}^{\infty} E_r^h$. Пусть x есть произвольная точка множества F. Так как $\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ сходится , то, в силу критерия Коши (теорема 1.23), существует такое число r, что $\left| f_p(x) - f_q(x) \right| < \frac{1}{h}$, каковы бы ни были натуральные числа $q \ge p \ge r$. Значит, $x \in E_r^h$ и, значит, $x \in \sum_{r=1}^{\infty} E_r^h$.

Каждое множество E_r^h как произведение замкнутых множеств $E_{p,q}^h$ является замкнутым (теорема 1.21). Пусть $mE_r^h = m_r^h$. Т. к. $\sum_{r=1}^{\infty} E_r^h = F$, то, в силу (12), $\lim_{r \to \infty} m_r^h = mF = m$. Поэтому существует значение $r = r_h$, что:

$$m_{r_h}^h = mE_{r_h}^h > mF - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^h} = m - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^h}.$$

Так как $E_{r_h}^h \subset F$ $(h = 1,2,3,...)$, то в силу леммы 1.1:

$$m\left(\prod_{h=1}^{\infty} E_{r_h}^h\right) = mE > mF - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Во множестве E (замечание 1.2) непременно содержится совершенное множество P меры большей, чем:

$$mE - \frac{\varepsilon}{2} > mF - \varepsilon$$

Покажем, что последовательность (10) на P сходится равномерно. Пусть дано произвольное малое число $\eta > 0$ и пусть h – настолько большое число, что $\frac{1}{h} < \frac{\eta}{2}$. Так как $P \subset E \subset E_{r_h}^h$, то для любой точки $x \in P$ будет:

$$\left| f_p(x) - f_q(x) \right| < \frac{1}{h} < \frac{\eta}{2},$$

если только $q \ge p \ge r_h$. В частности, если $x \in P$ и n – любое натуральное число такое, что $n \ge r_h$, то:

$$\left| f_{r_h}(x) - f_n(x) \right| < \frac{1}{h} < \frac{\eta}{2}. \tag{13}$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Устремляя n к бесконечности, находим

$$\left| f_{r_h}(x) - f(x) \right| \le \frac{1}{h} < \frac{\eta}{2} \tag{14}$$

(для всех $x \in P$). Из неравенств (13) и (14) получаем:

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| \le \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

каковы бы ни были точка $x \in P$ и натуральное $n \ge r_h$, что и означает равномерную сходимость последовательности (10) на P. ◀

Пусть *какое-либо явление имеет место* ***для всех точек*** *некоторого* ***измеримого множества*** E ***положительной меры, за исключением, быть может, точек его подмножества, имеющего меру нуль.*** *Тогда говорят, что явление имеет место* ***почти всюду на множестве*** E (определение понятия **«почти всюду»**).

Теорема 1.24 (теорема Егорова). *Если последовательность измеримых функций сходится почти всюду на измеримом множестве* E, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти совершенное множество* $P \subset E$ *с мерой* $mP > mE - \varepsilon$, *на котором последовательность сходится равномерно.*

▷ Пусть дана последовательность (10), удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда она сходится во всех точках некоторого множества $E - \Sigma$, где Σ есть множество меры нуль, а $E - \Sigma$ – измеримое множество той же меры, что и E.

Существует совершенное множество $P_0 \subset E$, что $mP_0 > mE - \frac{\varepsilon}{4}$. Далее, для каждого n существует совершенное множество P_n меры большей , чем $mE - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$, на котором функция $f_n(x)$ непрерывна. Так как

$$m(E - P_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \text{ то } \quad m\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(E - P_k)\right\} \le \sum_{k=1}^{\infty} m(E - P_k) < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но $\sum_{k=1}^{\infty}(E - P_k) = E - \prod_{k=1}^{\infty} P_k$. Поэтому, $m\left(E - \prod_{k=1}^{\infty} P_k\right) < \frac{\varepsilon}{4}$, откуда следует:

$$m\left\{P_0 \cdot \left(E - \prod_{k=1}^{\infty} P_k\right)\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \text{ Значит, } m\left(P_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} P_k\right) > mP_0 - \frac{\varepsilon}{4} > mE - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Замкнутое множество $P_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} P_k$ содержит совершенное множество P^* той же меры. На множестве P^* все функции $f_n(x)$ непрерывны и последовательность (10) сходится. В силу леммы 1.2 существует совершенное множество $P \subset P^*$, на котором последовательность (10) сходится равномерно и которое имеет меру большую, чем $mP^* - \frac{\varepsilon}{2} > mE - \varepsilon$. ◀

Следствие 1.6. *Если последовательность* (10) *измеримых функций, определенных на одном и том же измеримом множестве* E, *сходится почти всюду на этом множестве к функции* $f(x)$, *то* $f(x)$ *есть измеримая функция.*

▷ При доказательстве теоремы 1.24 было найдено совершенное множество P меры $mP > mE - \varepsilon$, на котором все функции $f_n(x)$ непрерывны и последовательность (10) сходится равномерно. Но тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна на множестве P (теорема 1.20) и, так как $mP > mE - \varepsilon$, где ε сколь угодно мало, то функция $f(x)$ измерима. ◀

3. Два определения измеримости функции

Определение измеримости (определение 1), приведённое выше, позволила дать теорема Лузина, для доказательства которой потребуется следующая лемма.

Лемма 1.3. *Если замкнутое множество* F *есть сумма конечного числа замкнутых множеств* $F = \sum_{k=1}^{n} F_k$, *попарно без общих точек,* *и функция* $f(x)$ *постоянна на каждом из множеств* F_k*, то* $f(x)$ *непрерывна на множестве* F.

$\triangleright$ Пусть ξ – произвольная точка множества F. Тогда она содержится в одном и только в одном из множеств F_j. Пусть Φ есть сумма всех остальных множеств F_k:

$$\Phi = F_1 + F_2 + \ldots + F_{j-1} + F_{j+1} + \ldots + F_n .$$

Так как Φ – замкнутое множество, не содержащее точки ξ, то существует окрестность (x', x'') точки ξ, не содержащая ни одной точки множества Φ. Но в таком случае все точки множества F, попавшие в окрестность (x', x''), содержатся во множестве F_j и, значит, для любой точки $x \in (x', x'')$ будет $f(x) = f(\xi)$. Таким образом, $|f(x) - f(\xi)| = 0$ для любой точки $x \in F$, попавшей в интервал (x', x''). ◀

Имея дело *с множеством* E*, будем применять* ***обозначение:***

$$E(H) = \{x | x \in E, H\},$$

т. е. $E(H)$ *обозначает* ***множество тех точек*** x***, принадлежащих*** E***,*** *для которых* ***выполнено условие*** H***.*** *Про эти точки говорим:* ***точки с условием*** H***.***
Например,

$$E(f > a) = \{x | x \in E, f(x) > a\}.$$

Дадим теперь второе определение измеримой функции. Даваемое ниже определение появилось раньше определения, данного выше, и было дано Лебегом.

Функцию $f(x)$ *называем* ***измеримой,*** *если множество* E*, на котором она определена,* ***есть измеримое множество*** *и при любом действительном* a ***измеримо множество*** $E(f \geq a)$ (определение 2).

Теорема 1.25 (теорема Лузина). *Для того чтобы функция была измерима в смысле определения 2, необходимо и достаточно, чтобы она была измерима в смысле определения 1.*

$\triangleright$ Пусть функция $f(x)$ является измеримой в смысле определения 2. Докажем: $f(x)$ является измеримой в смысле определения 1.

Если $E(f \geq a)$ есть измеримое множество, то и множество $E(f < a)$ (как дополнительное множество) всегда измеримо. Отсюда следует, что множество $E(f \leq a) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$ также измеримо для всех a.

Но тогда измеримы и множества:

$$E(a \le f \le b) = E(f \ge a)\cdot E(f \le b)\ , \quad E(f = a) = E(f \le a)\cdot E(f \ge a),$$

где a, b – произвольные числа, $a < b$. После этого замечаем, что множество $E(f > a)$ измеримо как дополнительное к измеримому множеству. Но тогда измеримы и множества:

$$E(a < f < b), \quad E(a \le f < b), \quad E(a < f \le b).$$

Далее, если функция $f(x)$ измерима в смысле определения 2, то она в каждой точке множества E принимает некоторое действительное значение. Отсюда следует, что каждая точка $x \in E$ принадлежит одному из измеримых множеств $E(-n \le f < n)$, где n – натуральное число, и потому справедливо равенство:

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E(-n \le f(x) < n).$$

Так как $E(-n \le f < n) \subset E(-(n+1) \le f < n+1)$, то $mE = \lim\limits_{n\to\infty} m\{E(-n \le f < n)\}$, откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти столь большое натуральное число n_0, для которого $m\{E(-n_0 \le f < n_0)\} > mE - \varepsilon$. Введем обозначение $E(-n_0 \le f < n_0) = E_0$. Разобьем сегмент $[-n_0, n_0]$ на $2n_0 \cdot n$ равных частей (где n – любое натуральное число) точками:

$$l_0^{(n)} = -n_0,\ \ l_1^{(n)} = -n_0 + \frac{1}{n},\ \dots,\ l_j^{(n)} = -n_0 + \frac{j}{n}, \dots,\ l_{2n_0\cdot n}^{(n)} = n_0$$

и обозначим E_j^n измеримое множество:

$$E_j^n = E\left(l_{j-1}^{(n)} \le f < l_j^{(n)}\right), \qquad j = 1,2,\dots,2n_0\cdot n.$$

Тогда $E_0 = \sum\limits_{k=0}^{2n_0\cdot n} E_k^n$, причём $E_i^n \cdot E_j^n = \emptyset$, если $i \ne j$. Выделим из каждого множества E_j^n такое замкнутое множество F_j^n, что:

$$mF_j^n > mE_j^n - \frac{\varepsilon}{2^n \cdot 2n_0 \cdot n},$$

и положим $F_n = \sum\limits_{k=1}^{2n_0\cdot n} F_k^n$. Замкнутое множество F_n имеет меру:

$$mF_n = \sum_{k=1}^{2n_0\cdot n} mF_k^n > \sum_{k=1}^{2n_0\cdot n}\left(mE_k^n - \frac{\varepsilon}{2^n\cdot 2n_0\cdot n}\right) = mE_0 - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Очевидно, что $F_i^n \cdot F_j^n = \emptyset$, где $\emptyset$ – пустое множество, если $i \ne j$.

Определим функцию $f_n(x)$ на замкнутом множестве F_n так:

$$f_n(x) = l_{j-1}^{(n)}, \quad \text{если} \quad x \in F_j^n.$$

В силу леммы 1.3, функция $f_n(x)$ непрерывна на всем множестве F_n. Если точка $x \in F_n$, то эта точка x содержится в одном и только в одном F_j^n. Пусть $x \in F_j^n \subset E_j^n$, тогда $l_{j-1}^{(n)} \le f(x) < l_j^{(n)}$ и, следовательно,

$$0 \le f(x) - f_n(x) < l_j^{(n)} - l_{j-1}^{(n)} = \frac{1}{n}, \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Значит, последнее неравенство выполняется для любой точки $x \in F_n$.

Рассмотрим замкнутое множество:

$$F = \prod_{k=1}^{\infty} F_k .$$

Так как $mF_n > mE_0 - \frac{\varepsilon}{2^n}$ и $F_n \subset E_0$, то (в силу леммы 1.1) справедливо неравенство $mF > mE_0 - \varepsilon$. Поскольку же $F \subset F_n$ при любом n, то для любого n функция $f_n(x)$ непрерывна на множестве F и, кроме того, $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$ для любой точки $x \in F$. Поэтому, последовательность функций (10), непрерывных на множестве F, сходится на множестве F к функции $f(x)$ равномерно. Отсюда следует, что $f(x)$ непрерывна на множестве F. Так как мера F удовлетворяет неравенствам $mF > mE_0 - \varepsilon > mE - 2\varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ есть число произвольное, то функция $f(x)$ является измеримой в смысле определения 1.

Перейдем теперь к доказательству обратного утверждения. Пусть функция $f(x)$ является измеримой в смысле определения 1 и a – любое действительное число. Введем обозначение $E(f \ge a) = E_a$. Кроме того, обозначим F_n замкнутое множество, мера которого больше, чем $mE - \frac{1}{n}$, и на котором $f(x)$ непрерывна. Тогда множество $A = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$ измеримо и его мера $mA = mE$. Действительно, при любом n:

$$E - A \subset E - F_n, \qquad m(E - A) \le m(E - F_n) < \frac{1}{n}, \text{ то есть } \quad m(E - A) = 0.$$

Далее заметим, что $E_a \cdot F_n$ есть множество тех точек F_n, в которых $f(x) \ge a$. Так как $f(x)$ непрерывна на множестве F_n, то множество $E_a \cdot F_n$ является замкнутым (теорема 1.22) и, следовательно, измеримым (при любом натуральном n). Поэтому $E_a \cdot A = \sum_{k=1}^{\infty} E_a \cdot F_k$ тоже является измеримым. Отсюда следует, что E_a, равное

$E_a = E_a \cdot A + E_a \cdot (E - A)$, есть измеримое множество, так как $m\{E_a \cdot (E - A)\} = 0$. ◀

4. О непрерывном продолжении функции с замкнутого множества

Пусть *E – непустое ограниченное множество и $\alpha = \inf E$, $\beta = \sup E$, Сегмент $[\alpha, \beta]$ называется* ***наименьшим сегментом,*** *содержащим E.*

В начале этого параграфа было дано определение непрерывной в точке функции. С учетом определений предельной и изолированной точек множества можно дать следующие определения непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E и точка $x_0 \in E$.

Функция *$f(x)$ называется* ***непрерывной в точке*** *x_0 в двух случаях:* 1) *если x_0 – изолированная точка множества E;* 2) *если x_0 – предельная точка множества E и для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ при условиях $|x_0 - x| < \delta$ и $x \in E$ $(x \neq x_0)$.*

Говорят, *что функция $f(x)$* ***непрерывна*** *в точке x_0 в двух случаях:* 1) *если x_0 есть изолированная точка множества E;* 2) *если x_0 – предельная тока этого множества и для любой числовой последовательности $\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ...$ такой, что:*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0, \quad x_n \in E \ (x_n \neq x_0),$$

следует:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0).$$

Нетрудно заметить, что в определениях присутствует требование выполнения равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. При этом используются определения предела по Коши и по Гейне соответственно. Эти определения предела, как известно, эквивалентны. Указанный факт будет использоваться при доказательстве теоремы 1.26.

Теорема 1.26. *Пусть F есть замкнутое множество, содержащееся в сегменте $[0,1]$. Если функция $\varphi(x)$ задана и непрерывна на множестве F, то на $[0,1]$ можно определить функцию $\psi(x)$ со следующими свойствами:*

$$\psi(x) \textit{ непрерывна на } [0,1],$$

$$\psi(x) = \varphi(x), \textit{ если } x \in F,$$

$\max|\psi(x)| = \max|\varphi(x)|$.

$\triangleright$ Пусть $[\alpha, \beta]$ – наименьший сегмент, содержащий множество F. Если $F = [\alpha, \beta]$ и $[\alpha, \beta] \neq [0,1]$, то полагаем:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(\alpha), x \in [0, \alpha), \\ \varphi(\beta), x \in (\beta, 1]. \end{cases}$$

Если $F \neq [\alpha, \beta]$, то рассмотрим множество $G = [\alpha, \beta] - F$. Оно состоит из конечного или счётного множества попарно непересекающихся интервалов, смежных к множеству F.

Зададим функцию $\psi(x)$, полагая ее равной $\varphi(x)$ в точках множества F и линейной на всех смежных к множеству F интервалах. Очевидно, что функция $\psi(x)$ непрерывна в каждой точке G. Пусть точка $x_0 \in F$ и не является изолированной точкой. Покажем, что функция $\psi(x)$ непрерывна в этой точке слева (непрерывность справа показывается аналогично).

Если точка x_0 является правым концом какого-либо смежного интервала, то непрерывность функции $\psi(x)$ в этой точке слева очевидна. Остается рассмотреть случай, когда точка $x_0 \in F$ не является правым концом никакого смежного интервала. Примером такого замкнутого множества F и такой точки x_0 является множество F^*, состоящее из всех точек сегментов:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right], \quad \left[\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right], \quad \left[\frac{6}{7}, \frac{7}{8}\right], \quad \ldots \quad , \quad \left[\frac{2n}{2n+1}, \frac{2n+1}{2n+2}\right], \quad \ldots$$

$(n = 0,1,2,\ldots)$ и из точки 1, и точка $x_0 = 1$. Множество всех предельных точек этого множества совпадает с самим множеством, т. е., другими словами, F^* является совершенным множеством.

Действительно, всякая точка, принадлежащая к одному из сегментов $\left[\frac{2n}{2n+1}, \frac{2n+1}{2n+2}\right]$, есть предельная точка для этого сегмента и, следовательно, для всего множества F^*. Осталось рассмотреть точку 1. Пусть (x', x'') есть произвольная окрестность этой точки, то есть $x' < 1 < x''$. Существует такое достаточно большое натуральное число n', что выполняется неравенство $1 - \frac{2n'}{2n'+1} = \frac{1}{2n'+1} < 1 - x'$. Это значит, что сегмент $\left[\frac{2n'}{2n'+1},1\right]\subset(x',1]$. Отсюда следует, что: $\left[\frac{2n'}{2n'+1},\frac{2n'+1}{2n'+2}\right]\subset(x',1]$ и, значит, $\left[\frac{2n'}{2n'+1},\frac{2n'+1}{2n'+2}\right]\subset(x',x'')$.

Заметим теперь, что все сегменты $\left[\frac{2n}{2n+1},\frac{2n+1}{2n+2}\right]$ при условии $n>n'$ также принадлежат окрестности (x',x'') точки 1. Следовательно, точка 1 есть предельная точка для множества F^*. Из вышесказанного следует, что $F^*\subset F^{*'}$, где $F^{*'}$ есть производное множество для множества F^*.

Докажем обратное включение $F^*\supset F^{*'}$. Для этого доказательства покажем, что никакая точка, не принадлежащая к множеству F^*, не может быть его предельной точкой. Пусть ξ – точка, не принадлежащая к F^*. Если точка $\xi\notin[0,1]$, то, очевидно, что она не является предельной точкой для F^*. Если же точка $\xi\in[0,1]$, но $\xi\notin F^*$, то тогда эта точка входит в один из смежных интервалов:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right),\quad \left(\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right),\quad \left(\frac{5}{6},\frac{6}{7}\right),\quad \ldots\quad ,\quad \left(\frac{2n+1}{2n+2},\frac{2n+2}{2n+3}\right),\quad \ldots\qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Однако любой из этих интервалов, содержа точку ξ и не содержа никакой точки множества F^*, является окрестностью точки ξ, не содержащей никакой точки множества F^*. Точка ξ, таким образом, не является предельной для множества F^* и, значит, включение $F^*\supset F^{*'}$ доказано. Рассмотренный пример позволяет легче понять проводимое ниже продолжение доказательства теоремы 1.26.

Пусть $x_0\in F$ не является правым концом никакого смежного интервала. Докажем непрерывность функции $\psi(x)$ в точке x_0 слева, для чего рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Возможны три случая:

1. Существует $n_0\in N$ такое, что при любом $n\geq n_0$ будет $x_n\in F$ (n_0 может быть равным единице), то есть все точки x_n, начиная с точки x_{n_0}, принадлежат множеству F.

2. Существует $n_1\in N$ такое, что при любом $n\geq n_1$ будет $x_n\notin F$ (n_1 может быть равным единице). В этом случае все точки x_n, начиная с точки x_{n_1}, принадлежат смежным интервалам.

3. Натуральных чисел n_0, n_1, о которых говорится в случаях 1, 2, не существует. В этом случае среди точек последовательности $\{x_n\}$ найдется бесконечное число точек, попавших в F, и бесконечное число точек, которые попали в смежные интервалы. Рассмотрим эти случаи:

1. Если $x_n \in F \quad (n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots)$, то

$$\psi(x_n) = \varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(x_0) = \psi(x_0).$$

2. Для уменьшения громоздкости дальнейших рассуждений обозначим: $x_{n_1} = x_1'$, $x_{n_1+1} = x_2'$, $x_{n_1+2} = x_3'$, … Тогда все точки $x_1', x_2', x_3', \ldots$ принадлежат смежным интервалам. Пусть точка x_1' находится в некотором смежном интервале (η_1, μ_1), причем $\mu_1 < x_0$ (x_0 не является правым концом смежного интервала). И пусть:

$$\eta_1 < x_k' < \mu_1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n_1^*), \qquad x'_{n_1^*+1} > \mu_1.$$

Тогда $x'_{n_1^*+1}$ попадает в другой смежный интервал (η_2, μ_2), причем $\mu_2 < x_0$. Пусть $\eta_2 < x_k' < \mu_2 \quad (k = n_1^*+1, n_1^*+2, \ldots, n_2)$, $x'_{n_2+1} > \mu_2$.

Продолжая процесс, приходим к последовательности:

$$(\eta_1, \mu_1), \quad (\eta_2, \mu_2), \quad (\eta_3, \mu_3), \ldots$$

смежных интервалов, расположенных в порядке возрастания номеров слева направо и таких, что

$$x_k' \in (\eta_i, \mu_i) \quad (k = n_{i-1}+1, \ldots, n_i), \quad (i = 3, 4, \ldots).$$

Неравенства $x'_{n_i} < \mu_i < x_0$ показывают, что $\mu_i \underset{i\to\infty}{\to} x_0$, а неравенства $\mu_{i-1} \le \eta_i < x_0$ – что $\eta_i \underset{i\to\infty}{\to} x_0$. Но $\eta_i \in F$, $\mu_i \in F$, поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \psi(\eta_i) = \lim_{i\to\infty} \psi(\mu_i) = \psi(x_0).$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n') = \psi(x_0)$, тогда $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n') = \psi(x_0)$, то есть $\psi(x)$ непрерывна в точке x_0.

3. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, соответствующая случаю три. Рассмотрим две её подпоследовательности: $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, первая из которых содержит все точки последовательности $\{x_n\}$, попавшие во множество F, а вторая – все точки $\{x_n\}$, попавшие в смежные интервалы (т.е. попавшие во множество G). Поскольку последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, то, как известно, любая её подпоследовательность также сходятся к этой точке. Таким образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n'' = x_0 \quad (x_n' \neq x_0, x_n'' \neq x_0).$$

Согласно доказательствам, проведённым выше, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \psi(x_n') = \psi(x_0), \quad \lim_{n\to\infty} \psi(x_n'') = \psi(x_0). \qquad (15)$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и воспользуемся эквивалентностью определений предела по Коши и по Гейне. Последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ являются произвольными последовательностями, сходящимися к точке x_0. Но тогда из равенств (15) следуют существования такого числа $\delta' > 0$, что выполняется неравенство $|\psi(x_0) - \psi(x)| < \varepsilon$ при условиях: $|x_0 - x| < \delta'$, $x \in F$, и такого числа $\delta'' > 0$, что выполняется то же самое неравенство $|\psi(x_0) - \psi(x)| < \varepsilon$ при условиях: $|x_0 - x| < \delta''$, $x \in G$. Любая точка сегмента $[\alpha, \beta]$ принадлежит либо множеству F, либо множеству G. Поэтому, при выполнении условия $|x_0 - x| < \delta$, где $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, неравенство $|\psi(x_0) - \psi(x)| < \varepsilon$ будет выполняться для любой точки $x \in [\alpha, \beta]$. Это значит, что функция $\psi(x)$ непрерывна в точке x_0.

Случай 3 полностью рассмотрен. Осталось заметить, что $\max|\psi(x)|$ достигается в точке, принадлежащей множеству F, так как на смежных интервалах функция $\psi(x)$ линейна. ◀

§ 3. Интеграл Лебега от ограниченных функций

1. Определение интеграла Лебега

Лемма 1.4. *Если непустое множество E действительных чисел ограничено сверху (снизу) конечным числом $K(k)$, то существует число $M \le K(m \ge k)$, являющееся точной верхней (точной нижней) гранью E, которое обозначают $M = \sup E (m = \inf E)$.*

Пусть на измеримом (по Лебегу) множестве E $(mE < \infty)$ задана измеримая ограниченная функция $f(x)$ и

$$A < f(x) < B. \qquad (16)$$

Разбиением Q ***сегмента*** $[A, B]$ назовем *множество точек* $y_0, y_1, ..., y_n$ таких, что:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 ... < y_n = B, \qquad (17)$$

и полученным полуинтервалам $[y_k, y_{k+1})$ поставим в соответствие измеримые попарно непересекающиеся множества:

$$e_k = E(y_k \le f < y_{k+1}) \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1 \text{ или } k = \overline{0,n-1}).$$

Введем в рассмотрение ***нижнюю и верхнюю интегральные суммы Лебег:*** $\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot me_k$, $\quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \cdot me_k$.

Замечая, что $E = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$, $mE = \sum_{k=0}^{n-1} me_k$ и полагая $\max\limits_{k=\overline{0,n-1}}(y_{k+1} - y_k) = \delta$, получаем:

$$0 \le \overline{S} - \underline{S} \le \delta \cdot mE. \tag{18}$$

Лемма 1.5. *Пусть некоторому разбиению* Q *сегмента* $[A,B]$ *отвечают суммы Лебега* $\underline{S}_0$ *и* $\overline{S}_0$. *Если к этому разбиению добавить новую точку* y' *и составить интегральные суммы Лебега* $\underline{S}_0{}'$ *и* $\overline{S}_0{}'$, *отвечающие новому разбиению, то будут справедливы неравенства:*

$$\underline{S}_0 \le \underline{S}_0{}', \qquad \overline{S}_0 \ge \overline{S}_0{}'$$

или, говоря другими словами, при добавлении к разбиению новых точек нижняя сумма не уменьшается, верхняя сумма не увеличивается.

▷ Пусть $y_j < y' < y_{j+1}$. Тогда при добавлении точки y' полуинтервал $[y_j, y_{j+1})$ заменяется двумя полуинтервалами $[y_j, y')$, $[y', y_{j+1})$, множество e_j разбивается на два множества:

$$e'_j = E(y_j \le f < y'), \qquad e''_j = E(y' \le f < y_{j+1}),$$

все остальные полуинтервалы $[y_k, y_{k+1})$ и множества e_k $(k \ne j)$ в новом разбиении остаются прежними.

Очевидно, что:

$$e_j = e'_j + e''_j, \quad e'_j e''_j = \emptyset, \quad me_j = me'_j + me''_j, \tag{19}$$

где $\emptyset$ – пустое множество и что нижняя сумма $\underline{S}_0{}'$ получается из нижней суммы $\underline{S}_0$ заменой слагаемого $y_j \cdot me_j$ суммой $y_j \cdot me'_j + y'_j \cdot me''_j$. В силу (19) и условия $y_j < y' < y_{j+1}$, получаем $\underline{S}_0 \le \underline{S}_0{}'$. Для верхних сумм рассуждения проводятся аналогично. ◀

Следствие 1.7. *Ни одна нижняя сумма* $\underline{S}$ *не больше ни одной верхней суммы* $\overline{S}$.

$\triangleright$ Рассмотрим два произвольных различных разбиения Q_1, Q_2 сегмента $[A,B]$. Пусть им отвечают соответственно нижние суммы $\underline{S}_1, \underline{S}_2$, верхние суммы $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ и пусть $Q_3 = Q_1 + Q_2$, причем для точек нового разбиения Q_3 введены новые обозначения в соответствии с (17). Если разбиению Q_3 отвечают интегральные суммы $\underline{S}_3$ и $\overline{S}_3$, то, в силу леммы 1.5, $\underline{S}_1 \le \underline{S}_3$, $\overline{S}_3 \le \overline{S}_2$ и, так как $\underline{S}_3 \le \overline{S}_3$, то $\underline{S}_1 \le \underline{S}_3 \le \overline{S}_3 \le \overline{S}_2$, то есть $\underline{S}_1 \le \overline{S}_2$. ◀

Лемма 1.6. *Пусть на измеримом множестве* E *задана измеримая ограниченная функция* $f(x)$ *и* $A < f(x) < B$. *Пусть* $\{Q\}$ *– множество всевозможных разбиений сегмента* $[A,B]$, *а* $\{\underline{S}\}$, $\{\overline{S}\}$ *– соответствующие множества нижних и верхних сумм Лебега и пусть* $U = \sup\{\underline{S}\}$, $V = \inf\{\overline{S}\}$. *Тогда справедливо равенство* $U = V$.

$\triangleright$ Выберем какую-либо произвольную верхнюю сумму $\overline{S}_0$ из множества $\{\overline{S}\}$. Так как для любой нижней суммы $\underline{S}$ из множества $\{\underline{S}\}$

$$\underline{S} \le \overline{S}_0,$$

то множество $\{\underline{S}\}$ всех нижних сумм Лебега оказывается ограниченным сверху. Пусть U есть его верхняя грань $U = \sup\{\underline{S}\}$. Тогда справедливо неравенство: $U \le \overline{S}_0$.

Так как $\overline{S}_0$ есть произвольная сумма из множества $\{\overline{S}\}$, то последнее неравенство говорит о том, что множество $\{\overline{S}\}$ всех верхних сумм Лебега ограничено снизу. Пусть V – его нижняя грань:

$$V = \inf\{\overline{S}\}.$$

Поскольку при любом разбиении Q сегмента $[A,B]$:

$$\underline{S} \le U \le V \le \overline{S}, \quad 0 \le \overline{S} - \underline{S} \le \delta \cdot mE, \tag{20}$$

то $0 \le V - U \le \overline{S} - \underline{S} \le \delta \cdot mE$. Т. к. $\lim\limits_{\delta \to 0}(\delta \cdot mE) = 0$ (δ можно брать произвольным сколь угодно малым числом), то из последних неравенств получаем, что $V - U = 0$, $V = U$. ◀

Общее значение *чисел* U *и* V *из леммы 1.6 называется* ***интегралом Лебега*** *измеримой ограниченной функции* $f(x)$ *по множеству* E *и обозначается:*

$$\int\limits_E f(x)dx.$$

В частности, если $E = [a,b]$, используется обозначение $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом, любая ***измеримая ограниченная функция, интегрируема по Лебегу.***

Теорема 1.27. *Если* $\delta \to 0$, *где* $\delta = \max\limits_{k=0,n-1}(y_{k+1} - y_k)$, *то суммы Лебега* $\underline{S}$ *и* $\overline{S}$ *стремятся к интегралу* $\int\limits_E f(x)dx$.

$\triangleright$ Из (20) следует $\underline{S} \le \int\limits_E f(x)dx \le \overline{S}$, а из (18) следует $0 \le \overline{S} - \underline{S} \le \delta \cdot mE$, откуда и получаем утверждение теоремы. ◀

2. Некоторые свойства интеграла Лебега

Теорема 1.28. *Если измеримая ограниченная функция* $f(x)$ *на измеримом множестве* E *удовлетворяет двойному неравенству:*

$$a \le f(x) \le b, \text{ то } \quad a \cdot mE \le \int\limits_E f(x)dx \le b \cdot mE.$$

$\triangleright$ Пусть n – произвольное натуральное число, $A = a - \frac{1}{n}$, $B = b + \frac{1}{n}$, тогда $A < f(x) < B$. Если $A \le y_k \le B$ (см. (16) – (18)), то:

$$A\sum_{k=0}^{n-1} me_k \le \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot me_k \le B\sum_{k=0}^{n-1} me_k$$

или, что то же самое:

$$A \cdot mE \le \underline{S} \le B \cdot mE,$$

или

$$\left(a - \frac{1}{n}\right) \cdot mE \le \underline{S} \le \left(b + \frac{1}{n}\right) \cdot mE.$$

Устремляя n к $+\infty$, а затем – δ к нулю, завершаем доказательство.◀

Следствие 1.8. *Если в условиях теоремы 1.28* $a = 0$, *т.е.* $f(x) \ge 0$, *то левая часть неравенства из этой теоремы приобретает вид:*

$$\int\limits_E f(x)dx \ge 0,$$

другими словами, интеграл Лебега неотрицательной функции является неотрицательным.

Теорема 1.29. *Если на измеримом множестве* E *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *измеримы и ограничены и, кроме того, на этом множестве* $f(x) \le g(x)$, *то:*

$$\int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E g(x)dx.$$

$\triangleright$ Замечаем, что $g(x) - f(x) \ge 0$. Потому, в силу следствия из предыдущей теоремы, будет:

$$\int\limits_E (g - f)dx \ge 0.$$

Остается заметить, что:

$$\int_E gdx - \int_E fdx = \int_E (g-f)dx. \tag{21}$$

Простое доказательство равенства (21) опускаем. ◄

З а м е ч а н и е 1.3. Если функция f интегрируема по Лебегу на множестве E, то она будет обладать этим свойством, если ее заменить равной ей почти всюду на множестве E функцией $\tilde{f}$. При этом:

$$\int_E fdx = \int_E \tilde{f}dx.$$

Функцию $\tilde{f}$ называют функцией, ***эквивалентной*** f. Другими словами, последнее интегральное равенство остается справедливым, если функцию f видоизменять любым образом на множестве меры нуль (имеется в виду мера Лебега).

3. Сходимость по мере

Пусть *на измеримом множестве* E *задана последовательность измеримых и почти всюду конечных функций* $\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ *и измеримая и почти всюду конечная функция* $f(x)$. ***Если для любого положительного числа*** σ *справедливо равенство:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[mE\left(|f_n - f| \ge \sigma\right)\right] = 0,$$

то говорят, что ***заданная последовательность*** $\{f_n(x)\}$ ***сходится к функции*** $f(x)$ ***по мере.***

Сходимость по мере будем обозначать так:

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{m} f(x) \quad \text{или} \quad f_n(x) \xrightarrow{m} f(x).$$

Теорема 1.30 (теорема Лебега 1). *Пусть на измеримом множестве* E *задана последовательность измеримых и почти всюду конечных функций* $\{f_n(x)\}$ $(n = 1,2,3,...)$, *которая почти всюду на множестве* E *сходится к измеримой и почти всюду конечной функции* $f(x)$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

для почти всех точек $x \in E$. *Тогда эта последовательность сходится к той же предельной функции и по мере* (см. определение понятия «почти всюду» в § 2).

▷ Положим $A = E\left(|f| = +\infty\right)$, $A_n = E\left(|f_n| = +\infty\right)$, $B = E\left(f_n \xrightarrow{not} f\right)$,

$$Q = A + \sum_{k=1}^{\infty} A_k + B$$

(запись $B = E\left(f_n \xrightarrow{not} f\right)$ означает, что на множестве B последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится к функции $f(x)$).

Из условий теоремы получаем:

$$mQ = 0. \tag{22}$$

Пусть $E_n(\sigma) = E\left(|f_n - f| \ge \sigma\right)$, $R_n(\sigma) = \sum_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma)$,

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} R_k(\sigma) \quad (\sigma > 0).$$

Все эти множества измеримы. Так как $R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$, то, по теореме 1.14, следствие 1.5 будет:

$$mR_n(\sigma) \underset{n\to\infty}{\to} mM. \tag{23}$$

Если $x_0 \notin Q$, то $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, причём все числа $f_1(x_0)$, $f_2(x_0), \ldots$ и их предел $f(x_0)$ – конечны. Значит, существует $n_0 = n_0(\sigma)$, что для любого $n \ge n_0$ будет $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \sigma$. Другими словами, $x_0 \notin E_k(\sigma)$ $(k \ge n_0)$, а потому $x_0 \notin R_n(\sigma)$ $(n \ge n_0)$ и тем более $x_0 \notin M$, откуда следует, что $M \subset Q$. Тогда, в силу (22), $mM = 0$ и (23) принимает вид:

$$mR_n(\sigma) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Теорема доказана, так как $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$. ◀

З а м е ч а н и е 1.4. Понятие сходимости по мере существенно более общее, чем понятие сходимости почти всюду (и тем более, чем понятие сходимости всюду) (теорема 1.30) . Эта теорема является необратимой. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 1.31 (теорема Рисса 1). *Пусть функции последовательности $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ есть измеримые функции, заданные на измеримом множестве E. Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ по мере, то существует подпоследовательность:*

$$\left\{f_{n_k}(x)\right\} = f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots \quad (n_1 < n_2 < \ldots)$$

заданной последовательности, которая сходится к функции $f(x)$ почти всюду на множестве E.

$\triangleright$ Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\sigma_n\}$ таких, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, и сходящийся ряд с положительными элементами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \quad (\eta_k > 0).$$

Обозначим через n_1 натуральное число, для которого

$$mE\left(\left| f_{n_1} - f \right| \geq \sigma_1\right) < \eta_1.$$

Заметим, что такое число n_1 существует, так как

$$mE\left(\left| f_n - f \right| \geq \sigma_1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Обозначим через n_2 натуральное число, для которого

$$mE\left(\left| f_{n_2} - f \right| \geq \sigma_2\right) < \eta_2 \qquad (n_2 > n_1).$$

Продолжая процесс, обозначим через n_m натуральное число, для которого:

$$mE\left(\left| f_{n_m} - f \right| \geq \sigma_m\right) < \eta_m \qquad (n_m > n_{m-1}),$$

и так далее. Получаем последовательность:

$$\{n_k\} = n_1, n_2, n_3, \ldots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$$

и соответствующую ей последовательность:

$$\left\{f_{n_k}(x)\right\} = f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots \quad (n_1 < n_2 < \ldots).$$

Теперь покажем, что последняя последовательность и является искомой, т. е. покажем, что почти всюду на множестве E будет выполняться равенство:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x). \tag{24}$$

Пусть

$$R_j = \sum_{k=j}^{\infty} E(\left| f_{n_k} - f \right| \geq \sigma_k), \quad Q = \prod_{j=1}^{\infty} R_j.$$

Так как $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$, то (теорема 1.14, следствие 1.5):

$$mR_j \underset{j\to\infty}{\to} mQ.$$

С другой стороны, $mR_j < \sum\limits_{k=j}^{\infty} \eta_k$, откуда следует, что $mR_j \underset{j\to\infty}{\to} 0$ и отсюда

$$mQ = 0.$$

Пусть теперь $x_0 \in E - Q$, тогда $x_0 \notin R_j$, начиная с некоторого значения j_0, то есть при значениях j, равных $j = j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \ldots$. Иначе говоря, при условии $k \geq j_0$:

$$x_0 \notin E\left(\left| f_{n_k} - f \right| \geq \sigma_k\right), \qquad \text{т. е.} \quad \left| f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \right| < \sigma_k.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при условии $k \ge n_0$ $(k \ge j_0)$ будет $\sigma_k < \varepsilon$, то есть для точки $x_0 \in E - Q$ выполняется равенство (24). Поскольку x_0 – произвольная точка множества $E - Q$, то теорема доказана. ◀

4. Переход к пределу под знаком интеграла

Теорема 1.32 (теорема Лебега 2). *Пусть на измеримом множестве* E *задана последовательность* $\{f_n(x)\}$ $(n = 1,2,3,...)$ *измеримых ограниченных функций, сходящаяся по мере к измеримой ограниченной функции* $f(x)$, *т. е.* $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$. *Если существует константа* $K > 0$ *такая, что при всех натуральных* n *и всех* $x \in E$ $|f_n(x)| < K$, *то:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx, \tag{25}$$

где $\int_E g(x)dx$ *– интеграл Лебега от функции* $g(x)$ *по множеству* E.

▷ Пусть $\{f_{n_k}(x)\}$ – подпоследовательность последовательности $\{f_n(x)\}$, которая сходится к функции $f(x)$ почти всюду на множестве E (в силу теоремы Рисса 1 такая подпоследовательность существует). Переходя к пределу при стремлении $k \to \infty$ в неравенстве $|f_{n_k}(x)| < K$ во всех точках $x \in E$, для которых $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ (т.е. почти во всех точках x множества E), получим $|f(x)| \le K$. Пусть σ – произвольное положительное число. Введем обозначения: $A_n(\sigma) = E(|f_n - f| \ge \sigma)$, $B_n(\sigma) = E(|f_n - f| < \sigma)$. Тогда

$$\left|\int_E f_n dx - \int_E f dx\right| = \left|\int_E (f_n - f)dx\right| \le \int_E |f_n - f|dx = \int_{A_n(\sigma)} |f_n - f|dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n - f|dx.$$

В силу неравенства $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)|$, почти для всех $x \in A_n(\sigma)$ будет:

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| < 2K$$

и по теореме 1.28 (эту теорему называют теоремой о среднем):

$$\int_{A_n(\sigma)} |f_n - f|dx \le 2K \cdot mA_n(\sigma). \tag{26}$$

Неравенство $|f_n(x) - f(x)| < 2K$ может не выполняться на множестве меры нуль. Оценки (26) остаётся справедливой (замечание 1.3).

По теореме о среднем получаем и другое неравенство:

$$\int\limits_{B_n(\sigma)} |f_n - f| dx \le \sigma \cdot mB_n(\sigma) \le \sigma \cdot mE .$$

Учитывая последнее неравенство и неравенство (26), приходим к неравенству:

$$\left| \int\limits_E f_n dx - \int\limits_E f dx \right| \le 2K \cdot mA_n(\sigma) + \sigma \cdot mE . \qquad (27)$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$, найдем и зафиксируем такое малое $\sigma > 0$, для которого $\sigma \cdot mE < \frac{\varepsilon}{2}$ (последнее возможно, поскольку σ – произвольное положительное число). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} mA_n(\sigma) = 0$ (определение сходимости по мере), то существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при условии $n > n_0$ будет $mA_n(\sigma) < \frac{\varepsilon}{4K}$. Но тогда (при условии $n > n_0$) неравенство (27) примет вид:

$$\left| \int\limits_E f_n dx - \int\limits_E f dx \right| \le 2K \cdot mA_n(\sigma) + \sigma \cdot mE < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

что означает:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x) dx = \int\limits_E f(x) dx . \quad \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е 1.5. Последняя теорема остается справедливой и в том случае, когда неравенство $|f_n(x)| < K$ выполняется только почти всюду на множестве E. Она и подавно сохраняет силу, если в её условии требование сходимости по мере заменить требованием сходимости почти всюду (и тем более сходимости всюду (замечание 1.4)). Поэтому, если в условии теоремы требование $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$ заменить требованием $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ почти во всех точках $x \in E$, то с учетом (25) и замечания 1.3 получим:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x) dx = \int\limits_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx . \qquad (28)$$

5. Верхний предел последовательности

До введения понятия верхнего предела сформулируем необходимые для этого теоремы, а докажем только одну из них.

Теорема 1.33 (теорема Кантора или принцип вложенных отрезков). *Всякая последовательность вложенных стягивающихся* *отрезков имеет единственную точку, принадлежащую всем отрезкам.*

Теорема 1.34 (теорема Больцано-Вейерштрасса). *Всякая ограниченная последовательность точек имеет, по крайней мере, одну предельную точку.*

Теоремой Больцано-Вейерштрасса называют и следующую теорему: *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому конечному числу.*

Последняя сформулированная теорема и теорема 1.34 существенно не отличаются.

Рассмотрим ограниченную последовательность вещественных неотрицательных чисел $\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Ей соответствует ограниченная последовательность точек, которая, по теореме 1.34, имеет хотя бы одну предельную точку (то есть соответствующая последовательность чисел имеет хотя бы одно предельное число). Если предельных точек больше одной, но их конечное число, то среди них имеется одна точка, лежащая правее всех остальных. В случае бесконечного числа предельных точек справедлива следующая теорема.

Теорема 1.35. *Если ограниченная последовательность действительных неотрицательных чисел имеет бесконечное число предельных чисел (предельных точек), то среди этих предельных точек существует точка, лежащая правее всех остальных, то есть* ***«самая правая» предельная точка.***

$\triangleright$ Пусть есть ограниченная последовательность вещественных неотрицательных чисел:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ... \quad (a_n \le A) \ , \tag{29}$$

т. е. все точки, изображающие числа (29), лежат на конечном отрезке $[0, A]$. Пусть E есть бесконечное множество всех предельных точек последовательности (29). Покажем, что среди точек множества E существует точка, лежащая правее всех остальных точек этого множества.

Введем обозначения: $[0, A] = OA = I_1$, A_1 – середина отрезка I_1. Существует две возможности для расположения точек последовательности (29): либо отрезок A_1A содержит бесконечное множество точек данной последовательности, либо нет. В первом случае в качестве отрезка I_2 возьмем A_1A, во втором случае – OA_1. Отрезок I_2

содержит бесконечное множество точек данной последовательности. Пусть A_2 – середина отрезка I_2. В качестве отрезка I_3 берем правую половину отрезка I_2 в том случае, если она содержит бесконечное множество точек последовательности (29), и берем левую половину I_2 в противном случае. Продолжая этот процесс неограниченно, получим бесконечную последовательность вложенных стягивающихся отрезков $I_1, I_2, ..., I_n, ...,$ то есть таких, что $I_{n+1} \subset I_n$ при любом $n \in N$, и таких, что $дл.I_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Здесь $дл.I_n$ обозначает длину n-го отрезка.

Отметим, что любой отрезок I_n содержит бесконечное множество точек данной последовательности и что правее от отрезка I_n при любом $n \in N$ не может быть предельной точки последовательности (29) (левая половина произвольного отрезка I_n выбиралась только в том случае, когда его правая половина содержала конечное число таких точек или совсем их не содержала). Согласно принципу вложенных отрезков (теорема 1.33) существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам I_n. Обозначим эту точку A^* и докажем, что точка A^* есть самая правая предельная точка рассматриваемой нами последовательности. Для этого покажем, во-первых, что A^* – предельная точка этой последовательности, и, во-вторых, что никакая точка, лежащая правее точки A^*, не может быть предельной точкой этой последовательности.

Пусть есть произвольная окрестность (α, β) точки A^*. Так как любой отрезок I_n содержит эту точку и $дл.I_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то при достаточно большом значении n будет справедливо включение $I_n \subset (\alpha, \beta)$. Но поскольку любой отрезок I_n содержит бесконечное число точек последовательности (29), то бесконечное их число попадет и в произвольный интервал (α, β), содержащий точку A^*. Таким образом, точка A^* является предельной для последовательности (29).

Допустим теперь, что существует точка $A' \in I_1$, которая лежит правее точки A^*, то есть соответствующие этим точкам числа связаны неравенством $A^* < A'$, и точка A' является предельной для последовательности (29). Точка и соответствующее ей действительное число не различаются и обозначаются одинаково. Так как точка A^* является единственной точкой, принадлежащей всем отрезкам I_n, то существует натуральное число n_0 такое, что точка $A' \in I_{n_0}$ и $A' \notin I_{n_0+1}$. Точка же $A^* \in I_{n_0+1}$. Отсюда следует, что эти две точки лежат в разных половинах отрезка I_{n_0} (см. процесс получения отрезков I_n). Из неравенства $A^* < A'$ вытекает, что точка A^* лежит в левой половине отрезка I_{n_0}, а точка A' – в его правой половине. Так как $A' \notin I_{n_0+1}$, то в качестве отрезка I_{n_0+1} была выбрана левая половина отрезка I_{n_0}, которая выбиралась только в том случае, если в правой половине этого отрезка содержится лишь конечное число точек последовательности (29) или там вообще не содержится точек этой последовательности. Заметим еще, что точка A' не совпадает и с точкой A_{n_0}, где A_{n_0} – середина отрезка I_{n_0}. Из сказанного следует, так как $дл.I_{n_0+1} \neq 0$, что существует окрестность точки A', в которой содержится не более чем конечное число точек рассматриваемой последовательности. Это противоречит предположению о том, что точка A' является предельной для этой последовательности. Полученное противоречие доказывает, что самой правой предельной точкой является точка A^*. ◀

Из теоремы 1.35 вытекает, что ограниченная последовательность действительных неотрицательных чисел всегда имеет «самое правое» предельное число (это число соответствует «самой правой» предельной точке).

Верхним* (*наибольшим*) *пределом *ограниченной последовательности действительных неотрицательных чисел называют* ***число****, соответствующее «самой правой» её предельной точке.*

Это число обозначают $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim} a_n$.

§ 4. Интеграл Лебега от неограниченных функций

1. Интеграл Лебега от неотрицательных функций

В § 3 рассматривались ограниченные функции, т. е. функции, которые удовлетворяют неравенству $|f(x)| \le K$, всюду или почти всюду на множестве E), и было дано определение верхнего предела опять же ограниченной последовательности неотрицательных чисел. В этом параграфе будем рассматривать неограниченные функции, которые в п.1 будут неотрицательными. Начнем с определения верхнего предела и интеграла Лебега от таких функций.

Пусть есть неограниченная последовательность действительных неотрицательных чисел. В этом случае условимся говорить, *что* ***верхний (наибольший) предел*** *этой последовательности равен* $+\infty$.

Пусть функция $f(x)$ измерима и неотрицательна на измеримом множестве E, а N – натуральное число.

Функция $[f(x)]_N = [f]_N$, *которая определяется следующим образом:*

$$[f]_N = \begin{cases} f, f \le N, \\ N, f > N, \end{cases}$$

называется ***срезом функции*** f (***числом*** N) *или, другими словами,* ***срезанной функцией.***

Очевидно, что срезанная функция $[f]_N$ также измерима. Поскольку она ограничена, то она интегрируема по Лебегу. Так как:

$$[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le \dots ,$$

то:

$$\int_E [f]_1 dx \le \int_E [f]_2 dx \le \int_E [f]_3 dx \le \dots,$$

и существует предел (конечный или бесконечный):

$$\int_E f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_E [f(x)]_N dx . \qquad (30)$$

Предел *(30) называется* ***интегралом Лебега*** *функции* $f(x)$ *по множеству* E. ***Если*** *этот* ***предел конечен,*** *то функция* $f(x)$ *называется* ***интегрируемой по Лебегу, или суммируемой,*** *на множестве* E.

Таким образом, мы рассматриваем интеграл (30) для любой измеримой неотрицательной функции, но суммируемой называем только ту функцию, для которой предел (30) конечен. В случае, когда $E = [a,b]$, для интеграла (30) употребляем обозначение:

$$\int_E f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Нетрудно видеть, что для ограниченной (измеримой и неотрицательной) функции $f(x)$ новое определение интеграла совпадает с определением, данным ранее, так как при достаточно больших значениях N будет:

$$[f(x)]_N \equiv f(x) .$$

Поэтому всякая ограниченная (измеримая и неотрицательная) функция суммируема.

Лемма 1.7. *Если в точке* x_0 *выполняется равенство:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) ,$$

то при любом натуральном N

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_0)]_N = [f(x_0)]_N .$$

$\triangleright$ а) $f(x_0) < N$. Тогда при достаточно больших натуральных числах n выполняется неравенство $f_n(x_0) < N$. Отсюда следует, что:

$$[f_n(x_0)]_N = f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0) = [f(x_0)]_N .$$

б) $f(x_0) = N$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = N$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при любом $n \ge n_0$ будет $f_n(x_0) > N - \varepsilon$ и, значит,

$$N - \varepsilon < [f_n(x_0)]_N \le N \qquad (n \ge n_0).$$

Отсюда следует (если $f(x_0) = N$, то $[f(x_0)]_N = f(x_0)$), что и

$$[f(x_0)]_N - \varepsilon < [f_n(x_0)]_N < [f(x_0)]_N + \varepsilon, \text{ т. е.}$$

$$\left|[f_n(x_0)]_N - [f(x_0)]_N\right| < \varepsilon .$$

в) $f(x_0) > N$. Тогда для достаточно больших натуральных чисел n будет $f_n(x_0) > N$. Отсюда (для этих n):

$$[f_n(x_0)]_N = N = [f(x_0)]_N . \blacktriangleleft$$

Лемма 1.8 (неравенство Фату). *Если последовательность измеримых и неотрицательных функций* $\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \ldots$ *почти всюду на множестве* E *сходится к функции* $f(x)$, *то:*

$$\int_E f(x)dx \le \sup\left\{\int_E f_n(x)dx\right\} \qquad \left(\int_E f(x)dx \le \overline{\lim}\int_E f_n(x)dx\right). \tag{31}$$

$\triangleright$ В силу леммы 1.7, почти всюду на множестве E будет:

$$[f_n(x)]_N \underset{n\to\infty}{\to} [f(x)]_N .$$

Поскольку каждая из функций $\left|[f_n(x)]_N\right|$ ограничена числом N, можно применить теорему 1.32 (теорема Лебега 2 о предельном переходе под знаком интеграла). Получим:

$$\int_E [f]_N\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_E [f_n]_N\, dx .$$

Так как при любом n :

$$\int_E [f_n]_N\, dx \le \int_E f_n dx \le \sup\left\{\int_E f_n(x)dx\right\},$$

то и $\int_E [f]_N\, dx \le \sup\left\{\int_E f_n(x)dx\right\}$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при стремлении $N \to \infty$, получаем (31). $\blacktriangleleft$

В частности, если все функции $f_n(x)$ суммируемы и

$$\int_E f_n(x)dx \le A < +\infty,$$

то суммируема и предельная функция $f(x)$.

Следствие 1.9. Если при выполнении условий леммы существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx, \tag{32}$$

то:

$$\int_E f(x)dx \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx. \tag{33}$$

▷ Если предел (32) равен $+\infty$, то утверждение тривиально. Допустим, что этот предел конечен:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = L < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_0, что при любом $n \ge n_0$:

$$\int_E f_n dx < L + \varepsilon.$$

Применив лемму 1.8 к последовательности функций $f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), \ldots$,

получим, что $\int_E f dx \le L + \varepsilon$, откуда и следует (33). ◀

Из теоремы 1.35 вытекает, что ограниченная последовательность действительных неотрицательных чисел всегда имеет «самое правое» предельное число (это число соответствует «самой правой» предельной точке).

Следствие 1.10. *Поскольку верхний предел* $\overline{\lim}\int_E f_n(x)dx$ *всегда существует* (*определения 1.34, 1.35*)*, то при выполнении условий леммы 1.8 будет:*

$$\int_E f(x)dx \le \overline{\lim}\int_E f_n(x)dx$$

(интегралы $\int_E f_n(x)dx \ge 0$, следствие 1.8).

Теорема 1.36. *Пусть* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *есть измеримые неотрицательные функции, заданные на множестве* E. *Если* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *то:*

$$\int_E f(x)dx = \int_E f_1(x)dx + \int_E f_2(x)dx.$$

▷ Из $[f_1(x)]_N + [f_2(x)]_N \le f(x) \quad \Rightarrow$

$$\int_E [f_1]_N dx + \int_E [f_2]_N dx \le \int_E f dx .$$

Переходя к пределу при стремлении $N \to \infty$, получаем:

$$\int_E f_1 dx + \int_E f_2 dx \le \int_E f dx . \qquad (34)$$

Для доказательства обратного неравенства возьмем произвольную точку $x_0 \in E$. Если $f_1(x_0) \le N$ и $f_2(x_0) \le N$, то:

$$[f(x_0)]_N \le f(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = [f_1(x_0)]_N + [f_2(x_0)]_N .$$

Если же хотя бы одно из чисел $f_1(x_0)$ или $f_2(x_0)$ больше, чем N, то

$$[f(x_0)]_N = N \le [f_1(x_0)]_N + [f_2(x_0)]_N$$

Так как в обоих случаях получено неравенство одного и того же знака и точка $x_0 \in E$ является произвольной, то доказано неравенство:

$$[f(x)]_N \le [f_1(x)]_N + [f_2(x)]_N$$

откуда находим:

$$\int_E [f(x)]_N dx \le \int_E [f_1(x)]_N dx + \int_E [f_2(x)]_N dx$$

И тогда:

$$\int_E [f]_N dx \le \int_E f_1 dx + \int_E f_2 dx$$

Устремив N к бесконечности, в пределе получим:

$$\int_E f dx \le \int_E f_1 dx + \int_E f_2 dx . \qquad (35)$$

Из (34) и (35) следует утверждение теоремы. ◀

Теорема 1.37. *Пусть на множестве* E *задана возрастающая последовательность измеримых неотрицательных функций:*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots .$$

Если $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *то* $\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$.

▷ Отметим, что предел $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$ существует и (следствие 1.9):

$$\int_E f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx .$$

С другой стороны, при любом n будет $f_n(x) \le f(x)$, откуда: $\int_E f_n(x)dx \le \int_E f(x)dx$. Значит, $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx \le \int_E f(x)dx$. ◀

Теорема 1.38. *Пусть на множестве* E *задана последовательность измеримых неотрицательных функций* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \ldots$.

Если $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$, *то:*

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

$\triangleright$ Полагаем $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ и применяем теорему 1.37. $\blacktriangleleft$

Следствие 1.11. *Если при выполнении условий теоремы 1.38 выполняется еще и неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx < +\infty,$$

то почти всюду на множестве E *будет* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

$\triangleright$ В рассматриваемом случае функция $f(x)$ суммируема и, значит, почти всюду конечна. Действительно, предположим, что это не так, и обозначим $A = E(f = +\infty)$.

На множестве A функция $[f(x)]_N = N$ и поэтому:

$$\int_E [f]_N\, dx \geq \int_A [f]_N\, dx = N \cdot mA.$$

При нашем предположении $mA > 0$ и $\int_E [f]_N\, dx \underset{N\to\infty}{\to} +\infty$. Но неограниченное возрастание интеграла $\int_E [f]_N\, dx$ противоречит суммируемости функции $f(x)$. Полученное противоречие показывает, что $f(x)$ почти всюду есть конечная функция. Но тогда, в силу равенства $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится почти всюду, а в точках сходимости этого ряда: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. $\blacktriangleleft$

Теорема 1.39 (полная суммируемость (полное аддитивное свойство) интеграла). *Пусть измеримое множество* E *является суммой конечного или счетного числа попарно не пересекающихся измеримых множеств* E_k*:*

$$E = \sum_k E_k \qquad (E_k \cap E_j = \varnothing, \quad k \neq j).$$

Тогда для всякой измеримой неотрицательной функции $f(x)$, *заданной на множестве* E, *будет:*

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx.$$

$\triangleright$ Введем функции $f_k(x)$ $(k = 1,2,3,...)$, полагая:

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x), x\in E_k \\ 0, x\in E-E_k \end{cases}.$$

Тогда: $f(x)=\sum\limits_k f_k(x)$ и отсюда, в силу теоремы 1.36, если число слагаемых конечно, и теоремы 1.38, если их число счетно:

$$\int\limits_E f(x)dx=\sum\limits_k \int\limits_E f_k(x)dx \qquad (36)$$

Так как:

$$[f_k(x)]_N=\begin{cases} [f(x)]_N, x\in E_k \\ 0, x\in E-E_k \end{cases},$$

то $\int\limits_E [f_k]_N\,dx=\int\limits_{E_k}[f]_N\,dx$ и в пределе (при стремлении $N\to\infty$):

$$\int\limits_E f_k dx=\int\limits_{E_k} fdx\,.$$

Последнее равенство, в силу (36), и доказывает теорему. ◄

2. Интеграл Лебега от функций любого знака

Распространим определение интеграла Лебега на неограниченные функции любого знака, для чего рассмотрим измеримую функцию $f(x)$, заданную на множестве E. Далее полагаем:

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), f(x)\ge 0, \\ 0, f(x)<0; \end{cases} \qquad f^-(x)=\begin{cases} 0, f(x)\ge 0, \\ -f(x), f(x)<0. \end{cases}$$

Легко заметить, что

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x)\,.$$

Если *хотя бы одна из функций* $f^+(x)$ *или* $f^-(x)$ ***суммируема на множестве*** E, *то (конечная или бесконечная) разность:*

$$\int\limits_E f^+(x)dx-\int\limits_E f^-(x)dx$$

называется ***интегралом Лебега от функции*** $f(x)$ ***по множеству*** E *и обозначается:*

$$\int\limits_E f(x)dx\,, \qquad (37)$$

то есть:

$$\int\limits_E f(x)dx=\int\limits_E f^+(x)dx-\int\limits_E f^-(x)dx\,.$$

Очевидно, для того чтобы интеграл Лебега существовал и был конечен, необходимо и достаточно, чтобы обе функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ были суммируемы.

Функцию $f(x)$ *называем* ***интегрируемой по Лебегу (суммируемой) на множестве*** E***,*** *если интеграл (37) существует и конечен.*

Лемма 1.9. *Если функция* $f(x)$ *суммируема на множестве* E*, то суммируема и функция* $-f(x)$ *на этом же множестве, и справедливо равенство:*

$$\int_E (-f(x))dx = -\int_E f(x)dx \ .$$

▷ Очевидно, что $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$, откуда:

$$\int_E - f(x)dx = \int_E f^-(x)dx - \int_E f^+(x)dx = -\int_E f(x)dx \ . \quad ◀$$

Теорема 1.40. *Для того чтобы измеримая функция* $f(x)$ *была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы суммируемой была функция* $|f(x)|$. *Если функция* $f(x)$ *суммируема, то* $\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx$

▷ $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. В силу 1.36, $\int_E |f(x)|dx = \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx$. ◀

Лемма 1.10. *Если каждая из функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *суммируема на множестве* E *и* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$*, то суммируема и функция* $f(x)$.

▷ Суммируемость функции $f(x)$ следует из неравенства

$$|f(x)| \le |f_1(x)| + |f_2(x)|$$

и теоремы 1.36. ◀

Теорема 1.41 (конечная суммируемость (конечное аддитивное свойство) интеграла**).** *Пусть множество* E *есть сумма конечного числа попарно не пересекающихся измеримых множеств:*

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k \qquad (E_k \cap E_j = \varnothing, \ \ k \ne j).$$

Если функция $f(x)$ *суммируема на каждом из множеств* E_k*, то она суммируема и на множестве* E *и*

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx \ .$$

▷ Доказательство следует из теоремы 1.39, примененной к функциям $f^+(x)$ и $f^-(x)$. ◀

Теорема 1.42 (теорема об абсолютной непрерывности интеграла). *Пусть функция* $f(x)$ *суммируема на множестве* E. *Тогда любому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$*, что для любого измеримого множества* $E_0 \subset E$ *с мерой* $mE_0 < \delta$ *будет:*

$$\left|\int_{E_0} f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

$\triangleright$ Мы знаем, что одновременно с функцией $f(x)$ суммируема и ее абсолютная величина $|f(x)|$. На основании определения интеграла от неотрицательной функции, существует такое N_0, что:

$$\int_E |f(x)|dx - \int_E [\![f(x)]\!]_{N_0} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2N_0}$. Так как функция $|f(x)| - [\![f(x)]\!]_{N_0}$ не отрицательна на множестве E, то, какое бы измеримое подмножество E_0 множества E ни взять, будет: $\int_{E_0} \left\{ f(x)| - [\![f(x)]\!]_{N_0} \right\} dx \le \int_E \left\{ f(x)| - [\![f(x)]\!]_{N_0} \right\} dx$,

Откуда: $\int_{E_0} |f(x)|dx - \int_{E_0} [\![f(x)]\!]_{N_0} dx < \frac{\varepsilon}{2}$.

Значит,

$$\int_{E_0} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_{E_0} [\![f(x)]\!]_{N_0} dx .$$

Так как: $[\![f(x)]\!]_{N_0} \le N_0$, то $\int_{E_0} [\![f(x)]\!]_{N_0} dx \le N_0 \cdot mE_0$

и, следовательно,

$$\int_{E_0} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \cdot mE_0$$

При условии $mE_0 < \delta$ будет:

$$\int_{E_0} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_0} = \varepsilon \quad \text{и тем более} \quad \left|\int_{E_0} f(x)dx\right| < \varepsilon . \quad \blacktriangleleft$$

Свойство *интеграла Лебега, выражаемое теоремой* 1.42*, называют* ***абсолютной непрерывностью интеграла.***

Следующая теорема обобщает теорему 1.32.

Теорема 1.43 (теорема Лебега 3 о предельном переходе под знаком интеграла). *Пусть на измеримом множестве* E *задана последовательность* $\{f_n(x)\}$ $(n = 1,2,3,...)$ *измеримых функций, сходящаяся по мере к измеримой функции* $f(x)$:

$$f_n(x) \xrightarrow{m} f(x) .$$

Если существует такая суммируемая функция $\Phi(x)$*, что при всех натуральных* n *и при всех* $x \in E$*:*

$$|f_n(x)| \le \Phi(x) , \tag{38}$$

то:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

$\triangleright$ Каждая из функций $f_n(x)$ измерима (по условию) и суммируема (условие (38)). Так как $f_n(x)\xrightarrow{m}F(x)$, то, пользуясь теоремой Рисса, из последовательности $\{f_n(x)\}$ можем выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к функции $f(x)$ почти всюду, и перейти к пределу в неравенстве $|f_{n_k}(x)|\le\Phi(x)$.

Получим неравенство:

$$|f(x)|\le\Phi(x). \tag{39}$$

Оно выполняется почти для всех $x\in E$. Изменив, в случае необходимости, значения функции $f(x)$ на множестве меры нуль, добьемся выполнения неравенства (39) в каждой точке множества E и суммируемости функции $f(x)$.

Выберем произвольное число $\sigma>0$ и положим:

$$A_n(\sigma)=E(|f_n-f|\ge\sigma)\ ;\qquad B_n(\sigma)=E(|f_n-f|<\sigma).$$

Тогда:

$$E=A_n(\sigma)+B_n(\sigma),\qquad A_n(\sigma)\cdot B_n(\sigma)=\varnothing,\qquad mA_n(\sigma)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

и отсюда:

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E f dx\right|\le\int_E|f_n-f|dx=\int_{A_n(\sigma)}|f_n-f|dx+\int_{B_n(\sigma)}|f_n-f|dx,$$

причем:

$$\int_{B_n(\sigma)}|f_n-f|dx\le\sigma\cdot mB_n(\sigma)\le\sigma\cdot mE.$$

Так как $|f_n-f|\le 2\Phi(x)$, то $\int_{A_n(\sigma)}|f_n-f|dx\le 2\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx$

и получаем неравенство:

$$\left|\int_E f_n dx-\int_E f dx\right|\le 2\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx+\sigma\cdot mE\ . \tag{40}$$

Пусть $\varepsilon>0$. Зафиксируем такое малое $\sigma>0$, что:

$$\sigma\cdot mE<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла от функции $\Phi(x)$, найдём такое $\delta>0$, что для всякого измеримого множества $E_0\subset E$ с мерой $mE_0<\delta$ будет $\int_{E_0}\Phi(x)dx<\frac{\varepsilon}{4}$.

Пусть n_0 такое, что при условии $n\ge n_0$ (σ уже фиксировано)

$mA_n(\sigma) < \delta$ и, значит,

$$2 \int_{A_n(\sigma)} \Phi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} . \qquad (42)$$

Из (40) – (42) следует: при условии $n \geq n_0$, будет: $\left| \int_E f_n dx - \int_E f dx \right| < \varepsilon$.

◀

Следствие 1. 12. *При выполнении условий только что доказанной теоремы будет:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi(x) f_n(x)dx = \int_E \varphi(x) f(x)dx ,$$

где $\varphi(x)$ *есть любая измеримая ограниченная функция.*

▷ Если $|\varphi(x)| \leq K$, то $|\varphi(x) f_n(x)| \leq K\Phi(x)$. А так как:

$E(|\varphi f_n - \varphi f| \geq \sigma) \subset E\left(| f_n - f | \geq \frac{\sigma}{K} \right)$, то $\varphi(x) f_n(x) \xrightarrow{m} \varphi(x) f(x)$. ◀

§ 5. Теорема Витали. Производные числа

1. Теорема Витали

Пусть E *– точечное множество, а* W *– некоторая система не вырождающихся в точки сегментов.* ***Если*** *для всякой точки* $x \in E$ *и любого* $\varepsilon > 0$ ***существует сегмент*** $d \in W$ *такой, что:*

$$x \in d , \quad md < \varepsilon \quad (md \text{ – мера } d),$$

то будем говорить, что ***множество*** E ***покрывается системой*** W ***в смысле Витали.***

Иначе говоря, множество E покрыто системой W в смысле Витали, если любая точка множества E содержится в сколь угодно малых сегментах этой системы.

Теорема 1.44 (теорема Витали). *Если ограниченное множество* E *покрыто в смысле Витали системой* W *сегментов, то из этой системы можно выделить такое конечное или счётное множество сегментов* $\{d_k\}$, *что*

$$d_k \cap d_j = \emptyset \quad (k \neq j), \qquad m^*\left(E - \sum_k d_k \right) = 0 ,$$

где знак суммирования $\sum_k$ *означает* $\sum_{k=1}^{n}$ *или* $\sum_{k=1}^{\infty}$ *в зависимости от того, суммируется конечное или счётное множество сегментов.*

Сумма сегментов понимается как сумма (*объединение*) *в смысле теории множеств.*

Другими словами, теорема Витали утверждает, что сегменты d_k, выделенного множества сегментов, попарно не пересекаются и покрывают множество E с точностью до множества меры нуль.

$\triangleright$ (Доказательство С. Банаха). Возьмем какой-нибудь интервал U с конечной мерой mU такой, что $U \supset E$ (E ограничено), и удалим из системы W те сегменты, которые не содержатся целиком в U. Очевидно, что система W_0, состоящая из оставшихся сегментов (то есть тех сегментов исходной системы W, которые целиком содержатся в U), также покрывает множество E в смысле Витали.

Возьмем какой-нибудь сегмент $d_1 \in W_0$. Если $E \subset d_1$, то доказывать больше нечего. Если $E - d_1 \neq \emptyset$, то положим $G_1 = U - d_1$ и рассмотрим все сегменты системы W_0, которые содержатся в открытом множестве G_1. Пусть K_1 – точная верхняя грань длин этих сегментов. Выберем в качестве сегмента d_2 тот из них, для которого $md_2 > \frac{1}{2}K_1$ (d_2 не пересекается с d_1). Если $E \subset \sum\limits_{k=1}^{2} d_k$, то выбор сегментов закончен. Если $E - \sum\limits_{k=1}^{2} d_k \neq \emptyset$, то выбираем сегмент d_3. Выбор каждого следующего сегмента происходит нижеуказанным образом.

Пусть сегменты

$$d_1, d_2, ..., d_n \tag{43}$$

выбраны и попарно не пересекаются. Если $E \subset \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$, то процесс выбора сегментов закончен, теорема доказана. Если же:

$$E - \sum_{k=1}^{n} d_k \neq \emptyset, \tag{44}$$

то положим $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$, $G_n = U - F_n$ и рассмотрим все сегменты системы W_0, которые содержатся в открытом множестве G_n. В силу (44) такие сегменты существуют и их длины ограничены (эти длины ограничены, например, числом mU). Пусть K_n – точная верхняя грань длин этих сегментов. В качестве сегмента d_{n+1} выберем тот из них, мера которого больше, чем $\frac{1}{2}K_n$, $md_{n+1} > \frac{1}{2}K_n$ ($K_n > 0$, так как сегменты системы W не вырождаются в точки). Ясно, что d_{n+1} не пересекается ни с одним из сегментов (43).

Процесс выбора сегментов либо заканчивается после конечного числа шагов (и тогда доказательство теоремы завершено), либо он приводит к последовательности $d_1, d_2, ..., d_n, ...$ попарно не пересекающихся сегментов. Докажем, что это и есть искомая последовательность, то есть что:

$$m^*(E - F_\infty) = 0, \tag{45}$$

где $F_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} d_k$.

Для доказательства этого факта построим для каждого натурального k сегмент D_k, имеющий ту же середину, что и сегмент d_k, но в пять раз большую длину, то есть его длина $mD_k = 5md_k$. Сегменты d_k не пересекаются и содержатся в U. Отсюда следует, что последовательность $\{S_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} md_k\right\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} md_k$ с неотрицательными элементами является ограниченной, так как $\sum_{k=1}^{n} md_k \le mU$ для любого $n \in N$. Значит, указанный ряд сходится и имеет некоторую сумму S:

$$\sum_{k=1}^{\infty} md_k = S. \tag{46}$$

Но тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} mD_k$ также сходится и его сумма:

$$\sum_{k=1}^{\infty} mD_k = \sum_{k=1}^{\infty} 5md_k = 5S.$$

А отсюда следует, что $\lim_{j\to\infty} r_{j-1} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} mD_k = 0$.

Если мы докажем, что при любом j имеет место включение

$$E - F_\infty \subset \sum_{k=j}^{\infty} D_k, \tag{47}$$

то, в силу теорем 1.12 и 1.13, получим:

$$m^*(E - F_\infty) \le m^*\left(\sum_{k=j}^{\infty} D_k\right) \le \sum_{k=j}^{\infty} m^* D_k = \sum_{k=j}^{\infty} mD_k$$

(последнее равенства имеет место, вследствие того, что каждое D_k – сегмент, то есть замкнутое множество). И, стало быть, справедливо (45), поскольку $\lim_{j\to\infty}\sum_{k=j}^{\infty} mD_k = 0$. Таким образом, осталось доказать (47).

Пусть j – произвольное (сколь угодно большое) натуральное число. Соотношение (47) будет доказано, если мы покажем, что из условия $x \in E - F_\infty$ следует $x \in \sum_{k=j}^{\infty} D_k$. Предположим, что точка x есть произвольная точка, принадлежащая множеству $E - F_\infty$. Тогда точка $x \notin F_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} d_k$, т. е. $x \notin d_k$ при любом значении $k = 1,2,3,\ldots$, но точка $x \in E$ и, значит, $x \in U$ $(E \subset U)$. Отсюда следует, что точка $x \in G_n = U - F_n$ при любом $n \in N$ (N – множество натуральных чисел).

Таким образом, взяв произвольное натуральное число j и любую точку $x \in E - F_\infty$, получаем $x \in G_j$. Поскольку G_j открыто, существует сегмент d' системы W_0 такой, что $x \in d' \subset G_j = U - F_j$ $(d' \neq d_k, k = 1,2,\ldots)$. Однако невозможно, чтобы для этого сегмента при всех n имело место включение $d' \subset G_n$. В самом деле, из последнего включения следовало бы, что при всех n выполняются неравенства $md' \leq K_n < 2md_{n+1}$, а это невозможно, так как, в силу (46), $md_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Значит, при некоторых n соотношение $d' \subset G_n$ не выполняется. Но тогда (при этих n) выполняется соотношение:

$$d' \cap F_n \neq \emptyset. \tag{48}$$

Пусть n^* есть наименьшее из чисел, удовлетворяющих (48). Так как $d' \cap F_j = \emptyset$, а $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$, то ясно, что $n^* > j$. Из определения n^* вытекает, что $d' \cap F_{n^*-1} = \emptyset$. Отсюда, в свою очередь, следуют два вывода:

$$d' \cap d_{n^*} \neq \emptyset, \tag{49}$$

$$md' \leq K_{n^*-1} < 2md_{n^*}; \qquad (d' \subset G_{n^*-1}). \tag{50}$$

Из (49) вытекает, что на расстоянии $\frac{1}{2}md_{n^*}$ от середины сегмента d_{n^*} (в одну из сторон) есть точки, принадлежащие d'. Неравенства же (50) позволяют сделать заключение, что все точки сегмента

d' находятся от середины сегмента d_{n^*} на расстоянии не большем, чем:

$$\frac{1}{2}md_{n^*} + md' < \frac{5}{2}md_{n^*}.$$

Значит,

$$d' \subset D_{n^*} \text{ и, тем более, } d' \subset \sum_{k=j}^{\infty} D_k$$

и тогда:

$$x \in \sum_{k=j}^{\infty} D_k,$$

откуда и следует (47). ◀

2. Производные числа

Функция $f(x)$, *заданная на сегменте* $[a,b]$, *называется* ***возрастающей*** *функцией (**строго возрастающей** функцией), если из условия* $x_1 < x_2$ *следует неравенство* $f(x_1) \le f(x_2)$ (*неравенство* $f(x_1) < f(x_2)$), $(x_1, x_2 \in [a,b])$.

Заметим, что если функция $f(x)$ убывает, то $-f(x)$ возрастает. Это замечание позволяет рассматривать только возрастающие функции. И еще, говоря ниже о монотонной функции, мы всегда будем считать её конечной.

Пусть $f(x)$ – возрастающая функция, определенная на сегменте $[a,b]$, и точка $x_0 \in [a,b)$. Тогда, как известно, для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, удовлетворяющей условиям: $x_0 < x_j < b$, $j = 1,2,...$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0+0)$. Этот предел, который обозначен символом $f(x_0+0)$, не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, если она удовлетворяет указанным выше условиям. Аналогично определяется символ $f(x_0-0)$ $(a < x_0 \le b)$.

Очевидны следующие неравенства:

$$f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0) \quad (a < x_0 < b); \quad f(a) \le f(a+0), \quad f(b-0) \le f(b).$$

Лемма 1.11. *Пусть на сегменте* $[a,b]$ *задана возрастающая функция* $f(x)$ *и задано разбиение* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = b$. *Тогда:*

$$\big(f(a+0) - f(a)\big) + \sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k+0) - f(x_k-0)\big) + \big(f(b) - f(b-0)\big) \le f(b) - f(a). \qquad (51)$$

▷ Введем в рассмотрение точки $y_0, y_1, ..., y_n$, где $x_k < y_k < x_{k+1}$ $(k = \overline{0,n})$

Тогда:

$$f(x_k+0)-f(x_k-0)\le f(y_k)-f(y_{k-1}) \qquad (k=1,2,...,n),$$

$$f(a+0)-f(a)\le f(y_1)-f(a), \qquad f(b)-f(b-0)\le f(b)-f(y_n).$$

Сложив эти $n+2$ неравенства, получим (51). ◀

Следствие 1.13. *Возрастающая функция* $f(x)$, *заданная на сегменте* $[a,b]$, *может иметь только конечное число точек разрыва, в каждой из которых ее скачок больше данного положительного числа* σ.

▷ Если точки $x_1, x_2,..., x_n$ лежат внутри $[a,b]$ и являются точками разрыва (функции $f(x)$), в каждой из которых скачок больше, чем σ $(\sigma>0)$, то из (51) следует $n\sigma\le f(b)-f(a)$ и, стало быть, n не может быть сколь угодно большим. ◀

Лемма 1.12. М*ножество точек разрыва функции* $f(x)$, *возрастающей на сегменте* $[a,b]$, *не более чем счётно. Если* $x_1, x_2,...$ – *все ее внутренние точки разрыва, то:*

$$\big(f(a+0)-f(a)\big)+\sum_{k=1}^{\infty}\big(f(x_k+0)-f(x_k-0)\big)+\big(f(b)-f(b-0)\big)\le f(b)-f(a). \qquad (52)$$

▷ Пусть H_k – множество тех точек разрыва функции $f(x)$, в которых ее скачок больше, чем $\frac{1}{k}$, а H – множество всех точек разрыва этой функции. Очевидно:

$$H=\sum_{k=1}^{\infty}H_k .$$

Поскольку каждое H_k есть множество конечное, то множество H всего лишь счётно. Неравенство (52) получаем из (51) предельным переходом. ◀

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности (α,β) точки x_0.

Число $Df(x_0)$ *(конечное или бесконечное) называется* ***производным числом*** *функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *если существует такая стремящаяся к нулю последовательность* $h_1, h_2, h_3,...$ $(h_n\ne 0)$, *что*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=Df(x_0) \qquad (x_0+h_n\in(\alpha,\beta)).$$

Отметим, что если в точке x_0 существует (конечная или бесконечная) производная $f'(x_0)$, то она и будет производным числом

$Df(x_0)$, и в этом случае никаких других производных чисел в точке x_0 у функции $f(x)$ нет.

Теорема 1.45. *Если функция* $f(x)$ *задана на сегменте* $[a,b]$, *то в каждой его точке существуют производные числа.*

$\triangleright$ Пусть $x_0 \in [a,b]$ и $\{h_n\}$ $(h_n \neq 0)$ такая стремящаяся к нулю последовательность, что $x_0 + h_n \in [a,b]$. Положим:

$$\sigma_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

Если последовательность $\{\sigma_n\}$ есть ограниченная последовательность, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу (теорема Больцано – Вейерштрасса). Это число и будет производным числом функции $f(x)$ в точке x_0. Если же последовательность $\{\sigma_n\}$ есть последовательность неограниченная, например, сверху, то из нее выделяется подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$. И тогда: $Df(x_0) = +\infty$. ◀

Теорема 1.46. *Для того чтобы функция* $f(x)$, *заданная на сегменте* $[a,b]$, *имела в точке* $x_0 \in [a,b]$ *производную* $f'(x_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы все производные числа в этой точке были равны друг другу.*

Эту теорему примем без доказательства, которое несложно.

Лемма 1.13. *Если функция* $f(x)$ *возрастает на сегменте* $[a,b]$, *то все ее производные числа неотрицательны, если она убывает, то они неположительные.*

Утверждения этой леммы очевидны.

Следующие две леммы (леммы 1.14 и 1.15) доказываются похожими способами, но вторая из них доказывается сложнее. Из этих лемм докажем только вторую.

Лемма 1.14. *Пусть на сегменте* $[a,b]$ *задана* ***строго возрастающая*** *функция* $f(x)$. *Если в каждой точке* x *множества* $E \subset [a,b]$ *существует хотя бы одно производное число* $Df(x)$, *что:*

$$Df(x) \leq p \quad (p \geq 0),$$

то:

$$m^* f(E) \leq p \cdot m^* E.$$

Лемма 1.15. *Пусть на сегменте* $[a,b]$ *задана* ***строго возрастающая*** *функция* $f(x)$. *Если в каждой точке* x *множества*

$E \subset [a,b]$ *существует хотя бы одно производное число* $Df(x)$ *такое, что:*

$$Df(x) \geq q \quad (q \geq 0),$$

то:

$$m^* f(E) \geq q \cdot m^* E.$$

$\triangleright$ Утверждение леммы тривиально, если $q=0$. Пусть $q>0$ и q_0 – какое-нибудь положительное число, меньшее чем q $(q_0 < q)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое открытое ограниченное множество G, что:

$$G \supset f(E), \quad mG < m^* f(E) + \varepsilon$$

(множество $f(E)$ ограничено, поскольку оно содержится в сегменте $[f(a), f(b)]$).

Пусть S есть множество тех точек $x \in E$, в которых функция $f(x)$ непрерывна. Множество $E-S$ всего лишь счётно, так как у монотонной функции может быть не более чем счётное множество точек разрыва.

Если $x_0 \in E$, то найдется такая последовательность $\{h_n\}$ $(h_n \to 0)$, для которой:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = Df(x_0) \geq q \ .$$

Будем считать, что при всех n:

$$\frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} > q_0.$$

Введем в рассмотрение сегменты:

$$d_n(x_0) = [x_0, x_0+h_n], \qquad \Delta_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0+h_n)].$$

Так как функция $f(x)$ возрастает, то, очевидно:

$$f(d_n(x_0)) \subset \Delta_n(x_0).$$

Длинами этих сегментов являются числа:

$$md_n(x_0) = |h_n|, \qquad m\Delta_n(x_0) = |f(x_0+h_n) - f(x_0)|.$$

Поэтому:

$$m\Delta_n(x_0) > q_0 md_n(x_0). \tag{53}$$

Если бы мы доказывали лемму 1.14, пришли бы к неравенству:

$$m\Delta_n(x_0) < p_0 md_n(x_0).$$

Тогда дальнейшие рассуждения строились бы следующим образом. Так как $h_n \to 0$, то среди сегментов $\Delta_n(x_0)$ имеются сколь угодно короткие сегменты. Но образ $f(E)$ множества E состоит из точек $f(x_0)$, входящих в сегменты $\Delta_n(x_0)$. Значит, $f(E)$ покрыто всеми сегментами $\Delta_n(x)$ в смысле Витали $(x \in E)$ (потому что функция $f(x)$ *строго* возрастающая). Если бы эта функция возрастала не строго, то некоторые сегменты $\Delta_n(x)$ могли бы выродиться в точки и применить теорему Витали было бы нельзя.

Вернемся к неравенству (53):

$$m\Delta_n(x_0) > q_0 m d_n(x_0).$$

Если $x_0 \in S$, то при достаточно больших n весь сегмент $[f(x_0), f(x_0+h_n)]$ будет целиком содержаться в множестве G. Удобно считать (и это будет делаться), что указанное включение имеет место при всех n. Множество S покрыто сегментами $d_n(x)$ $(x \in S)$ в смысле Витали. Значит, из множества этих сегментов можно выбрать такую счётную последовательность попарно не пересекающихся сегментов $\{d_{n_j}(x_j)\}$, что:

$$m\left(S - \sum_{j=1}^{\infty} d_{n_j}(x_j)\right) = 0.$$

Но тогда:

$$m^*S \le \sum_{j=1}^{\infty} m d_{n_j}(x_j) < \frac{1}{q_0}\sum_{j=1}^{\infty} m\Delta_{n_j}(x_j).$$

Сегменты $\Delta_{n_j}(x_j)$, так же как и $d_{n_j}(x_j)$, попарно не пересекаются (поскольку $f(x)$ *строго* возрастает). Значит:

$$\sum_{j=1}^{\infty} m\Delta_{n_j}(x_j) = m\left(\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{n_j}(x_j)\right) \le mG < m^* f(E) + \varepsilon.$$

Таким образом:

$$m^*S < \frac{1}{q_0}\left(m^* f(E) + \varepsilon\right).$$

Переходя к пределу (при $\varepsilon \to 0$, $q_0 \to q$), находим:

$$m^* f(E) \ge q m^* S.$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что:

$$m^*E \le m^*S + m^*(E - S) = m^*S. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие 1.14. *Множество точек, в которых хотя бы одно производное число возрастающей функции* $f(x)$ *бесконечно, имеет меру нуль.*

$\triangleright$ 1) Пусть функция $f(x)$ *строго* возрастает. Если бы было

$$m^*E(Df(x)=+\infty)>0,$$

то образ этого множества имел бы бесконечную внешнюю меру, что невозможно, поскольку этот образ лежит в сегменте $[f(a),f(b)]$.

2) Пусть $f(x)$ возрастает не строго. Рассмотрим *строго* возрастающую функцию $g(x)=f(x)+x$. Справедливо равенство:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+1.$$

Из этого равенства следует, что множество точек, где хотя бы одно $Df(x)=+\infty$, совпадает с таким же множеством для функции $g(x)$ и потому имеет меру нуль. ◀

Лемма 1.16. *Пусть* $f(x)$ *– возрастающая функция, заданная на сегменте* $[a,b]$*, а* p *и* q *– два числа, где* $p<q$*. Если в каждой точке множества* $E_{p,q}\subset[a,b]$ *существуют два таких производных числа* $D_1f(x)$ *и* $D_2f(x)$*, что* $D_1f(x)<p<q<D_2f(x)$*, то* $mE_{p,q}=0$.

$\triangleright$ Если $f(x)$ возрастает строго, то, согласно леммам 1.14, 1.15:

$$m^*f(E_{p,q})\le pm^*E_{p,q}, \qquad m^*f(E_{p,q})\ge qm^*E_{p,q},$$

откуда: $qm^*E_{p,q}\le pm^*E_{p,q} \quad\Rightarrow\quad m^*E_{p,q}=0$.

Если $f(x)$ возрастает не строго, то снова полагаем $g(x)=f(x)+x$. Повторяя для строго возрастающей функции $g(x)$ только что проведенные рассуждения, получаем:

$$(q+1)m^*E_{p,q}\le(p+1)m^*E_{p,q} \quad\Rightarrow\quad m^*E_{p,q}=0. \blacktriangleleft$$

3. О существовании и суммируемости производной

Теорема 1.47. *Если* $f(x)$ *есть возрастающая функция, заданная на* $[a,b]$*, то почти во всех точках* $[a,b]$ *существует конечная производная* $f'(x)$.

$\triangleright$ Пусть E – множество тех точек сегмента $[a,b]$, в которых не существует производной $f'(x)$. Если $x_0\in E$, то найдутся два производных числа $D_1f(x_0)$ и $D_2f(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $D_1f(x_0)<D_2f(x_0)$. Но тогда существуют рациональные числа p и q, что:

$$D_1f(x_0)<p<q<D_2f(x_0).$$

Отсюда следует, что $E = \sum E_{p,q}$ (суммирование распространяется на все множества $E_{p,q}$ из леммы 1.16, числа p и q рациональные и связаны неравенством $p < q$). Каждое множество $E_{p,q}$, в силу леммы 1.16, имеет меру нуль. Так как число этих множеств есть счётное число, то $mE = 0$.

Таким образом, производная $f'(x)$ существует почти всюду на сегменте $[a,b]$ и может обращаться в плюс бесконечность лишь на множестве меры нуль (следствие 1.14). ◀

З а м е ч а н и е 1.6. В дальнейшем, говоря о производной $f'(x)$ возрастающей функции $f(x)$, будем всегда считать эту производную доопределенной так, что символ $f'(x)$ определен для ***всех*** x из сегмента $[a,b]$. Для этого будем полагать $f'(x) = 0$ в тех точках x, в которых у функции нет производной.

Теорема 1.48. *Если* $f(x)$ *есть возрастающая функция, заданная на* $[a,b]$, *то ее производная* $f'(x)$ *измерима и:*

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a),$$

то есть $f'(x)$ *суммируема.*

▷ Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $(b, b+1]$, полагая:

$$f(x) = f(b) \quad \text{при} \quad b < x \le b+1.$$

Тогда всюду будет:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \tag{54}$$

(кроме, быть может, точки $x = b$, где производная $f'(b)$ была лишь левосторонней производной).

Пользуясь определением 2 измеримости функции и замечая, что для возрастающей функции $f(x)$ множество $E(f \ge a)$ измеримо, приходим к утверждению об измеримости возрастающей функции. Функции $f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ и $f(x)$ возрастают и потому измеримы. Разность же двух конечных измеримых функций, как известно, есть функция измеримая (в начале пункта 3 было отмечено, что монотонную функцию всегда считаем конечной). Значит, производная $f'(x)$ есть предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций (см. (54)). Согласно следствию 1.6 (следствие из теоремы Егорова) производная $f'(x)$ есть измеримая функция. Поскольку эта производная неотрицательна, для нее определен интеграл Лебега (§ 4). Согласно неравенству Фату (лемма 1.8) для этого интеграла имеет место соотношение:

$$\int_a^b f'(x)dx \le \sup\left\{n\int_a^b \left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)dx\right\}.$$

Рассмотрим интегралы:

$$\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx. \tag{55}$$

Так как $f(a) \le f(x) \le f(b) = f(b+1)$ при любом $x \in [a, b+1]$, то подынтегральные функции ограничены на сегменте $[a, b+1]$ и, кроме того, как функции монотонные они интегрируемы на этом сегменте по Риману. Хорошо известно: ограниченная функция f, интегрируемая по Риману на множестве E, измерима по Лебегу на этом множестве E, интегрируема на нём по Лебегу и интегралы от функции f по множеству E в обоих смыслах равны. Поэтому интегралы (55) можно понимать в смысле Римана.

Но тогда (см. (21)):

$$\int_a^b \left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)dx = \int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx =$$

$$= \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx = \frac{1}{n} f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n}\left(f(b) - f(a)\right),$$

откуда и следует оценка: $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a)$. ◀

§ 6 Функции с ограниченным изменением. Теоремы Хелли. Абсолютно непрерывные функции

1. Функции с ограниченным изменением

Разбиением *сегмента* $[a, b]$ *назовем* ***множество точек*** $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, *таких, что* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ $(n \in N)$.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[a, b]$, и составим сумму $V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$. Эту сумму назовем суммой, составленной для функции f и соответствующей указанному выше разбиению.

Точная верхняя грань $\sup V=\sup\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$ $(n\in N)$, *где* $\sup$ *берется по всевозможным разбиениям* $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ *сегмента* $[a,b]$ *для всех* $n\in N$, *называется* ***полным изменением функции*** $f(x)$ ***на сегменте*** $[a,b]$ *и обозначается* $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$.

Таким образом:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f=\sup\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|.$$

Если $\overset{b}{\underset{a}{V}} f<\infty$, *то функция* $f(x)$ *называется* ***функцией с ограниченным изменением (или функцией ограниченной вариации)*** *на сегменте* $[a,b]$.

Теорема 1.49. *Монотонная на сегменте* $[a,b]$ *функция есть функция с ограниченным изменением.*

$\triangleright$ Докажем теорему, например, для возрастающей функции. Если $f(x)$ возрастает на $[a,b]$, то все разности $f(x_{k+1})-f(x_k)$ не отрицательны и $V=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1})-f(x_k)\right)=f(b)-f(a)$. ◀

Говорят, *что функция* $f(x)$, *заданная на сегменте* $[a,b]$, ***удовлетворяет условию Липшица,*** *если существует такая постоянная* $K>0$, *что для любых двух точек* $x_1,x_2\in[a,b]$ *выполняется неравенство:*

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|.$$

Если функция $f(x)$ в каждой точке $[a,b]$ имеет ограниченную производную $f'(x)$, то, как видно из формулы Лагранжа,

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2),$$

где ξ находится между x_1 и x_2, эта функция удовлетворяет условию Липшица . Если же $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le K(x_{k+1}-x_k),$$

откуда $V\le K(b-a)$ и, значит, $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением.

Теорема 1.50. *Всякая функция* f, *определенная на сегменте* $[a,b]$ *и имеющая на нем ограниченное изменение, ограничена.*

$\triangleright$ Пусть $x\in[a,b]$. Если $x=a$ или $x=b$, то доказывать нечего $(f(x)=f(a)$ или $f(x)=f(b))$. Для любого $x\in(a,b)$ получаем:

$$V = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le \mathop{V}_a^b f .$$

Тогда $|f(x)| = |f(a) + f(x) - f(a)| \le |f(a)| + |f(x) - f(a)| \le |f(a)| + \mathop{V}_a^b f$. ◀

Утверждение, обратное утверждению теоремы 1.50, как показывает рассматриваемая ниже функция, неверно. Действительно, функция:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x\cos\dfrac{\pi}{2x}, 0 < x \le 1 \end{cases}$$

является ограниченной, но $\mathop{V}_0^1 f = +\infty$. Для того чтобы в этом убедиться, надо рассмотреть разбиение $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$, получить $V = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ и вспомнить, что n – любое натуральное число.

Легко доказывается теорема 1.51 (приводится без доказа-тельства).

Теорема 1.51. *Сумма и разность двух функций, каждая из которых имеет ограниченное изменение на сегменте* $[a,b]$, *есть функции с ограниченным изменением на этом сегменте.*

Теорема 1.52. *Пусть на сегменте* $[a,b]$ *задана конечная функция* $f(x)$ *и* $a < c < b$. *Тогда:*

$$\mathop{V}_a^b f = \mathop{V}_a^c f + \mathop{V}_c^b f . \qquad (56)$$

▷ Рассмотрим произвольные разбиения сегментов $[a,c]$ и $[c,b]$:

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c; \qquad c = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = b$$

и составим суммы:

$$V_1 = \sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \qquad V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)| .$$

Введем обозначение $V = V_1 + V_2$.

Тогда:

$$V_1 + V_2 \le \mathop{V}_a^b f \quad (y_m = c = z_0)$$

и отсюда:

$$\mathop{V}_a^c f + \mathop{V}_c^b f \le \mathop{V}_a^b f . \qquad (57)$$

Теперь рассмотрим произвольное разбиение сегмента $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b ,$$

включающее точку c в число точек деления (точка c совпадает с точкой x_m для некоторого натурального m). Сумму V_c, составленную для функции f и отвечающую последнему разбиению, можно записать так:

$$V_c = V_1 + V_2,$$

где V_1 и V_2 есть суммы, отвечающие сегментам $[a,c]$ и $[c,b]$. Отсюда:

$$V_c \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f .$$

Пусть теперь V есть сумма, соответствующая произвольному разбиению сегмента $[a,b]$. Если точка c не входит в число точек деления этого разбиения, то добавим ее к этим точкам. Этим добавлением мы превратим сумму V в сумму V_c. Если же точка c входит в указанное число точек, то сумма V сама есть сумма V_c. Так как добавление новых точек деления, очевидно, не уменьшает сумм V, то получаем:

$$V \le V_c \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f .$$

Отсюда находим:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f . \tag{58}$$

Из (57) и (58) следует (56). ◀

Теорема 1.53. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была функцией с ограниченным изменением, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух возрастающих функций.*

▷ *Достаточность.* Она следует из теорем 1.49 и 1.51.

Необходимость. Рассмотрим функцию:

$$v(a) = 0, \quad v(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f \quad (a < x \le b).$$

Она является возрастающей, в силу теоремы 1.52. Положим:

$$s(x) = v(x) - f(x). \tag{59}$$

Далее заметим, что если $a \le x < y \le b$, то, в силу теоремы 1.52:

$$s(y) = v(y) - f(y) = v(x) + \overset{y}{\underset{x}{V}} f - f(y)$$

и, значит, $s(y) - s(x) = \overset{y}{\underset{x}{V}} f - \big(f(y) - f(x)\big)$.

Поскольку $f(y) - f(x) \le \overset{y}{\underset{x}{V}} f$, что очевидно из определения $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$, то $s(y) - s(x) \ge 0$. Последнее означает, что функция $s(x)$ возрастает.

Записав равенство (59) в виде $f(x)=v(x)-s(x)$, получаем требуемое представление функции $f(x)$. ◀

Следствие 1. 15. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[a,b]$, то почти в каждой точке $[a,b]$ существует конечная производная $f'(x)$, являющаяся суммируемой функцией.*

Следствие 1. 16. *Множество точек разрыва функции с ограниченным изменением не более, чем счетно. Каждая точка ее разрыва является точкой разрыва первого рода.*

2. Теоремы Хелли

Лемма 1.17. *Пусть на сегменте $[a,b]$ задано бесконечное семейство функций $Z=\{f(x)\}$. Если все функции семейства ограничены одним и тем же числом*

$$|f(x)|\le K, \tag{60}$$

то, какое бы счётное множество $E\subset[a,b]$ ни взять, из семейства Z можно извлечь последовательность $\{f_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке множества E.

▷ Пусть $E=\{x_k\}$. Рассмотрим множество $\{f(x_1)\}$ значений, принимаемых функциями семейства Z в точке x_1. В силу (60), это множество ограничено и, по теореме Больцано – Вейерштрасса, из него выделяется сходящаяся последовательность:

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1),\ldots;\qquad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1)=A_1. \tag{61}$$

Теперь рассмотрим последовательность $f_1^{(1)}(x_2),\ f_2^{(1)}(x_2),\ f_3^{(1)}(x_2),\ldots$ значений, принимаемых функциями множества $\{f_n^{(1)}(x)\}$ в точке x_2. Она также ограничена и по теореме Больцано – Вейерштрасса из нее выделяется сходящаяся последовательность

$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ldots;\qquad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2)=A_2 \tag{62}$$

Следует отметить, что взаимный порядок расположения двух функций, присутствующих и в (61), и в (62), одинаковый. Продолжая этот процесс, построим счётное множество сходящихся последовательностей:

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1),\ \ldots,\qquad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1)=A_1;$$

$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ \ldots,\qquad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2)=A_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1^{(k)}(x_k),\ f_2^{(k)}(x_k),\ f_3^{(k)}(x_k),\ \ldots,\qquad \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k)=A_k.$$

причём каждая следующая последовательность выделена из предыдущей последовательности (без нарушения порядка следования элементов). Составим, используя это счётное множество, последовательность диагональных элементов получившейся матрицы, т. е. последовательность функций $\left\{f_n^{(n)}(x)\right\}= f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(2)}(x), \ldots$, у которых нижний индекс равен верхнему индексу.

Составленная таким образом последовательность сходится в каждой точке множества E. Действительно, при любом фиксированном k последовательность $\left\{f_n^{(n)}(x_k)\right\}$ $(n\ge k)$ сходится к A_k. ◀

Лемма 1.18. *Пусть* $\Upsilon=\{f(x)\}$ *есть бесконечное семейство возрастающих функций, заданных на сегменте* $[a,b]$. *Если все функции семейства ограничены одним и тем же числом:*

$$|f(x)|\le K,$$

то из семейства Υ *можно извлечь последовательность* $\{f_n(x)\}$, *которая в каждой точке* $[a,b]$ *сходится к некоторой возрастающей функции* $\varphi(x)$.

▷ Пусть E есть множество, состоящее из всех рациональных точек сегмента $[a,b]$ и точки a, если она иррациональна. В каждой точке $x_k\in E$, в силу леммы 1.15, существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k)$$

последовательности функций $\Upsilon_0=\left\{f^{(n)}(x)\right\}$, выделенной из семейства Υ. Зададим на множестве E функцию ψ, положив:

$$\psi(x_k)=\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k).$$

Заметим, что если $x_j, x_k\in E$ и $x_j<x_k$, то $\psi(x_j)\le\psi(x_k)$, то есть функция ψ является функцией возрастающей (если бы выполнялось неравенство $\psi(x_j)<\psi(x_k)$, то функция называлась бы строго возрастающей). Распространим определение функции ψ на сегмент $[a,b]$, определив ее во всех иррациональных точках $x\in(a,b]$ равенством:

$$\psi(x)=\sup_{x_k<x}\psi(x_k).$$

Ясно, что функция $\psi(x)$, определенная на всем сегменте $[a,b]$, есть функция возрастающая, причем множество Q точек ее разрыва не более, чем счётно. Покажем, что в каждой точке x_0, в которой эта функция непрерывна, будет:

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0)=\psi(x_0)\ . \tag{63}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем такие точки $x_j, x_k \in E$, что $x_j < x_0 < x_k$, $\psi(x_k)-\psi(x_j)<\frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксировав эти точки, найдем такое n_0, что при $n \ge n_0$ будет $\left|f^{(n)}(x_j)-\psi(x_j)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\left|f^{(n)}(x_k)-\psi(x_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда (при указанных n):

$$\psi(x_0)-\varepsilon < f^{(n)}(x_j) \le f^{(n)}(x_k) < \psi(x_0)+\varepsilon\ .$$

Поскольку $f^{(n)}(x_j) \le f^{(n)}(x_0) \le f^{(n)}(x_k)$, то $\psi(x_0)-\varepsilon < f^{(n)}(x_0) < \psi(x_0)+\varepsilon$, откуда и следует (63).

Так как равенство (63) имеет место в каждой точке непрерывности функции ψ, то равенство

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=\psi(x) \tag{64}$$

может не выполняться только на множестве Q (не более, чем счётном) точек разрыва $\psi(x)$.

Применим теперь лемму 1.17 к последовательности Υ_0, взяв в качестве множества E множество тех точек, принадлежащих Q, для которых не выполняется (64). Это приведет к последовательности $\{f_n(x_0)\}$, выделенной из последовательности Υ_0 и сходящейся теперь уже во всех точках сегмента $[a,b]$, так как в точках сходимости последовательности $\left\{f^{(n)}(x)\right\}$ сходится и её подпоследовательность $\{f_n(x)\}$. Если положить $\varphi(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, то функция $\varphi(x)$, очевидно, будет возрастающей. ◀

Теорема 1.54 (первая теорема Хелли). *Пусть на сегменте* $[a,b]$ *задано бесконечное семейство функций* $Z=\{f(x)\}$. *Если все функции семейства и полные изменения всех этих функций ограничены одним числом:*

$$|f(x)| \le K. \qquad \overset{b}{\underset{a}{V}} f \le K,$$

то из семейства Z *можно выделить такую последовательность* $\{f_n(x)\}$*, которая в каждой точке* $[a,b]$ *сходится к некоторой функции* $\varphi(x)$*, имеющей ограниченное изменение.*

$\triangleright$ Пусть для каждой функции $f(x)$ семейства Z:

$$v(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f, \qquad s(x) = v(x) - f(x).$$

Обе эти функции возрастают. При этом

$$|v(x)| \le K, \qquad |s(x)| \le 2K.$$

Выделим из семейства $\{v(x)\}$, в силу леммы 1.16, сходящуюся последовательность $\{v_n(x)\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = \alpha(x)$. Каждой функции $v_n(x)$ соответствует функция $s_n(x)$, дополняющая ее до функции $f_n(x)$ семейства Z. Применив лемму 1.16 к семейству $\{s_n(x)\}$, выделим из него сходящуюся последовательность $\{s_{n_k}(x)\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k}(x) = \beta(x)$. Но тогда последовательность функций

$$f_{n_k}(x) = v_{n_k}(x) - s_{n_k}(x)$$

(эта последовательность выделена из семейства Z) сходится к функции:

$$\varphi(x) = \alpha(x) - \beta(x). \quad \blacktriangleleft$$

Теорема 1.55 (вторая теорема Хелли). *Пусть на сегменте* $[a,b]$ *задана непрерывная функция* $f(x)$ *и задана последовательность функций* $\{g_n(x)\}$*, которая в каждой точке* $[a,b]$ *сходится к конечной функции* $g(x)$*. Если при всех* n:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} g_n < K, \quad \text{\textit{то}} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

$\triangleright$ Покажем, что:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} g \le K. \tag{65}$$

Для этого разобьем произвольным образом сегмент $[a,b]$. Тогда:

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| < K \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

В пределе (при стремлении $n\to\infty$):

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \le K.$$

Поскольку разбиение было произвольным, то отсюда следует (65).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и разобьем $[a,b]$ точками $\{x_k\}$ $(k = 0,1,2,...,m)$ на такие малые части $[x_k, x_{k+1}]$, чтобы в каждой из них колебание функции $f(x)$ было меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{3K}$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))dg(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))dg(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big).$$

С другой стороны, на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ будет $|f(x) - f(x_k)| < \dfrac{\varepsilon}{3K}$, откуда:

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(x) - f(x_k)\big)dg(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3K}\mathop{V}_{x_k}^{x_{k+1}} g$$

и тогда:

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(x) - f(x_k)\big)dg(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3K}\mathop{V}_a^b g \le \frac{\varepsilon}{3},$$

Таким образом:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) + \lambda\frac{\varepsilon}{3} \qquad \big(|\lambda| \le 1\big)$$

Аналогично:

$$\int_a^b f(x)dg_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\big(g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)\big) + \lambda_n\frac{\varepsilon}{3} \qquad \big(|\lambda_n| \le 1\big).$$

Но для взятого нами числа $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при условии $n \ge n_0$ будет:

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\big(g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)\big) - \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и, следовательно, при этих значениях n будет:

$$\left|\int_a^b f(x)dg_n(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| < \varepsilon. \quad ◀$$

3. Абсолютно непрерывные функции

Пусть на сегменте $[a,b]$ задана функция $f(x)$.

Если для любого *$\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы взаимно не пересекающихся интервалов (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n) (из сегмента $[a,b]$), если они удовлетворяют условию*:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta, \tag{66}$$

выполняется неравенство:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\bigl(f(b_k)-f(a_k)\bigr)\right|<\varepsilon, \qquad (67)$$

то функция $f(x)$ *называется* ***абсолютно непрерывной*** *на сегменте* $[a,b]$.

Очевидно, что всякая абсолютно непрерывная функция является непрерывной. Обратное утверждение неверно.

Отметим еще, что в данном определении условие (67) можно заменить более жестким условием:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon. \qquad (68)$$

Действительно, пусть число $\delta>0$ таково, что из (66) следует неравенство: $\left|\sum_{k=1}^{n}\bigl(f(b_k)-f(a_k)\bigr)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Взяв произвольную систему взаимно не пересекающихся интервалов $\{(a_k,b_k)\}$ $(k=1,2,\dots,n)$, для которой выполнено (66), разобьем эту систему на две части A и B, отнеся к части A все те интервалы (a_k,b_k), для которых $f(b_k)-f(a_k)\geq 0$, а к части B – все остальные интервалы системы. В силу соотношений:

$$\sum_{(a_k,b_k)\in A}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|=\left|\sum_{(a_k,b_k)\in A}\bigl(f(b_k)-f(a_k)\bigr)\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\sum_{(a_k,b_k)\in B}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|=\left|\sum_{(a_k,b_k)\in B}\bigl(f(b_k)-f(a_k)\bigr)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

получим (68). Таким образом, при определении абсолютно непрерывной функции можно использовать и условие (67), и условие (68). Более того, поскольку все слагаемые суммы (68) неотрицательны, а число их произвольно, можно распространить определение 1.48 на счётную систему взаимно непересекающихся интервалов. Имея это в виду, будем вместо записи (66) допускать запись:

$$\sum_{k}(b_k-a_k)<\delta,$$

где знак суммирования $\sum_{k}$ означает $\sum_{k=1}^{n}$ или $\sum_{k=1}^{\infty}$ в зависимости от того, имеем мы дело с конечной системой или со счётной системой интервалов соответственно.

Имея дело с абсолютно непрерывной функцией, вместо того, чтобы говорить о приращениях $\left|f(b_k)-f(a_k)\right|$ функции $f(x)$, можно говорить о колебаниях этой функции. Для этого введем следующие обозначения: m_k – наименьшее значение, M_k – наибольшее значение функции $f(x)$ на сегменте $[a_k,b_k]$.

Пусть $\alpha_k,\beta_k\in[a_k,b_k]$ такие точки, что:

$$f(\alpha_k)=m_k,\qquad f(\beta_k)=M_k.$$

Так как сумма длин интервалов (α_k,β_k) не превосходит суммы длин интервалов (a_k,b_k), то:

$$\sum_k\left(f(\beta_k)-f(\alpha_k)\right)<\varepsilon,$$

если $\sum_k(b_k-a_k)<\delta$.

Итак, если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна, то всякому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что какую бы конечную или счётную систему взаимно непересекающихся интервалов $\{(a_k,b_k)\}$, для которой

$$\sum_k(b_k-a_k)<\delta,$$

ни взять, будет
$$\sum_k\omega_k<\varepsilon,$$

где ω_k означает колебание функции $f(x)$ на сегменте $[a_k,b_k]$, т. е. $\omega_k=M_k-m_k$.

Одним из примеров абсолютно непрерывной функции может служить любая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица

Теорема 1.56. *Абсолютно непрерывная функция имеет ограниченное изменение.*

$\triangleright$ Пусть $f(x)$ – функция, абсолютно непрерывная на $[a,b]$. Найдём такое $\delta>0$, что для всякой системы взаимно не пересекающихся интервалов $\{(a_k,b_k)\}$, у которой $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ будет:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<1.$$

Разобьём $[a,b]$ точками

$$a=c_0<c_1<c_2<\ldots<c_N=b$$

на такие части, что $c_{k+1}-c_k<\delta\quad(k=0,1,2,\ldots,N-1)$.

Тогда, при всяком разбиении сегмента $[c_k,c_{k+1}]$ на части, сумма абсолютных приращений $f(x)$ на этих частях окажется меньшей, чем 1, откуда:

$$\mathop{V}_{c_k}^{c_{k+1}}f\le 1,\ \text{а тогда}\ \mathop{V}_{a}^{b}f\le N. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие 1.17. *Если* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[a,b]$*, то почти в каждой точке* $[a,b]$ *эта функция имеет конечную производную* $f'(x)$*, которая является суммируемой функцией.*

Теорема 1.57. *Если производная* $f'(x)$ *абсолютно непрерывной функции* $f(x)$ *почти всюду равна нулю, то функция* $f(x)$ *постоянна.*

$\triangleright$ Выберем произвольное число c, удовлетворяющее условию $a < c \le b$. Пусть E есть множество точек $x \in (a,c)$, в которых $f'(x) = 0$, и $\varepsilon > 0$. Если $x \in E$, то для всех достаточно малых $h > 0$ выполняется неравенство:

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon . \tag{69}$$

Если $h > 0$ удовлетворяют (69), то множество сегментов вида $[x, x+h]$ покрывают множество E в смысле Витали. Выберем из этого множества конечное число таких попарно не пересекающихся сегментов:

$$d_1 = [x_1, x_1 + h_1], \quad d_2 = [x_2, x_2 + h_2], \ \ldots\ , \quad d_n = [x_n, x_n + h_n],$$

что они лежат в интервале (a,c) и внешняя мера не покрытой ими части множества E меньше любого наперед заданного числа $\delta > 0$ $(x_k < x_{k+1})$.

Тогда: $$c - a = mE \le \sum_{k=1}^{n} md_k + m^*\left(E - \sum_{k=1}^{n} d_k\right) < \sum_{k=1}^{n} md_k + \delta ,$$

откуда: $\sum_{k=1}^{n} md_k > c - a - \delta$. Значит, если:

$$[a, x_1), \quad (x_1 + h_1, x_2), \ \ldots\ , \quad (x_{n-1} + h_{n-1}, x_n), \quad (x_n + h_n, c] \tag{70}$$

есть промежутки, оставшиеся после удаления из сегмента $[a,c]$ всех сегментов d_k $(k = 1,2,...,n)$, то сумма длин промежутков (70) будет меньшей, чем δ. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что сумма приращений функции $f(x)$ на промежутках (70) будет меньше ε:

$$\left|\big(f(x_1) - f(a)\big) + \sum_{k=1}^{n-1}\big(f(x_{k+1}) - f(x_k + h_k)\big) + \big(f(c) - f(x_n + h_n)\big)\right| < \varepsilon \tag{71}$$

(это возможно, так как функция $f(x)$ абсолютно непрерывна).

С другой стороны, в силу определения d_k, будет: $|f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon h_k$.

А поскольку $\sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n} md_k \le c - a$, то справедливо неравенство:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k+h_k)-f(x_k)\right)\right|<\varepsilon(c-a)\,. \qquad (72)$$

Из (71) и (72) следует, что $|f(c)-f(a)|<\varepsilon(1+c-a)$ (при любом $\varepsilon>0$).

Значит, $f(c)=f(a)$, где c произвольное число, удовлетворяющее условию $a<c\le b$. ◀

Следствие 1.18. *Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ двух абсолютно непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ почти всюду равны, то разность этих функций постоянна.*

§ 7 Неопределённый интеграл. Равностепенная непрерывность. Интеграл Пуассона – Стилтьеса

1. Неопределённый интеграл и его свойства

Пусть на $[a,b]$ задана суммируемая функция $f(x)$, $x\in[a,b]$.

Функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+C$, *где* $C=const$, *называется* ***неопределенным интегралом (по Лебегу) функции*** $f(x)$.

Из теорем 1.58 и 1.59 более точной является 1.59 (см. ниже).

Теорема 1.58. *Неопределенный интеграл $\Phi(x)$ есть абсолютно непрерывная функция.*

▷ В силу теоремы 1.42 (теоремы об абсолютной непрерывности интеграла), для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всякого измеримого множества E_0 с мерой $mE_0<\delta$ будет:

$$\left|\int\limits_{E_0} f(x)dx\right|<\varepsilon\,.$$

В частности, если сумма длин конечной системы взаимно непересекающихся интервалов (a_k,b_k) меньше, чем δ, то выполняется Неравенство:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{a_k}^{b_k} f(x)dx\right|<\varepsilon\,.$$

Так как, в силу теоремы 1.41 (теорема о конечной суммируемости интеграла),

$$\int\limits_a^{b_k} f(x)dx=\int\limits_a^{a_k} f(x)dx+\int\limits_{a_k}^{b_k} f(x)dx$$

то

$$\Phi(b_k)-\Phi(a_k)=\int_a^{b_k} f(x)dx-\int_a^{a_k} f(x)dx=\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx$$

и тогда $\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\Phi(b_k)-\Phi(a_k)\right)\right|<\varepsilon$, т.е. $\Phi(x)$ почти всюду имеет конечную производную, являющуюся суммируемой функцией.

Теорема 1.59. *Производная неопределенного интеграла*:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

почти всюду равна подынтегральной функции $f(x)$, *то есть*

$$\Phi'(x)=f(x)$$

почти всюду на $[a,b]$.

$\triangleright$ Пусть есть два действительных числа p и q, где $p<q$. Легко увидеть, что множество $E_{p,q}$ тех точек $[a,b]$, в которых функция $\Phi(x)$ дифференцируема и выполняются неравенства:

$$f(x)<p<q<\Phi'(x),$$

является множеством измеримым. Покажем, что:

$$mE_{p,q}=0. \tag{73}$$

Для этого возьмем произвольное $\varepsilon>0$, найдем $\delta>0$ такое, что неравенство $mE_0<\delta$ влечет неравенство:

$$\left|\int_{E_0} f(t)dt\right|<\varepsilon,$$

и рассмотрим такое открытое множество $G\subset[a,b]$, что:

$$G\supset E_{p,q}, \qquad mG<mE_{p,q}+\delta$$

(можем считать, что $a,b\notin E_{p,q}$ и что $\delta<\varepsilon$).

Если $x\in E_{p,q}$, то при всех достаточно малых $h>0$ будет:

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}>q. \tag{74}$$

Ясно, что если числа $h>0$ такие, при которых выполняется (74), то множество $E_{p,q}$ оказывается покрытым сегментами $[x,x+h]$ в смысле Витали. Можно считать, что все сегменты $[x,x+h]$ лежат в множестве G. Согласно теореме Витали, можно выделить такое счётное множество указанных сегментов:

$$[x_1,x_1+h_1],\quad [x_2,x_2+h_2],\ \ldots\ ,\quad [x_n,x_n+h_n],\ \ldots\ ,$$

что сегменты этого множества попарно не пересекаются, и для них выполняется равенство:

$$m\left(E_{p,q}-\sum_{k=1}^{\infty}[x_k,x_k+h_k]\right)=0.$$

В силу (74) будет:

$$\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k}f(t)dt>q.$$

Если $S=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k,x_k+h_k]$, то из последнего неравенства следует:

$$\int_S f(t)dt>q\cdot mS.$$

Его можно записать в виде:

$$\int_S f(t)dt>q\cdot\left(mE_{p,q}+\theta\varepsilon\right)\quad(0\le\theta\le1). \tag{75}$$

С другой стороны, $S\subset G$ и, значит:

$$S-E_{p,q}\subset G-E_{p,q}\quad \text{и}\quad m\left(S-E_{p,q}\right)<\delta,$$

откуда:

$$\int_{S-E_{p,q}}f(t)dt<\varepsilon$$

и, следовательно:

$$\int_S f(t)dt<\int_{E_{p,q}}f(t)dt+\varepsilon \tag{76}$$

(так как $m\left(E_{p,q}-S\right)=0$, то $\int_{E_{p,q}}f(t)dt=\int_{S\cap E_{p,q}}f(t)dt$).

Но на множестве $E_{p,q}$ будет $f(t)<p$, откуда следует:

$$\int_{E_{p,q}}f(t)dt\le p\cdot mE_{p,q}. \tag{77}$$

Из (75) – (77) получаем $q\cdot\left(mE_{p,q}+\theta\varepsilon\right)<p\cdot mE_{p,q}+\varepsilon$

и, поэтому, т. к. ε является произвольным положительным числом, $q\cdot mE_{p,q}\le p\cdot mE_{p,q}$, а это возможно лишь при условии $mE_{p,q}=0$.

Равенство (73) доказано.

Пусть E есть множество тех точек сегмента $[a,b]$, в которых функция $\Phi(x)$ дифференцируема и выполняется неравенство:

$$\Phi'(x)>f(x).$$

Тогда:

$$E=\sum_{p,q}E_{p,q},$$

где суммирование распространяется на все пары рациональных чисел p,q, в которых $p<q$. В силу (73) будет $mE=0$. Таким образом, ес-

ли A – это множество точек, в которых существует производная $\Phi'(x)$, то почти всюду на множестве A будет:

$$\Phi'(x) \le f(x). \qquad (78)$$

Положим:

$$g(x) = -f(x), \qquad \Gamma(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Тогда $\Gamma(x) = -\Phi(x)$ и $\Gamma'(x)$ существует во всех точках множества A. В силу доказанного выше получаем: почти всюду на A $\Gamma'(x) \le g(x)$, т. е.:

$$\Phi'(x) \ge f(x). \qquad (79)$$

Из (78) и (79) следует, что почти всюду на A, а значит, и почти всюду на $[a,b]$:

$$\Phi'(x) = f(x). \blacktriangleleft$$

Теорема 1.60. *Абсолютно непрерывная функция является неопределенным интегралом своей производной.*

▷ Пусть функция $F(x)$ абсолютно непрерывна. Ее производная $F'(x)$ существует почти всюду и суммируема. Пусть:

$$\Phi(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

Функция $\Phi(x)$ также абсолютно непрерывна и почти всюду:

$$\Phi'(x) = F'(x).$$

Значит (следствие 1.18 теоремы 1.57), разность $F(x) - \Phi(x)$ постоянна. При $x = a$ будет $F(a) - \Phi(a) = 0$. Отсюда следует, что $F(x) \equiv \Phi(x)$. ◀

2. О поэлементном интегрировании последовательности функций

Пусть есть семейство (множество) абсолютно непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций $\{\varphi(x)\} = \left\{\varphi(a) + \int_a^x f(t)dt\right\}$ (каждая функция $f(x)$ этого семейства суммируема на сегменте $[a,b]$).

Если для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любой функции семейства* $\{\varphi(x)\}$ *справедливо неравенство* $\left|\int_{E_0} f(x)dx\right| < \varepsilon$, *если только* $mE_0 < \delta$

$(E_0 \subset E = [a,b])$, *то говорим, что семейство функций* $\{\varphi(x)\}$ *обладает свойством* ***равностепенной абсолютной непрерывности*** (*является семейством* ***равностепенных абсолютно непрерывных*** *функций*) ***на сегменте*** $[a,b]$.

Лемма 1.19. *В определении семейства* ***равностепенных абсолютно непрерывных*** *функций неравенство* $\left|\int\limits_{E_0} f(x)dx\right| < \varepsilon$ *можно заменить неравенством* $\int\limits_{E_0} |f(x)|dx < \varepsilon$.

$\triangleright$ Очевидно, если выполнено второе неравенство, то выполнено и первое. Докажем, что верно и обратное: если выполнено первое, то выполнено и второе. Пусть $E_0' = E_0(f \ge 0)$, а E_0'' – множество остальных точек множества E_0. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое , что при условии $mE_0' < \delta$ и $mE_0'' < \delta$ будет:

$$\int\limits_{E_0'} |f(x)|dx = \left|\int\limits_{E_0'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ ;$$

$$\int\limits_{E_0''} |f(x)|dx = \left|\int\limits_{E_0''} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Откуда $\int\limits_{E_0} |f(x)|dx < \varepsilon$. ◀

Пусть $\{f_n(x)\}$ – последовательность неотрицательных суммируемых функций на сегменте $[a,b]$, сходящаяся почти всюду на этом сегменте, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ почти всюду на сегменте $[a,b]$.

Говорят, *что эту последовательность* $\{f_n(x)\}$ *можно* ***поэлементно интегрировать на сегменте*** $[a,b]$, *если существует конечный предел*:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx, \ \textit{равный} \ \int\limits_a^b f(x)dx,$$

то есть если:
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Теорема 1.61. *Для того чтобы сходящуюся почти всюду на сегменте* $[a,b]$ *последовательность неотрицательных суммируемых функций можно было поэлементно интегрировать, необходимо и достаточно выполнение условия: семейство* $\left\{\int\limits_a^x f_n(t)dt\right\}$ *является семейством равностепенных абсолютно непрерывных на сегменте* $[a,b]$ *функций.*

$\triangleright$ Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться только достаточностью указанного условия, то и доказывать будем только соответствующую часть этой теоремы. Итак, пусть семейство $\left\{\int\limits_a^x f_n(t)dt\right\}$ обладает свойством равностепенной абсолютной непрерывности на сегменте $[a,b]$.

В силу неравенства Фату (лемма 1.8, следствие 1.10) будет $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int\limits_a^b f_n(x)dx \geq \int\limits_a^b f(x)dx$, а в силу предположения о равностепенной абсолютной непрерывности:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_a^b f_n(x)dx < \infty .$$

Два последних неравенства обеспечивают суммируемость предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

По условию, семейство $\left\{\int\limits_a^x f_n(t)dt\right\}$ обладает свойством равностепенной абсолютной непрерывности, а по доказанному, функция $f(x)$ суммируема . Поэтому, найдется $\delta > 0$ такое, что:

$$\int_{E_0} f_n(x)dx < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \int_{E_0} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{80}$$

при $mE_0 < \delta$ и всех n. По теореме Егорова найдется множество E', $mE' > b-a-\delta$, на котором последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$. Поэтому:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E'} f_n(x)dx = \int_{E'} f(x)dx$$

и, значит, при всех $n \geq n_0$ $(n_0 = n_0(\varepsilon))$ будет:

$$\left|\int_{E'} f_n(x)dx - \int_{E'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Из последнего неравенства и неравенств (80) следует:

$$\left|\int_{E} f_n(x)dx - \int_{E} f(x)dx\right| < \varepsilon \qquad (E = [a,b], \quad n \geq n_0),$$

а отсюда, в свою очередь, следует: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$. ◀

3. Интеграл Стилтьеса

Пусть на сегменте $[a,b]$ заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$. Разобьем $[a,b]$ на части точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

в каждом частичном сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ выберем по точке ξ_k и составим сумму:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big).$$

***Если** при стремлении $\lambda = \max\limits_k (x_{k+1} - x_k)$ к нулю сумма σ_n стремится к конечному пределу I, не зависящему ни от способа разбиения сегмента, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел называется **интегралом Стилтьеса функции** $f(x)$ **по функции** $g(x)$ и обозначается*:

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

Таким образом, число I есть интеграл Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любом способе разбиения сегмента, при котором $\lambda < \delta$, будет:

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon,$$

как бы ни выбирались точки ξ_k.

Ясно, что интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса, получающийся из последнего, если положить: $g(x) = x$.

Теорема 1.62. *Если существует один из интегралов: или $\int_a^b f(x)dg(x)$, или $\int_a^b g(x)df(x)$, то существует и другой интеграл и имеет место равенство*:

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = \big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Эту формулу называют ***формулой интегрирования по частям.***

$\triangleright$ Пусть существует интеграл $\int_a^b g(x)df(x)$. Разобьем $[a,b]$ на части и составим сумму:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big)$$

(для интеграла $\int_a^b f(x)dg(x)$).

Эту сумму представим так:

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_{k+1})-\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(x_k)$$

откуда

$$\sigma_n=-\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\big(f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})\big)+f(\xi_{n-1})g(x_n)-f(\xi_0)g(x_0)\pm$$

$$\pm\big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b.$$

Тогда:

$$\sigma_n=\big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b-$$

$$-\left\{g(a)\big(f(\xi_0)-f(a)\big)+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\big(f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})\big)+g(b)\big(f(b)-f(\xi_{n-1})\big)\right\}. \qquad (81)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть сумма, составленная для интеграла $\int_a^b g(x)df(x)$, причем точками разбиения сегмента $[a,b]$ служат точки:

$$a\le\xi_0\le\xi_1\le\xi_2\le\ldots\le\xi_{n-1}\le b,$$

а точки $a,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},b$ – это точки, выбранные на сегментах $[a,\xi_0],[\xi_0,\xi_1],\ldots,[\xi_{n-1},b]$.

Если $\max(x_{k+1}-x_k)\to 0$, то и $\max(\xi_{k+1}-\xi_k)\to 0$, так что сумма в фигурных скобках стремится к интегралу $\int_a^b g(x)df(x)$, который по предположению существует. Но тогда, в силу (81):

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x). \quad ◀$$

Теорема 1.63. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a,b]$*, а* $g(x)$ *имеет на этом сегменте ограниченное изменение, то интеграл* $\int_a^b f(x)dg(x)$ *существует.*

▷ Поскольку всякая функция с ограниченным изменением является разностью двух возрастающих функций, то, не уменьшая общности рассуждений, можем считать, что функция $g(x)$ есть возрастающая функция.

Разобьем $[a,b]$ на части точками:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

и обозначим, соответственно, через m_k и M_k наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[x_k,x_{k+1}]$.

Пусть:

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big),$$

а

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big).$$

При любом выборе точек ξ_k на сегментах $[x_k, x_{k+1}]$ будет:

$$s \le \sigma_n \le S$$

(σ_n – это сумма из определения 1.52). Легко проверить, что при добавлении новой точки разбиения сумма s не убывает, а сумма S не возрастает. Отсюда следует, что ни одна сумма s не превосходит ни одной суммы S.

Пусть I есть точная верхняя грань множества $\{s\}$ всех нижних сумм: $I=\sup\{s\}$.

При всяком способе разбиения будет:

$$s \le I \le S,$$

откуда следует

$$|\sigma_n - I| \le S - s.$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что неравенство $|x''-x'|<\delta$ влечёт за собой неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$.

Тогда при условии $\lambda<\delta$ будет:

$$M_k - m_k < \varepsilon \qquad (k=0,1,\ldots,n-1; \qquad \lambda=\max(x_{k+1}-x_k)).$$

Отсюда получаем:

$$S-s<\varepsilon\big(g(b)-g(a)\big)$$

и, значит, $\quad |\sigma_n - I| < \varepsilon\big(g(b)-g(a)\big) \qquad (\lambda<\delta)$.

Отсюда:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n = I = \int_a^b f(x)\,dg(x). \qquad \blacktriangleleft$$

Следствие 1. 19. *Всякая функция с ограниченным изменением интегрируема по всякой непрерывной функции.*

4. Интеграл Пуассона – Стилтьеса

***Уравнение вида*:**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

где $u=u(x_1,x_2)$, x_1,x_2 *– действительные переменные, называется* ***уравнением Лапласа. Функция*** u, *которая в области* D *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа, называется* ***гармонической.***

Интеграл *из правой части равенства* (82):

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \qquad (82)$$

называется ***интегралом Пуассона.***

Пусть в точках единичной окружности задана функция $\psi(\alpha)$, с ограниченным изменением на сегменте $[0,2\pi]$.

Интегралом Пуассона – Стилтьеса *называется выражение*:

$$u\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}d\psi(\alpha). \qquad (83)$$

Нетрудно убедиться, что функция $u(z)$, представимая интегралом (83), гармоническая внутри единичного круга $(r<1)$, т.е. при $z=re^{i\theta}$.

Теорема 1.64. *Всякая положительная гармоническая функция* $u(z)$ *внутри единичного круга может быть представлена интегралом Пуассона – Стилтьеса* (83), *где* $\psi(\theta)$ *– некоторая ограниченная и возрастающая функция на сегменте* $[0,2\pi]$.

▷ Для функции $u(z)=u(\rho,\theta)$, удовлетворяющей условиям теоремы, рассмотрим интеграл:

$$\varphi_\rho(\theta)=\int_0^\theta u(\rho,\alpha)d\alpha \ , \qquad (84)$$

где $\rho<1$, $0\le\theta\le 2\pi$.

Функции $\varphi_\rho(\theta)$ образуют семейство абсолютно непрерывных возрастающих функций (теоремы 1.58, 1.59, и лемма 1.11 из §5).

Так как $u(\rho,\alpha)$ – положительная гармоническая функция, то:

$$\int_0^\theta u(\rho,\alpha)d\alpha\le\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)d\alpha=2\pi u(0),$$

откуда следует:

$$0\le\varphi_\rho(\theta)\le 2\pi u(0).$$

По первой теореме Хелли существует последовательность $\{\rho_n\}$, сходящаяся к единице и такая, что $\lim\limits_{\rho_n\to 1}\varphi_{\rho_n}(\theta)=\psi(\theta)$ для всякой точки θ из интервала $(0,2\pi)$, кроме, быть может, счётного множества точек разрыва функции $\psi(\theta)$. Предельная функция $\psi(\theta)$ будет возрастающей ограниченной функцией.

Находим (в силу второй теоремы Хелли):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\psi(\theta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\varphi_{\rho_n}(\theta)+o(1),$$

где $o(1)\underset{\rho_n\to 1}{\to}0$. (Если $A\underset{r\to 1}{\to}0$, то $A=o(1)$).

Вторая теорема Хелли применима, так как полные изменения функций $\varphi_\rho(\theta)$ равны:

$$\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)d\alpha=u(0)$$

и, поэтому, ограничены.

Из (84) и последней формулы получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\psi(\theta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}u(\rho_n,\theta)d\theta+o(1)=$$

$$=u(\rho_n z)+o(1).$$

Переходя к пределу при стремлении $\rho_n\to 1$, из последнего равенства найдем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\psi(\theta)=u(z). \quad ◀$$

В заключение этого пункта заметим, что функция $\psi(\theta)$ в интеграле Пуассона – Стилтьеса определялась при помощи соотношения

$$\psi(\theta)=\lim_{r_n\to 1}\int_0^{\theta}u\left(r_n e^{i\alpha}\right)d\alpha$$

во всякой точке непрерывности функции $\psi(\theta)$, $0<\theta<2\pi$, где $u\left(re^{i\theta}\right)$ есть функция из равенства (83). Можно показать, что данная функция $u(z)$ допускает единственное представление такого вида, то есть если $\psi_1(\theta)$ есть функция с ограниченным изменением на сегменте $[0,2\pi]$ и

$$u\left(re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\psi_1(\theta),$$

то функция $\psi_1(\theta)$ в каждой точке непрерывности (с точностью до постоянного слагаемого) равна функции $\psi(\theta)=\lim\limits_{r_n\to 1}\int_0^{\theta}u\left(r_n e^{i\alpha}\right)d\alpha$.

Г Л А В А II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В КРУГЕ

§ 1. О выборе длины дуги в качестве параметра

1. Векторная функция и ее производная

Функции, *значениями которых являются векторы, а аргументами – числа, называются* ***векторными функциями*** (*числового аргумента*) или ***вектор-функциями.***

Их будем обозначать $\bar{r}(t)$, $t \in X$, где X – некоторое числовое множество. Задание вектор-функции на плоскости эквивалентно заданию двух скалярных (числовых) функций $x(t), y(t)$, являющихся ее координатами (координатными функциями):

$$\bar{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big), \quad t \in X .$$

Длина вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$.

Вектор $\bar{a}$ *называется* ***пределом векторной функции*** $\bar{r}(t)$, $t \in X$, *при стремлении* $t \to t_0$ (*в точке* $t = t_0$), *если*:

$$\lim_{t \to t_0} |\bar{r}(t) - \bar{a}| = 0 . \tag{1}$$

И в этом случае пишут:

$$\lim_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{a} . \tag{2}$$

В этом определении $|\bar{r}(t) - \bar{a}|$ – числовая функция. Таким образом, понятие предела векторной функции сводится к понятию предела (1) скалярной функции. Вспомнив определение этого понятия, получим: (2) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех

$$t \in X \bigcap \hat{U}_{\delta}(t_0)$$

выполняется неравенство:

$$\left|\bar r(t)-\bar a\right|<\varepsilon,$$

где $\hat{U}_\delta(t_0)$ – проколотая δ-окрестность точки t_0.

Если $\bar r(t)=(x(t),y(t))$ и $\bar a=(a_1,a_2)$, то

$$\left|\bar r(t)-\bar a\right|=\sqrt{\left(x(t)-a_1\right)^2+\left(y(t)-a_2\right)^2} \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\left|x(t)-a_1\right|\le\left|\bar r(t)-\bar a\right|, \qquad \left|y(t)-a_2\right|\le\left|\bar r(t)-\bar a\right|. \tag{4}$$

Поэтому:

$$\lim_{t\to t_0}\bar r(t)=\bar a \tag{5}$$

в том и только том случае, когда:

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=a_1, \qquad \lim_{t\to t_0}y(t)=a_2. \tag{6}$$

Действительно, в силу соотношений (3) и (4), для того чтобы выполнялось условие (1), необходимо и достаточно, чтобы:

$$\lim_{t\to t_0}\left|x(t)-a_1\right|=0, \qquad \lim_{t\to t_0}\left|y(t)-a_2\right|=0.$$

Пусть t_0 *– конечная точка и пусть для векторной функции* $\bar r(t)$, $t\in X$, *имеет место равенство*:

$$\lim_{t\to t_0}\bar r(t)=\bar r(t_0).$$

Тогда эта векторная функция *называется* ***непрерывной в точке*** t_0.

Пусть вектор-функция $\bar r(t)$ определена в окрестности точки t_0. Тогда отношение $\dfrac{\bar r(t)-\bar r(t_0)}{t-t_0}$ определено в соответствующей проколотой окрестности этой точки.

Предел $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\bar r(t)-\bar r(t_0)}{t-t_0}$ (*если он существует*) *называется* ***производной данной векторной функции в точке*** t_0. *Производная обозначается* $\bar r'(t_0)$.

Производная векторной функции в точке есть вектор. Его можно записать и так:

$$\bar r'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar r}{\Delta t},$$

если положить: $\Delta t=t-t_0$, $\Delta\bar r=\bar r(t_0+\Delta t)-\bar r(t_0)$.

Из (5) и (6) следует:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar r(t_0+\Delta t)-\bar r(t_0)}{\Delta t}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}\right).$$

Поэтому, для того чтобы функция $\bar r(t)=(x(t),y(t))$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, имела производную в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$ и $y(t)$ имели производные при значении $t=t_0$, причем в этом случае:

$$\bar{r}'(t_0)=\left(x'(t_0),y'(t_0)\right),\quad \left|\bar{r}'(t_0)\right|=\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}\,.$$

Ниже нам потребуется правило дифференцирования скалярного произведения, которое определяется равенством $(\bar{p},\bar{q})'=(\bar{p}',\bar{q})+(\bar{p},\bar{q}')$. Действительно, пусть $\bar{p}=\bar{p}(t)=(x,y)=(x(t),y(t))$, $\bar{q}=\bar{q}(t)=(\xi,\eta)=(\xi(t),\eta(t))$ и все появляющиеся производные существуют в рассматриваемой точке t. Тогда $(\bar{p},\bar{q})'=(x\xi+y\eta)'=x'\xi+y'\eta+x\xi'+y\eta'=((x',y'),(\xi,\eta))+((x,y),(\xi',\eta'))$, откуда и следует доказываемое равенство.

Аналогом формулы конечных приращений Лагранжа для векторных функций является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть векторная функция* $\bar{r}(t)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема внутри него. Тогда существует такая точка* $\xi\in(a,b)$*, что*:

$$\left|\bar{r}(b)-\bar{r}(a)\right|\le(b-a)\left|\bar{r}'(\xi)\right|. \tag{7}$$

$\triangleright$ Если $\bar{r}(a)=\bar{r}(b)$, то (7) справедливо при любом выборе точки $\xi\in(a,b)$, т. к. его левая часть обращается в нуль. Пусть $\bar{r}(a)\ne\bar{r}(b)$. Оценим длину $\left|\bar{r}(b)-\bar{r}(a)\right|$ вектора $\bar{r}(b)-\bar{r}(a)\ne\bar{0}$. Если задан какой-нибудь ненулевой вектор $\bar{p}$, то, обозначая $\bar{e}$ орт вектора $\bar{p}$ $(\bar{e}=\dfrac{\bar{p}}{|\bar{p}|})$, получим $|\bar{p}|=(\bar{p},\bar{e})$, т. к. $(\bar{p},\bar{e})=|\bar{p}||\bar{e}|\cos(\widehat{\bar{p},\bar{e}})=|\bar{p}|$ $\quad((\widehat{\bar{p},\bar{e}})=0)$. Поэтому, если $\bar{e}$ – орт вектора $\bar{r}(b)-\bar{r}(a)\ne\bar{0}$, то:

$$\left|\bar{r}(b)-\bar{r}(a)\right|=\left(\bar{r}(b)-\bar{r}(a),\bar{e}\right)=\left(\bar{r}(b),\bar{e}\right)-\left(\bar{r}(a),\bar{e}\right),$$

т. е. получили разность значений числовой функции:

$$f(t)=\left(\bar{r}(t),\bar{e}\right), \tag{8}$$

принимаемых ей на концах отрезка $[a,b]$:

$$\left|\bar{r}(b)-\bar{r}(a)\right|=f(b)-f(a). \tag{9}$$

Из (8) следует, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b). В силу формулы конечных приращений Лагранжа существует точка $\xi\in(a,b)$, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. Согласно правилу дифференцирования скалярного произведения, имеем $f'(t)=\left(\bar{r}'(t),\bar{e}\right)$ $\left(\bar{e}=\dfrac{\bar{r}(b)-\bar{r}(a)}{\left|\bar{r}(b)-\bar{r}(a)\right|}\right.$ не зависит от параметра t). Отсюда получаем:

$$f(b)-f(a)=(\bar{r}'(\xi),\bar{e})(b-a),\quad a<\xi<b. \qquad (10)$$

Для любых двух векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$ имеет место неравенство:

$(\bar{p},\bar{q})\le|\bar{p}||\bar{q}|$, в частности, $(\bar{r}'(\xi),\bar{e})\le|\bar{r}'(\xi)||\bar{e}|=|\bar{r}'(\xi)|$.

Тогда из (10) получаем $f(b)-f(a)\le|\bar{r}'(\xi)|(b-a)$. Из этого неравенства и (9) следует неравенство (7). ◀

2. Понятие пути

Будем рассматривать отображения отрезков в плоскость R^2. Пусть $[a,b]$ – некоторый отрезок, а $r(t)$ – его отображение в R^2, то есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t\in[a,b]$ точку $r(t)$ плоскости R^2 $(r:[a,b]\to R^2)$. Пусть в плоскости R^2 фиксирована система координат. В этом случае задание точки плоскости равносильно заданию двух ее координат. Обозначим:

$$r(t)=(x(t),y(t)). \qquad (11)$$

Тогда задание отображения $r(t)$ оказывается равносильным заданию двух числовых функций $x(t),y(t)$, называемых *координатными функциями отображения* $r(t)$.

Заметим, что если интерпретировать плоскость R^2 как комплексную, то задание точки плоскости можно считать равносильным заданию комплексного числа (что и будем делать), аффиксом которого является эта точка. Тогда обозначение (11) будет равносильно обозначению:

$$z(t)=x(t)+iy(t). \qquad (12)$$

Этим замечанием мы воспользуемся ниже, а пока дадим определение.

Аффиксом *комплексного числа* $z=x+iy$ *называется* ***точка*** (x,y) ***комплексной плоскости.***

Понятие предела отображения $r(t)$ определим с помощью его координатных функций.

Будем говорить, что ***отображение*** $r(t)$ ***имеет предел в точке*** t_0***,*** *если в этой точке имеют предел координатные функции, причем, по определению*:

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=\left(\lim_{t\to t_0} x(t),\lim_{t\to t_0} y(t)\right).$$

Отображение $r(t)$ *называется* ***непрерывным на отрезке*** $[a,b]$***,*** *если на этом отрезке непрерывны его координатные функции. В этом случае*:

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = \left(\lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t)\right) = \left(x(t_0), y(t_0)\right) = r(t_0).$$

Последнее равенство в записанной цепочке равенств выполняется в силу (11). Для отображения $r(t)$ будем обозначать $\bar{r}(t)$ векторную функцию, у которой координаты вектора $\bar{r}(t)$ совпадают с координатами точки $r(t)$, т. е. $\bar{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$.

Будем *только что указанные* ***отображение*** $r(t)$ ***и векторную функцию*** $\bar{r}(t)$ *называть* ***соответствующими друг другу.***

Очевидно, что отображение $r(t)$, $a \le t \le b$, непрерывно на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке непрерывна соответствующая ему векторная функция $\bar{r}(t)$. Действительно, векторная функция непрерывна на отрезке в том и только том случае, когда на нем непрерывны все ее координаты (п. 1), что, по определению, является условием непрерывности отображения $r(t)$ на отрезке.

Непрерывное отображение *отрезка в плоскость называется* ***путём****, а* ***образ отрезка*** *при рассматриваемом отображении –* ***носителем*** *этого пути.*

Одно и то же множество точек плоскости может быть непрерывным образом отрезков при различных отображениях, т.е. оно может быть носителем разных путей. В связи со сказанным, ниже введем понятие эквивалентных между собой путей. Здесь же отметим, что непрерывные отображения отрезков в плоскость не предполагаются взаимно однозначными, поэтому для данного пути:

$$r(t) \in R^2, \qquad r(t) = (x(t), y(t)), \qquad a \le t \le b, \tag{13}$$

в одну и ту же точку плоскости может отобразиться несколько точек отрезка $[a,b]$.

Точки *носителя пути* (13)*, в которые отображается более одной точки отрезка* $[a,b]$*, называются* ***кратными точками*** *или* ***точками самопересечения*** *этого носителя.*

Для пути (13) *переменная* t *называется его* ***параметром.*** *При* $r(a) = r(b)$ *путь называется* ***замкнутым,*** *а его носитель –* ***замкнутым контуром****. Замкнутый контур, не имеющий точек самопересечения, кроме точки* $M_{a,b} = r(a) = r(b)$*, называется* ***простым замкнутым контуром****.* ***Образ отрезка*** *при его взаимно однозначном и непрерывном отображении в плоскость называется* ***простой дугой*** *(точки самопересечения у такой дуги отсутствуют).*

Как уже было сказано, путь можно задавать в координатном виде. Иначе говоря, можно задавать координаты точки $r(t)$ как функции параметра t :

$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big), \quad a \le t \le b.$$

В этом случае пара функций $x(t),\ \ y(t)$, $a \le t \le b$, называется координатным представлением пути.

Отображение (13) можно задать и соответствующей ему векторной функцией:

$$\bar{r}(t), \quad a \le t \le b, \tag{14}$$

где, как обычно, вектор $\bar{r}(t)$ имеет те же координаты, что и точка $r(t)$. Всегда будет предполагаться (если не оговорено другое), что вектор $\bar{r}(t)$ является радиус-вектором с началом в начале координат. В этом случае векторная функция $\bar{r}(t)$ называется векторным представлением пути (13).

Кроме того, отображение (13) можно задать и в комплексном виде (см. (12)):

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \le t \le b.$$

При задании *отображения* $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, *пара функций* $x(t)$, $y(t)$ *называется* ***координатным представлением пути.*** *При задании соответствующей векторной функции* $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, *эта функция называется* ***векторным представлением пути.*** *При задании комплексного числа* $z(t) \in R^2$, $z(t) = x(t) + iy(t)$, R^2 *рассматривается как комплексная плоскость, говорим о* ***комплексном представлении пути.***

Путь $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $a \le t \le b$, называется n раз (непрерывно) дифференцируемым путём, если все его координатные функции n раз (непрерывно) дифференцируемы на отрезке $[a,b]$.

Путь:

$$r(t), \quad a \le t \le b, \tag{15}$$

называется ***эквивалентным пути***

$$\rho(\tau), \quad \alpha \le \tau \le \beta, \tag{16}$$

если существует такая непрерывная строго монотонная функция φ, *отображающая отрезок* $[\alpha, \beta]$ *на отрезок* $[a,b]$, *что для каждого* $\tau \in [\alpha, \beta]$ *справедливо равенство*:

$$r\big(\varphi(\tau)\big) = \rho(\tau). \tag{17}$$

Функция φ *при этом называется* ***допустимым преобразованием параметра*** τ *в параметр* t *или* ***отображением, осуществляющим эквивалентность путей*** (15) *и* (16).

Если путь (15) эквивалентен пути (16), то будем писать $r(t) \sim \rho(\tau)$.

З а м е ч а н и е 2.1. Если пути (15) и (16) эквивалентны, то их носители совпадают.

Справедливость замечания непосредственно следует из (17).

Легко убедиться в том, что понятие эквивалентного пути, введённое выше и обозначенное символом $r(t) \sim \rho(\tau)$, обладает следующими свойствами:

1) $r(t) \sim r(t)$ (*рефлективность)*;

2) если $r(t) \sim \rho(\tau)$, то $\rho(\tau) \sim r(t)$ (*симметричность*);

3) если $r(t) \sim \rho(\tau)$ и $\rho(\tau) \sim \xi(\sigma)$, то $r(t) \sim \xi(\sigma)$ (*транзитивность*).

В математике существует понятие «отношение эквивалентности», обладающее перечисленными свойствами 1– 3. Так что понятие эквивалентного пути является его частным случаем. Рассмотрим это более общее понятие.

Пусть есть множество $A = \{x, y, z, ...\}$ и множество T упорядоченных пар элементов (элементы пары берутся из множества A). Множество *всех* элементов, которые присутствуют в парах множества T и являются *первыми* элементами этих пар, обозначим символом B. Множество B будет подмножеством множества A.

Если пара $(x, y) \in T$, т.е. $x \in B$, то будем говорить, что элемент y *эквивалентен* элементу x, и писать $y \sim x$.

Пусть, например, множество $T = \{(x, y), (x, z)\}$. В этом случае $B = \{x\}$ и $y \sim x$, $z \sim x$. Будем теперь рассматривать не произвольное множество T упорядоченных пар элементов, взятых из множества A, а множество T_E, удовлетворяющее следующим трём требованиям:

1) если элемент $x \in A$ присутствует первым элементом некоторой пары в T_E, то пара (x, x) содержится во множестве пар T_E (свойство рефлективности);

2) если пара (x, y) присутствует во множестве T_E, то пара (y, x) также присутствует в T_E (свойство симметричности);

3) если пары (x, y) и (y, z) присутствуют в T_E, то во множестве T_E присутствует и пара (x, z) (свойство транзитивности).

Если множество $T = \{(x, y), (x, z)\}$, рассмотренное выше, подчинить этим требованиям 1–3, т. е. превратить его в подмножество T_E, то оно примет вид:

$$T_E = \{(x, y), (x, z), (x, x), (y, x), (z, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, y)\},$$

при этом множество B будет содержать все элементы, присутствующие в парах множества T_E. По данному выше определению эквивалентности двух элементов множества A каждый из трех элементов x, y, z будет теперь эквивалентен каждому из этих элементов, в том числе и самому себе. Другими словами, эти элементы будут попарно эквивалентны.

Если есть подмножество пар T_E и в это подмножество не вошли в качестве элементов пар принадлежащие множеству A элементы $a,b,c,\ldots$, то будет подразумеваться, по умолчанию, что рассматриваются еще подмножества пар $\{(a,a)\}$, $\{(b,b)\}$, $\{(c,c)\}$, …, в которые и вошли эти элементы. И тогда будет $a \sim a$, $b \sim b$, $c \sim c$,…. Каждое из этих последних подмножеств пар состоит из одного элемента. Требование транзитивности имеет смысл только в случае наличия в подмножестве не менее двух элементов, а оставшиеся два требования, предъявляемые к подмножеству T_E, выполняются. Таким образом, задав множество T_E (и множества по умолчанию), для каждого элемента x множества A будем знать *все элементы* этого множества, которые эквивалентны элементу x. *В этом случае будем говорить, что во множестве A задано* ***отношение эквивалентности.***

Отметим: имея подмножество пар T_E, мы могли бы взять подмножество $A_1 = A - B$ элементов из A: $a,b,c,\ldots$, не вошедших в качестве элементов пар в T_E (не обязательно все), и распорядиться множеством A_1, рассмотрев множество пар T_{1E} в полной аналогии с T_E. В этом случае мы бы имели два множества пар с числом элементов более одного. Если бы в A остались ещё элементы, не вошедшие во множества пар, можно было бы рассмотреть T_{2E} и т. д.

Теорема 2.2. *Если в некотором множестве задано отношение эквивалентности, то это множество является суммой своих попарно не пересекающихся подмножеств эквивалентных между собой элементов.*

$\triangleright$ Пусть $A = \{x, y, z, \ldots\}$ – множество, в котором задано отношение эквивалентности. Для каждого $x \in A$ обозначим A_x множество всех элементов множества A, эквивалентных элементу x. Покажем, что:

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x \tag{18}$$

и что это представление множества A является искомым, т. е. что слагаемые A_x попарно не пересекаются.

Для каждого $x \in A$ имеем $x \sim x$ (свойство рефлективности) и, следовательно, $x \in A_x$, т. е. каждый элемент множества A принадлежит некоторому множеству A_x, и поэтому:

$$A \subset \bigcup_{x \in A} A_x . \tag{19}$$

С другой стороны, каждый элемент каждого множества A_x, в силу принятого нами обозначения A_x, является элементом множества A.

Следовательно, каждое $A_x \subset A$ и потому:

$$\bigcup_{x \in A} A_x \subset A . \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает равенство (18).

Докажем, что любые два элемента каждого из множеств A_x эквивалентны между собой. Пусть $y \in A_x$, $z \in A_x$, т.е. $y \sim x$ и $z \sim x$. В силу симметричности отношения эквивалентности, отсюда следует, что $x \sim z$, и тогда, в силу транзитивности этого отношения, из эквивалентностей $y \sim x$ и $x \sim z$ получаем $y \sim z$. В силу же симметричности $z \sim y$. Итак, показано, что любые два элемента каждого из множеств A_x эквивалентны между собой. Эти множества A_x будем называть *классами* эквивалентных между собой элементов.

Покажем, что слагаемые в правой части (18) попарно не пересекаются. Именно, покажем, что для любых двух элементов x, y множества A_x, A_y либо совпадают, либо не пересекаются. Пусть у множеств A_x и A_y найдется хотя бы один общий элемент $z_1 \in A_x \bigcap A_y$ и пусть $z_2 \in A_x$ есть произвольный элемент множества A_x, отличный от элемента z_1. Как уже доказано, $z_2 \sim z_1$, а, согласно обозначению A_y, $z_1 \sim y$. Отсюда вытекает, что $z_2 \sim y$ (в силу транзитивности). Согласно же обозначению, A_y содержит *все элементы* множества A, эквивалентные элементу y, значит, $z_2 \in A_y$. Последнее означает (поскольку z_2 – произвольный элемент множества A_x), что любой элемент множества A_x принадлежит множеству A_y, т. е.:

$$A_x \subset A_y . \tag{21}$$

Аналогично доказательству включения (21) проводится доказательство включения:

$$A_y \subset A_x . \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что $A_x = A_y$.

Таким образом, если у множеств A_x, A_y имеется хотя бы один общий элемент, то они совпадают; если же такого общего элемента нет, то это означает, что эти множества не пересекаются. ◀

3. Понятие кривой

Вернемся к определению эквивалентных путей. Согласно доказанной теореме, если в некотором множестве элементов задано отношение эквивалентности, то это множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. Как отмечалось выше, эквивалентность путей $r(t) \sim \rho(\tau)$ обладает следующими свойствами:

1) $r(t) \sim r(t)$ (*рефлективность)*;

2) если $r(t) \sim \rho(\tau)$, то $\rho(\tau) \sim r(t)$ (*симметричность*);

3) если $r(t) \sim \rho(\tau)$ и $\rho(\tau) \sim \xi(\sigma)$, то $r(t) \sim \xi(\sigma)$ (*транзитивность*);

т. е. во множестве путей задано отношение эквивалентности. Значит, оно распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой путей.

Всякий класс Γ *эквивалентных путей назовём* ***кривой*** (***имеющей параметрическое задание***).

Каждый путь *из этого класса, т. е. отображение вида* (13), *называется* ***представлением кривой*** Γ, *пара соответствующих координатных функций* (11) *– ее* ***координатным представлением****, а соответствующая векторная функция – ее* ***векторным представлением.***

Очевидно, что кривая, имеющая параметрическое задание, однозначно определяется каждым из своих представлений, т. к. если имеется один путь, то все эквивалентные ему пути получаются с помощью всевозможных допустимых преобразований параметров. Значит, чтобы задать кривую, надо задать некоторое ее представление. Кривая Γ, заданная каким-либо своим представлением вида (13), (11) или (14), обозначается соответственно следующим образом:

$$\Gamma = \{r(t) : a \le t \le b\}, \quad \Gamma = \{x(t), y(t) : a \le t \le b\}, \quad \Gamma = \{\bar{r}(t) : a \le t \le b\}.$$

Так как два эквивалентных пути имеют один и тот же носитель (см. замечание), то носители всех путей, составляющих кривую, т. е. всех путей, эквивалентных между собой, *совпадают.*

Общий носитель *всех представлений данной кривой называется* ***носителем этой кривой.***

В случае, когда все пути, составляющие кривую, являются взаимно однозначными и непрерывными отображениями соответствующих отрезков в плоскость (для этого достаточно, чтобы этим свойством обладал хотя бы один путь, т. е. хотя бы одно представление кривой) и, следовательно, их носители являются простыми дугами, то и сама ***кривая*** *называется* ***простой дугой.***

Два n раз (непрерывно) дифференцируемых пути называются ***n раз (непрерывно) дифференцируемо эквивалентными,*** *если существует функция φ, осуществляющая их эквивалентность в смысле данного выше определения, которая как сама, так и ей обратная n раз (непрерывно) дифференцируемы.*

Данным определением задается отношение эквивалентности (оно обладает свойствами рефлективности, симметричности и транзитивности).

Всякое множество *n раз (непрерывно) дифференцируемых и n раз (непрерывно) дифференцируемо эквивалентных между собой путей называется* ***n раз (непрерывно) дифференцируемой кривой (имеющей параметрическое задание).***

Каждый из путей, *входящих в данную кривую, называется* ***её представлением*** *и полностью определяет кривую, т. е. множество всех эквивалентных ему путей в указанном смысле.* ***Функция,*** *осуществляющая эквивалентность двух представлений одной и той же кривой, называется* ***допустимым преобразованием параметра. Точка*** *$r(t)$ кривой Γ, в которой $\bar{r}'(t) \neq 0$, называется* ***неособенной,*** *а* ***точка****, в которой $\bar{r}'(t) = 0$, –* ***особой.***

Легко понять, что в данной точке кривой при всех представлениях $\bar{r}(t)$ этой кривой либо одновременно $\bar{r}' \neq 0$, либо $\bar{r}' = 0$. Поэтому неособенная точка при одном представлении дифференцируемой кривой будет такой же и при другом ее представлении. Другими словами, понятия неособенной и особой точек не зависит от выбора представления кривой.

Если $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, то из равенства $|\bar{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ имеем: *точка $(x(t), y(t))$ кривой Γ неособенная тогда и только тогда, когда в ней имеет место неравенство $x'^2 + y'^2 > 0$, т. е. хотя бы одна из производных x', y' не обращается в нуль.*

Непрерывно дифференцируемая кривая *без особых точек называется* ***гладкой.***

4. Длина кривой

Для отрезка $[a,b]$ *всякую систему его точек* t_i, $i=0,1,2,...,i_\tau$, *таких, что* $a=t_0<t_1<...<t_{i-1}<t_i<...<t_{i_\tau}=b$, *будем называть его* ***разбиением*** *и обозначать это разбиение* $\chi=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_\chi}$.

Пусть задана кривая $\Gamma=\{\bar r(t), a\le t\le b\}$ и пусть $\chi=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_\chi}$ – некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Положим $\sigma_\chi=\sum_{i=1}^{i_\chi}|\bar r(t_i)-\bar r(t_{i-1})|$. Очевидно, σ_χ – длина ломаной линии с вершинами $r(a)$, $r(t_1)$, …, $r(b)$, т. е. ломаной, вписанной в Γ.

Для заданной кривой $\Gamma=\{r(t): a\le t\le b\}$ *величина* $S_\Gamma=\sup\limits_\chi \sigma_\chi$, *где верхняя грань взята по всевозможным разбиениям* χ *отрезка* $[a,b]$, *называется* ***длиной кривой*** Γ***. Если*** $S_\Gamma<+\infty$, *то кривая* Γ *называется* ***спрямляемой.***

Теорема 2.3 (достаточное условие справедливости неравенства $S_\Gamma<\infty$). *Если кривая* $\Gamma=\{\bar r(t): a\le t\le b\}$ *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина* S_Γ *удовлетворяет неравенству*:

$$|\bar r(b)-\bar r(a)|\le S_\Gamma\le M(b-a), \tag{23}$$

где

$$M=\max_{[a,b]}|\bar r'(t)|. \tag{24}$$

$\triangleright$ Сначала отметим, что, в силу непрерывности производной $\bar r'(t)$, ее абсолютная величина $|\bar r'(t)|$ также непрерывна и поэтому достигает на отрезке $[a,b]$ своего наибольшего значения M.

Возьмем какое-либо разбиение $\chi=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_\chi}$ отрезка $[a,b]$. Применив неравенство (7), получим

$$|\bar r(b)-\bar r(a)|=\left|\sum_{i=1}^{i_\chi}\bar r(t_i)-\bar r(t_{i-1})\right|\le\sum_{i=1}^{i_\chi}|\bar r(t_i)-\bar r(t_{i-1})|\le\sum_{i=1}^{i_\chi}|\bar r'(\xi_i)|(t_i-t_{i-1}), \tag{25}$$

где $\xi_i\in(t_{i-1},t_i)$, $i=1,2,...,i_\chi$. Так как $\sum_{i=1}^{i_\chi}|\bar r(t_i)-\bar r(t_{i-1})|=\sigma_\chi$ – длина, вписанной в кривую Γ ломаной, соответствующей разбиению χ, и для всех значений
$i=1,2,...,i_\chi$, в силу (24), имеет место неравенство $|\bar r'(\xi_i)|\le M$, то из (25) для любого разбиения χ имеем:

$$|\bar r(b)-\bar r(a)|\le\sigma_\tau\le M\sum_{i=1}^{i_\chi}(t_i-t_{i-1})=M(b-a).$$

Перейдя в этом неравенстве к точной верхней грани по χ, получим утверждение теоремы. ◀

Теорема 2.4. *Пусть кривая* $\Gamma = \{\bar{r}(t) = (x(t), y(t)); a \le t \le b\}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги* s, *отсчитываемая от начала* $r(a)$ *кривой* Γ, *есть возрастающая непрерывно дифференцируемая функция параметра* t *и*:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \left|\frac{dr}{dt}\right|.$$

Отметим, что переменную длину дуги можно отсчитывать и от конца $r(b)$ этой кривой и говорить об убывающей функции параметра. Мы, однако, далее ***всегда*** будем иметь в виду ***возрастающую функцию*** параметра t.

▷ Пусть $s = s(t)$ – длина дуги кривой Γ от точки $r(a)$ до точки $r(t)$. Пусть $t_0 \in [a,b]$, $t_0 + \Delta t \in [a,b]$ и $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Очевидно, что функция $s = s(t)$ возрастает на отрезке $[a,b]$ (если $\Delta t > 0$, то $\Delta s \ge 0$; если же $\Delta t < 0$, то $\Delta s \le 0$). Поэтому всегда $\frac{\Delta s}{\Delta t} \ge 0$. Применив (23) к части кривой Γ, соответствующей отрезку $[t_0, t_0 + \Delta t]$ в случае $\Delta t > 0$ или отрезку $[t_0 + \Delta t, t_0]$ в случае $\Delta t < 0$, получим $|\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)| \le |\Delta s| \le M|\Delta t|$.
Откуда

$$\left|\frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \frac{\Delta s}{\Delta t} \le M, \qquad (26)$$

где теперь M – наибольшее значение $|\bar{r}'(t)|$ на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ или на отрезке $[t_0 + \Delta t, t_0]$ в зависимости от знака Δt.

В силу непрерывности производной $\bar{r}'(t)$, ее абсолютная величина $|\bar{r}'(t)|$ также непрерывна. Поэтому существует наибольшее значение $|\bar{r}'(t)|$ на отрезке длины $|\Delta t|$ и оно достигается в некоторой точке $\xi = t_0 + \theta\Delta t$, $0 < \theta < 1$, этого отрезка. Следовательно, (26) можно переписать в виде:

$$\left|\frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \frac{\Delta s}{\Delta t} \le |\bar{r}'(t_0 + \theta\Delta t)|.$$

Перейдя теперь к пределу при $\Delta t \to 0$, и в левой части неравенства, в силу определения производной, и в правой его части, в силу непрерывности производной $\bar{r}'(t)$ в точке $t = t_0$, получим $|\bar{r}'(t_0)|$. Но тогда из последнего двойного неравенства следует, что предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и равен $|\bar r'(t_0)|$, т. е. существует производная $s'(t_0)$ и имеет место равенство $s'(t_0)=|\bar r'(t_0)|$.

Если $\bar r(t)=(x(t),y(t))$, то $\bar r'(t)=(x'(t),y'(t))$, $s'(t)=|\bar r'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$. ◀

Следствие 2.1. *Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой является переменная длина дуги s, то* $\left|\frac{d\bar r}{ds}\right|=1$.

Это сразу следует из равенства $s'(t)=|\bar r'(t)|$ $\left(\left|\frac{d\bar r}{dt}\right|=\frac{ds}{dt}\right)$ при $t=s$.

Следствие 2.2. *Для всякой непрерывно дифференцируемой кривой Γ без особых точек, т. е. для всякой гладкой кривой, существует ее представление $\bar r=\bar r(s)$, в котором за параметр s взята переменная длина дуги кривой Γ.*

▷ Пусть непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma=\{\bar r(t); a\le t\le b\}$ не имеет особых точек, т. е. неравенство $\bar r'(t)\ne 0$ справедливо для всех точек $t\in[a,b]$. Тогда переменная длина дуги $s=s(t)$ является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой функцией, поскольку неравенство $\frac{ds}{dt}=|\bar r'|>0$ выполняется во всех точках отрезка $[a,b]$. Поэтому существует обратная функция $t=t(s)$, $0\le s\le S_\Gamma$, которая также строго возрастает и имеет непрерывную и не обращающуюся в нуль производную на отрезке $[0,S_\Gamma]$. Значит, функция $t=t(s)$ является допустимым преобразованием параметра для непрерывно дифференцируемых кривых без особых точек, и представление $\bar r=\bar r(t(s))=(x(t(s)),y(t(s)))$ является искомым представлением, в котором роль параметра играет переменная длина дуги. ◀

В указанной выше интерпретации будем иметь $z(t(s))=x(t(s))+iy(t(s))$ (см. (11), (12), (14)). По поводу содержания §1 смотри [13_1, т. I, гл. I, § 15, § 16].

§ 2. Регулярные функции

1. Дифференцируемые функции. Теоремы Коши и Мореры

Пусть *множество $D\subset R_2$.* ***Множество*** *D называется* ***связным,*** *если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой (в частности, ломаной), принадлежащей этому множеству.* ***Связное открытое*** *множество G называется* ***областью.*** ***Область*** *$G\subset R_2$ называется* ***односвязной,*** *если*

любой замкнутый контур, *лежащий в области* G, *можно непрерывно деформировать в точку этой области, оставаясь в течение всего времени деформации в этой области* G.

Граничной точкой *области* G *называется такая точка, которая сама не принадлежит области* G, *но в любой ее окрестности есть точки, принадлежащие* G. ***Совокупность*** *всех граничных точек области* G *называется* ***границей*** ∂G *этой области.* ***Область*** G *с присоединенной к ней границей* ∂G *называется* ***замкнутой областью*** $\overline{G}$: $\overline{G} = G \bigcup \partial G = G + \partial G$.

Поскольку между множествами всех комплексных чисел $z = x_1 + ix_2$ и всех точек (x_1, x_2) плоскости R^2 существует взаимно однозначное соответствие, то будем плоскость R^2 называть еще и ***комплексной плоскостью.*** Кроме того, будем употреблять термины «комплексное число $z = x_1 + ix_2$» и «точка $z = x_1 + ix_2$» (или «точка (x_1, x_2)») как такие, которые обозначают одно и то же понятие.

Пусть $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ – функция комплексной переменной z, определенная и однозначная в некоторой области G, $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$ – некоторая определенная точка области G, $z_0 \in G$.

Если *существует конечный предел*:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

(z *стремится к* z_0 *любым образом*), *то он называется* ***производной*** $f'(z_0)$ *функции* $f(z)$ *в точке* z_0 ($z \in G$, $z \neq z_0$). ***Функция*** $f(z)$ *называется при этом* ***дифференцируемой*** *в точке* z_0. ***Однозначная функция*** $f(z)$ *называется* ***дифференцируемой в области,*** *если она является* ***дифференцируемой в каждой точке этой области.***

Теорема 2.5. *Функция* $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ *является функцией, дифференцируемой в точке* $z = x_1 + ix_2$, $z \in G$, *тогда и только тогда, когда функции* u, v *(ее действительная и мнимая части) дифференцируемы в той же точке* (x_1, x_2) *и выполняются условия:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

которые называются ***условиями Даламбера – Эйлера (Коши – Римана).***

Следствие 2.3. *Если все частные производные функций* u, v *непрерывны в точке* (x_1, x_2) *и удовлетворяют условиям Даламбера – Эйлера, то функция* $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ *дифференцируема в точке* $z = x_1 + ix_2$ [20, раздзел 18, § 18.2, п. 2°].

Теорема 2.6 (теорема Коши для односвязной области). *Если* $f(z)$ *– функция, определенная в односвязной области* G *и дифференцируемая в ней, а* L *– замкнутая спрямляемая кривая, которая целиком принадлежит области* G*, то имеет место равенство*:

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Следствие 2.4. *Пусть* $f(z)$ *есть функция, определенная и дифференцируемая в односвязной области* G*,* z_1, z_2 *– внутренние точки области* G*,* L *– некоторая спрямляемая кривая, которая соединяет точки* z_1, z_2 *и целиком лежит в области* G*. Тогда значение интеграла* $\int_L f(z)dz$ *зависит только от точек* z_1, z_2.

В связи с вышесказанным, для дифференцируемой функции наряду с обозначением интеграла $\int_L f(z)dz$ можно пользоваться также обозначением $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$. Начальная и конечная точки z_1, z_2 линии интегрирования называются при этом соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Зафиксируем точку z_0 и рассмотрим интеграл $\int_{z_0}^{z} f(s)ds$ с переменным верхним пределом z как функцию верхнего предела:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds. \tag{27}$$

Теорема 2.7. *Пусть* $f(z)$ *есть функция, непрерывная в односвязной области* G*, для которой интегралы по произвольным спрямляемым кривым, соединяющим точки* z_0, z *и лежащим в области* G*, зависят только от этих точек. Тогда функция* $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$ *есть дифференцируемая функция в области* G *и справедливо равенство*:

$$F'(z) = f(z). \tag{28}$$

$\triangleright$ Пусть $z \in G$. Дадим переменной $z \in G$ произвольное приращение Δz, но такое, чтобы $z + \Delta z \in G$. Тогда:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \left|F(z+\Delta z) - F(z) - f(z)\Delta z\right|$$

В силу (27) получаем:

$$|F(z+\Delta z)-F(z)-f(z)\Delta z| =\left|\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds-\int_{z_0}^{z} f(s)ds-\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)ds\right|=$$

$$=\left|\int_{z_0}^{z} f(s)ds+\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds-\int_{z_0}^{z} f(s)ds-\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)ds\right|=$$

$$=\left|\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds-\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)ds\right|=\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\big(f(s)-f(z)\big)ds\right|\le\int_{z}^{z+\Delta z}|f(s)-f(z)|ds$$

(последний интеграл можно рассматривать, например, по отрезку прямой).

Поскольку $f(z)$ есть непрерывная функция, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при условии $|s-z|<\delta$ выполняется неравенство $|f(s)-f(z)|<\varepsilon$. Мы считаем, что интегрирование в последнем интеграле выполняется по переменной s вдоль отрезка длиной $|\Delta z|$. Поэтому, полагая, что $|\Delta z|<\delta$, получаем $|s-z|<\delta$ и, значит, при условии $|\Delta z|<\delta$ справедлива оценка:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(s)-f(z)|ds<\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon .$$

Последнее неравенство означает, что:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$$

В силу определения производной, предел в левой части последнего равенства есть производная $F'(z)$, т. е. (28) доказано для всех $z\in G$. ◀

Теорема 2.8 (Коши для конечносвязной области). *Пусть функция* $f(z)$ *является дифференцируемой в конечной области* D. *Если* G *– конечносвязная область, лежащая в области* D *вместе со своей границей* ∂G (*состоящей из конечного числа спрямляемых кривых*), *то, при условии, что граница обходится в положительном направлении:*

$$\int_{\partial G} f(z)dz=0.$$

Эту теорему принимаем без доказательства.

Теорема 2.9 (оценка модуля интеграла). *Модуль интеграла не превосходит максимума модуля подынтегральной функции, умноженного на длину пути интегрирования.*

▷ Пусть дан интеграл:

$$I = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz$$

и пусть $\max\limits_{z\in\Gamma} |f(z)| = M$, длина кривой Γ равна l. Рассмотрим *любую* интегральную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

и заметим, что: $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})| \le \sup \sum\limits_{k=1}^{n} |\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})| = l$,

где $\sup$ берётся по всевозможным разбиениям отрезка изменения параметра t (см. определение длины кривой в § 1). Отсюда получаем:

$$|\sigma_n| \le M \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \le M \cdot l, \quad \text{т.е.} \quad |I| \le Ml. \ \blacktriangleleft$$

Теорема 2.10 (интегральная формула Коши). *Пусть функция* $f(z)$ *дифференцируема в области* D *и пусть конечная область* G *лежит вместе со своей границей* C *в области* D*, а* $\zeta \in G$. *Тогда*:

$$\int\limits_{C} \frac{f(z)dz}{z-\zeta} = 2\pi i \cdot f(\zeta).$$

$\triangleright$ Функция $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z-\zeta}$ является отношением двух дифференцируемых функций, причём знаменатель дроби обращается в нуль только при значении $z = \zeta$. Поэтому функция $\varphi(z)$ является дифференцируемой во всех точках области D, за исключением точки $z = \zeta$. Возьмём $\rho > 0$ настолько малым, чтобы круг $|z-\zeta| \le \rho$ лежал в области G, и обозначим $\hat{D}$ область D, из которой удалена точка ζ, а G_ρ область G, из которой удалён круг $|z-\zeta| \le \rho$.

Функция $\varphi(z)$ дифференцируема в области $\hat{D}$, а область G_ρ лежит в области $\hat{D}$ вместе с границей, которую обозначим C_ρ. Следовательно, интеграл от $\varphi(z)$ по C_ρ равен нулю (теорема 2.8). Но граница C_ρ состоит из границы C и из окружности $|z-\zeta| = \rho$, причём интегрирование по окружности производится в таком направлении, чтобы область G_ρ оставалась слева, а круг $|z-\zeta| < \rho$ – справа. Поэтому, меняя направление интегрирования по окружности на противоположное, можем написать:

$$\int\limits_{C} \varphi(z)dz = \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} \varphi(z)dz.$$

Интеграл в левой части равенства не зависит от значения ρ. Поэтому при вычислении интеграла в правой части равенства можно распорядиться величиной ρ по своему усмотрению (не забывая, что ρ бралось достаточно малым). Для краткости введём обозначение Γ_ρ: $|z-\zeta|=\rho$. Тогда:

$$\int_{\Gamma_\rho}\varphi(z)dz=\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{z-\zeta}=f(\zeta)\int_{\Gamma_\rho}\frac{dz}{z-\zeta}+\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}dz=f(\zeta)\cdot I_1+I_2.$$

В интеграле I_2 подынтегральная функция при стремлении $z\to\zeta$ ограничена: она стремится к $f'(\zeta)$. Так как длина Γ_ρ равна $2\pi\rho$, то, в силу теоремы 2.9, $I_2\underset{\rho\to 0}{\to}0$. Интеграл же I_1 можно вычислить. Параметрическое уравнение окружности Γ_ρ имеет вид Γ_ρ: $z=\zeta+\rho e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$. Поэтому:

$$\int_{\Gamma_\rho}\frac{dz}{z-\zeta}=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}}d\theta=2\pi i.$$

Окончательно получаем:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_C\frac{f(z)dz}{z-\zeta}=f(\zeta)\cdot\lim_{\rho\to 0}I_1+\lim_{\rho\to 0}I_2 \quad \text{или} \quad \int_C\frac{f(z)dz}{z-\zeta}=2\pi i\cdot f(\zeta). \ ◀$$

Теорема 2.11 (Коши о существовании производной любого порядка). *Пусть* G – *односвязная область, ограниченная спрямляемой кривой* Γ, *и* $f(z)$ – *дифференцируемая функция в замкнутой области* $\overline{G}=G+\Gamma$. *Тогда в каждой точке* $z\in G$ *функция* $f(z)$ *имеет производную любого порядка* n, *где* n – *натуральное число. При этом справедлива формула*:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{29}$$

Теорема 2.12 (Мореры). *Пусть* $f(z)$ *есть непрерывная функция в односвязной области* G *и интеграл от нее по любой спрямляемой замкнутой кривой, принадлежащей этой области, равен нулю. Тогда* $f(z)$ *есть функция, дифференцируемая в области* G.

▷ Пусть точки z и z_0 – произвольные внутренние точки из области G. Условие, что интеграл от функции по любой замкнутой кривой равен нулю, равнозначно условию, что он зависит только от начальной точки и конечной точки линии интегрирования. Но тогда, согласно теореме 2.7, функция $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(s)ds$ является дифференцируемой функцией в области G и $F'(z)=f(z)$. В силу же теоремы 2.11 дифференцируемая функция имеет производные любого порядка, в частности, $F''(z)=f'(z)$ для любого $z\in G$. Последнее равенство и означает, что функция $f(z)$ является дифференцируемой в области G. ◀

2. Регулярные функции

Пусть дана функция $f(z,w)$, зависящая от переменной z и от параметра w, и пусть:

$$f(z,w)\underset{w\to w_0}{\to}\varphi(z)\quad (w\in G)$$

при любом фиксированном $z\in E$ (w_0 – здесь и далее, фиксированная точка того множества, которому принадлежит параметр w) .

Будем говорить, *что* ***стремление к пределу равномерно по*** $z\in E$, *если для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* $\delta>0$, *зависящее только от числа* ε, *но не зависящее от* w, *что при* $w\in G$, $0<|w-w_0|<\delta$, *и при всех* $z\in E$ *выполняется неравенство*:

$$|f(z,w)-\varphi(z)|<\varepsilon.$$

Теорема 2.13. *Если функция* $f(z,w)$ *при всех* $w\in G$ *непрерывна на множестве* E *как функция* z *и*

$$f(z,w)\underset{w\to w_0}{\to}\varphi(z)\quad (w\in G)$$

равномерно по $z\in E$, *то функция* $\varphi(z)$ *непрерывна на множестве* E.

Несложное доказательство этой теоремы опускаем.

Говорят: *последовательность функций* $\{f_n(z)\}$ *обладает* ***свойством равностепенной непрерывности*** (*короче,* ***равностепенной непрерывностью***), *если для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *которое зависит от* ε, *но не зависит от* n, *такое, что при* $z\in E$, $z'\in E$, $|z-z'|<\delta$, *для всех номеров* n *справедливы неравенства*:

$$|f_n(z)-f_n(z')|<\varepsilon.$$

Все функции $f_n(z)$ определены на множестве E.

Теорема 2.14 (Арцеля). *Если последовательность функций* $\{f_n(z)\}$ *равномерно ограничена и обладает свойством равностепенной непрерывности на множестве* E, *то из неё можно выделить подпоследовательность* $\{f_{n_k}(z)\}$, *равномерно сходящуюся по* $z\in E$ [27_1, гл. III, § 10].

Теорема 2.15. *Пусть функция* $f(z,w)$ *определена и непрерывна при* $z\in\Gamma$, $w\in G$, *где* G *– некоторое множество, а* Γ *– спрямляемая кривая. Если*:

$$f(z,w)\underset{w\to w_0}{\to}\varphi(z)\quad (w\in G)$$

равномерно по $z\in\Gamma$, *то*:

$$\int_\Gamma f(z,w)dz\underset{w\to w_0}{\to}\int_\Gamma \varphi(z)dz\qquad (w\in G).$$

$\triangleright$ Согласно определению равномерного стремления к пределу для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что при всех $z\in\Gamma$:

$$|f(z,w)-\varphi(z)|<\frac{\varepsilon}{l}\qquad (|w-w_0|<\delta,\quad w\in G),$$

где l – длина Γ. Применяя теорему 2.9, имеем:

$$\left|\int_\Gamma\left(f(z,w)-\varphi(z)\right)dz\right|<\frac{\varepsilon}{l}\cdot l=\varepsilon\qquad (|w-w_0|<\delta,\quad w\in G),\quad \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е 2.2. Записи пределов, произведённые в теореме с использованием символа «$\to$», равносильны в других обозначениях следующим записям:

$$f(z,w)\underset{w\to w_0}{\to}\varphi(z)\quad\Leftrightarrow\quad \lim_{w\to w_0} f(z,w)=\varphi(z),$$

$$\int_\Gamma f(z,w)dz\underset{w\to w_0}{\to}\int_\Gamma\varphi(z)dz\quad\Leftrightarrow\quad \lim_{w\to w_0}\int_\Gamma f(z,w)dz=\int_\Gamma\varphi(z)dz.$$

Будем применять и начальное обозначение предела, и ему равносильное.

Применяя теорему 2.9, можно доказать следующую теорему (принимаем без доказательства).

Теорема 2.16 (о повторном интегрировании). *Пусть функция* $f(z,w)$ *определена и непрерывна при* $z\in\Gamma$, $w\in C$ (Γ, C – спрямляемые кривые). *Тогда функция*:

$$F(w)=\int_\Gamma f(z,w)dz$$

непрерывна при $w\in C$ *и*

$$\int_C\int_\Gamma f(z,w)dzdw=\int_\Gamma\int_C f(z,w)dwdz.$$

Функцию $f(z)$ *назовём* ***регулярной в точке*** ζ, *если* $f(z)$ *представляется рядом*:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-\zeta)^k,$$

сходящимся в какой-либо окрестности этой точки (*т. е. в каком-либо круге* $|z-\zeta|<r$, $r>0$, *с центром в точке* ζ) . ***Функцию*** $f(z)$ *назовём* ***регулярной в***

области D***,*** *если она определена в этой области и регулярна в каждой её точке.*

Теорема 2.17 . *Функция, регулярная в точке, дифференцируема в этой точке.*

$\triangleright$ Из равенства $f(z) = c_0 + c_1(z-\zeta) + ...$

находим: $$f(\zeta) = c_0$$

и тогда: $$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z-\zeta} = c_1 + c_2(z-\zeta) + ...$$

Из этого равенства видно, что предел его левой части при стремлении $z \to \zeta$ существует. Он равен c_1. ◀

Отсюда: функция, регулярная в области, дифференцируема в этой области.

Пусть $\{f_n(z)\}$ *– последовательность функций, определенных на множестве* D*, и* f *– функция, определённая на том же множестве.* ***Будем говорить,*** *что указанная последовательность* ***сходится к функции*** f ***равномерно*** *на множестве* D*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное число (такой номер)* $n_0 = n_0(\varepsilon)$*, что для всех номеров* $n \ge n_0$ *и всех точек* $z \in D$ *выполняется неравенство* $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$*.**Эта последовательность*** *называется* ***равномерно сходящейся на множестве*** D*, если существует функция* f*, к которой она равномерно сходится на* D.

Бесконечная сумма *вида*:

$$f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad (z \in D) \tag{30}$$

называется ***функциональным рядом. Ряд*** (30) *называется* ***равномерно сходящимся на множестве*** D *к функции* $S(z)$*, если последовательность* $\left\{S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right\}$ *его частичных сумм сходится равномерно на множестве* D *к функции* $S(z)$ ($S(z)$ *при этом называют* ***суммой ряда*** (30)).

Если в определении равномерно сходящейся последовательности под последовательностью $\{f_n(z)\}$ $(z \in D)$ понимать последовательность $\{S_n(z)\}$ частичных сумм функционального ряда, а под $f(z)$ – его сумму $S(z)$, то последнее определение принимает следующий вид.

Функциональный *ряд* (30) *называется* ***равномерно сходящимся на множестве*** D *к своей сумме* $S(z)$*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует нату-*

ральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (*не зависящее от точки* $z \in D$) *такое, что для всех натуральных* $n \geq n_0$ *и всех точек* $z \in D$ *выполняется неравенство* $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$.

Теорема 2.18 (о непрерывности суммы функционального ряда). *Если все слагаемые* $f_n(z)$ *функционального ряда* (30) *являются непрерывными функциями на множестве* D *и ряд сходится равномерно на этом множестве, то сумма ряда есть функция, непрерывная на множестве* D.

Теорема 2.19 (о поэлементном интегрировании функционального ряда). *Если ряд* (30) *с непрерывными функциями* $f_n(z)$ *сходится равномерно к сумме* $S(z)$ *в некоторой области* G, *то его можно интегрировать по любой спрямляемой кривой* $L \subset G$ *поэлементно. При этом справедливо равенство*:

$$\int_L S(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_L f_k(z)dz.$$

Теорема 2.20 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости). *Если слагаемые ряда* (30) *удовлетворяют неравенствам*:

$$|f_n(z)| \leq a_n, \quad \forall z \in D, \quad n \in N,$$

причём $a_n \geq 0$, $a_n \in R$ *и числовой ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то ряд (30) сходится равномерно* (*и абсолютно*) *на множестве* D.

Теорема 2.21. *Если функция* $f(z)$ *является дифференцируемой в области* D, *то она регулярна в этой области.*

▷ Пусть a – любая точка области D. Выберем число $r > 0$ настолько малым, чтобы круг $|z - a| \leq r$ лежал в D. Тогда, согласно интегральной формуле Коши, можем записать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (|z - a| < r).$$

Очевидны равенства:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}}.$$

Так как точка z находится внутри круга, а точка ζ – на его окружности, то $|z - a| < r$, а $|\zeta - a| = r$. Значит, на окружности, по которой выполняется интегрирование, будет $\left|\dfrac{z - a}{\zeta - a}\right| = \theta < 1$. Но тогда ряд, стоящий в правой части следующего равенства:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}},$$

сходится на окружности $|\zeta - a| = r$ равномерно по ζ, т. к. его элементы не превосходят по модулю элементов абсолютно сходящегося числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r}\theta^k$ (теорема 2.20). Умножение этого ряда на непрерывную функцию $f(\zeta)$ не нарушает его равномерной сходимости. Поскольку такой ряд можно поэлементно интегрировать (теорема 2.19), то получаем:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Это и означает регулярность функции $f(z)$ в точке a. Так как a – любая точка области D, теорема доказана. ◀

Поскольку выше было доказано обратное утверждение, то приходим к теореме.

Теорема 2.22. *Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в области D, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярна в этой области.*

Теорема 2.23. *Если функция $f(z,w)$ регулярна по переменной z в области G при любом $w \in E$ и если*:

$$f(z,w) \underset{w \to w_0}{\to} \varphi(z) \qquad (w \in E)$$

равномерно по этой переменной z в любой замкнутой части G, то функция $\varphi(z)$ тоже регулярна в области G.

▷ Так как функция $f(z,w)$ непрерывна по переменной z в области G, то, в силу теоремы 2.13, функция $\varphi(z)$ непрерывна в любой замкнутой части области G. Затем, в силу теоремы 2.15, имеем

$$\lim_{w \to w_0} \int\limits_{\Gamma} f(z,w) dz = \int\limits_{\Gamma} \varphi(z) dz = \int\limits_{\Gamma} \lim_{w \to w_0} f(z,w) dz,$$

где Γ – произвольный контур, лежащий в G. Если взять в качестве Γ границу какой-либо области, лежащей в G, то $\int\limits_{\Gamma} f(z,w) dz$ окажется равным нулю при любом $w \in E$, в силу теоремы Коши. Но тогда $\lim\limits_{w \to w_0} \int\limits_{\Gamma} f(z,w) dz = 0$. Согласно же первому равенству записанной выше цепочки: $\int\limits_{\Gamma} \varphi(z) dz = 0$.

Таким образом, функция $\varphi(z)$ непрерывна в области G и интеграл от $\varphi(z)$ по границе любой области, лежащей в G, вместе с границей, равен нулю. По теореме Мореры функция $\varphi(z)$ регулярна в области G. ◀

Теорема 2.24. *Если функция* $f(z,w)$ *регулярна по переменной* z *в области* G *при любом* $w \in E$ *и если*:

$$f(z,w) \underset{w \to w_0}{\to} \varphi(z) \quad (w \in E)$$

равномерно по этой переменной z *в любой замкнутой части* G, *то и*

$$f_z'(z,w) \underset{w \to w_0}{\to} \varphi'(z) \quad (w \in E)$$

равномерно по переменной z *в любой замкнутой части области* G.

▷ Обозначим $\overline{B}$ какую-либо замкнутую часть области G, а D – область, содержащую $\overline{B}$, и лежащую в области G вместе со своей границей Γ. Тогда при условии $z \in \overline{B}$, $\zeta \in \Gamma$ стремление:

$$\frac{f(\zeta,w)}{(\zeta - z)^2} \underset{w \to w_0}{\to} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \qquad (w \in E)$$

будет равномерным по переменной $z \in \overline{B}$ и по переменной $\zeta \in \Gamma$. В силу теоремы 2.15 , имеем: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta,w)d\zeta}{(\zeta - z)^2} \underset{w \to w_0}{\to} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}$.

Согласно теореме 2.11 левая часть последнего соотношения равна $f_z'(z,w)$, а правая часть, в силу теорем 2.11, 2.22, 2.23 равна $\varphi'(z)$. ◀

3. Критерий Коши равномерной сходимости

Выше мы оставили без доказательств теоремы 2.18–2.20, поскольку их доказательства содержатся в учебной литературе. В следующем параграфе нам предстоит дать строгое доказательство важной для всего изложения теоремы, носящей название: «принцип компактности регулярных функций». В связи с этим этот параграф закончим теоремами, необходимыми при доказательстве «принципа компактности».

Говорят, *что числовая последовательность* $\{x_n\}$ ***удовлетворяет условию Коши*** (*или является* ***фундаментальной последовательностью***), *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$, *что для всех номеров* n *и* m, *удовлетворяющих условию* $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ *выполняется неравенство* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Условие фундаментальности последовательности:

«для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq n_0$ и $m \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$» можно сформулировать и так:

«для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq n_0$ и всех целых $p \geq 0$ выполняется $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$».

Чтобы получить последнюю формулировку достаточно обозначить: $p = n - m$, если $n \geq m$, и $p = m - n$, если $m > n$.

Теорема 2.25 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность (числовая) сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши* (*была фундаментальной*).

▷ *Необходимость*. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой номер, что для всех номеров $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (такой номер существует согласно определению предела последовательности). Если $n \geq n_0$ *и* $m \geq n_0$, то $|x_n - x_m| = = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т. е. выполняется условие Коши.

Достаточность. Пусть есть числовая последовательность:

$$\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ... \tag{31}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров n и m, удовлетворяющих условию $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем, например, значение $\varepsilon = 1$. Тогда существует такой номер n_1, что при условии $n \geq n_1$, $m \geq n_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$. В частности, если $n \geq n_1$, $m = n_1 + 1$, то $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$, т. е. $x_{n_1+1} - 1 < x_n < x_{n_1+1} + 1$. Это значит, что последовательность $x_{n_1}, x_{n_1+1}, ...$ ограничена.

Для значений $k = 1,2,3,...$ обозначим E_k множество точек $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ...$ последовательности (31), $\alpha_k = \inf E_k$, $\beta_k = \sup E_k$. Очевидно,

$$E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_k \supset E_{k+1} \supset ...$$

Так как последовательность $x_{n_1}, x_{n_1+1}, ...$ ограничена, то ограничены все множества E_k. Действительно, E_{n_1} ограничено, E_k (при $k > n_1$) содержатся в E_{n_1}, а E_k (при $k < n_1$) отличается от E_{n_1} лишь на конечное число точек и, поэтому, они также ограничены . Очевидны следующие простые свойства точных верхней и нижней граней: 1) если множество E ограничено сверху и $E_1 \subset E$, то $\sup E_1 \le \sup E$; 2) если E ограничено снизу и $E_1 \subset E$, то $\inf E_1 \ge \inf E$. На основании последней цепочки вложений и сформулированных свойств точных верхней и нижней граней имеем:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_k \le \ldots, \qquad \beta_1 \ge \beta_2 \ge \ldots \ge \beta_k \ge \ldots,$$

причем $\alpha_k \le \beta_k$.

Если $\alpha_k = \beta_k$, то все точки $x_k, x_{k+1},\ldots$ совпадают и тогда (31) сходится к точке $\xi = x_k = x_{k+1} = \ldots$. Если же ни при каком значении k точка α_k не совпадает с β_k, то сегменты $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, …, $[\alpha_k, \beta_k]$, … образуют последовательность вложенных сегментов. Докажем, что сегменты образуют последовательность стягивающихся отрезков, т. е. докажем, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такой номер n^*, что для всех $k \ge n^*$ длина сегмента $[\alpha_k, \beta_k]$ меньше, чем ε.

Возьмем номер q таким большим, чтобы было $\frac{3}{q} < \varepsilon$, n^* возьмем таким, чтобы для номеров $n \ge n^*$, $m \ge n^*$ выполнялось неравенство $|x_n - x_m| < \frac{1}{q}$, и выберем точки x', x'' так, чтобы для данного номера $k > n^*$ было:

$$\alpha_k < x' < x'' < \beta_k, \quad x' - \alpha_k < \frac{1}{q}, \quad \beta_k - x'' < \frac{1}{q}.$$

Так как $\alpha_k = \inf E_k$, $\beta_k = \sup E_k$, то имеются точки x_n, x_m множества E_k такие, что $\alpha_k \le x_n \le x'$ и $x'' \le x_m \le \beta_k$; следовательно, $x_n - \alpha_k < \frac{1}{q}$ и $\beta_k - x_m < \frac{1}{q}$. Поскольку n и m больше, чем n^*, то $|x_n - x_m| < \frac{1}{q}$. Очевидно, что длина отрезка $[\alpha_k, \beta_k]$ равна $\beta_k - \alpha_k = (x_n - \alpha_k) + (x_m - x_n) + (\beta_k - x_m) < \frac{3}{q} < \varepsilon$. Доказано, что рассматриваемые отрезки образуют последовательность вложенных стягивающихся отрезков. Значит, существует (и притом единственная) точка a, принадлежащая всем отрезкам $[\alpha_k, \beta_k]$. Осталось доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем произвольную окрестность (x', x'') точки a и столь большое число k, чтобы длина сегмента $[\alpha_k, \beta_k]$ была меньше, чем каждое из чисел $a - x'$ и $x'' - a$; тогда весь сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$, содержа точку

a, необходимо содержится в интервале (x', x''). Все точки множества E_k содержатся в сегменте $[\alpha_k, \beta_k]$, значит, и подавно в интервале (x', x''). Отсюда следует, что все точки последовательности (31), начиная с k-й, попали в этот интервал. Так как (x', x'') – произвольная окрестность точки a, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ◀

Теорема 2.26 (критерий Коши равномерной сходимости). *Для того чтобы последовательность функций $\{f_n\}$, определенных на некотором множестве X, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \ge n_0$, всех целых $p \ge 0$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство*:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon. \tag{32}$$

▷ *Необходимость.* Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X. Тогда существует такая функция f, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для всех $n \ge n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если $n \ge n_0$ и $p \ge 0$, то для всех $x \in X$ получим:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \le \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Если выполнено условие (32), то при любом фиксированном $x \in X$ $\{f_n(x)\}$ является числовой последовательностью, удовлетворяющей критерию Коши для числовых последовательностей, и потому она сходится. Обозначим предел последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X через $f(x)$. Покажем, что $\{f_n\}$ сходится на множестве X к функции f равномерно. Действительно, в силу условия (32), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что для всех $n \ge n_0$, всех целых $p \ge 0$ и всех $x \in X$ справедливо неравенство:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

Заметив, что $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, перейдем к пределу в неравенстве (33) при стремлении $p \to \infty$; тогда для всех $n \ge n_0$ и всех $x \in X$ получим:

$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это и означает доказываемую равномерную сходимость. ◀

§ 3. Принципы компактности и соответствия границ. Теорема Руше

1. Принцип компактности

Расстояние *между точками* $z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ *и* $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$ *определяется по формуле* $\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. ***Расстоянием между двумя множествами*** A *и* B *называют величину:*

$$\rho(A, B) = \inf_{z_1 \in A, z_2 \in B} \rho(z_1, z_2).$$

Определение принципа компактности будет дано позже. Пока же будем считать, что он состоит в утверждении следующей теоремы.

Теорема 2.27 (принцип компактности регулярных функций)**.** *Из равномерно ограниченной последовательности функций* $\{f_n(z)\}$*, регулярных в области* G*, всегда можно выделить подпоследовательность* $\{f_{n_k}(z)\}$*, равномерно сходящуюся в любой замкнутой части области* G.

▷ Обозначим $\overline{B}$ какую-либо замкнутую часть области G, а D – область, содержащую $\overline{B}$ и лежащую в области G вместе со своей границей Γ. Согласно теореме 2.11:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \qquad (z \in D).$$

Равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(z)\}$ означает, что:

$$|f_n(z)| \le M \quad (z \in G).$$

Выполнение этого неравенства назовём ***выполнением условия* 1.** Оценивая модуль интеграла, получаем:

$$|f_n'(z)| \le Ml \frac{1}{2\pi\rho_{\overline{B}}^2} \quad (z \in \overline{B}),$$

где l – длина Γ, а $\rho_{\overline{B}}$ – расстояние от множества $\overline{B}$ до Γ.

Полученную оценку назовём ***условием* 2.**

Таким образом, на множестве $\overline{B}$ равномерно ограничены и последовательность самих функций $\{f_n(z)\}$, и последовательность их производных. Из равномерной ограниченности последовательности производных следует равностепенная непрерывность последовательности функций $\{f_n(z)\}$. Поэтому, в силу теоремы Арцеля (теорема 2.14), можем выбрать подпоследовательность последовательности $\{f_n(z)\}$, равномерно сходящуюся на множестве $\overline{B}$.

Итак, для каждой замкнутой части области G можем выделить из последовательности $\{f_n(z)\}$ подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этой части (вообще говоря, для каждой части свою). Покажем, что из $\{f_n(z)\}$ можно выделить и такую подпоследовательность , которая будет равномерно сходиться на любой замкнутой части G. Чтобы это показать, построим сначала *расширяющуюся* последовательность замкнутых множеств $\{\overline{B}_m\} = \overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3, \ldots$ (т. е. последовательность, для которой $\overline{B}_i \subset \overline{B}_j$ $(\overline{B}_i \neq \overline{B}_j)$ для любых $i, j \in N$, $i < j$), элементы которой в сумме покрывают всю область G.

Слова ***«множества*** $\overline{B}_m$, $m = 1,2,\ldots$, ***последовательности*** $\{\overline{B}_m\}$ ***в сумме покрывают область*** G», *означают, что каждая точка из* G *содержится хотя бы в одном из множеств этой последовательности* (см. гл. 1, § 1).

Указанная расширяющаяся последовательность устроена так:

$$\overline{B}_1 \subset \overline{B}_2 \subset \ldots \subset G .$$

Переходим к построению подпоследовательности, равномерно сходящейся в любой замкнутой части области G. Выберем из $\{f_n(z)\}$ под-последовательность $\{f_n^{(1)}(z)\} = f_1^{(1)}(z), f_2^{(1)}(z), f_3^{(1)}(z), \ldots$, равномерно сходящуюся на множестве $\overline{B}_1$ (возможность выбора показывается так же, как это было сделано выше для множества $\overline{B}$. При этом условие 2 выполняется с аналогичными параметрами: l_1, Γ_1, $\rho_{\overline{B}_1}$, $z \in \overline{B}_1$).

Будем рассматривать последовательность $\{f_n^{(1)}(z)\}$ при значениях $z \in \overline{B}_2$. Для неё выполняются условие 1 и условие 2 с параметрами: l_2, Γ_2, $\rho_{\overline{B}_2}$, $z \in \overline{B}_2$. Как и выше выберем из последовательности $\{f_n^{(1)}(z)\}$ подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(z)\} = f_1^{(2)}(z), f_2^{(2)}(z), f_3^{(2)}(z), \ldots$, равномерно сходящуюся на множестве $\overline{B}_2$.

Выберем из последовательности $\{f_n^{(2)}(z)\}$, рассматривая её на множестве $\overline{B}_3$, подпоследовательность $\{f_n^{(3)}(z)\} = f_1^{(3)}(z), f_2^{(3)}(z), f_3^{(3)}(z), \ldots$, равномерно сходящуюся на множестве $\overline{B}_3$. Продолжая процесс, получим счётное число равномерно сходящихся на расширяющихся множествах последовательностей:

$$f_1^{(1)}(z), f_2^{(1)}(z), f_3^{(1)}(z), \ldots, \quad z \in \overline{B}_1; \qquad f_1^{(2)}(z), f_2^{(2)}(z), f_3^{(2)}(z), \ldots, \quad z \in \overline{B}_2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \; f_1^{(k)}(z), f_2^{(k)}(z), f_3^{(k)}(z), \ldots, \quad z \in \overline{B}_k; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

причём каждая следующая последовательность выделена из предыдущей (без нарушения взаимного порядка следования элементов). Применяя полученное множество последовательностей, составим «диагональную» функциональную последовательность из функций, у которых нижний и верхний индексы равны, т. е. последовательность $\{f_n^{(n)}(z)\} = f_1^{(1)}(z), f_2^{(2)}(z), f_3^{(3)}(z),...$, и покажем, что она является искомой.

Итак, осталось показать, что «диагональная» последовательность $\{f_n^{(n)}(z)\}$ равномерно сходится в любой замкнутой части области G. Пусть множество $\overline{B}$ – произвольная замкнутая часть области G. Так как имеют место включения $\overline{B}_1 \subset \overline{B}_2 \subset \overline{B}_3 \subset ... \subset G$ и множества $\overline{B}_j$, $j = 1,2,3,...$, в сумме покрывают всю область G, то, очевидно, найдётся такой номер $j = k$, для которого справедливо включение $\overline{B} \subset \overline{B}_k$. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу критерия Коши, существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$, всех целых $p \geq 0$ и всех точек $z \in \overline{B}_k$ будет выполняться неравенство:

$$\left| f_{n+p}^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) \right| < \varepsilon$$

(последовательность $\{f_n^{(k)}(z)\}$ равномерно сходится на множестве $\overline{B}_k$).

Положим $n_1 = \max\{k, n_\varepsilon + 1\}$ и рассмотрим «диагональную» последовательность $\{f_n^{(n)}(z)\} = f_1^{(1)}(z), f_2^{(2)}(z), f_3^{(3)}(z),..., f_{n_1}^{(n_1)},...$. Из определения номера n_1 и неравенства $\left| f_{n+p}^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) \right| < \varepsilon$ следует, что при любом $n \geq n_1$, всех целых $p \geq 0$ и всех точек $z \in \overline{B}_k$ (а значит, и всех точек $z \in \overline{B}$) будет выполняться неравенство:

$$\left| f_{n+p}^{(n+p)}(z) - f_n^{(n)}(z) \right| < \varepsilon .$$

Отсюда следует (критерий Коши), что последовательность $\{f_n^{(n)}(z)\}$ равномерно сходится в замкнутой части $\overline{B}$ области G. Поскольку $\overline{B}$ была произвольной, то теорема доказана. ◀

2. Аналитические функции

Две кривые *Γ и Γ^*, лежащие в области D, будем называть* ***взаимно деформируемыми*** (далее ***гомотопическими***) *в этой области, если:* 1) *начальные и конечные точки этих кривых совпадают* (*соответственно*)*;* 2) *кривые Γ и Γ^* можно перевести друг в друга непрерывной деформацией, не выходя за пределы области D и не двигая крайние точки кривых* (точка, в которой начинаются обе кривые, и точка, в которой они заканчиваются, остаются неподвижными во всё время деформации).

Множество *всех кривых, лежащих в области D и взаимно деформируемых с данной кривой Γ (в этой области D), называется* ***гомотопическим классом*** *и обозначается символом* $[\Gamma]$ [9, гл.I, §7].

В связи с последним понятием *две взаимно деформируемые кривые* удобно в дальнейшем называть ***гомотопическими кривыми.***

Теорема 2.28. *Две кривые* Γ *и* Γ^**, лежащие в данном круге и имеющие одну и ту же начальную и одну и ту же конечную точки, являются гомотопическими в этом круге.*

Утверждение теоремы интуитивно очевидно, хотя возможно провести и строгое её доказательство. Мы этого делать не будем по указанной причине.

Область**, любые две точки которой можно соединить отрезком, целиком в ней лежащим, называется **выпуклой областью.

З а м е ч а н и е 2.3. Теорема остаётся справедливой, если в её формулировке слово «круг» заменить словами «любая выпуклая область».

Пусть замкнутая кривая проходит через некоторую фиксированную точку области D (эту точку можно рассматривать как начальную и конечную точки кривой).

***Замкнутую кривую** Γ, которую можно, непрерывно деформируя, стянуть в указанную фиксированную точку (не выходя за пределы области D) будем называть **кривой, гомотопической нулю** в области D.*

Теорема 2.29. *Для того чтобы любая замкнутая кривая, лежащая в области* D*, была гомотопической нулю, необходимо и достаточно, чтобы область* D *была односвязной.*

Доказательство этой теоремы опускаем, потому что оно (хотя и несложное) достаточно долгое.

Пусть дана кривая Γ с параметрическим уравнением:

$$z = \varphi(t) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Точки этой кривой (но не точки плоскости, через которые эта кривая проходит) находятся во взаимно однозначном соответствии с точками отрезка $0 \le t \le 1$. Поэтому задание функции на кривой Γ сводится к заданию числа $\psi(t)$, отвечающего каждому определённому значению t из этого отрезка. Иными словами, функция $\zeta = \Phi(z)$ на кривой Γ задаётся параметрическим способом заданием пары функций:

$$z = \varphi(t), \quad \zeta = \psi(t) \quad (0 \le t \le 1).$$

Подчеркнём, что так заданная функция $\zeta = \Phi(z)$ не является, вообще говоря, однозначной функцией точки z (как точки плоскости), если кривая Γ имеет точки самопересечения (их определение см. § 1, п. 2).

***Функцию** $\zeta = F(z)$, определённую на кривой Γ, назовём **функцией, аналитической на кривой** Γ, если для каждой точки $\alpha \in \Gamma$ существует функция $f_\alpha(z)$, регулярная в некоторой окрестности этой точки (рассматриваемой* *теперь как точка плоскости) и совпадающая с функцией $\zeta = F(z)$ на какой-либо дуге кривой Γ, содержащей точку α.*

Ещё раз подчеркнём, что функция $\zeta = F(z)$, даже если она является аналитической на кривой Γ, не обязана быть однозначной функцией точки плоскости (если кривая Γ имеет самопересечения).

Элементом в точке *α будем называть* ***функцию*** *$f_\alpha(z)$ регулярную в некоторой области, содержащей точку $z = \alpha$.* ***Два элемента*** *$f_\alpha(z)$ и $f_\alpha^*(z)$ в одной и той же точке α будем называть* ***эквивалентными,*** *если функции $f_\alpha(z)$ и $f_\alpha^*(z)$ совпадают в некоторой окрестности точки $z = \alpha$.*

Функция *$\zeta = F(z)$, аналитическая на кривой Γ, называется* ***аналитическим продолжением элемента*** *$f_\alpha(z)$, заданного в начале этой кривой.* ***Элемент*** *$f_b(z)$, отвечающий концу кривой Γ, будем называть* ***результатом аналитического продолжения элемента*** *$f_\alpha(z)$ по кривой Γ.*

Пусть дан какой-либо элемент $f_a(z)$ в некоторой точке a расширенной комплексной плоскости. Этот элемент определяет некоторое множество K кривых Γ, лежащих в расширенной комплексной плоскости и начинающихся в точке a, по которым этот элемент можно аналитически продолжить.

Аналитическая функция*, порождённая элементом $f_a(z)$, определена для каждой кривой $\Gamma \in K$.* ***Значением*** *этой аналитической функции, отвечающим кривой $\Gamma \in K$, будем считать* ***значение*** *в конце кривой Γ* ***результата аналитического продолжения*** *исходного элемента $f_a(z)$ по кривой Γ.*

Итак, ***аналитическая функция*** *– это функция,* ***определённая на кривых*** *Γ* ***из некоторого множества .***

Часто будет удобнее говорить, что аналитическая функция (АФ) определена на множестве, элементами которого являются: точка z комплексной плоскости и кривая Γ, идущая в эту точку из фиксированной точки a. Будем записывать АФ символом $F(z)$ или же символом $(F(z))_\Gamma$ (последнее – при необходимости указания на кривую).

АФ $F(z)$, как функция только точки z, является многозначной функцией. Под исследованием характера многозначности АФ обычно понимают исследование зависимости значений АФ от кривой Γ при фиксированном конце этой кривой (т. е. при фиксированной точке z). Фундаментальным результатом в этом направлении является так называемая *теорема о монодромии.*

Теорема 2.30 (о монодромии**)** (без доказательства). *Пусть исходный элемент $f_a(z)$ АФ можно аналитически продолжить по лю-*

бой кривой Γ*, лежащей в области* D*. Если кривые* Γ *и* Γ^* *взаимно деформируемы* (*гомотопические*) *в области* D*, то* [9, гл.III, §1]:

$$(F(z))_{\Gamma} = (F(z))_{\Gamma^*} .$$

Пусть дана АФ $F(z)$, порождённая исходным элементом $f(z)$ в точке $z=a$. Возьмём некоторую область D, содержащую точку $z=a$, и рассмотрим аналитические продолжения элемента $f(z)$ не по всем возможным кривым, выходящим из точки a, а только по тем, которые лежат в области D. В результате получим функцию $\Phi(z)$, отличающуюся от всей АФ $F(z)$ тем, что её область определения несколько сужена.

Только что полученную функцию $\Phi(z)$ *будем называть* ***ветвью АФ*** $F(z)$ ***в области*** D.

Подчеркнём: *ветвь АФ в области* D, как и сама АФ, порождаются ***заданием исходного элемента*** $f(z)$**.** Особо выделим случай, в котором исходный элемент $f(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой Γ, лежащей в области D.

Если исходный элемент *можно аналитически продолжить по любой кривой, лежащей в области* D*, то* ***ветвь АФ*** *в области* D *будем называть* ***функцией, аналитической в области*** D *(**АФ в*** D*).* ***Если функция*** $\Phi(z)$*, аналитическая в области* D*, однозначна (как функция одной лишь точки* z*) в этой области, будем называть эту функцию* ***регулярной ветвью АФ*** $F(z)$ *(в области* D*).*

Из теоремы *о монодромии* немедленно вытекает следующее важное утверждение (часто именно его называют теоремой о монодромии).

Теорема 2.31. *Функция, аналитическая в односвязной выпуклой области, регулярна в этой области.*

$\triangleright$ По теореме о монодромии результат продолжения исходного элемента по кривым, гомотопическим в области, одинаков. Но мы знаем (см. теорему 2.28 и замечание 2.3), что в односвязной выпуклой области являются гомотопическими все кривые, имеющие одинаковую начальную и одинаковую конечную точки. Поэтому результат продолжения исходного элемента по кривой, лежащей в такой области, зависит только от конечной точки этой кривой. $\blacktriangleleft$

3. Два доказательства теоремы Руше

Пусть n – целое положительное число.

Точку $z=a$ $(a\neq\infty)$ *называют* ***нулём кратности*** n (*или* ***нулём порядка*** n) *функции* $f(z)$, *если* $f(z)$ *можно представить в виде* $f(z)=(z-a)^n f_1(z)$, *где функция* $f_1(z)$ *регулярна в точке* $z=a$ *и* $f_1(a)\neq 0$.

Точку $z=\infty$ *называют* ***нулём кратности*** n (*или* ***нулём порядка*** n) *функции* $f(z)$, *если* $f(z)$ *можно представить в виде* $f(z)=z^{-n} f_1(z)$, *где функция* $f_1(z)$ *регулярна в точке* $z=\infty$ *и* $f_1(\infty)\neq 0$.

Кратностью (*или* ***порядком***) ***полюса*** *функции* $f(z)$ *в точке* $z=a$ *называют кратность нуля функции* $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ *в этой точке.*

Из этих определений видно, что полюс порядка n можно рассматривать как нуль отрицательного порядка $-n$.

Вычетом функции $f(z)$ *в особой точке* $z=a$ *называется коэффициент* c_{-1} *при первой отрицательной степени ряда Лорана функции* $f(z)$ *в проколотой окрестности точки* $z=a$ (*по степеням* $(z-a)$).

Расстоянием по области D ***между точками*** z_1 *и* z_2, *принадлежащими области* D, *называем* ***точную нижнюю грань диаметров ломаных,*** *лежащих в области* D *и соединяющих точки* z_1 *и* z_2. ***Диаметром ломаной*** *называем* ***сумму длин её звеньев.***

Определённое расстояние обозначим $\rho_D(z_1,z_2)$. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D.

Говорим, *что функция* $f(z)$ ***непрерывна в области*** D ***вплоть до её границы***, *если для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* $\delta>0$, *что при условии* $\rho_D(z_1,z_2)<\delta$. $z_1,z_2\in D$, *имеем неравенство* $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

Функция, *регулярная в любой замкнутой части области* D, *за исключением конечного числа полюсов* (они могут накапливаться к границе ∂D), *называется* ***мероморфной в области*** D *функцией.*

Теорема 2.32. *Пусть функция* $f(z)$ *и её производная* $f'(z)$ *регулярны в области* D *и непрерывны вплоть до её границы* C, *за исключением конечного числа полюсов. Если на* C *функция* $f(z)$ *не обращается ни в нуль, ни в бесконечность, то*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\nu_f^+-\nu_f^-, \tag{34}$$

где ν_f^+ – *число нулей, а* ν_f^- – *число полюсов функции* $f(z)$ *в области* D (и нули, и полюсы считаются столько раз, какова их кратность).

▷ Функция $F(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ регулярна во всех точках области D, в которых $f(z)$ отлична от нуля. Следовательно, функция $F(z)$ имеет в

D лишь изолированные особые точки, причём они могут быть только в тех точках, где функция $f(z)$ имеет нуль или полюс. Ясно и то, что особые точки функции $F(z)$ должны быть полюсами, т. к. $F(z)$ является отношением двух мероморфных функций. Но тогда интеграл, стоящий в левой части (34), равен сумме вычетов функции $F(z)$ в этих полюсах.

– Чтобы не рассматривать отдельно нули и полюсы, будем помнить, что полюс порядка n – это нуль порядка $-n$. Найдём вычет функции $F(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ в точке $z=a$, когда функция $f(z)$ имеет в точке $z=a$ нуль порядка n.

Имеем $f(z)=(z-a)^n f_1(z)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в точке $z=a$ и $f_1(a)\neq 0$. Тогда $f'(z)=n(z-a)^{n-1}f_1(z)+(z-a)^n f_1'(z)$ и получаем:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}=n(z-a)^{-1}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Искомый вычет функции $F(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ в точке $z=a$ равен n. По основной теореме о вычетах приходим к утверждению теоремы. ◀

Заметим, что $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=(\ln f(z))'$, а $\int\limits_C (\ln f(z))'dz$ равен изменению элемента аналитической функции $\ln f(z)$ при непрерывном продолжении по кривой C . Поэтому, обозначив это изменение (при однократном обходе границы C области D в положительном направлении) $\operatorname*{var}\limits_C \ln f(z)$ из (34) получим:

$$\nu_f^+-\nu_f^-=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}\limits_C \ln f(z). \tag{35}$$

Если вспомнить, что $\ln w=\ln|w|+i\cdot\arg w$, и заметить, что изменение $\ln|f(z)|$ по замкнутому контуру равно нулю, т. к. различные значения $\ln w$ отличаются лишь чисто мнимым слагаемым $2\pi ik$, то из формулы (35) получим формулу:

$$\nu_f^+-\nu_f^-=\frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}\limits_C \arg f(z). \tag{36}$$

Формула (36) *носит название* ***принципа аргумента.***
[9, гл. IV, § 6].

З а м е ч а н и е 2.4. Здесь обозначение $\ln f(z)$ не понимается в смысле главного значения логарифма, а понимается в смысле его значения, которое принято обозначать символом «$Ln\ f(z)$».

Теорема 2.33 (Руше). *Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ регулярны в области D и непрерывны вплоть до её границы C. Если на границе C*

имеет место неравенство $|f(z)|<|F(z)|$ *и функция* $f(z)$ *на* C *не обращается в нуль, то функции* $F(z)+f(z)$ *и* $F(z)$ *имеют в области* D *одинаковое число нулей* (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

▷ Поскольку функции $F(z)$ и $f(z)$ регулярны в области D, то полюсов они не имеют. Значит, во введённых нами обозначениях нужно доказать равенство $\nu_{F+f}=\nu_F \ \ (\nu_F=\nu_F^+)$. Из неравенства $|f(z)|<|F(z)|$, справедливого на C, видно, что функции $F(z)+f(z)$ *и* $F(z)$ на C не обращаются в нуль . Поэтому, в силу (35), можем написать:

$$\nu_{F+f}=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln\big(F(z)+f(z)\big)=\nu_{F+f}=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln F(z)+\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln\left(1+\frac{f(z)}{F(z)}\right)=$$

$$=\nu_F+\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln\left(1+\frac{f(z)}{F(z)}\right). \tag{37}$$

Обозначим $\zeta=1+\dfrac{f(z)}{F(z)}$, тогда $\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln\left(1+\dfrac{f(z)}{F(z)}\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_\Gamma \ln\zeta$.

Когда точка z обходит кривую C, точка $\zeta=1+\dfrac{f(z)}{F(z)}$ обходит некоторую кривую Γ, лежащую в круге $|\zeta-1|<1$ (т.к. на границе C $\left|\dfrac{f(z)}{F(z)}\right|<1$).

Поскольку кривая Γ лежит в круге $|\zeta-1|<1$, то точка ζ, обходя Γ, не может обходить точку $\zeta=0$. Поэтому продолжение $\ln\zeta$ по кривой Γ возвращает нас к прежнему значению, т. е. $\operatorname*{var}_\Gamma \ln\zeta=0$. Так как $\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_C \ln\left(1+\dfrac{f(z)}{F(z)}\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname*{var}_\Gamma \ln\zeta$, то последнее слагаемое в правой части (37) равно нулю. Но тогда из (37) получаем: $\nu_{F+f}=\nu_F$. ◀

Дадим ещё одно доказательство теоремы Руше.

Теорема Руше. *Пусть* $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ *– регулярные* (*не имеющие полюсов*) *функции комплексной переменной* z *в области* D, *простая замкнутая кусочно-гладкая кривая* Γ *вместе с ограничиваемой ею областью* G *принадлежат* D *и всюду на кривой* Γ *выполняются условия:* $\varphi(z)\neq 0$ *и* $|\varphi(z)|>|\psi(z)|$. *Тогда в области* G *функции* $\varphi(z)$ *и* $\varphi(z)+\psi(z)$ *имеют одинаковое число нулей.*

▷ Рассмотрим функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую условиям теоремы, и вычислим интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz$. Обозначим $a_1,a_2,\ldots,a_k$ нули функции $\varphi(z)$ внутри контура Γ (согласно условию на Γ эта функция нулей не имеет), обозначим $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ порядки этих нулей и воспользуемся основной теоремой о вычетах $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\Phi(z)dz = \sum_{j=1}^{k}\underset{z=a_j}{res}\Phi(z)$,

где: $\Phi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$.

В окрестности нуля a_j имеем разложения в ряды Тейлора:

$\varphi(z) = A_j(z-a_j)^{\alpha_j} + B_j(z-a_j)^{\alpha_j+1} + ...$, $\varphi'(z) = A_j\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1} + B_j(\alpha_j+1)(z-a_j)^{\alpha_j} + ...$

($A_j \neq 0$). Для функции $\Phi(z)$ получаем

$$\Phi(z) = \frac{(z-a_j)^{\alpha_j-1}\left(A_j\alpha_j + B_j(\alpha_j+1)(z-a_j)+...\right)}{(z-a_j)^{\alpha_j}\left(A_j + B_j(z-a_j)+...\right)} = \frac{\left(A_j\alpha_j + B_j(\alpha_j+1)(z-a_j)+...\right)}{(z-a_j)\left(A_j + B_j(z-a_j)+...\right)}.$$

Это означает, что $\Phi(z)$ имеет в точке $z = a_j$ полюс первого порядка.

Вычет $\Phi(z)$ в этой точке вычисляем по формуле $\underset{z=a}{res}\, f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ и находим $\underset{z=a_j}{res}\Phi(z) = \frac{A_j\alpha_j}{A_j} = \alpha_j$. По основной теореме о вычетах получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\Phi(z)dz = \sum_{j=1}^{k}\underset{z=a_j}{res}\Phi(z) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\,. \tag{38}$$

Здесь последняя сумма представляет число нулей функции $\varphi(z)$ внутри контура Γ, причём каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

Итак, число нулей, лежащих внутри Γ, функции $\varphi(z)+\psi(z)$ выражается интегралом вида (38) (согласно условию теоремы $\varphi(z)+\psi(z)$ не обращается в нуль на Γ), который возможно представить так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi'+\psi'}{\varphi+\psi}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln(\varphi+\psi)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\frac{\varphi(\varphi+\psi)}{\varphi}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\varphi dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\frac{\varphi+\psi}{\varphi}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\varphi dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right)dz\,.$$

Введём функцию $\omega = \omega(z)$, полагая $\omega(z) = 1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$. Тогда последний интеграл можно записать в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\omega(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\omega(z)}{\omega(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{d\omega}{\omega}$$

(интегрирование в последнем интеграле выполняется по контуру Γ_1, описываемому точкой $\omega = 1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, когда точка z описывает контур Γ).

Так как по условию на контуре Γ имеем: $|\varphi(z)|>|\psi(z)|$, т.е. $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|<1$, то контур Γ_1 целиком лежит внутри круга радиуса единица с центром в точке $\omega=1$. Поскольку этот круг не содержит внутри себя начала координат, то $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{d\omega}{\omega}=0$. Отсюда следует:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi'+\psi'}{\varphi+\psi}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\varphi dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi'}{\varphi}dz. \quad ◀$$

П р и м е р (использующий теорему Руше). Покажем, что полином $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет в комплексной плоскости ровно n нулей (**основная теорема алгебры**).

▷ Полином z^n имеет в комплексной плоскости n нулей (точка $z=0$ является нулём порядка n). Положим $P(z)=F(z)+f(z)$, где $F(z)=z^n$, а $f(z)=a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$. В качестве области D возьмём круг $|z|<R$, а R выберем столь большим, чтобы:

$$|F(z)|>|f(z)| \qquad (|z|=R).$$

Для этого достаточно взять, например,

$$R=1+|a_1|+\ldots+|a_n|$$

Тогда, по теореме Руше, число нулей $F(z)$ и $P(z)$ в круге $|z|<R$ одинаково, т.е. $P(z)$ имеет n нулей. ◀

4. О регулярности обратной функции

Теорема 2.34. *Пусть последовательность функций* $\{f_n(z)\}$, *регулярных в области* G, *равномерно сходится в любой замкнутой части этой области к функции* $f(z)$, *отличной от константы. Если все функции* $f_n(z)$ *таковы, что при любом* w *функция* $f_n(z)-w$ *имеет в области* G *не более* m *нулей, то и предельная функция* $f(z)$ *обладает этим свойством* (т. е. функция $f(z)-w$ имеет в этой области не более m нулей при любом w).

▷ Допустим, что теорема неверна. Тогда найдётся такое a, что число нулей функции $f(z)-a$ в области G не менее $m+1$. Выберем такую область D, чтобы:

Область D лежала в области G вместе со своей границей C.

Функция $f(z)-a$ имела в области D не менее $m+1$ нулей.

Функция $f(z)-a$ не обращалась в нуль на C.

Такой выбор возможен, т. к. мы предположили, что функция $f(z)$ отлична от константы.

По теореме 2.24 из равномерной сходимости последовательности $\{f_n(z)\}$ в любой замкнутой части области G следует равномерная сходимость последовательности $\{f_n'(z)\}$ на любой замкнутой части области G. Кривая C является замкнутой частью области G и поэтому:

$$f_n(z)-a \underset{n\to\infty}{\to} f(z)-a\,, \qquad f_n'(z) \underset{n\to\infty}{\to} f'(z) \qquad (z\in C).$$

Значит, все функции $f_n(z)-a$, начиная с некоторой (т. е. начиная с некоторого номера n_0+1) отличны от нуля на C и:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)-a}dz \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz\,.$$

Это значит: $\nu_{f_n-a} \underset{n\to\infty}{\to} \nu_{f-a}$. Поскольку ν_{f_n-a} и ν_{f-a} – целые числа, то отсюда следует, что $\nu_{f_n-a}=\nu_{f-a}>m$ при условии $n>n_0$, а это противоречит свойству функций $f_n(z)$. Противоречие доказывает теорему. ◀

В теории аналитических функций (АФ) часто приходится иметь дело с функциями, значения которых в данной точке z определяются из уравнения:

$$\varphi(w)=z\,, \tag{39}$$

где $\varphi(w)$ – данная функция. Исследовать решения такого уравнения мы будем в предположении, что $\varphi(w)$ – регулярная функция переменной w.

Лемма 2.1. *Пусть функция* $\varphi(w)$ *регулярна в точке* $w=b$ *и пусть* $\varphi'(b)\neq 0$. *Определим числа* $\rho>0$ *и* $\delta>0$ *соотношениями*:

$$\max_{|w-b|=\rho}\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{w-b}-\varphi'(b)\right|\le\frac{1}{3}|\varphi'(b)|, \tag{40}$$

$$\delta=\frac{1}{3}\rho|\varphi'(b)|\,. \tag{41}$$

Тогда при любом значении z *из круга* $|z-\varphi(b)|<\delta$ *существует решение уравнения* (39), *лежащее в круге* $|w-b|<\rho$, *и это решение единственно.*

▷ Сначала заметим, что соотношение (40) определяет некоторое положительное значение ρ. Это следует из того, что производная $\varphi'(w)$ в точке $w=b$ существует и что:

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{w-b}-\varphi'(b)\underset{w\to b}{\to}0\,.$$

Введём вспомогательные функции:

$$F(w)=(w-b)\varphi'(b)\,, \qquad f(w)=\varphi(w)-z-(w-b)\varphi'(w)\,.$$

Тогда уравнение (39) можно записать в виде:

$$F(w)+f(w)=0\,.$$

Возьмём любое значение z из круга $|z-\varphi(b)|<\delta$ и сравним значения модулей функций $F(w)$ и $f(w)$ на окружности $|w-b|=\rho$. Очевидно, что на этой окружности $|F(w)|=\rho|\varphi'(b)|$. Для функции $f(w)$ можно записать:

$$|f(w)|=|\varphi(w)-\varphi(b)-(w-b)\varphi'(b)-(z-\varphi(b))|\le$$

$$\le|w-b|\cdot\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{w-b}-\varphi'(b)\right|+|z-\varphi(b)|,$$

откуда, в силу (40) и (41), следует, что при условии $|w-b|=\rho$, $|z-\varphi(b)|\le\delta$ имеем:

$$|f(w)|\le\frac{2}{3}\rho|\varphi'(b)|<\rho|\varphi'(b)|\,.$$

Следовательно, при условии $|z-\varphi(b)|<\delta$ на окружности $|w-b|=\rho$ имеет место неравенство $|f(w)|<|F(w)|$. По теореме Руше функция $F(w)+f(w)$, равная $\varphi(w)-z$, имеет в круге $|w-b|<\rho$ столько же нулей, сколько и функция $F(w)$, равная $(w-b)\varphi'(b)$, т. е. ровно один. Лемма доказана. ◀

Обозначив полученное единственное решение уравнения (39) символом $\psi(z)$, можем сформулировать доказанное утверждение следующим образом.

Теорема 2.35. *Пусть функция $\varphi(w)$ регулярна в точке $w=b$ и пусть её производная в этой точке отлична от нуля. Тогда существуют такие положительные числа ρ и δ, что функция $w=\psi(z)$, обратная к функции $z=\varphi(w)$, определена в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$ и её значения лежат в круге $|w-b|<\rho$ Поставленными условиями функция $w=\psi(z)$ определяется единственным образом.*

Теорема 2.36. *Пусть функция $\varphi(w)$ регулярна в точке $w=b$ и пусть $\varphi'(b)\neq 0$, а числа ρ и δ определены соотношениями* (40) и (41). *Функция $w=\psi(z)$, определённая выше как функция, обратная к функции $z=\varphi(w)$, регулярна в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$.*

▷ Возьмём z из круга $|z-\varphi(b)|<\delta$ и рассмотрим интеграл:

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-b|=\rho}\frac{w\cdot\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}dw\,.$$

Из (40), где определено число ρ, имеем:

$$\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{w-b}\right| \geq |\varphi'(b)| - \frac{1}{3}|\varphi'(b)| = \frac{2}{3}|\varphi'(b)| \quad (|w-b|=\rho), \quad |\varphi(w)-\varphi(b)| \geq \frac{2}{3}\rho|\varphi'(b)|.$$

Поэтому $\quad |\varphi(w)-z| \geq |\varphi(w)-\varphi(b)| - |z-\varphi(b)| \geq \frac{2}{3}\rho|\varphi'(b)| - |z-\varphi(b)|$.

Значит, при $|z-\varphi(b)| \leq \delta$ на окружности $(|w-b|=\rho)$ имеем неравенство $|\varphi(w)-z| > \frac{1}{3}\rho|\varphi'(b)|$, т. е. функция $\varphi(w)-z$ не обращается в нуль на этой окружности. Отсюда следует, что функция:

$$\frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}$$

является регулярной функцией переменных w и z при условиях: z лежат в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$, w лежат на окружности $|w-b|=\rho$. Но тогда интеграл $I(z)$ представляет функцию переменной z, регулярную в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$ (справедливость последнего вывода будет доказана по завершению доказательства теоремы).

Теперь покажем, что при тех же условиях интеграл $I(z)$ совпадает с функцией $\psi(z)$, обратной к функции $\varphi(w)$. Зафиксируем произвольное значение z из круга $|z-\varphi(b)|<\delta$ и вычислим этот интеграл с помощью вычетов. Функция:

$$g(z,w) = \frac{w\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}$$

как функция переменной w регулярна во всех точках круга $|w-b|<\rho$, за исключением единственного простого полюса при значении $w=\psi(z)$, что следует из леммы 2.1. Применяя формулу вычисления вычета в простом полюсе, получаем (вычет функции $g(z,w)$ в точке $w=\psi(z)$ обозначен c_{-1}):

$$c_{-1} = \left.\frac{w\varphi'(w)}{\varphi'(w)}\right|_{w=\psi(z)} = \psi(z).$$

По основной теореме о вычетах $I(z)=\psi(z)$. В силу доказанной выше регулярности интеграла $I(z)$ в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$ теорема доказана. ◀

После доказательства теоремы осталось доказать, что интеграл $I(z)$ представляет функцию переменной z, регулярную в круге $|z-\varphi(b)|<\delta$. Справедливость этого вывода вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2.37. *Пусть L – какой-либо спрямляемый контур в плоскости w, а $f(z,w)$ – функция, регулярная по z в области G при* *любом* $w \in L$ *и непрерывная по совокупности переменных при условии:* $z \in G$, $w \in L$.

Тогда функция $\varphi(z) = \int\limits_L f(z,w)dw$ *регулярна в области* G .

$\triangleright$ Возьмём какую-либо область D, лежащую в области G вместе со своей границей C. По теореме 2.16 (о повторном интегрировании) (§ 2) функция $\varphi(z)$ непрерывна в области G и:

$$\int\limits_C \varphi(z)dz = \int\limits_C\int\limits_L f(z,w)dwdz = \int\limits_L\int\limits_C f(z,w)dzdw.$$

В последнем повторном интеграле внутренний интеграл, по теореме Коши, равен нулю. Таким образом, функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Мореры и, значит, она является регулярной в области G функцией. ◀

З а м е ч а н и е 2.5. Мы доказали (теорема 2.36) не только регулярность обратной функции $\psi(z)$, но и следующую формулу для неё:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{w\cdot\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}dw.$$

С помощью тех же рассуждений можно доказать и формулу

$$f(\psi(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-b|=\rho} \frac{f(w)\cdot\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}dw,$$

которая справедлива для любой функции $f(w)$, регулярной в круге $|w-b| \le \rho$.

З а м е ч а н и е 2.6. Из тождества $\varphi(\psi(z)) = z$, дифференцируя по z, легко получить формулу для производной обратной функции:

$$\psi'(z) = \frac{1}{\varphi'(\psi(z))}.$$

Можно показать (мы этого делать не будем), что если $\varphi(w)$ – АФ, то функцию $\psi(z)$ также ***можно рассматривать*** как АФ. Более точно, справедлива теорема (АФ – аналитическая функция).

Теорема 2.38. *Пусть* $\varphi_b(w)$ *– произвольный элемент АФ* $\varphi(w)$ *в точке* $w = b$*. По теорема* 2.36 *каждому такому элементу, удовлетворяющему условию* $\varphi_b'(b) \ne 0$, *отвечает функция* $\psi_a(z)$, *обратная к элементу* $\varphi_b(w)$. *Все функции* $\psi_a(z)$ *являются элементами в точках* $z = a = \varphi_b(b)$ *аналитической функции* $\psi(z)$, *которую естественно назвать АФ, обратной к АФ* $\varphi(w)$.

В проведённых выше рассуждениях фигурировало условие вида $\varphi_b'(b) \ne 0$. В связи с этим возникает вопрос о том, что представляют собой для АФ $\psi(z)$, обратной к АФ $\varphi(w)$, те точки $z = a = \varphi_b(b)$, которые отвечают элементам $\varphi_b(w)$ с условием $\varphi_b'(b)=0$. Рассмотрению этого вопроса предпошлём некоторые новые понятия.

Если функция $f(z)$ *регулярна в некотором кольце* $0<|z-a|<r$ *и точка* $z=a$ *является особой точкой функции* $f(z)$, *то говорим, что эта точка является* ***изолированной особой точкой однозначного характера*** *для функции* $f(z)$ (это полюсы и существенно особые точки).

Кроме таких особых точек могут быть особые точки многозначного характера. Пусть $F(z)$ – функция, аналитическая в кольце $0<|z-a|<r$.

Если $F(z)$ *не является функцией, регулярной в этом кольце* (т. е. если $F(z)$ есть функция многозначная), *то говорим, что точка* $z=a$ *является* ***изолированной точкой ветвления.*** ***Если число*** *различных элементов* $F(z)$ *в каждой точке кольца* $0<|z-a|<r$ *конечно и равно* n, *то изолированная точка ветвления* $z=a$ *называется* ***точкой ветвления порядка*** n. ***Если число*** *различных элементов* $F(z)$ *в каждой точке кольца бесконечно, то изолированная точка ветвления называется* ***логарифмической точкой ветвления.***

Исследование точек ветвления конечного порядка сводится к исследованию изолированных особых точек однозначного характера с помощью следующей теоремы (принимаемой без доказательства).

Теорема 2.39. *Пусть* $F(z)$ *– аналитическая функция в кольце* $r<|z-a|<R$. *Если в каждой точке кольца* $F(z)$ *имеет* n *различных элементов, то* $F(z)=\varphi\left(\sqrt[n]{z-a}\right)$, *где* $\varphi(\zeta)$ *– функция, регулярная в кольце* $\sqrt[n]{r}<|\zeta|<\sqrt[n]{R}$.

Вернёмся к вопросу: «Что представляют собой для АФ $\psi(z)$, обратной к АФ $\varphi(w)$, те точки $z=a=\varphi_b(b)$, которые отвечают элементам $\varphi_b(w)$ с условием $\varphi_b'(b)=0$?». Рассмотрение многозначных функций (мы их не рассматривали) наводит на мысль, что такие точки должны быть точками ветвления. В действительности справедлива следующая теорема.

Теорема 2.40. *Пусть функция* $\varphi(w)$ *регулярна в точке* $w=b$, *а её производная имеет в этой точке нуль порядка* $m-1$. *Тогда существуют такие числа* $\rho>0$ *и* $\delta>0$, *что для любых* z *из круга* $|z-\varphi(b)|<\delta$ *уравнение* (39) *имеет в круге* $|w-b|<\rho$ *ровно* m *решений. Эти решения являются значениями функции* $\psi(z)$, *аналитической в кольце* $0<|z-\varphi(b)|<\delta$ *и разлагающейся в этом кольце в ряд*:

$$\psi(z)=b+c_1(z-a)^{\frac{1}{m}}+c_2(z-a)^{\frac{2}{m}}+\ldots,\quad c_1\neq 0\quad (a=\varphi(b)).$$

$\triangleright$ Из условий, наложенных на функцию $\varphi(w)$, следует, что в окрестности точки $w = b$ её ряд Тейлора имеет вид:

$$\varphi(w) = \varphi(b) + \alpha_m (w-b)^m + \alpha_{m+1}(w-b)^{m+1} + \ldots,$$

причём:

$$\alpha_m = \frac{\varphi^{(m)}(b)}{m!} \neq 0.$$

Ввиду последнего неравенства мы можем выбрать число $\rho > 0$ столь малым, чтобы в круге $|w-b| < \rho$ имело место неравенство:

$$\left| \frac{\varphi(w)-\varphi(b)}{w-b} - \alpha_m \right| \leq \frac{1}{3}|\alpha_m|.$$

Число δ определим равенством $\delta = \dfrac{1}{3}\rho|\alpha_m|$.

Вводя вспомогательные функции:

$$F(w) = (w-b)^m \alpha_m, \qquad f(w) = \varphi(w) - z - \alpha_m (w-b)^m$$

и применяя теорему Руше, как и в лемме 2.1, легко убеждаемся, что при выполнении условия $|z - \varphi(b)| < \delta$ функция $F(w) + f(w) = \varphi(w) - z$ имеет в круге $|w-b| < \rho$ столько же нулей, сколько и функция $F(w)$ (учитывая кратность). Так как функция $F(w) = (w-b)^m \alpha_m$ имеет в круге $|w-b| < \rho$ ровно m нулей (один нуль кратности m), получаем первое утверждение теоремы.

Для доказательства следующих её утверждений рассмотрим функцию $\varphi_1(w) = \sqrt[m]{\varphi(m) - \varphi(b)} = \beta_1(w-b) + \beta_2(w-b)^2 + \ldots,$
где

$$\beta_1 = \sqrt[m]{\alpha_m} \neq 0.$$

Эта функция регулярна в точке $w = b$ и $\varphi_1'(b) = \beta_1 \neq 0$. С помощью функции $\varphi_1(w)$ уравнение (39) записывается в виде:

$$\varphi_1(w) = \sqrt[m]{z-a} \qquad (a = \varphi(b)). \tag{42}$$

Обозначим $w = \psi_1(\zeta)$ функцию, обратную к функции $\zeta = \varphi_1(w)$ (эта функция существует по лемме 2.1; она регулярна в окрестности точки $\zeta = 0$ по теореме 2.36). С помощью функции $\psi_1(\zeta)$ можем записать решение уравнения (42) в виде: $w = \psi_1 \cdot \sqrt[m]{z-a}$. Следовательно, $\psi(z) = \psi_1 \cdot \sqrt[m]{z-a}$, где функция $\psi_1 = \psi_1(\zeta)$ регулярна в точке $\zeta = 0$. Отсюда легко получаем остальные утверждения теоремы (следующие за первым). ◀

5. Однолистные функции. Принцип соответствия границ

Если функция *$f(z)$ в различных точках множества E принимает различные значения, то говорим, что $f(z)$ является* ***однолистной на множестве*** *E, а* ***отображение*** *$w=f(z)$ является* ***взаимно однозначным отображением*** *множества E на множество $E^*=f(E)$.*

Для доказательства однолистности функции $f(z)$ ниже будем пользоваться следующими двумя очевидными признаками однолистности:

Для однолистности функции $f(z)$ в области E необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная на множестве $E^*=f(E)$ функция $\varphi(w)$, обратная к $f(z)$, т. е. такая, что:

$$\varphi\big(f(z)\big)=z \quad (z\in E) \quad \text{и} \quad f\big(\varphi(w)\big)=w \quad (w\in E^*).$$

Если функция $f(z)$ является однолистной на множестве E, а функция $F(w)$ является однолистной на множестве $f(E)$, то функция $F\big(f(z)\big)$ является однолистной на множестве E.

Теорема 2.41. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D. Обозначим символом G_m множество тех значений w, для которых уравнение $f(z)=w$ имеет в области D не менее m решений. Тогда G_m – открытое множество.*

▷ Нужно доказать, что все точки w, достаточно близкие к точке $w_0\in G_m$, тоже входят в G_m.

Пусть значение w_0 принимается функцией $f(z)$ в точках $z_s\in D$ с кратностью m_s $(s=1,2,...,k)$ и $\sum\limits_{s=1}^{k} m_s\ge m$. В точке $z=z_s$ функция $f(z)-w_0$ имеет нуль кратности m_s, так что точка $z=z_s$ является нулём кратности m_s-1 для функции $f'(z)$. Применяя теорему 2.40, замечаем, что функция $f(z)-w$ при всех w, достаточно близких к w_0, имеет m_s нулей в заданной окрестности точки z_s . Задавая окрестности точек z_s неперекрывающимися и лежащими в D, видим, что функция $f(z)-w$ имеет в D не менее $\sum\limits_{s=1}^{k} m_s\ge m$ нулей (при w, достаточно близких к w_0). Следовательно, все значения w, достаточно близкие к w_0, входят в G_m. ◀

Следствие 2.5. *При отображении регулярной функцией образом области является область.*

$\triangleright$ В обозначениях теоремы образом области является открытое множество G_1. Связность образа области легко получаем из непрерывности отображения. $\blacktriangleleft$

Говорим, *что функция $f(z)$* ***является однолистной в точке*** *$z=a$, если существует содержащая точку $z=a$ область D, в которой функция $f(z)$ является однолистной.*

Теорема 2.42. *Для того чтобы функция $f(z)$, регулярная в точке $z=a$ $(a\neq\infty)$, была однолистной в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы $f'(a)\neq 0$.*

Доказательство сразу вытекает из теоремы 2.40.

Отметим, что для однолистности функции $f(z)$ в области D необходимо (но не достаточно!), чтобы функция $f(z)$ была однолистной в каждой точке этой области. Выше были сформулированы два очевидных признака однолистности. Для регулярных функций имеется ещё один признак: ***принцип соответствия границ.***

Теорема 2.43 (принцип соответствия границ). *Пусть D и G – конечные односвязные области, ограниченные замкнутыми кусочно-гладкими кривыми C и Γ соответственно. Пусть, далее, функция $f(z)$ и её производная $f'(z)$ регулярны в области D и непрерывны вплоть до её границы. Если при движении точки z по кривой C в положительном направлении точка $w=f(z)$ движется по кривой Γ в положительном направлении и один обход C отвечает одному обходу Γ, то отображение $w=f(z)$ является взаимно однозначным отображением области D на область G.*

$\triangleright$ Нужно доказать, что функция $f(z)$ является однолистной в области D и что $f(D)=G$.

Обозначим $\nu(\zeta)$ число нулей функции $f(z)-\zeta$ в области D. Однолистность $f(z)$ в D означает, что $\nu(\zeta)\leq 1$ для всех ζ. Для ζ будем различать три возможности: $\zeta\in G$, $\zeta\notin\overline{G}$ и $\zeta\in\Gamma$. При доказательстве однолистности возможность $\zeta\in\Gamma$ можно не исследовать, т. к. множество значений ζ, для которых $\nu(\zeta)\geq 2$, по теореме 2.41, является открытым множеством, т. е. состоит лишь из внутренних точек, а кривая Γ – замкнутое множество, не имеющее внутренних точек. Множество значений ζ, принимаемых функцией $f(z)$ на кривой C, по условию теоремы, совпадает с кривой Γ. Поэтому, при $\zeta\notin\Gamma$ функция

$f(z)-\zeta$ не обращается в нуль на C. Применим принцип аргумента (см. формулу (36)). Это даёт:

$$\nu(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}_C \arg\big(f(z)-\zeta\big).$$

По условию теоремы точка $w=f(z)$ один раз обходит в положительном направлении кривую Γ, когда точка z один раз обходит в положительном направлении кривую C. Значит:

$$\nu(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}_C \arg\big(f(z)-\zeta\big)=\frac{1}{2\pi}\operatorname*{var}_\Gamma \arg\big(w-\zeta\big).$$

Последнее выражение, согласно принципу аргумента, равно числу нулей функции $w-\zeta$ в области G. Это число равно нулю при $\zeta\notin\overline{G}$ и единице при $\zeta\in G$. Следовательно, $\nu(\zeta)\le 1$ для $\zeta\notin\Gamma$, а согласно сказанному в начале доказательства и для всех ζ.

Заметим, что помимо однолистности функции $f(z)$ в области D мы доказали ещё, что $\nu(\zeta)=0$ при условии $\zeta\notin\overline{G}$. Это означает, что множество $f(D)$ лежит в $\overline{G}$. Но все точки границы области G принимаются функцией $f(z)$ на границе области D, т.к. $f(C)=\Gamma$. Легко показать, что значения, принимаемые однолистной функцией внутри области, не могут приниматься ею на границе области. Действительно, если значение w_0 принимается функцией $f(z)$ в точке $z_0\in D$, то все значения w, достаточно близкие к w_0, принимаются функцией $f(z)$ в некоторой окрестности точки z_0, а, в силу однолистности, и только в этой окрестности. Поэтому значения $f(z)$ в остальных точках D не могут быть близкими к w_0. Значит, точки границы области G не входят в $f(D)$ и $f(D)=G$. ◀

З а м е ч а н и е 2.7. Т. к. $\rho_D(z_1,z_2)\ge|z_1-z_2|$, то непрерывность функции вплоть до границы области является более слабым требованием, чем равномерная её непрерывность в области. Но если область D ограничена простой кривой, то из непрерывности функции в D вплоть до её границы уже следует её равномерная непрерывность. Для кусочно-гладких кривых (назовём их «хорошими кривыми») оно почти очевидно. Таким образом, в теореме 2.43 речь фактически идёт о равномерно непрерывных функциях.

§ 4. Конформные отображения. Теорема Римана

1. Свойства равномерно сходящихся последовательностей

Если** каждое значение $w \in F(D)$ принимается функцией $F(z)$, аналитической в области D, ровно один раз, то будем говорить, что **функция** $F(z)$ **является однолистной в области** D. **Отображения** регулярными однолистными функциями называют **конформными отображениями.

Перечислим наиболее важные свойства однолистных аналитических функций.

Свойство 1. Пусть множество G_m состоит из значений w, принимаемых функцией $F(z)$ в области D не менее m раз. Тогда G_m – открытое множество (см. на предыдущей странице). В частности, образом области является область.

Свойство 2. Пусть функция $F(z)$ является аналитической и однолистной в области D, а функция $G(z)$ – аналитической и однолистной в области $F(D)$. Тогда функция $G(F(z))$ является аналитической и однолистной в области D.

Свойство 3. Для однолистности в области D аналитической в D функции $F(z)$ необходимо и достаточно, чтобы в области $F(D)$ существовала регулярная функция $\varphi(w)$, обратная к $F(z)$, т. е. такая, что $\varphi(F(z)) \equiv z$.

Доказательства этих свойств проводятся аналогично доказательствам, соответствующим свойствам регулярных функций.

Пусть дана последовательность функций $\{F_n(z)\}$, $n = 1,2,\ldots$, аналитических в области D, и пусть $f_n(z)$ – исходные элементы функций $F_n(z)$, определённые в окрестности одной и той же точки, скажем, точки $z_0 \in D$. Пусть, далее, L – любая кривая, выходящая из точки z_0 и лежащая в области D, а $\Phi_n(z, L)$ – аналитическая на кривой L функция, полученная аналитическим продолжением элемента $f_n(z)$ вдоль кривой L.

Будем говорить,** что **последовательность** $\{F_n(z)\}$, **равномерно сходится внутри области** D**,** если при любом выборе кривой L последовательность $\{\Phi_n(z, L)\}$, **равномерно сходится на этой кривой.

Перечислим нужные нам свойства равномерно сходящихся последовательностей аналитических функций.

Свойство 1. *Предел последовательности аналитических в* D *функций, равномерно сходящейся внутри* D*, является аналитической в* D *функцией.*

Свойство 2. *Если* $\{F_n(z)\}$ *– последовательность функций, аналитических в области, и*:

$$|F_n(z)| \le M \qquad (z \in D)$$

(постоянная M не зависит ни от n, ни от выбора элемента) , *то из последовательности* $\{F_n(z)\}$ *можно выбрать под-последовательность, равномерно сходящуюся внутри* D.

Свойство 3. *Пусть* $\{F_n(z)\}$ *– последовательность функций, аналитических в* D*, равномерно сходящаяся к функции* $F(z)$*, отличной от тождественной постоянной. Если каждая из функций* $F_n(z)$ *любое значение* w *принимает не более* m *раз, то и функция* $F(z)$ *обладает тем же свойством.*

В частности, *предел равномерно сходящейся внутри* D *последовательности аналитических однолистных функций тоже является аналитической однолистной функцией или тождественной постоянной.*

Докажем свойство 2.

$\triangleright$ Возьмём точку $z_0 \in D$ и последовательность $\{f_n(z)\}$ исходных элементов функций $F_n(z)$. Функции $f_n(z)$ регулярны и ограничены в окрестности точки z_0. По принципу компактности регулярных функций (теорема 2.27) из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в указанной окрестности точки z_0. Затем возьмём какую-либо кривую L и выберем на ней точку z_1, настолько близкую к z_0, чтобы функции $\Phi_n(z,L)$ были регулярны в окрестности точки z_1, имеющей общую часть с окрестностью точки z_0.

Покажем, что выбранная выше подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}(z,L)\}$ равномерно сходится и в окрестности точки z_1. По теореме 2.27 из этой подпоследовательности можно выбрать сходящуюся в данной окрестности точки z_1 подпоследовательность. Но предел этой подпоследовательности в общей части окрестностей точек z_0 и z_1 обязан совпадать с пределом последовательности $\{f_{n_k}(z)\}$. Значит, пределы всех под-последовательностей последовательности $\{\Phi_{n_k}(z,L)\}$ должны быть одинаковыми. Отсюда следует существование предела всей последовательности $\{\Phi_{n_k}(z,L)\}$.

Выбирая затем точку $z_2 \in L$ и т. д., убеждаемся в том, что последовательность $\{\Phi_{n_k}(z,L)\}$ равномерно сходится на всей кривой. Поскольку выбор подпоследовательности $\{n_k\}$ не зависит от выбора кривой L, то подпоследовательность $\{F_{n_k}(z)\}$ равномерно сходится внутри D. ◀

Докажем свойство 3.

▷ Пусть $\tilde{f}_1(z)$, …, $\tilde{f}_s(z)$ – те элементы предельной функции последовательности $\{F_n(z)\}$, для которых $\tilde{f}_k(z)-w$ имеет нуль в точке $z = z_k$.

Применяя к каждому из этих элементов теорему 2.34, получаем утверждение. ◀

Если функция $f(z)$ *является аналитической и однолистной в* D*, то будем говорить, что она совершает* ***конформное отображение*** *области* D *на область* $f(D)$.

Прежде было введено это понятие так.

Отображения регулярными однолистными *функциями получили название* ***конформных отображений*** *(т. е. сохраняющих форму).*

Если D – область односвязная, то это новое понятие конформного отображения совпадает с прежним его понятием, т. к. по теореме о монодромии функция $f(z)$ регулярна в D.

2. Примеры конформных отображений многосвязных областей

Пример 1. Рассмотрим отображение кольца $r<|z|<R$ функцией $w=\ln z$, аналитической в этом кольце. Заметим, что функция $\ln z$ является однолистной в кольце, т. к. она имеет обратную функцию $z=e^w$, регулярную во всей плоскости. Таким образом, отображение $w=\ln z$ является конформным отображением, и нам нужно найти лишь образ кольца.

Проведём в кольце разрез $(-R,-r)$. В разрезанном кольце функция $\ln z$ допускает выделение регулярной ветви. Посмотрим, куда отображает разрезанное кольцо каждая из регулярных ветвей $\ln z$. Образом разрезанного кольца является прямоугольник

$$\ln r<\operatorname{Re} w<\ln R, \quad -\pi+2\pi k<\operatorname{Im} w<\pi+2\pi k,$$

где целое число k определяется выбором регулярной ветви $\ln z$. В совокупности все эти прямоугольники с добавленными образами разреза образуют полосу $\ln r < \operatorname{Re} w < \ln R$, которая и является образом кольца при отображении $w = \ln z$.

Заметим, что конформным отображением двусвязной области – кольца – оказалась односвязная область – полоса. Это оказалось возможным благодаря тому, что конформное отображение аналитической функцией не является взаимно однозначным отображением.

Пример 2. Найдём конформное отображение круга $|z|<1$ с выколотой точкой $z=a$, $0<|a|<1$, на круг $|w|<1$, переводящее точку $z=0$ в точку $w=0$.

Сначала с помощью дробно-линейного отображения переведём круг $|z|<1$ с выколотой точкой $z=a$ в круг $|\zeta|<1$ с выколотым центром, т. е. в кольцо $0<|\zeta|<1$. Это делается с помощью функции $\zeta = \dfrac{a-z}{1-z\bar{a}}$. С помощью функции $t=\ln\zeta$ (см. предыдущий пример) конформно отобразим кольцо $0<|\zeta|<1$ на полосу, которая в нашем случае вырождается в полуплоскость $\operatorname{Re} t<0$. Выясним, куда переходит в этой полуплоскости точка $z=0$. Поскольку $t(z)=\ln\dfrac{a-z}{1-z\bar{a}}$, то $t(0)=\ln a$, причём для $\ln a$ можно взять любое значение.

Чтобы получить искомое отображение, остаётся перевести дробно-линейным отображением полуплоскость $\operatorname{Re} t<0$ в круг $|w|<1$, а точку $t=\ln a$ – в точку $w=0$. Это делается с помощью функции:

$$w = w(z) = \frac{\ln\dfrac{a-z}{1-z\bar{a}} - \ln a}{\ln\dfrac{a-z}{1-z\bar{a}} + \ln a}.$$

Найдём ещё $w'(0)$ для того элемента отображающей функции $w(z)$, для которого $w(0)=0$. Имеем:

$$w'(0) = \frac{1-|a|^2}{a}\cdot\frac{1}{2\ln|a|}.$$

Легко проверяется, что:

$$|w'(0)|>1 \qquad (0<|a|<1).$$

3. Отображение области на круг

Переходя к рассмотрению конформных отображений, сформулируем два важных результата из указанной области: теорему Римана и теорему о соответствии границ. Первую из них мы докажем (в ослабленном варианте), вторую оставим без доказательства.

Теорема Римана. *Для любой односвязной области, граница которой состоит более чем из одной точки, существует мероморфная в этой области функция* $f(z)$, *конформно отображающая её на круг* $|w|<1$. *Функция* $f(z)$ *единственным образом определяется условиями* $f(a)=0$, $\arg f'(a)=\theta$ (a – *произвольная точка области,* θ – *произвольное действительное число*) [9, гл. V, § 1].

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – действительные непрерывные функции, $\alpha \le t \le \beta$. Два уравнения:

$$x = x(t) \text{ и } y = y(t)$$

дают параметрическое изображение непрерывной линии.

Если двум различным значениям *параметра* t (*за исключением, быть может, значений* $t=\alpha$ *и* $t=\beta$, *соответствующих началу и концу линии*) *всегда отвечают* ***две различные точки*** *линии, то наша линия не имеет кратных точек и называется* ***линией Жордана.***

Точка ζ ***границы области,*** *которую можно соединить дугой Жордана с внутренней точкой области* (*дуга не должна иметь с границей области других общих точек, кроме граничной точки* ζ), *называется* ***достижимой*** (*изнутри*) ***граничной точкой.***

Указанное свойство областей можно сформулировать так: *каждая граничная точка области, ограниченной жордановой кривой, достижима* (*изнутри и извне*).

Теорема о соответствии границ. *Пусть* G *есть односвязная область плоскости* z, *ограниченная линией Жордана* S, *и пусть функция* $w=f(z)$ *отображает взаимно однозначно и конформно эту область на внутренность единичного круга плоскости* w, *ограниченного окружностью* C. *Тогда посредством той же функции* $w=f(z)$ *границы* S *и* C *преобразовываются друг на друга взаимно однозначно и непрерывно; функция* $w=f(z)$ *равномерно непрерывна в области* G, *а обратная функция* $z=\varphi(w)$ *равномерно непрерывна в области* $|w|<1$. [28_2, гл. XII, § 7] (ср. с теоремой 2.43).

Докажем теорему о существовании конформного отображения в несколько ослабленной формулировке [9, гл.IX, §1].

Теорема 2.44. *Любую область комплексной плоскости, имеющую хотя бы одну внешнюю точку, можно конформно отобразить на единичный круг.*

▷ Без ограничения общности можно считать, что точка $z=0$ является внутренней, а точка $z=\infty$ – внешней точкой области, т. к. этого всегда можно добиться, сделав дробно-линейное отображение.

Функцию $\Phi(z)$, конформно отображающую нашу область D на круг $|w|<1$, будем строить как решение следующей экстремальной задачи: среди функций $F(z)$, аналитических и однолистных в области D и удовлетворяющих условиям:

$$f(0)=0, \qquad |F(z)|\le 1 \qquad (z\in D) \tag{43}$$

(первое условие относится к исходному элементу функции $F(z)$, второе – ко всем её элементам), найти ту, для которой значение $|f'(0)|$ (для исходного элемента) является наибольшим.

Обозначим $S(D)$ множество тех функций, среди которых мы ищем функцию экстремальную. Для доказательства теоремы нужно доказать два утверждения:

1) Во множестве $S(D)$ существует экстремальная функция.

2) Экстремальная функция совершает искомое отображение.

Сначала докажем утверждение 1. Для этого заметим:

Во-первых, что множество $S(D)$ не пусто, т. к. D – ограниченная область и функция $F(z)=cz$ при достаточно малом c входит во множество $S(D)$ (точка $z=\infty$ – внешняя точка D).

Во-вторых, что для всех функций из $S(D)$ значения $|f'(0)|$ ограничены. Действительно, область D содержит некоторый круг $|z|\le\rho$ (точка $z=0$ является внутренней точкой D). Исходный элемент $f(z)$ любой функции $F(z)\in S(D)$ является регулярной в этом круге функцией. Поэтому:

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z^2}dz.$$

Переходя к модулям и вспоминая, что $|F(z)|\le 1$ при условии $F(z)\in S(D)$, получаем $|f'(0)|\le\dfrac{1}{\rho}$. Теперь обозначим $\mu=\sup\limits_{F\in S(D)}|f'(0)|$.

По определению точной верхней грани существует последовательность:

$$\{F_n(z)\} \quad (F_n(z) \in S(D)), \qquad |F_n'(0)| > \mu - \frac{1}{n} \qquad (n = 1,2,\ \ldots).$$

Поскольку $|F_n(z)| \le 1 \quad (z \in D)$, из последовательности $\{f_n(z)\}$, согласно свойству 2 последовательностей аналитических функций, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Предел этой под-последовательности обозначим $\Phi(z)$. Согласно свойству 3 имеем $\Phi(z) \in S(D)$, т. к. $|\Phi(0)| \ge \mu$, а значит, $\Phi(z)$ отлична от тождественной постоянной. Следовательно,

$$\Phi(z) \in S(D), \qquad |\Phi'(0)| = \mu,$$

т. е. построенная функция $\varphi(z)$ является экстремальной.

Докажем теперь утверждение 2.

Поскольку экстремальная функция $\Phi(z)$ является однолистной и аналитической в области D, то она совершает конформное отображение области D на область $\Phi(D)$. Ввиду условия $|\Phi(z)| \le 1$ $(z \in D)$ область $\Phi(D)$ лежит в круге $|w| < 1$. Покажем, что из экстремальности функции $\Phi(z)$ следует, что область $\Phi(D)$ совпадает с кругом $|w| < 1$.

Допустим противное. Тогда область $\Phi(D)$ имеет хотя бы одну граничную точку $w = a$, лежащую в круге $|w| < 1$. Рассмотрим функцию $F(z) = W(\Phi(z))$ ($W(z)$ – функция примера 2, конформно отображающая круг $|z| < 1$ с выколотой точкой $z = a$ на круг $|w| < 1$, причём $w(0) = 0$). Согласно свойству 2 однолистных функций $F(z)$ является аналитической и однолистной в D. Условия (43) для неё тоже выполнены, так что $F(z) \in S(D)$. Но для исходных элементов:

$$f'(0) = w'(0) \cdot \varphi'(0), \qquad |f'(0)| = |w'(0)| \cdot |\varphi'(0)|,$$

а мы видели, что $|w'(0)| > 1$. Значит, $|f'(0)| > |\varphi'(0)|$, а это противоречит условию, что $\Phi(z)$ есть экстремальная функция. Отсюда: область $\Phi(D)$ совпадает с кругом $|w| < 1$. ◀

4. О свойствах гармонических функций

Далее для краткости вместо записи $u(x, y)$ будем писать $u(z)$, где $z = x + iy$. Иногда будем переходить от одной записи к другой, оставляя для функции одну и ту же букву, т. е. будем считать, что $u(x + iy) \equiv u(x, y)$.

***Дифференциальное уравнение*:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

называется ***уравнением Лапласа.*** *Функция u, которая имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой области D и удовлетворяет в ней уравнению Лапласа, называется* ***гармонической.*** *Если гармонические функции u и v в области D связаны условиями*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

то эти функции называются ***сопряжёнными гармоническими****, а связывающие их условия –* ***условиями Даламбера – Эйлера*** (***Коши – Римана***) (см. § 2, п. 1).

Известно, что действительная и мнимая части регулярной в области D функции $f(z)$ являются сопряжёнными гармоническими в D функциями. Обратное утверждение неверно для многосвязной области, как показывает пример функции $\ln|z|$, гармонической при $0<|z|<\infty$. Однако имеет место более сложное утверждение о связи аналитических и гармонических функций (ГФ) (оно справедливо и для многосвязных областей) (9, гл. VIII, § 1).

Теорема 2.45. *Для того чтобы функция $u(z)$ была функцией гармонической в некоторой области D, необходимо и достаточно, чтобы она была действительной частью некоторой аналитической в той же самой области D функции $w(z)$, удовлетворяющей условиям:*

1. *Функция $w'(z)$ регулярна в области D.*

2. *Интеграл от $w'(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, равен чисто мнимому числу* (*или нулю*).

З а м е ч а н и е 2.8. Смысл теоремы состоит в том, что *для гармоничности функции $u(z)$, определённой в области D*, необходимо и достаточно, чтобы она была *действительной частью функции, аналитической* в области D. Условия 1 и 2 дают необходимые и достаточные условия для однозначности в области D действительной части функции $w(z)$, аналитической в этой области.

З а м е ч а н и е 2.9. Если область D является *односвязной,* то функция, *аналитическая* в области D, *регулярна* в этой области. Поэтому для *гармоничности функции $u(z)$ в односвязной* области D *необходимо и достаточно,* чтобы она была действительной частью функции, *регулярной* в области D.

Теорема 2.46. *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна в области* D *и её значения лежат в области* G. *Если функция* $U(z)$ *гармонична в области* G, *то функция* $U(f(z)) = u(z)$ *гармонична в области* D.

▷ Если $W(z)$ – АФ а области G, для которой $U(z) = \operatorname{Re} W(z)$, то функция $w(z) = W(f(z))$ является АФ в области D (например, по той причине, что функция $w'(z) = W'(f(z)) f'(z)$ регулярна в области D) и, очевидно, $u(z) = = \operatorname{Re} w(z)$. ◀

Рассмотрим известную формулу Грина – Остроградского

$$\int\limits_C A(x,y)dx + B(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dxdy \tag{44}$$

(D – некоторая область; C – граница D). Формула (44) справедлива для любых непрерывно дифференцируемых в области D функций $A(x,y)$ и $B(x,y)$. Частный случай этой формулы носит название формулы Грина. Эта формула имеет вид:

$$\int\limits_C \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \iint\limits_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dxdy + \iint\limits_D \varphi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dxdy\,. \tag{45}$$

В (45) $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые в D функции, а $\dfrac{\partial \psi}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к кривой C, т. е. $\dfrac{\partial \psi}{\partial n} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \cos\theta + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \sin\theta$, где θ – угол внешней нормали к кривой C с осью x. Если кривая является кусочно-гладкой, то направление внешней нормали определено на всей кривой C, за исключением конечного числа точек.

Формула (45) получается из формулы (44), если заметить, что $ds \cdot \cos\theta = dy$, $ds \cdot \sin\theta = -dx$ и, значит:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} ds = -\frac{\partial \psi}{\partial y} dx + \frac{\partial \psi}{\partial x} dy\,.$$

Отметим следствия из (45).

Возьмём в (45) функцию $\varphi(x,y)$ равной единице, а функцию $\psi(x,y)$ – равной гармонической в области D функции $u(x,y)$. Тогда:

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \tag{46}$$

Возьмём в (45) сначала $\varphi(x,y) = u(x,y)$, $\psi(x,y) = v(x,y)$, затем $\varphi(x,y) = v(x,y)$, $\psi(x,y) = u(x,y)$ и вычтем из первого полученного равенства второе. Если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – гармонические в области D функции, то получим:

$$\int_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0. \tag{47}$$

Теорема 2.47. *Пусть функция* $u(z)$ *гармонична в области* D *и дважды непрерывно дифференцируема в* $\overline{D}$. *Если* $\zeta \in D$, *то*:

$$\int_C \left\{ u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta| \right\} ds = 2\pi u(\zeta) \tag{48}$$

(C – граница D). *Если* $\zeta \notin \overline{D}$, *то интеграл равен нулю.*

▷ Функция $v(z) = \ln|z-\zeta|$ является гармонической во всей плоскости, за исключением точки $z = \zeta$, т. к. она равна действительной части аналитической при $0 < |z-\zeta| < \infty$ функции $\ln(z-\zeta)$. Если $\zeta \notin \overline{D}$, то функция $\ln|z-\zeta|$ гармонична в области D и по формуле (47) интеграл равен нулю.

Чтобы доказать (48) при условии $\zeta \in D$, обозначим D_ρ область, полученную удалением из области D круга $|z-\zeta| \le \rho$ (возьмём $\rho > 0$ столь малым, чтобы этот круг лежал в области D). Если обозначить C_ρ границу области D_ρ, то согласно сказанному выше имеем, поскольку $\zeta \notin \overline{D}_\rho$,

$$\int_{C_\rho} \left\{ u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta| \right\} ds = 0.$$

Так как кривая C_ρ состоит из кривой C и из окружности $|z-\zeta| = \rho$, то:

$$J = \int_C \left\{ u\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta| \right\} ds + \int_{|z-\zeta|=\rho} \left\{ u\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\zeta| \right\} ds$$

(во втором интеграле направление движения по окружности $|z-\zeta| = \rho$ является противоположным тому, каким оно было при интегрировании по кривой C_ρ). На окружности $|z-\zeta| = \rho$, очевидно, имеем: $\ln|z-\zeta| = \ln\rho$ и $\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\zeta| = = \frac{\partial}{\partial r}\ln r = \frac{1}{\rho}$ $\quad (r = \rho)$. Согласно (46):

$$J = \frac{1}{\rho}\int_{|z-\zeta|=\rho} u(z)\,ds. \tag{49}$$

Левая часть J равенства (49) не зависит от ρ (см. выше, чему равно J), значит, не зависит от ρ и правая часть (49). И действительно, по теореме о среднем существует точка z^* на окружности $|z-\zeta| = \rho$, что $\int_{|z-\zeta|=\rho} u(z)\,ds = u(z^*)\cdot l$, где l – длина этой окружности, равная $2\pi\rho$.

Тогда: $J = \frac{1}{\rho} \cdot 2\pi\rho \cdot u(z^*) = 2\pi \cdot u(z^*)$. Перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим $J = 2\pi \cdot u(\zeta) \quad (u(z^*) \underset{\rho\to 0}{\to} u(\zeta))$.

Рассматривая равенство (49), можно было рассуждать и по-другому. Хорошо известно следующее свойство гармонической функции: значение гармонической функции $u(z)$ в некоторой точке ζ равно среднему значению этой функции на любой окружности с центром в точке ζ, если окружность не выходит из области гармоничности функции, т. е. $u(\zeta) = \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)ds$. Из последнего равенства находим:

$$J = \frac{1}{\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)ds = 2\pi \cdot u(\zeta)$$

и переходить к пределу не требуется. ◀

З а м е ч а н и е 2.10. Было отмечено, что правая часть (49) не зависит от ρ, и было показано, что она равна $2\pi u(\zeta)$. Таким образом, одновременно с доказательством (48) мы доказали и следующее утверждение, носящее название *теоремы о среднем для гармонических функций:*

Если функция $u(z)$ *гармонична в круге* $|z-\zeta| < R$*, то*:

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)|dz| = u(\zeta) \qquad (\rho < R).$$

5. Принцип максимума. Единственность конформного отображения

Действительная функция $h(x)$ $(x = (x_1, x_2))$ *называется* ***субгармонической*** *в области* D*, если она удовлетворяет условиям:*

1) *она определена и непрерывна во всех точках этой области, за исключением, быть может, конечного числа точек или точек некоторой последовательности* $\{x_n\}$ $(x = (x_1, x_2))$*, не имеющей предельных точек внутри* D*, причем, для каждой исключительной точки* x_n *выполнено соотношение:*

$$\lim_{x\to x_n} h(x) = -\infty;$$

учитывая последнее соотношение, полагаем $h(x_n) = -\infty$*;*

2) *для каждой точки* $x \in D$ *и для всех достаточно малых* ρ *справедливо неравенство*:

$$h(x) = h(x_1, x_2) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x_1 + \rho\cos\alpha, x_2 + \rho\sin\alpha)d\alpha$$

Если *для любых* ζ *и* $\rho > 0$, *для которых круг* $|z-\zeta| \le \rho$ *лежит в области* D, *имеем*:

$$u(\zeta) \le \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)|dz| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\zeta + \rho e^{i\varphi})d\varphi,$$

то функция $u(z)$ *называется* ***субгармонической в области*** D.

$$\left(u(x) = u(x_1, x_2) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x_1 + \rho\cos\alpha, x_2 + \rho\sin\alpha)d\alpha. \qquad \Leftrightarrow \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad u(\zeta) \le \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} u(z)|dz| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\zeta + \rho e^{i\varphi})d\varphi,$$

т. к. $\zeta + \rho e^{i\varphi} = x_1 + ix_2 + \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x_1 + \rho\cos\varphi + i\cdot(x_2 + \rho\sin\varphi)$;

$$\left. u\big(x_1 + \rho\cos\varphi + i\cdot(x_2 + \rho\sin\varphi)\big) \equiv u(x_1 + \rho\cos\varphi,\ x_2 + \rho\sin\varphi) \right).$$

Из теоремы о среднем для гармонических функций (см. замечание 2.10) видно, что функция, *гармоническая в области* D, является *и субгармонической в этой области функцией.*

Точка z *называется* ***граничной точкой множества*** E, *если в любой окрестности* z *есть точки и принадлежащие, и не принадлежащие* E.

Теорема 2.48 (принцип максимума). *Пусть функция* $u(z)$ *есть субгармоническая в области* D. *Обозначим* $M = \sup\limits_{z\in D} u(z)$. *Если* $u(\zeta) = M$ *в точке* $\zeta \in D$, *то* $u(z) \equiv M$.

Иными словами:

Субгармоническая функция, отличная от постоянной, не может достигать своей верхней грани внутри области.

$\triangleright$ Пусть $\tilde{E}$ есть множество точек z области D, в которых $u(z) > -\infty$. Рассмотрим множество E, состоящее из всех точек z области D, в которых $u(z) = M$. Нетрудно показать, что множество точек, в которых непрерывная функция принимает заданное значение, является замкнутым. Поскольку $E \subset \tilde{E}$ и функция $u(z)$ непрерывна на множестве $\tilde{E}$, то множество E замкнуто в D. Допустим, что найдётся граничная точка множества E, лежащая в области D, скажем, ζ. В силу замкнутости множества E имеем $\zeta \in E$ и $u(\zeta) = M$. В силу того, что функция $u(z)$ непрерывна в точке ζ, и в силу условий, наложенных на исключительные точки x_n, можем сделать вывод: существует окрестность $\tilde{K}$: $|z-\zeta| < \tilde{\rho}$, лежащая в D, в которой $u(z) > -\infty$.

Так как точка ζ – граничная точка множества E, то существует точка $\zeta_0 \in \tilde{K}$ и такая, что $\zeta_0 \notin E$ (см. определение граничной точки). Но тогда точка ζ_0 принадлежит дополнению к множеству E. Это дополнение является открытым множеством, так как E – множество замкнутое. Тогда, если $\zeta_0 \notin E$, то и некоторая окрестность $\tilde{\tilde{K}}$: $|z-\zeta_0| < \tilde{\tilde{\rho}}$ точки ζ_0 не принадлежит множеству E. Окрестность, очевидно, всегда можно выбрать так, чтобы имело место включение $\tilde{\tilde{K}} \subset \tilde{K}$. Выше было отмечено, что $\tilde{K} \subset D$. Поэтому $\tilde{\tilde{K}} \subset \tilde{K} \subset D$. Далее, существует замкнутый круг, лежащий в открытом круге $\tilde{\tilde{K}}$ и имеющий радиус, меньший, чем $\tilde{\tilde{\rho}}$. Чтобы не менять обозначений, будем считать, что $\tilde{\tilde{K}}$: $|z-\zeta_0| \le \tilde{\tilde{\rho}}$.

Итак, мы имеем ограниченное и замкнутое множество $\tilde{\tilde{K}}$ и функцию $u(z)$, непрерывную на нём. Но тогда, как хорошо известно, функция $u(z)$ ограничена на множестве $\tilde{\tilde{K}}$ и достигает на нём своих верхней и нижней граней. Пусть $\inf\limits_{z\in\tilde{\tilde{K}}} u(z) = q \quad (q < M)$ и пусть $u(z_0) = q$, где $z_0 \in \tilde{\tilde{K}}$.

Обозначим $\rho_0 = |z_0 - \zeta|, \quad \varepsilon = \dfrac{M-q}{2}$. Тогда точка z_0 будет лежать на окружности C_0: $|z-\zeta| = \rho_0$ и будет выполняться равенство $q = M - 2\varepsilon$. Очевидно, что существует некоторая достаточно малая дуга γ (точка z_0 является серединой дуги γ) окружности C_0, в каждой точке которой выполняется неравенство $u(z) < M - \varepsilon \quad (z \in \gamma)$. В точках $z \in C_0 - \gamma$ выполняется неравенство $u(z) \le M$. Для любой точки $z \in C_0$ можно использовать запись $z = \zeta + \rho_0 e^{i\varphi}$. Применяя последнюю запись для точек на окружности, дугу γ можно описать, задав промежуток изменения переменной φ. Для этого скажем, что можно выбрать такие числа θ и $\delta > 0$, что при $\theta - \delta \le \varphi \le \theta + \delta$ будет справедливо неравенство $u(\zeta + \rho_0 e^{i\varphi}) < M - \varepsilon$ (число θ соответствует точке z_0).

С учётом всего вышесказанного получаем:

$$\int_0^{2\pi} u(\zeta + \rho_0 e^{i\varphi})d\varphi = \int\limits_{\theta-\pi<\varphi<\theta-\delta} u\left(\zeta + \rho_0 e^{i\varphi}\right)d\varphi + \int\limits_{|\varphi-\theta|\le\delta} u\left(\zeta + \rho_0 e^{i\varphi}\right)d\varphi + \int\limits_{\theta+\delta<\varphi\le\theta+\pi} u\left(\zeta + \rho e^{i\varphi}\right)d\varphi <$$

$$< 2\delta(M-\varepsilon) + M(2\pi - 2\delta) = 2\pi M - 2\delta\varepsilon < 2\pi M.$$

Согласно определению субгармонической функции интеграл, написанный в самом начале, не меньше $2\pi u(\zeta) = 2\pi M$. Полученное противоречие доказывает, что множество E не может иметь граничных точек внутри области D. Следовательно, множество E или пусто, или совпадает с областью D. ◀

З а м е ч а н и е 2.11. Обозначим $\varphi(\zeta) = \overline{\lim\limits_{z\to\zeta}}\, u(z)$. Если $u(z)$ непрерывна в точке ζ, то $\varphi(\zeta) = u(\zeta)$. Если C – граница D, то:

$$\sup_{z\in D} u(z) = \sup_{\zeta\in C} \varphi(\zeta).$$

▷ Если $\sup\limits_{z\in D} u(z) = M$, то существует последовательность точек $\{z_n\}$, для которых $u(z_n) > M - \frac{1}{n}$, т.е. $u(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} M$. Если ζ_0 – какая-либо предельная точка последовательности $\{z_n\}$, то и $u(\zeta_0) = M$. Если $\zeta_0 \in C$, то $\sup\limits_{\zeta\in C} \varphi(\zeta) \ge \varphi(\zeta_0) = M$, а если $\zeta_0 \in D$, то по теореме 2.48 $u(z) \equiv M$. ◀

Теперь покажем, что значениями функции $\varphi(\zeta) = \overline{\lim\limits_{z\to\zeta}}\, u(z)$ в счётном числе точек границы можно пренебречь, если известно, что наша функция ограничена в области.

Теорема 2.49 (обобщение принципа максимума). *Пусть функция* $u(z)$ *является субгармонической и ограниченной сверху в области* D*, имеющей хотя бы одну внешнюю точку. Обозначим*:

$$M = \sup_{\zeta\in C, \zeta\ne a_n} \overline{\lim_{z\to\zeta}}\, u(z),$$

где $a_1, a_2, \ldots$ – *некоторая последовательность точек* C (границы D). *Тогда* $u(z) < M \quad (z\in D)$ *или* $u(z) \equiv M$.

▷ Пусть b – внешняя точка области D. Для каждого $\zeta \in C$ можно указать такое число $A(\zeta) > 0$, что для всех $z \in D$ будет иметь место неравенство:

$$A(\zeta)\frac{|z-\zeta|}{|z-b|} < 1.$$

Обозначим $A_n = A(a_n)$ и рассмотрим вспомогательную функцию:

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ln\left(A_k \frac{|z-\zeta|}{|z-b|} \right).$$

Поскольку слагаемые, стоящие под знаком суммы, отрицательны, то:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, u_\varepsilon(z) \le \overline{\lim_{z\to\zeta}}\, u(z) \le M \quad (\zeta \ne a_1, a_2, \ldots),$$

а

$$\lim_{z\to a_n} u_\varepsilon(z) = -\infty \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

т. к. функция $u(z)$, по условию, ограничена сверху, а одно из слагаемых в сумме стремится к $-\infty$ при $z \to a_n$. Поэтому, согласно замечанию 2.11:

$$\sup_{z\in D} u_\varepsilon(z) \le M .$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\sup_{z\in D} u(z) \le M$. ◀

Теперь можем решить вопрос о единственности конформного отображения (когда оно существует).

Теорема 2.50. *Пусть* a *– произвольная точка области* D*, а* θ *– любое действительное число. Существует единственная функция* $W(z)$*, конформно отображающая область* D *на круг* $|w|<1$ *и удовлетворяющая условиям* $w(a)=0$*,* $\arg w'(a)=\theta$ (для исходного элемента).

▷ Пусть $W_1(z)$ – вторая функция, удовлетворяющая тем же условиям. Обозначим $z(w)$ функцию, обратную к $W(z)$, и рассмотрим функцию $g(w)=W_1(z(w))$. Функция $g(w)$ является АФ, а по теореме о монодромии и регулярной в круге $|w|<1$ (мы выбираем ветвь АФ, получающуюся аналитическим продолжением исходного элемента). Очевидно, что функция $g(w)$ удовлетворяет неравенству $|g(w)|\le 1$ $(|w|<1)$; кроме того, $g(0)=0$ и:

$$g'(0)=w_1'(a)\cdot z'(0)=\frac{w_1'(a)}{w'(a)}, \qquad \arg g'(0)=0 .$$

Без ограничения общности можем считать, что $|w'(a)|\le|w_1'(a)|$, т. к. в противном случае мы бы поменяли ролями $w(z)$ и $w_1(z)$. Следовательно, функция $g(w)$ регулярна в круге $|g(w)|\le 1$ $(|w|<1)$; кроме того, $g(0)=0$ и удовлетворяет условиям:

$$|g(w)|\le 1 \quad (|w|<1), \quad g(0)=0, \quad |g'(0)|\ge 1 .$$

Рассмотрим функцию $\psi(w)=\dfrac{g(w)}{w}$. Она регулярна при условии $|w|<1$, т. к. $g(0)=0$ и $\psi(0)=g'(0)\ge 1$. С другой стороны, $\overline{\lim\limits_{|w|\to 1}}\,|\psi(w)|=\overline{\lim\limits_{|w|\to 1}}\,|g(w)|\le 1$. По принципу максимума модуля АФ (теорема 2.49) это возможно лишь в случае, если $|\psi(w)|\equiv 1$. Это, в свою очередь, возможно лишь при условии, что $\psi(w)\equiv e^{i\alpha}$, а т. к. $\arg\psi(0)=0$, то получаем $\psi(w)\equiv 1$. Но тогда $g(w)\equiv w$ и, значит, $W_1(z)\equiv W(z)$. ◀ (см. [9, гл. IX, § 1]).

§ 5. Внутренняя теорема единственности. Формулы Коши и Пуассона

1. Внутренняя теорема единственности

Пусть есть функциональный ряд:

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z) \quad (z\in G).$$

Теорема 2.51 (теорема Вейерштрасса). *Если все слагаемые* $f_n(z)$ *этого ряда являются аналитическими функциями в области* G *и ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге* $\overline{K}\subset G$, *то его сумма* $S(z)$ *есть функция, аналитическая в области* G, *ряд можно поэлементно дифференцировать произвольное число раз и* m*-тая производная его суммы равна*:

$$S^{(m)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(m)}(z),$$

причем последнее равенство имеет место в любой точке $z\in G$ *и при любом натуральном* m.

▷ Докажем только первую часть утверждения теоремы, которая и будет применяться ниже, то есть докажем, что сумма

$$S(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$$

есть функция, аналитическая в области G.

Выберем произвольную точку $z_0\in G$ и построим замкнутый круг $\overline{K}\subset G$ с центром в этой точке и имеющий своей границей окружность ∂K. Пусть γ – замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в круге K. Согласно условию теоремы ряд равномерно сходится в круге $\overline{K}$ и все его слагаемые есть непрерывные функции. В силу теоремы 2.19, ряд можно поэлементно интегрировать по любой замкнутой кривой $\gamma\subset K$, то есть:

$$\int_{\gamma}S(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\gamma}f_k(z)dz.$$

Поскольку функции $f_n(z)$ являются аналитическими, то

$$\int_{\gamma}f_n(z)dz=0$$

при любом натуральном n (теорема 2.6). Из последних двух равенств получаем:

$$\int_{\gamma} S(z)dz = 0.$$

Последнее равенство выполняется для любой замкнутой кривой $\gamma \subset K$. Поскольку круг K – односвязная область, то отсюда следует, в силу теорем 2.18 и 2.12, что внутри круга K сумма $S(z)$ есть аналитическая функция. Потому она дифференцируема в точке $z_0 \in K$. Так как точка $z_0 \in G$ бралась произвольно, то функция $S(z)$ является функцией, дифференцируемой в каждой точке области G. Согласно определению функция $S(z)$ является аналитической в области G. ◀

Заметим, что любой последовательности функций $\{f_n(z)\}$ соответствует ряд:

$$f_1(z) + (f_2(z) - f_1(z)) + (f_3(z) - f_2(z)) + ... = f_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(z) - f_k(z)).$$

Для этого ряда при любом натуральном n имеет место равенство $S_n(z) = f_n(z)$, где $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k(z)$, $g_1(z) = f_1(z)$, $g_k(z) = f_k(z) - f_{k-1}(z)$, $k = \overline{2,n}$.

Так как в этом случае:

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z),$$

то теорема Вейерштрасса легко переносится на равномерно сходящуюся последовательность аналитических функций.

Функциональный ряд *вида* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *называется* ***степенным рядом.***

Теорема 2.52. *Степенной ряд равномерно сходится во всяком замкнутом круге* $|z - z_0| \le \rho < R$, *где* R *– радиус его сходимости.*

Следствие 2.6. *Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная внутри его круга сходимости.*

Теорема 2.53. *Если функция* $f(z)$ *является аналитической в круге* $|z - z_0| < R$, *то внутри этого круга она раскладывается в степенной ряд по степеням* $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Следствие 2.7. Разложение $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ *является единственным.*

Теорема 2.54. *Если суммы двух степенных рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

совпадают на множестве точек E, *для которого* z_0 *является предельной точкой, то коэффициенты этих рядов при одинаковых степенях* $z-z_0$, *то есть коэффициенты с одинаковыми индексами, равны между собой:* $a_n=b_n$.

▷ Пусть $\{z_n\}$ – какая-либо последовательность точек множества E, сходящаяся к z_0: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0 \quad (z_n\neq z_0)$. По условию:

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z_n-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z_n-z_0)^k \tag{50}$$

при любом $n(n=1,2,3,...)$. Так как сумма степенного ряда непрерывна внутри круга сходимости, то:

$$\lim_{n\to\infty}(a_0+a_1(z_n-z_0)+a_2(z_n-z_0)^2+...)=a_0=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b_0+b_1(z_n-z_0)+b_2(z_n-z_0)^2+...)=b_0,$$

то есть $a_0=b_0$.

Но тогда из (50) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z_n-z_0)^k=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z_n-z_0)^k$$

при любом $n(n=1,2,3,...)$, а так как $z_n\neq z_0$,
то:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z_n-z_0)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z_n-z_0)^{k-1}.$$

Снова переходя к пределу, находим:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2(z_n-z_0)+a_3(z_n-z_0)^2+...)=a_1=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b_1+b_2(z_n-z_0)+b_3(z_n-z_0)^2+...)=b_1,$$

то есть $a_1=b_1$, и так далее. ◀

Из этой теоремы следует, что круги сходимости двух рядов, о которых в ней говорится, совпадают и суммы этих рядов совпадают во всем общем круге сходимости. Другими словами, сумма степенного ряда во всех точках круга сходимости определяется единственным образом, если известны ее значения на каком-либо множестве точек, имеющих предельную точку в центре круга сходимости.

Поскольку степенной ряд представляет в круге сходимости однозначную аналитическую функцию, то естественно поставить вопрос: вполне ли определяется однозначная функция $f(z)$, аналитическая в некоторой области G, своими значениями, заданными на произвольном множестве E, если у множества E есть хотя бы одна предельная точка, принадлежащая этой области? Иначе говоря, будут ли значения двух однозначных аналитических в области функций $f_1(z), f_2(z)$ совпадать во всей области, если они совпадают на множестве точек E этой области, имеющем предельную точку в области? Чтобы ответить на вопрос, предварительно дадим еще одно определение и докажем лемму.

Множество *называется* ***связным,*** *если его нельзя представить в виде суммы двух непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого.*

Лемма 2.2. *Пусть $E-$ непустое открытое подмножество области G, причем такое, что каждая его предельная точка, принадлежащая области G, принадлежит и самому E. Тогда $E=G$.*

▷ Допустим, что теорема неверна. Тогда существуют точки области G, не принадлежащие E. Обозначим множество всех этих точек E_1; тогда $G=E+E_1$. В силу связности области, хотя бы одно из множеств E или E_1 должно содержать точки, предельные для другого. Этим множеством не может быть открытое множество E, что следует из определения открытого множества. Значит, им может быть только множество E_1, то есть должна существовать точка, принадлежащая E_1, предельная для множества E. Поскольку же эта точка принадлежит G, то по условию леммы она должна принадлежать E, а это противоречит тому, что она принадлежит $E_1 = G - E$. ◀

Теорема 2.55. (внутренняя теорема единственности). *Пусть в области G определены две однозначные аналитические функции $f_1(z), f_2(z)$, значения которых совпадают на некотором множестве точек E $(E \subset G)$, имеющем предельную точку $z_0 \in G$. Тогда $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают во всей области G.*

▷ Пусть даны два степенных ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k,$$

и пусть эти ряды представляют собой разложения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в некоторой окрестности $|z-z_0|<\rho$ точки z_0. Так как в точках множества E, имеющего точку z_0 предельной точкой, суммы обоих рядов совпадают, то, согласно теореме 2.54, эти ряды тождественны. Поэтому, $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$ совпадают во всех точках области G, принадлежащих окрестности $|z-z_0|<\rho$. Понятно, что найдутся еще точки, помимо точки z_0, для которых существуют окрестности, где $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$ совпадают (например, точки из множества $|z-z_0|<\rho$). Обозначим через E_1 множество всех принадлежащих области G точек, обладающих только что указанным свойством.

Очевидно, что E_1 является множеством открытым. Пусть z^* – произвольная точка, принадлежащая области G и являющаяся предельной для множества E_1. Докажем, что точка z^* принадлежит множеству E_1. Для чего рассмотрим последовательность окрестностей $U_m : |z-z^*|<r_m$, точки z^*, где $r_m=\dfrac{1}{m}$, $m=1,2,3,...$ Просматривая эти окрестности в порядке $U_1,U_2,U_3,...$, выберем первую встретившуюся окрестность, целиком лежащую в области G. Пусть это будет окрестность U_{m_0}. Введем обозначения: $U_{m_0+1}=V_1, U_{m_0+2}=V_2,...$, $r_{m_0+1}=\rho_1, r_{m_0+2}=\rho_2,...$ и будем рассматривать последовательности окрестностей $V_n : |z-z^*|<\rho_n$ ($\rho_n=\dfrac{1}{m_0+n}, n=1,2,3,...$) и колец $Q_n : \rho_{n+1}\le|z-z^*|<\rho_n$. Так как z^* есть предельная точка множества E_1, то в окрестности V_1 содержится бесконечное число точек, принадлежащих E_1. Просматривая множества $Q_1,Q_2,Q_3,...$, встретим самое первое кольцо Q_{n_1}, в котором есть точки, принадлежащие множеству E_1. Выбираем одну из этих точек, обозначаем ее через z_1 и переходим к следующему кольцу с номером n_1+1. Просматривая кольца $Q_{n_1+1},Q_{n_1+2},...$ до первого встретившегося кольца Q_{n_2}, в котором снова есть точки, принадлежащие E_1, выбираем одну такую точку $z_2\in Q_{n_2}$. Продолжая этот процесс, получим множество точек $M=\{z_n | z_n\in E_1, n=1,2,3,...\}$, для которого z^* является предельной точкой.

Так как функции f_1, f_2 являются аналитическими в круге $V_1 : |z-z^*|<\rho$, то они в нем могут быть разложены в степенные ряды:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z^*)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z^*)^k,$$

соответственно. Поскольку суммы этих рядов совпадают на множестве M, имеющем точку z^* своей предельной точкой, то по теореме 2.54 справедливы равенства $a_n=b_n$ при любом $n=1,2,3,...$. Отсюда следует, что суммы этих рядов, то есть функции f_1, f_2, совпадают во всем круге V_1 (в некоторой окрестности точки z^*). Последнее заключение означает, что точка $z^* \in E_1$, так как E_1 есть множество всех принадлежащих области G точек, для которых существуют окрестности, где функции $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$ совпадают. Так как точка z^* была произвольной предельной точкой множества E_1, то, в силу леммы 2.2, справедливо равенство $E_1 = G$. ◀

Из этой теоремы следует, что если функции $f_1(z), f_2(z)$, аналитические в области G, совпадают в некоторой области $G_1 \subset G$ (например, в окрестности некоторой точки, принадлежащей G) или на дуге некоторой непрерывной кривой, лежащей в G, то они совпадают и во всей области G.

2. Переход от формулы Коши к формуле Пуассона

Пусть $K : |z| < R$ есть круг радиуса R с центром в начале координат, $\partial K : |z| = R$ – ограничивающая его окружность.

Точки z *и* z' *называются* ***симметричными относительно окружности*** $\partial K : |z| = R$, *если они лежат на одном луче, выходящем из начала координат и* $|z| \cdot |z'| = R^2$.

Покажем, что если точки z, z' симметричны относительно окружности ∂K, то они связаны равенством:

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}}. \tag{51}$$

где $\bar{z}$ есть комплексное число, сопряженное числу z.

▷ Введем обозначение $\tilde{z} = \dfrac{R^2}{\bar{z}}$ и запишем следующие цепочки равенств:

$$|\tilde{z}| = \frac{R^2}{|\bar{z}|} = \frac{R^2}{|z|} = |z'|, \qquad \arg \tilde{z} = -\arg \bar{z} = \arg z = \arg z',$$

откуда следует, что $\tilde{z} = z'$; значит, справедливо равенство (51). ◀

Непрерывной кривой *называется множество точек плоскости, прямоугольные координаты* x, y *которых могут быть заданы как непрерывные функции* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *или, короче,* $z = z(t)$, $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $a \le t \le b$.

Непрерывная кривая *называется* ***жордановой кривой****, если для любых двух различных значений* t: t', t'', $t' < t''$, *из промежутка* $[a, b)$ *имеем* $z(t') \ne z(t'')$ *и* $z(t'') \ne z(b)$. *Точки* $z(a)$ *и* $z(b)$ *могут, как совпадать, так и быть различными.* ***В первом случае*** *кривая называется* ***замкнутой****, во втором –* ***незамкнутой****.*

Теорема 2.56 (обобщение теоремы Коши). *Если* $f(z)$ – *функция, аналитическая в области* G, *внутренней к жордановой спрямляемой кривой* ∂G, *и, кроме того,* $f(z)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{G}$, *то имеет место равенство*:

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0$$ [28₂, гл. IV, § 2].

Пусть функция $u(x,y)$ является гармонической в круге $K: |z-z_0| < R$ $(z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0)$. Тогда она есть действительная часть некоторой аналитической в этом круге функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $v(x,y)$ – гармоническая функция, сопряженная с функцией $u(x,y)$. Функция $f(z)$ будет однозначной в круге K, если вполне определенным образом выбрать константу, которая появляется при нахождении этой функции по ее действительной части (можно, например, положить $v(0,0) = 0$).

При дальнейшем изложении нам придется осуществлять переход к полярным координатам. При таком переходе будем придерживаться соглашения, о котором сказано ниже в этом абзаце. Пусть вводятся полярные координаты ρ, α с полюсом в точке z_0: $z = z_0 + \rho e^{i\alpha}$ $(0 < \rho < R)$. Тогда $z = x_0 + iy_0 + \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = x_0 + \rho\cos\alpha + i(y_0 + \rho\sin\alpha)$ и

$$f(z_0 + \rho e^{i\alpha}) = u(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) + iv(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha).$$

Положив $u^*(\rho,\alpha) = u(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha)$, $v^*(\rho,\alpha) = v(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha)$, получим равенство $f(z_0 + \rho e^{i\alpha}) = u^*(\rho,\alpha) + iv^*(\rho,\alpha)$. Соглашение же состоит в том, что мы будем возвращаться к старым обозначениям, то есть вместо u^*, v^*, будем писать u, v. Таким образом, после перехода к полярным координатам получим равенство $f(z_0 + \rho e^{i\alpha}) = u(\rho,\alpha) + iv(\rho,\alpha)$. Другими словами, будем употреблять обозначения $u(\rho,\alpha)$ и $v(\rho,\alpha)$ в качестве обозначений, равнозначащих с обозначениями $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Пусть $f(\zeta)$ есть определённая на единичной окружности непрерывная функция и точка z не лежит на окружности.

Выражение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

называют ***интегралом типа Коши***.

Известно, что функция $F(z)$, определённая интегралом типа Коши $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$, есть функция аналитическая в круге $K:|z|<1$.

Будем говорить, *что аналитическая функция* $f(z)$ *внутри единичного круга* ***представима интегралом Коши,*** *если она представима формулой*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

Пусть $f(z)$ есть аналитическая в круге $K:|z|<1$ $(R=1)$ функция, которая была найдена по гармонической функции $u(x,y)$.

Теорема 2.57. *Если функция* $f(z)$, *аналитическая внутри единичного круга и непрерывная в замкнутом круге, представима интегралом Коши* $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$, *то она представима также и интегралом Пуассона* $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(e^{i\alpha})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$.

▷ Пусть:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{52}$$

где ∂K есть окружность $\partial K:|\zeta|=1$, а $z=re^{i\theta}$ $(r<1)$ – произвольная точка внутри окружности ∂K. Если точка z' есть точка, симметричная с z относительно окружности ∂K, то выполняется равенство (51) (с заменой R на 1), которое можно записать $z'=\frac{1}{\bar{z}}$. Так как точка z' лежит вне окружности ∂K, то функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z'}$ $(\zeta\in\partial K)$ является аналитической в круге K и по теореме Коши (теорема 2.56):

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z'}. \tag{53}$$

Замечая, что:

$$\zeta-z=e^{i\alpha}-re^{i\theta}\quad \left(r<1,\ \text{т.к. } z-\text{внутри } \partial K\right),\quad d\zeta=ie^{i\alpha}d\alpha,$$

$$\zeta-z'=e^{i\alpha}-\frac{1}{\bar{z}}=e^{i\alpha}-\frac{e^{i\theta}}{r}=\frac{re^{i\alpha}-e^{i\theta})}{r},$$

и вычитая (53) из (52), получим:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(e^{i\alpha})\left[\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-re^{i\theta}}+\frac{re^{i\alpha}}{e^{i\theta}-re^{i\alpha}}\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(e^{i\alpha})\left[\frac{1}{1-re^{i(\theta-\alpha)}}+\frac{re^{i(\alpha-\theta)}}{1-re^{i(\alpha-\theta)})}\right]d\alpha.$$

Так как $e^{\pm i(\theta-\alpha)}=\cos(\theta-\alpha)\pm i\sin(\theta-\alpha)$, то:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\,. \qquad (54)$$

Теорема доказана. ◀

Формула (54) – это интегральная формула Пуассона для аналитической функции $f(z)$. Заменяя в ней $f(z)$ суммой $u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, $f(\zeta)$ суммой $u(\rho,\alpha)+iv(\rho,\alpha)$ и отделяя действительные части функций от их мнимых частей, получим формулу Пуассона для гармонической функции $u(r,\theta)$:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\alpha)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\,. \qquad (55)$$

Равенство (54) *называется* ***интегральной формулой Пуассона*** *для* ***аналитической функции. Равенство*** (55) *называют* ***интегральной формулой Пуассона*** *для* ***гармонической функции,*** *а* ***интегралы,*** *стоящие в правых частях этих равенств, называются* ***интегралами Пуассона.***

Замечание 2.12. При значении $r=0$ $(z=z_0)$ (55) принимает вид:

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)d\alpha\,.$$

3. Теорема Коши – Адамара. Представление ядра Пуассона в виде сходящегося ряда

Теорема 2.58 (Коши – Адамара). *Пусть дан степенной ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

и пусть Λ *есть верхний предел последовательности* $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$, *то есть* $\Lambda=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$. *Тогда, если* $\Lambda=\infty$, *данный ряд сходится в единственной точке* $z=z_0$; *если* $0<\Lambda<\infty$, *он абсолютно сходится в круге* $|z-z_0|<\frac{1}{\Lambda}$ *и расходится вне этого круга; если* $\Lambda=0$, *он абсолютно сходится на всей плоскости.*

▷ Рассмотрим случай $0<\Lambda<\infty$ и введем обозначение: $R=\frac{1}{\Lambda}$. Если точка z лежит внутри круга $|z-z_0|<R$ и справедливо равенство $|z-z_0|=\frac{\theta^2}{\Lambda}$, в котором $0<\theta<1$, то все значения корня $\sqrt[n]{|a_n|}$ должны быть меньше величины $\frac{\theta}{|z-z_0|}$ (при условии $n\geq n_0$), так как

$\dfrac{\theta}{|z-z_0|}=\dfrac{\Lambda}{\theta}>\Lambda$. Поэтому, начиная с $n=n_0$, выполняются неравенства $|a_n(z-z_0)^n|<\theta^n$. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k$ сходится, то данный ряд абсолютно сходится во всякой точке z, лежащей внутри круга $|z-z_0|<R$, который называется ***кругом сходимости*** степенного ряда.

Пусть теперь точка z лежит вне круга $|z-z_0|<R$. Тогда $\Lambda>\dfrac{1}{|z-z_0|}$ и, значит, существует бесконечное множество значений n_k, для которых $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\dfrac{1}{|z-z_0|}$. Отсюда следует, что $|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}|>1$, то есть не выполняется необходимое условие сходимости данного ряда.

Случаи, когда $\Lambda=\infty$ или $\Lambda=0$, можно рассматривать как предельные. В первом из них круг сходимости стягивается в точку z_0 и его радиус R становится равным нулю. Во втором случае круг сходимости распространяется на всю плоскость и его радиус можно считать равным бесконечности. ◀

Пусть D есть некоторое множество чисел z, на котором задана функция $w=f(z)$ (функцию считаем однозначной). Говорят, что ее аргумент лежит в комплексной плоскости z, ее значение – в комплексной плоскости w, а функция отображает множество D в плоскость w. Про саму функцию $w=f(z)$ говорят как про отображение $w=f(z)$.

Однозначное отображение*, которое сохраняет углы между кривыми, проходящими через некоторую определенную точку, и дает одинаковый коэффициент их растяжения, называется* ***конформным отображением в этой точке.***

Теорема 2.59. *Всякое отображение, осуществляемое аналитической функцией $w=f(z)$, есть конформное во всех точках, где производная этой функции не равна нулю; и обратно, если однозначная функция $w=f(z)$ дает конформное отображение, то эта функция будет аналитической с производной, не равной нулю.*

Теорема 2.60. *Дробно-линейная функция*:

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0,\quad c\neq 0$$

взаимно однозначно и конформно отображает расширенную комплексную плоскость саму на себя.

Рассмотрим дробно-линейную функцию:

$$f(z)=\frac{z+(z_1-2z_0)}{-z+z_1}, \qquad (56)$$

где z_0 – фиксированная точка плоскости, K – круг: $|z-z_0|<R$, а точка z_1 лежит на окружности $\partial K:|z-z_0|=R$, то есть она имеет вид: $z_1=z_0+R\cdot e^{i\alpha}$, где $R>0$, $0\le\alpha\le 2\pi$. Для рассматриваемой функции неравенства $ad-bc\ne 0$, $c\ne 0$ выполняются, поскольку неравенство $z_1\ne z_0$ имеет место. Функция (56) является функцией, аналитической в круге $K:|z-z_0|<R$ и может быть записана в виде:

$$f(z)=\frac{(z_1-z_0)+(z-z_0)}{(z_1-z_0)-(z-z_0)}=\frac{R\cdot e^{i\alpha}+(z-z_0)}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}. \qquad (57)$$

Полагая $z=z_0+re^{i\theta}$ $(0<r<R, 0\le\theta\le 2\pi)$ и обозначая действительную и мнимую части функции $f(z)$ через $u(r,\theta), v(r,\theta)$, получим

$$f(z)=u+iv=\frac{R\cdot e^{i\alpha}+re^{i\theta}}{R\cdot e^{i\alpha}-re^{i\theta}}=\frac{(R\cdot e^{i\alpha}+re^{i\theta})}{(R\cdot e^{i\alpha}-re^{i\theta})}\cdot\frac{(R\cdot e^{-i\alpha}-re^{-i\theta})}{(R\cdot e^{-i\alpha}-re^{-i\theta})}=\frac{R^2-r^2+2iRr\sin(\theta-\alpha)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)},$$

так как $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha, e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$. Отсюда находим:

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)},\quad v(r,\theta)=\frac{2Rr\sin(\theta-\alpha)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}, \qquad (58)$$

где $u(r,\theta), v(r,\theta)$ – однозначные и гармонические сопряженные в круге $K:|z-z_0|<R$ функции.

Правая часть *первого равенства* (58) *называется* ***ядром Пуассона.***

Имея представления (58) для действительной и мнимой частей функции (57), получим для нее представление другого вида, разложив ее в ряд в круге $K:|z-z_0|<R$:

$$f(z)=\frac{R\cdot e^{i\alpha}+(z-z_0)}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}=\frac{-R\cdot e^{i\alpha}+(z-z_0)+2R\cdot e^{i\alpha}}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}=-1+\frac{2R\cdot e^{i\alpha}}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}=$$

$$=-1+\frac{2}{1-\dfrac{z-z_0}{R\cdot e^{i\alpha}}}=-1+2\left[1+\frac{z-z_0}{R\cdot e^{i\alpha}}+\frac{(z-z_0)^2}{R^2e^{2i\alpha}}+\dots\right]=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{R^n}e^{-in\alpha}=$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n\theta+i\sin n\theta)(\cos n\alpha-i\sin n\alpha)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n(\theta-\alpha)+i\sin n(\theta-\alpha)),$$ т. к.

$(z-z_0)^n=r^ne^{in\theta}$. Значит, $f(z)=u+iv=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n(\theta-\alpha)+i\sin n(\theta-\alpha))$.

Учитывая (58), получаем:

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}= \quad 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\alpha), \tag{59}$$

$$v(r,\theta)=\frac{2Rr\sin(\theta-\alpha)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}= \ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\sin n(\theta-\alpha), \tag{60}$$

причем оба ряда равномерно сходятся внутри круга. Ядро Пуассона представлено рядом (59).

Пусть теперь $u(x,y)$ – однозначная функция, гармоническая в круге $K:|z-z_0|<R$. Тогда (см. выше) в круге K существует однозначная гармоническая функция $v(x,y)$, сопряжённая с $u(x,y)$. Образуем соответствующую аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ и разложим её в ряд по степеням $z-z_0$. Получим:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n+i\beta_n)(z-z_0)^n\ , \tag{61}$$

где α_n,β_n – действительные числа. Введем полярные координаты r,θ с полюсом в точке z_0, так что $z=z_0+re^{i\theta}$, $0<r<R$. Тогда получим $u(x,y)=u^*(\rho,\alpha), v(x,y)=v^*(\rho,\alpha)$. Вернемся к прежним обозначениям, т. е. вместо того, чтобы писать u^*,v^* будем писать u,v. Другими словами, будем употреблять для $u(x,y)$ и $v(x,y)$ обозначения $u(r,\theta)$ и $v(r,\theta)$ в качестве равнозначащих с обозначениями $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Таким образом, после перехода к полярным координатам получим функции $u(r,\theta), v(r,\theta)$. В дальнейшем всегда будем придерживаться этого соглашения. Отделяя в (61) действительную и мнимую части, получим:

$$u(r,\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n\ , \tag{62}$$

и

$$v(r,\theta)=\beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n\cos n\theta+\alpha_n\sin n\theta)r^n\ , \tag{63}$$

равномерно сходящиеся внутри круга $K:|z-z_0|<R$. Так как R – радиус круга, в котором $u(x,y)$ является гармонической функцией, а $f(z)=u+iv$ – аналитической функцией, то ряд (61) сходится (абсолютно) в указанном круге и, быть может, имеет радиус сходимости больший, чем R. Поэтому, согласно теореме Коши – Адамара (теорема 2.58), должно выполняться неравенство

$$R\le\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\alpha_n+i\beta_n|}}\ . \tag{64}$$

Замечание 2.13. При выполнении неравенства (64) степенной ряд (61) сходится в круге K и, следовательно, представляет в нем аналитическую функцию, действительная часть которой изображается рядом (62), а мнимая часть – рядом (63). Таким образом, если α_n, β_n – наперёд заданные числа, причем такие, что выполняется неравенство (64), то ряд (62) определяет функцию, гармоническую в круге K. Действительно, при выполнении (64) степенной ряд (61) сходится в круге K и, следовательно, представляет в нём аналитическую функцию, действительная часть которой изображается рядом (62) . Таким образом, наличие разложения вида (62) с соответствующим неравенством (64) является характеристическим признаком функций, гармонических внутри данного круга.

§ 6. Решение задачи Дирихле в круге

1. О коэффициентах Фурье функции с непрерывными производными и равномерной сходимости функционального ряда

Известно, что множество всех кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со скалярным произведением, определённым формулой

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx,$$

образует евклидово пространство. Его обозначают $L_2[a,b]$ и *называют* ***пространством*** L_2.

Пусть функция $f(x)$ является периодической с периодом $T=2\pi$ и принадлежит пространству L_2, $f(x)\in L_2[-\pi,\pi]$.

Ряд $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$, *в котором коэффициенты* a_n, b_n *определены формулами* $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,...)$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,...)$, *называется* ***рядом Фурье функции*** $f(x)$***. Коэффициенты*** a_n, b_n, *определённые последними равенствами, называют* ***коэффициентами Фурье этой функции.***

Лемма 2.3. *Пусть функция* $f(x)$ *периода* 2π *имеет непрерывную производную* $f^{(s)}(x)$, *удовлетворяющую на всей действительной оси неравенству*:

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\le M_s.$$

Тогда коэффициенты Фурье этой функции удовлетворяют неравенствам:

$$|a_n| \le \frac{2M_s}{n^s}, \quad |b_n| \le \frac{2M_s}{n^s} \qquad (n = 1,2,...).$$

$\triangleright$ Интегрируя равенство $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt$ по частям, и учитывая, что:

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} f(t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\sin nt}{n}dt = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ntdt.$$

Поэтому $|a_n| \le \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M_1 \cdot 1dt = \frac{2M_1}{n}$. Интегрируя по частям $-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ntdt$ с учётом $f'(-\pi) = f'(\pi)$ и $\left|f^{(s)}(x)\right| \le M_s$, получаем $|a_n| \le \frac{2M_2}{n^2}$ и т. д. Вторая оценка $|b_n| \le \frac{2M_s}{n^s}$ получается аналогично. ◀

Выше рассматривалась теорема Вейерштрасса для функционального ряда (46), элементами которого были функции комплексной переменной z. Аналогичная теорема имеет место, когда элементами ряда являются функции нескольких переменных. Пусть задан ряд:

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ..., \tag{65}$$

элементы которого есть функции от $x = (x_1,...,x_n) \in E$, где E – некоторое множество точек n-мерного пространства или комплексной плоскости. Определение равномерной сходимости ряда, в частности, можно сформулировать так.

Ряд равномерно сходится на множестве E*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое* n_0*, что для* $n > n_0$ *и* $p > 0$*, и любого* $x \in E$ *выполняется неравенство*:

$$\left|u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

Теорема 2.61 (Вейерштрасса). *Если элементы ряда* (65) *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|u_j(x)\right| \le \alpha_j \qquad (j = 0,1,...), \tag{66}$$

где $x \in E$, α_j *– числа* (*не зависящие от точки* x), *ряд с элементами* α_j *сходится, то ряд* (65) *сходится на множестве* E *абсолютно и равномерно.*

$\triangleright$ Из сходимости ряда с элементами α_j и неравенств (66) следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое n_0, что при любых $n>n_0$ и $p>0$, и любого $x\in E$ будет:

$$\left|u_{n+1}(x)+...+u_{n+p}(x)\right|\le\left|u_{n+1}(x)\right|+...+\left|u_{n+p}(x)\right|\le\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+p}<\varepsilon,$$

что и означает равномерную сходимость ряда на множестве E. Абсолютная его сходимость очевидна. ◀

Теорема 2.62. *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f и f_n непрерывны в точке x^0 (относительно E), то f также непрерывна в x^0.*

На языке рядов эта теорема гласит: *сумма равномерно сходящегося на E ряда функций, непрерывных в точке $x^0\in E$, есть непрерывная функция в этой точке .*

$\triangleright$ Зададим $\varepsilon>0$ и подберём натуральное n_0 так, чтобы $\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x\in E$, что возможно, в силу равномерной сходимости f_n к f. Имеем:

$$\left|f(x)-f(x^0)\right|\le\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|+\left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x^0)\right|+\left|f_{n_0}(x^0)-f(x^0)\right|.$$

Рассмотрим второе слагаемое в полученной сумме. Так как функция f_{n_0} непрерывна в x^0, то можно указать такое $\delta>0$, что $\left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x^0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x\in E$ таких, что $\left|x-x^0\right|<\delta$. Для этих значений x:

$$\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|+\left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x^0)\right|+\left|f_{n_0}(x^0)-f(x^0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \quad ◀$$

Ниже теоремы 2.61 и 2.62 нам потребуется только в случае, когда E – некоторое множество точек двумерного пространства.

2. О существовании функции, гармонической в единичном круге

Если ряд Фурье *функции $f(x)$* ***сходится к функции*** *$f(x)$, то будем говорить, что функция $f(x)$* ***разлагается в ряд Фурье,*** *и писать:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right).$$

Теорема 2.63. *Пусть K есть открытый единичный круг с центром в начале прямоугольной системы координат Oxy (K: $x^2+y^2<1$), на его границе ∂K задана непрерывная периода 2π функция $f(\varphi)$, где*

φ – полярный угол точки, принадлежащей ∂K, и эта функция разлагается в ряд Фурье. Тогда на замыкании $\overline{K} = K + \partial K$ круга K существует и притом единственная функция $u(x,y)$, непрерывная на $\overline{K}$, гармоническая в круге K и равная $f(\varphi)$ на ∂K: $u(1,\varphi) = f(\varphi)$. В полярных координатах ρ, φ функция $u = u(\rho,\varphi)$ записывается в виде ряда:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right),$$

где a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$, т. е.:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi \quad (n = 0,1,2,...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi \quad (n = 1,2,...).$$

▷ Докажем теорему в предположении, что функция $f(\varphi)$ имеет вторую непрерывную производную, хотя теорема верна и если $f(\varphi)$ только непрерывна. Сначала мы воспользуемся доказанной теоремой, а затем избавимся от требования существования и непрерывности второй производной.

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right)$$

и рассмотрим функциональный ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right), \tag{67}$$

элементами которого являются функции двух переменных ρ и φ. Так как $f(\varphi)$ имеет вторую непрерывную производную, то:

$$|a_n| \le \frac{2M}{n^2}, \quad |b_n| \le \frac{2M}{n^2} \quad (n \ne 0),$$

где константа $M = \max\limits_{-\pi\le t\le\pi} |f''(t)|$ (см. лемму 2.3).

Имеем:

$$\left|\rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\right| \le |a_n| + |b_n| \quad (0 \le \rho \le 1),$$

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \le \frac{|a_0|}{2} + 4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Поскольку числовой ряд $\frac{|a_0|}{2} + 4M \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится и является мажорирующим для ряда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right)$, то, в силу теоремы Вейерштрасса (теорема 2.61), последний ряд равномерно сходится на $\overline{K}$. Обозначим его сумму $u(\rho,\varphi)$. Функция $u(\rho,\varphi)$, как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, есть непрерывная на $\overline{K}$ функция. Кроме того:

$$u(1,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right)=f(\varphi),$$

т. е. выполняется равенство, указанное в формулировке теоремы.

Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}=0$$

(см., например, [31, гл. IV, § 1, п. 3]).

Найдя производные, входящие в последнее уравнение, для функций $a_n\rho^n\cos n\varphi$, $b_n\rho^n\sin n\varphi$, легко убедиться, что $\Delta(a_n\rho^n\cos n\varphi)=0$, $\Delta(b_n\rho^n\sin n\varphi)=0$, т. е. каждый n-й элемент ряда $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в полярных координатах и, значит, является гармонической функцией в круге K.

Кроме того, имеют место равенства $(0\le\rho<1)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\rho^k\left(-a_k\cos k\varphi-b_k\sin k\varphi\right),\qquad \frac{\partial u}{\partial\rho}=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^{k-1}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\rho^{k-2}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right).$$

Поэлементное дифференцирование ряда (67) законно, потому что для любого положительного $\rho_0<1$ n-й элемент, например, первого из последних трёх рядов $(n=1,2,\ldots)$ не превышает:

$$\rho_0^n n^2\frac{4M}{n^2}=4M\rho_0^n\qquad(0\le\rho\le\rho_0),$$

а ряд $4M\sum_{k=1}^{\infty}\rho_0^k$ $(0<\rho_0<1)$ сходится (геометрический ряд с $q=\rho_0<1$), т. е. функция $u(\rho,\varphi)$, являющаяся суммой ряда $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right)$, есть решение поставленной задачи. Тот факт, что решение задачи Дирихле является единственным, доказывается в другом месте. ◀

Преобразуем формулу $u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right)$ к более простому виду. Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в последнюю формулу и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(\cos k\psi\cos k\varphi+\sin k\psi\sin k\varphi)\right\}d\psi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k(\varphi-\psi)\right\}d\psi\ .$$

Выполним тождественные преобразования:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\cos k(\varphi-\psi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}t^k\left(e^{ik(\varphi-\psi)}+e^{-ik(\varphi-\psi)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(te^{i(\varphi-\psi)}\right)^k+\left(te^{-i(\varphi-\psi)}\right)^k\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1-te^{i(\varphi-\psi)}}+\frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1-te^{-i(\varphi-\psi)}}\right)$$

Применяя формулы Эйлера, легко получим $te^{i(\varphi-\psi)}+te^{-i(\varphi-\psi)}=2t\cos(\varphi-\psi)$. Складывая дроби в круглых скобках, в знаменателе новой дроби получим $\left(1-te^{i(\varphi-\psi)}\right)\left(1-te^{-i(\varphi-\psi)}\right)=\ 1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2$, в её числителе получим: $1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2+te^{i(\varphi-\psi)}-t^2+te^{-i(\varphi-\psi)}-t^2=1-t^2$. В результате приходим к равенству:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\cos k(\varphi-\psi)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2}\qquad (t=\rho<1)\ .$$

Поэтому для функции $u(\rho,\varphi)$ получаем:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)}d\psi\ .$$

Формула выведена в предположении $\rho<1$; при $\rho=1$ это представление функции $u(\rho,\varphi)$ теряет смысл. Но $\lim\limits_{\rho\to 1,\varphi\to\varphi_0}u(\rho,\varphi)=f(\varphi_0)$ $(\forall\varphi_0\in[0,2\pi])$, так как сумма ряда, из которого получен интеграл Пуассона, является непрерывной функцией в замкнутой области $(u(1,\varphi)=f(\varphi))$.

Таким образом, функция, определённая формулой:

$$u(\rho,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)}d\psi,\rho<1,\\ f(\varphi),\rho=1,\end{cases}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$ при условии $\rho<1$ и является непрерывной в замкнутой области, включающей окружность $\rho=1$. Эту функцию $u(\rho,\varphi)$ можно записать одной строкой:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)}d\psi$$

(вкладывая в запись смысл, определяемый предыдущей двустрочной её записью). Так как $\lim\limits_{\rho\to 1,\varphi\to\varphi_0} u(\rho,\varphi)=f(\varphi_0)$, то доопределяя $u(\rho,\varphi)$ по непрерывности, находим:

$$f(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)}d\psi .$$

В частности, если $f(\psi)\equiv 1$, то $\quad 1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)}d\psi$.

Заметим, что в справедливости последнего равенства можно убедиться и непосредственно. Поскольку:

$$\int\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos x}dx=2arctg\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}tg\,\frac{x}{2}\right)+C,$$

то:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi=\int_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}d\alpha=2arctg\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}tg\,\frac{\alpha}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2\pi ,$$

где $\alpha=\psi-\varphi$. Отсюда получаем: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)}d\psi=1$.

3. Формула Пуассона

Пусть дана плоская область G, ограниченная замкнутой кривой ∂G, на линии ∂G задана непрерывная функция φ и требуется найти функцию $u=u(x,y)$, которая удовлетворяла бы условиям:

1) была определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}=G+\partial G=G\bigcup\partial G$;

2) имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяла уравнению Лапласа:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{в области } G;$$

3) принимала на границе ∂G значения заданной функции φ.

Задача *нахождения функции* u*, которая удовлетворяет требованиям 1) – 3), называется (внутренней)* ***задачей Дирихле*** *(или* ***первой (внутренней) краевой задачей****), а сама функция называется* ***решением задачи Дирихле.***

Решим первую краевую задачу для круга радиуса R (задача Дирихле). Выше при решении этой задачи были завышены требования, предъявляемые к граничной функции. Теперь мы избавимся от требования существования и непрерывности её второй производной.

Так как для функции: $f(z)=\frac{(z_1-z_0)+(z-z_0)}{(z_1-z_0)-(z-z_0)}=\frac{R\cdot e^{i\alpha}+(z-z_0)}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}$

разложение в круге $|z-z_0|<R$ имеет следующий вид:

$$f(z)=\frac{R\cdot e^{i\alpha}+(z-z_0)}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}=\frac{-R\cdot e^{i\alpha}+(z-z_0)+2R\cdot e^{i\alpha}}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}=-1+\frac{2R\cdot e^{i\alpha}}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}=$$

$$=-1+\frac{2}{1-\frac{z-z_0}{R\cdot e^{i\alpha}}}=-1+2\left[1+\frac{z-z_0}{R\cdot e^{i\alpha}}+\frac{(z-z_0)^2}{R^2e^{2i\alpha}}+...\right]=$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{R^n}e^{-in\alpha},$$

то:

$$\operatorname{Re} f(z)=u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}=\quad 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\alpha),$$

причём ряд равномерно сходится внутри круга $|z-z_0|<R$.

Вернувшись к равенствам (62), (63):

$$u(r,\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n,\qquad v(r,\theta)=\beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n\cos n\theta+\alpha_n\sin n\theta)r^n,$$

$(0<r<R)$, перепишем их, заменив обозначение r на ρ $(0<\rho<R)$ и обозначение θ – на обозначение α:

$$u(\rho,\alpha)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\alpha-\beta_n\sin n\alpha)\rho^n,\quad v(\rho,\alpha)=\beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n\cos n\alpha+\alpha_n\sin n\alpha)\rho^n.$$

После этого умножим обе части первого из полученных равенств на множитель $\cos m\alpha$ и проинтегрируем их (при фиксированном значении ρ) по переменной α в пределах от 0 до 2π. Получим:

$$\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\cos m\alpha d\alpha=\alpha_m\rho^m\int_0^{2\pi}\cos^2 m\alpha d\alpha\quad (m\ge 0).$$

Правая часть последнего равенства даёт – при значении $m=0$: $2\pi\alpha_0$, при значениях $m\ge 1$: $\pi\alpha_m\rho^m$, откуда находим:

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)d\alpha,\quad \alpha_m=\frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\cos m\alpha\cdot d\alpha\quad (m\ge 1).$$

Умножая обе части второго равенства на $\sin m\alpha$ и интегрируя , аналогично предыдущему, найдём:

$$-\beta_m=\frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\sin m\alpha\cdot d\alpha\quad (m\ge 1).$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов α_n и β_n в (62) , будем иметь:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)d\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cdot\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\cos n(\theta-\alpha)d\alpha\,. \qquad (68)$$

Выше в круге $K:|z-z_0|<R$ была рассмотрена функция (57), аналитическая в K и имеющая вид: $f(z)=\dfrac{R\cdot e^{i\alpha}+(z-z_0)}{R\cdot e^{i\alpha}-(z-z_0)}$. Пусть $r<\rho<R$.

Тогда, аналогично получению равенства (59), может быть получено равенство:

$$u(r,\theta)=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}=\quad 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\rho^n}\cos n(\theta-\alpha) \qquad (69)$$

Учитывая равенство (69), из (68) получаем:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)d\alpha+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cdot\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\cos n(\theta-\alpha)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos n(\theta-\alpha)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\cdot\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos n(\theta-\alpha)\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\,,$$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\,.$$

Последнюю формулу *называют* ***формулой Пуассона.***

Из последнего равенства при условии $u(r,\theta)\equiv 1$ получаем:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\,. \qquad (70)$$

Равенство (70) может быть получено так же, как и равенство:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)}d\psi\,.$$

4. Решение задачи Дирихле для круга

Пусть дан круг $K:|z-z_0|<R$ с границей $\partial K:|\zeta-z_0|=R$ и пусть на этой границе задана непрерывная функция $\varphi(\zeta)$. Граничную функцию $\varphi(\zeta)$ рассматриваем как непрерывную функцию полярного угла α полярной системы координат с полюсом в точке z_0 (не меняя обозначения этой функции):

$$\varphi(\zeta)=\varphi(z_0+\mathrm{R}e^{i\alpha})=\varphi(\alpha),\quad 0\le\alpha\le 2\pi \quad,\ \text{причем}\quad \varphi(0)=\varphi(2\pi)\,,$$

и образуем функцию $u(r,\theta)$, задавая её интегралом Пуассона:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\,. \qquad (71)$$

Лемма 2.4. *При любом действительном* $a>0$ *справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Доказательство. Пусть сначала $a\ge 1$, тогда $\sqrt[n]{a}=1+\sigma_n, \sigma_n\ge 0$. В силу неравенства Бернулли $a=(1+\sigma_n)^n\ge 1+n\sigma_n$, откуда следует $0\le\sigma_n\le\frac{a-1}{n}$. Так как: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

Тогда: $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1+0=1.$$

Пусть $0<a<1$, тогда: $b=\frac{1}{a}>1$. Отсюда следует, что: $a=\frac{1}{b}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=1$. ◀

Доказывая следующую теорему, мы избавляемся от требования существования и непрерывности второй производной (см. выше).

Теорема 2.64. *Функция* $u(r,\theta)$, *задаваемая формулой* (71) *как функция точки* $z=z_0+re^{i\theta}=x+iy$, *является гармонической функцией в круге* K, *причем при приближении точки* z *изнутри круга к произвольной точке* $\zeta=z_0+\mathrm{Re}^{i\alpha}$, *лежащей на окружности* ∂K $(r\to R,\theta\to\alpha)$, $u(r,\theta)$ *стремится к пределу, равному* $\varphi(\alpha)$.

▷ Ядро Пуассона, как показано выше, разлагается в ряд, равномерно сходящийся внутри круга K:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\alpha)\,.$$

Умножая этот ряд на $\frac{1}{2\pi}\varphi(\alpha)$ и интегрируя его поэлементно по переменной α при фиксированном значении r $(r<R)$, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)d\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\cos n(\theta-\alpha)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)d\alpha+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\cos n\alpha d\alpha\right)\cos n\theta+\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\sin n\alpha d\alpha\right)\sin n\theta\right]r^n. \qquad (72)$$

Если положить:

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\cos n\alpha d\alpha\ ,\quad \beta_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\sin n\alpha d\alpha\ \ (n\ge 1),$$

то придем к неравенству:

$$|\alpha_n + i\beta_n| = \left|\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)e^{-in\alpha}d\alpha\right| \le \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}|\varphi(\alpha)|d\alpha.$$

Так как, в силу леммы 2.4:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(\alpha)|d\alpha} = 1,$$

то из последнего неравенства находим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\alpha_n + i\beta_n|} \le \frac{1}{R} \quad \text{или} \quad R \le \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\alpha_n + i\beta_n|}}.$$

Следовательно (см. замечание 2.13), ряд (72) представляет аналитическую функцию в круге K, то есть функция (71) является гармонической в этом круге. Докажем, что для любой точки $\zeta_0 = z_0 + \mathrm{Re}^{i\alpha_0}$, лежащей на ∂K, $u(r,\theta)$ стремится к пределу, равному $\varphi(\alpha_0)$, когда $z = z_0 + re^{i\theta}$ $(r < R)$ стремится к ζ_0. Не уменьшая общности, можем положить $\alpha_0 = 0$, так как значение полярного угла α зависит только от выбора направления полярной оси, и, значит, будем доказывать равенство:

$$\lim_{r\to R,\theta\to 0}[u(r,\theta) - \varphi(0)] = 0.$$

Заметим, что при условии $u(r,\theta) \equiv 1$ формула Пуассона имеет вид:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}d\alpha$$

(см. (70)), запишем $\varphi(0)$ в виде:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(0)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}d\alpha.$$

Тогда:

$$u(r,\theta) - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi(\alpha) - \varphi(0)]\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}d\alpha.$$

Так как $\varphi(\alpha)$ непрерывна в точке $\alpha = 0$, то взяв произвольное $\varepsilon > 0$, можем найти $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $|\alpha| < 2\delta$, то будет выполняться неравенство:

$$|\varphi(\alpha) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть σ_ε – дуга окружности C, для точек которой $|\alpha| < 2\delta$, Σ_ε – $C - \sigma_\varepsilon$. Обозначая последний интеграл через $\int\limits_C$ и записывая его как сумму двух интегралов по дуге σ_ε и по дуге Σ_ε, для модуля разности $|u(r,\theta) - \varphi(0)|$ получаем:

$$|u(r,\theta)-\varphi(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\right| \le \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_\varepsilon}\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right|. \qquad (73)$$

Для первого слагаемого правой части (73) находим:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_\varepsilon}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_\varepsilon}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\theta\to 0$, то можем считать, что $|\theta|<\delta$. Кроме того, для точек дуги Σ_ε полярный угол α удовлетворяет двойному неравенству $2\delta\le\alpha\le 2\pi-2\delta$, а потому для тех же точек будет $\delta<\alpha-\theta<2\pi-\delta$. Замечая еще что функция $\varphi(\alpha)-\varphi(0)$, как функция непрерывная, ограничена на сегменте $[0,2\pi]$: $|\varphi(\alpha)-\varphi(0)|\le M$, приходим к неравенствам:

$$\cos(\theta-\alpha)<\cos\delta, \qquad \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)} < \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\delta}$$

и для второго слагаемого правой части (73) получаем:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right| < M\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\delta}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}d\alpha < M\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\delta}.$$

При $r\to R$ разность $R^2-r^2\to+0$ и, значит, существует такое число $\delta'=\delta'(\varepsilon)>0$, что при $R^2-r^2<\delta'$ будет выполняться неравенство: $\dfrac{M(R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos\delta}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Т. о., при выполнении всех вышеуказанных условий получаем $|u(r,\theta)-\varphi(0)| \le \left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\sigma_\varepsilon}\right| + \left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right| < \varepsilon,$ откуда и следует, что:

$$\lim_{r\to R,\theta\to 0}[u(r,\theta)-\varphi(0)]=0.$$

Доопределим функцию $u(r,\theta)$ в точках окружности по непрерывности, положив $u(R,\alpha)=\varphi(\alpha)$, $0\le\alpha\le 2\pi$, тогда функция $u(r,\theta)$ будет непрерывной в замкнутом круге $|z-z_0|\le R$. Ее непрерывность в каждой внутренней точке круга очевидна. Пусть (R,α) – граничная точка. Тогда для любой последовательности внутренних точек $\{(r_n,\theta_n)\}$, сходящейся к точке (R,α), будет:

$$\lim_{n\to\infty}u(r_n,\theta_n)=\varphi(\alpha)=u(R,\alpha),$$

а для последовательности граничных точек $\{(R,\alpha_n)\}$, сходящейся к точке (R,α), в силу непрерывности $\varphi(\alpha)$:

$$\lim_{n\to\infty}u(R,\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(\alpha_n)=\varphi(\alpha)=u(R,\alpha). \quad ◀$$

Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы (см. [21_2, т. 2, гл. 6, § 1]).

Теорема 2.65. *Функция* (71), *доопределенная в точках окружности по непрерывности, есть решение задачи Дирихле в круге* K. *Это решение является единственным.*

Первое предложение теоремы доказано выше. Для доказательства единственности решения докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.5 (принцип максимума модуля). *М*одуль функции, аналитической в круге K, не может иметь максимума ни в одной точке этого круга.

▷ Вернемся к формуле (52). Если функция $f(z)$ является аналитической в круге $K:|z-z_0|<R$ и $\rho<R$, то имеет место формула Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

где Γ есть окружность $\Gamma:|\zeta-z_0|=\rho$, а z – произвольная точка внутри Γ.

Пусть z – произвольная точка круга $K:|z-z_0|<R$ и γ_ρ: $\zeta=z+\rho e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ – окружность радиуса ρ с центром в точке z, лежащая в круге K. Тогда:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta}id\theta}{\rho e^{i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

Последнее равенство означает следующее: значение аналитической функции в любой точке z круга K равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности γ_ρ с центром в этой точке и лежащей в круге K.

Обозначим $\max\limits_{\gamma_\rho}|f(\zeta)|=M(\rho)$, $\varpi=\{z'\,\big|\,|z'-z|\le\rho\}$. В силу непрерывности $f(\zeta)$ на окружности γ_ρ значение $M(\rho)$ достигается в некоторой точке этой окружности. Из равенства:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})d\theta$$

вытекает, что модуль функции $f(z)$, рассматриваемой в замкнутом круге ϖ, не может иметь строгого максимума в точке z, так как в противном случае мы имели бы:

$$|f(z)|>M(\rho)\ge\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z+\rho e^{i\theta})\right|d\theta\ge\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})d\theta\right|.$$

Таким образом, $|f(z)|\le M(\rho)$, а так как радиус ρ окружности γ_ρ можно брать произвольным (при соблюдении условия $\gamma_\rho\subset K$), в частности – сколь угодно малым, то отсюда следует: модуль функции, аналитической в круге K, не может иметь строгого максимума ни в одной точке этого круга.

Докажем, что если функция является аналитической в области D, то и нестрогий максимум ее модуля не может достигаться во внутренней точке этой области, если функция не равна тождественно константе. Предположим, что функция $f(z)$ не равна тождественно константе и что в некоторой точке $z_0 \in D$ ее модуль имеет максимум, равный M, т. е. $|f(z_0)| = M$. Тогда в достаточно малой окрестности U_0 точки z_0 будет $|f(z)| \le M$. Можем считать, что $M \ne 0$, так как в противном случае $f(z) = 0$ во всех точках U_0, откуда следует, что $f(z)$ тождественно равна нулю, что противоречит предположению. Разложим $f(z)$ в окрестности U_0 в ряд по степеням $z - z_0$ (теорема 2.53) $f(z) = a_0 + a_p(z - z_0)^p + \; a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \ldots$, где $|a_0| = |f(z_0)| = M$, $|a_p| \ne 0$, $p \ge 1$, и рассмотрим уравнение $a_p(z - z_0)^p = a_0$.

Решая его относительно $z - z_0$, находим p решений:

$$z_k - z_0 = \sqrt[p]{\left|\frac{a_0}{a_p}\right|}\left\{\cos\left[\frac{1}{p} Arg\frac{a_0}{a_p}\right] + i\sin\left[\frac{1}{p} Arg\frac{a_0}{a_p}\right]\right\} =$$

$$= \sqrt[p]{\left|\frac{a_0}{a_p}\right|}\left\{\cos\left[\frac{1}{p}\left(\arg\frac{a_0}{a_p} + 2k\pi\right)\right] + i\sin\left[\frac{1}{p}\left(\arg\frac{a_0}{a_p} + 2k\pi\right)\right]\right\}, \quad k = 0,1,\ldots,p-1.$$

Этим решениям соответствуют p лучей:

$$Arg[a_p(z - z_0)^p] = Arg a_0, \tag{74}$$

или

$$Arg(z - z_0) = \frac{1}{p} Arg\frac{a_0}{a_p}.$$

Выберем один из этих лучей. Из равенства (74) следует, что векторы, изображающие комплексные числа a_0 и $a_p(z - z_0)^p$, параллельны и направлены в одну и ту же сторону, откуда получаем:

$$\left|a_0 + a_p(z - z_0)^p\right| = |a_0| + \left|a_p(z - z_0)^p\right|.$$

Возьмем теперь точку $z^* \in U_0$, отличную от точки z_0, которая лежит на выбранном луче и располагается настолько близко к точке z_0, что:

$$\left|a_{p+1}(z^* - z_0)^{p+1} + a_{p+2}(z^* - z_0)^{p+2} + \ldots\right| < \frac{1}{2}\left|a_p(z^* - z_0)^p\right|.$$

Для такой точки получим:

$$\left|f(z^*)\right| = \left|a_0 + a_p(z^* - z_0)^p + a_{p+1}(z^* - z_0)^{p+1} + \ldots\right| \geq \left|a_0 + a_p(z^* - z_0)^p\right| - \quad - \left|a_{p+1}(z^* - z_0)^{p+1} + \ldots\right| =$$

$$= \left|a_0\right| + \left|a_p(z^* - z_0)^p\right| - \left|a_{p+1}(z^* - z_0)^{p+1} + \ldots\right| >$$

$$> \left|a_0\right| + \frac{1}{2}\left|a_p(z^* - z_0)^p\right| > \left|a_0\right| = M .$$

Это противоречит тому, что $|f(z)|$ имеет максимум M, в точке z_0. ◀

Доказательство теоремы 2.65. Пусть $u(x,y)$ есть функция, гармоническая в круге K, в котором решалась задача Дирихле (не равная в нем тождественно постоянной), а точка $z_0 = x_0 + iy_0$ есть произвольная точка, которая принадлежит кругу K. Пусть далее $v(x,y)$ – гармоническая функция, сопряженная с $u(x,y)$ в круге K. Так как круг K есть односвязная область, то аналитическая функция $\psi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ будет однозначной в круге K, если вполне определенным образом выбрать константу, которая появляется при восстановлении $\psi(z)$ по ее действительной части (можно, например, потребовать, чтобы $v(x_0, y_0) = 0$). Образуем теперь функцию $f(z) = e^{\psi(z)}$. Она также будет однозначной и аналитической в круге K, причем ее модуль выражается через функцию $u(x,y)$ по формуле:

$$|f(z)| = e^{u(x,y)}.$$

Если бы $u(x,y)$ имела максимум в точке (x_0, y_0), то модуль $|f(z)|$ также имел бы максимум в этой точке, что, в силу принципа максимума модуля, невозможно. Функция $u(x,y)$ не может иметь и минимума в точке (x_0, y_0), так как тогда гармоническая функция $-u(x,y)$ имела бы максимум в той же точке.

Из сказанного вытекает, что действительная функция $u(x,y)$, непрерывная в замкнутом круге $\overline{K} = K + C$ и гармоническая в круге K, достигает своего наибольшего и своего наименьшего значений в граничных точках этого круга. Отсюда, в частности, следует вывод: если две функции $u_1(x,y), u_2(x,y)$ непрерывны в $\overline{K}$, являются гармоническими в круге K и совпадают во всех точках границы C, то эти функции совпадают во всех точках круга $\overline{K}$ (достаточно рассмотреть разность этих функций). Отсюда, в свою очередь, следует, что решение задачи Дирихле в круге является единственным. ◀

Приняв радиус круга равным единице и $z_0 = 0$, считая функцию $\varphi(\alpha)$ непрерывной на сегменте $[0, 2\pi]$, можем сформулировать теорему 2.64 следующим образом.

Теорема 2.66. *Во всякой точке* $e^{i\alpha}$ *единичной окружности при приближении к ней точки* $z = x + iy = re^{i\theta}$ *изнутри единичного круга, т.е. приближении при стремлении* $r \to 1, \theta \to \alpha$, *существует граничное значение интеграла Пуассона* (71)*, равное* $\varphi(\alpha)$:

$$\lim_{r\to 1,\theta\to\alpha} u(r,\theta) = \varphi(\alpha).$$

Таким образом, если функция $\varphi(\alpha)$ *непрерывна на сегменте* $[0,2\pi]$, *то гармоническая функция* $u(z) = u(r,\theta)$, *представимая внутри единичного круга интегралом Пуассона* (71) $(R = 1)$, *имеет конечные граничные значения всюду на единичной окружности, совпадающие с функцией* $\varphi(\alpha)$.

§ 7. Теорема единственности и теорема Фату. Угловые граничные значения аналитических функций

1. Теорема единственности для ограниченных функций

При изучении граничных свойств аналитических функций принципиальное значение имеет свойство единственности их определения по граничным значениям.

Теорема 2.67 (теорема единственности). *Если* $f(z)$ *– функция, аналитическая и ограниченная в круге* $|z| < 1$ *стремится по радиусам к значению нуль на множестве* E *точек окружности* $|z| = 1$ *и* $mE > 0$, *то* $f(z)$ *тождественно равна нулю.*

▷ Будем считать, что $|f(z)| < 1$, и предположим: функция $f(z)$ не равна тождественно нулю. Тогда функция $U(z) = \ln|f(z)|$ – гармоническая, отрицательного знака всюду в круге $|z| < 1$, кроме нулей функции $f(z)$, в которых U обращается в $-\infty$.

Проведем окружность $|z| = \rho$ радиуса $\rho < 1$ так, чтобы она не содержала нулей функции $f(z)$. Это всегда можно сделать, как бы ρ ни было близко к единице, потому что множество нулей функции $f(z)$ не имеет предельной точки внутри единичного круга. Утверждение об отсутствии указанной предельной точки внутри круга вытекает из теоремы 2.55 (внутренней теоремы единственности).

Действительно, введём в рассмотрение какую-либо однозначную аналитическую функцию f_1. Пусть $f(z) + f_1(z) = f_2(z)$; тогда $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$. Если множество E указанных нулей имеет предельную точку внутри единичного круга, то на E $f_2(z)-f_1(z)=0$, т. е. функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на множестве E совпадают. Но тогда, в силу внутренней теоремы единственности, эти функции совпадают во всём круге $|z|<1$, что означает: во всём круге $f(z)\equiv 0$, а мы предположили противное.

На проведённой окружности функция U принимает отрицательные значения $U(\rho e^{i\theta})$. Образуем интеграл Пуассона для этих значений:

$$U_\rho(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}d\theta,$$

где $z=re^{i\varphi}$, $r<\rho$, который будет представлять гармоническую функцию при условии $|z|<\rho$, непрерывную для всех z таких, что: $|z|\le\rho$.

Образуем разность:

$$D_\rho(z)=U(z)-U_\rho(z). \tag{75}$$

Очевидно, $D_\rho(z)$ есть функция, гармоническая внутри круга радиуса ρ, за исключением конечного числа точек, в которых она равна $-\infty$, равная нулю на окружности $|z|=\rho$, т. к. на этой окружности $z=\rho e^{i\varphi}$, $U_\rho(\rho e^{i\varphi})=U(\rho e^{i\varphi})$ (теорема 2.66). По принципу максимума всюду при выполнении неравенства $|z|<\rho$ имеем: $D_\rho(z)\le 0$. Заметив это, рассмотрим (75), записав его в виде:

$$U(z)=U_\rho(z)+D_\rho(z). \tag{75*}$$

Пусть точка z – постоянная точка, отличная от нулей функции $f(z)$, ($f(z)\ne 0$). Тогда: $U(z)=\ln|f(z)|\ne-\infty$. Покажем, что $U_\rho(z)$ при стремлении $\rho\to 1$ стремится к $-\infty$. Тогда, так как $D_\rho(z)\le 0$, из соотношения (75*) получим $U(z)=U_\rho(z)+D_\rho(z)=-\infty$, т. е. придём к противоречию, что и докажет теорему. Чтобы оценить сверху интеграл Пуассона $U_\rho(z)$, запишем:

$$U_\rho(z)<\frac{\rho+r}{\rho-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\rho e^{i\theta})d\theta. \tag{76}$$

Так как $\lim\limits_{\rho\to 1}U(\rho e^{i\theta})=-\infty$ для точек θ множества E, $mE>0$, то, по теореме Егорова, существует совершенное множество P, $mP>0$, на котором $U(\rho e^{i\theta})\to-\infty$ равномерно. Из неравенства (76) получаем:

$$U_\rho(z)<\frac{\rho+r}{\rho-r}\frac{1}{2\pi}\left(\int_P U(\rho e^{i\theta})d\theta+\int_{C(P)}U(\rho e^{i\theta})d\theta\right).$$

Первый интеграл, стоящий в скобках в последнем неравенстве, при $\rho\to 1$ стремится к $-\infty$. Второй интеграл в скобках сохраняет отрицательные значения. Значит, $U_\rho(z)\underset{\rho\to 1}{\to}-\infty$. ◀

2. Теорема Витали и ее следствия

Пусть E – какое-либо бесконечное семейство функций, однозначных и аналитических в некоторой области G, принадлежащей расширенной комплексной плоскости.

Последовательность функций *семейства* E *называется* ***равномерно сходящейся внутри области*** G***,*** *если она равномерно сходится на каждом замкнутом подмножестве этой области.*

Семейство E *называется* ***компактным в области*** G***,*** *если любая последовательность принадлежащих этому семейству функций содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри области* G.

Теорема 2.68 (принцип компактности в теории аналитических функций). *Семейство* E *функций, аналитических в области* G, *является компактным в этой области тогда и только тогда, когда оно ограничено внутри* G, *то есть если для любого замкнутого множества точек* $F\subset G$ *существует такое число* $M=M(F)<\infty$, *что модуль каждой функции семейства во всех точках* F *не превышает* M.

Теорема 2.69 (теорема Витали). *Если последовательность* $\{f_n(z)\}$ *функций, аналитических в области* G *и принадлежащих некоторому компактному семейству* E, *сходится на множестве точек* $G_1\subset G$, *обладающем предельной точкой в этой области, то она равномерно сходится внутри области* G.

▷ В силу компактности последовательности $\{f_n(z)\}$, из любой ее подпоследовательности $\{f_{n_k'}(z)\}$ можно извлечь другую подпоследовательность $\{f_{n_k''}(z)\}$, равномерно сходящуюся внутри G. Докажем, что все подпоследовательности последовательности $\{f_n(z)\}$, равномерно сходящиеся внутри G, сходятся к одной и той же предельной функции $f(z)$. Для доказательства допустим, что $\{f_{n_k}(z)\}$ и $\{f_{n_l}(z)\}$ – равномерно сходящиеся внутри G подпоследовательности последовательности $\{f_n(z)\}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z)=f(z)$, $\lim\limits_{l\to\infty} f_{n_l}(z)=\varphi(z)$. В силу теоремы Вейерштрасса функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в области G. Так как в точках множества G_1 существует $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$, то тот же предел в этих точках имеют и рассмотренные выше подпоследовательности. Согласно теореме единственности во всей области G имеет место равенство $\varphi(z) = f(z)$.

Осталось доказать, что вся последовательность $\{f_n(z)\}$ внутри G сходится к функции $f(z)$ равномерно. Допустим, что это не так. Тогда существует замкнутое множество $F \subset G$, на котором $\{f_n(z)\}$ не сходится равномерно к $f(z)$. Но тогда, в свою очередь, существуют число $\delta > 0$ и такие номера n_k и соответствующие им точки z_k множества F, что имеют место неравенства:

$$\left| f_{n_k}(z_k) - f(z_k) \right| \geq \delta, \quad k = 1,2,... \tag{77}$$

Однако последовательность $\{f_{n_k}(z)\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{n'_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся на F к функции $f(z)$. Поэтому:

$$\left| f_{n'_k}(z) - f(z) \right| < \delta, \quad \text{если} \quad z \in F, n'_k \geq n_0.$$

Отсюда, в частности, следует, что при всех достаточно больших k будет:

$$\left| f_{n'_k}(z_k) - f(z_k) \right| < \delta.$$

Последние неравенства противоречат неравенствам (77). Это противоречие доказывает теорему. ◀

Следствие 2.8. *Если последовательность* $\{f_n(z)\}$ *ограничена внутри* G *и сходится в этой области, то она сходится равномерно внутри этой области и, следовательно, предельная функция этой последовательности* $f(z)$ *является аналитической в области* G.

Из теоремы Витали вытекает также следующая теорема.

Теорема 2.70. *Если функция* $f(z)$, *аналитическая и ограниченная внутри некоторого сектора, стремится по его биссектрисе к определенному пределу, то она стремится к тому же пределу, когда точка* z *приближается к вершине сектора произвольным образом, оставаясь на секторе, внутреннем к данному.*

▷ Принимая вершину сектора за начало координат, считая радиус сектора равным единице, величину угла равной 2β, положим:

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right) \qquad (n = 1,2,...),$$

где:
$$\frac{1}{2} - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon, \qquad -\beta < \arg z < \beta.$$

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ равномерно ограничена в этой области и сходится к постоянному числу во всех точках z, удовлетворяющих условию:

$$\frac{1}{2}-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon\,, \qquad \arg z=0\,.$$

По теореме Витали эта последовательность должна сходится к тому же постоянному равномерно в замкнутой области, определяемой неравенствами:

$$\frac{1}{2}\le|z|\le 1\,, \qquad -\beta+\varepsilon\le\arg z\le\beta-\varepsilon\,.$$

Это означает, что $f(z)$ стремится к указанному пределу, когда точка приближается к вершине сектора любым образом, оставаясь в секторе:

$$0<|z|<1\,, \qquad -\beta+\varepsilon\le\arg z\le\beta-\varepsilon\,. \quad \blacktriangleleft$$

3. Угловые граничные значения аналитической функции

Рассмотрим функцию $F(z)$, аналитическую внутри единичного круга, непрерывную в замкнутом круге $|z|\le 1$, для которой значения $F(\zeta)=F(e^{i\theta})=p(\theta)+iq(\theta)$ на окружности $C:|z|=1$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ образуют функцию с ограниченным изменением. Тогда почти в каждой точке $\zeta\in C$ существует конечная производная $F'(\zeta)$, являющаяся суммируемой функцией (Гл.1, §6, следствие 1.15).

Полагая $z=re^{i\varphi}$, представим $F(z)=F(re^{i\varphi})$ в виде интеграла Пуассона, то есть:

$$F(z)=P(r,\varphi)+iQ(r,\varphi)$$

где:

$$P(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\theta\ , \quad Q(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}q(\theta)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\theta\,.$$

Сначала дифференцируя, а после этого интегрируя равенство для функции $P(r,\varphi)$, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial\varphi}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\theta)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\theta=\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p'(\theta)\cdot(1-r^2)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\theta\,.$$

Отсюда следует, в силу теоремы 2.66, что $\frac{\partial P}{\partial \varphi} \to p'(\theta)$ (почти всюду на окружности) при стремлении $(r,\theta) \to (1,\theta)$ по радиусу. Аналогично найдем, что $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \to q'(\theta)$ при том же стремлении точки (r,θ).

В полярной системе координат $F'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - i\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right), \quad z \neq 0$. Получаем: $F'(z) = -i \cdot i \cdot \frac{1}{z}\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - i\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) = -ie^{-i\varphi} \cdot \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi} + i\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)$ и замечаем, что $F'(z) = -ie^{-i\varphi} \cdot \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi} + i\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)$ будет стремиться к значениям $-ie^{-i\theta} \cdot \left(p'(\theta) + iq'(\theta)\right)$, когда z будет приближаться к точке $\zeta = e^{i\theta}$ по радиусу, для всех точек ζ окружности, кроме множества точек меры нуль. Последнее выражение преобразуем к виду $-ie^{-i\theta} \cdot \left(p'(\theta) + iq'(\theta)\right) = -ie^{-i\theta} \cdot F'(\zeta) \cdot ie^{i\theta} = F'(\zeta)$. Здесь $F'(\zeta)$ – производная функции $F(z)$ в точке ζ окружности, взятая относительно точек этой окружности. Т. обр., доказана теорема.

Теорема 2.71. *Пусть* $F(z)$ *есть функция, аналитическая внутри единичного круга, непрерывная в замкнутом круге* $|z| \leq 1$, *для которой значения* $F(\zeta) = F(e^{i\theta}) = p(\theta) + iq(\theta)$ *на окружности* $C: |z| = 1$ *образуют функцию с ограниченным изменением. Тогда производная* $F'(z)$ *стремится почти всюду на окружности к значениям* $F'(\zeta)$, *когда точка* z *приближается по радиусу к точке* ζ.

В дальнейшем будем позволять точке z приближаться к точке ζ по любому некасательному к окружности пути. Так как любой некасательный к окружности путь, принадлежащий единичному кругу и заканчивающийся в точке ζ_0, $|\zeta_0| = 1$, можно заключить внутри угла с вершиной ζ_0, содержащегося в единичном круге, то граничные значения по всем некасательным к окружности путям внутри круга можно характеризовать как ***угловые граничные значения.***

Граничные значения (*если они существуют*) *аналитической внутри единичного круга функции по всем путям, лежащим внутри* ***некоторого угла*** *с вершиной на окружности и находящегося в единичном круге, назовём* ***угловыми граничными значениями.***

Теорема 2.72 (теорема Фату). *Функция* $F(z)$, *аналитическая и ограниченная внутри круга* $|z| < 1$, *стремится почти всюду на ок-*

ружности $|\zeta|=1$ *к определенным значениям* $F(\zeta)$, *когда точка* z *приближается к точке* ζ *по любому некасательному пути.*

$\triangleright$ Рассмотрим функцию:

$$\Phi(z)=\int_0^z F(t)dt. \tag{78}$$

Пусть l_1 и l_2 – два любые пути внутри круга, соединяющие точку $z=0$ с точкой ζ окружности. Покажем, что:

$$\int_{l_2} F(t)dt=\int_{l_1} F(t)dt. \tag{79}$$

Для этого введем в рассмотрение замкнутый контур l, образованный линиями l_1 и l_2, и докажем, что:

$$\int_l F(z)dz=0. \tag{80}$$

Соединяя вспомогательной линией две точки контура l, лежащие соответственно на линиях l_1 и l_2 произвольно близко к точке ζ, разобьем контур l на сумму двух замкнутых линий, причем длина λ одной из них (содержащей точку ζ) произвольно мала. Тогда интеграл (80) заменится интегралом вдоль контура длины λ (интеграл по второй замкнутой линии равен нулю, так как функция является аналитической). Поскольку $|F(z)|<M$ при условии $|z|<1$, то справедливо неравенство:

$$\left|\int_l F(z)dz\right|<M\lambda.$$

Так как λ может быть сколь угодно малым положительным числом, то равенство (80) имеет место. Тем самым доказаны равенство (79) и непрерывность функции $\Phi(z)$ в замкнутом круге $|z|\le 1$. Далее, из (78) следует, что значения этой функции на единичной окружности удовлетворяют условию Липшица, то есть выполняется неравенство:

$$|\Phi(\zeta_1)-\Phi(\zeta_2)|<M|\zeta_1-\zeta_2|,$$

и, значит, эта функция является функцией с ограниченным изменением. В силу теоремы 2.71, $\Phi'(z)=F(z)$ стремится к определенному пределу почти всюду на окружности, когда точка z приближается по радиусам к точкам окружности. В силу же теоремы 2.70, функция

$F(z)$ будет стремиться к определенному пределу при приближении точки z к точке ζ окружности по любым некасательным путям, для всякой точки ζ, для которой существует радиальное граничное значение, то есть почти всюду на окружности. ◀

4. Сходимость последовательности комплексных чисел

Если *ограниченная последовательность комплексных чисел*

$$\{z_n\} = z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

имеет единственное ***предельное число (точку)*** z, *то говорят, что* ***последовательность сходится к числу (пределу)*** z, *и пишут:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Используя определение предельной точки, можно переформулировать данное определение на «языке ε».

Ограниченная *последовательность* ***сходится к числу*** z, *если для любого сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ ***существует*** *натуральное число* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (*номер* n_0) *такое, что при любом* $n \ge n_0$ ***удовлетворяется неравенство*** $|z_n - z| < \varepsilon$, *или, что то же самое,*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0.$$

Лемма 2.6. *Последовательность* $\{w_n = u_n + iv_n\}$ *сходится к пределу* $w = u + iv$ *тогда и только тогда, когда последовательности действительных чисел* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *сходятся к пределам* u, v *соответственно.*

▷ Пусть $\lim_{n\to\infty} w_n = w$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенства $|w_n - w| < \varepsilon$ будут выполняться при условии, что $n \ge n_0(\varepsilon)$. Но:

$$|u_n - u| = |\mathrm{Re}(w_n - w)| \le |w_n - w| < \varepsilon$$

и

$$|v_n - v| = |\mathrm{Im}(w_n - w)| \le |w_n - w| < \varepsilon \ .$$

Отсюда следует, что: $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ и $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.

Обратно, если $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ и $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, то для любого $\varepsilon > 0$ неравенства

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}$$

будут выполняться при условии: $n \ge n_1(\varepsilon)$. Но тогда, при этом условии, справедливо:

$$|w_n - w| = |(u_n - u) + i(v_n - v)| \le |u_n - u| + |v_n - v| < \varepsilon \ ,$$

откуда вытекает, что: $\lim_{n\to\infty} w_n = w$. ◀

Теперь заметим, что для решения вопроса о сходимости последовательности $\{w_n = u_n + iv_n\}$ вместо последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ можно рассматривать последовательности модулей $\{|w_n|\}$ и последовательности главных значений аргументов $\{\arg w_n\}$. Это оказывается удобным для последовательностей, сходящихся к нулю, так как для сходимости $\{w_n\}$ к нулю необходимо и достаточно, чтобы последовательность модулей $\{|w_n|\}$ сходилась к нулю (при этом последовательность $\{\arg w_n\}$ может и расходиться). Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ при соблюдении условия $n \ge n_0 = n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|w_n| < \varepsilon$, которое означает сходимость к нулю двух последовательностей, а именно: и $\{w_n\}$, и $\{|w_n|\}$.

В общем случае (когда $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ может равняться нулю, а может и не равняться нулю) справедлива теорема.

Теорема 2.73. *Если сходятся последовательности* $\{|w_n|\}$ *и* $\{\arg w_n\}$*, то сходится и последовательность* $\{w_n\}$*, причем, если* $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n| = r$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} \arg w_n = \varphi$*, то* $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*. Если сходится последовательность* $\{w_n\}$*, то сходится и последовательность* $\{|w_n|\}$ *(последовательность аргументов* $\{\arg w_n\}$ *может расходиться).*

▷ Пусть сходятся последовательности модулей и аргументов. Так как $u_n = \operatorname{Re} w_n = |w_n|\cos(\arg w_n)$, $v_n = \operatorname{Im} w_n = |w_n|\sin(\arg w_n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}[|w_n|\cos(\arg w_n)] = r\cos\varphi$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty}[|w_n|\sin(\arg w_n)] = r\sin\varphi$. В силу леммы 2.6, существует $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Если сходится последовательность $\{w_n\}$, то, согласно лемме 2.6, сходятся и последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$ и, значит, последовательность $\{|w_n|\}$ сходится. ◀

Замечание 2.14. Возможность расходимости последовательности $\{\arg w_n\}$ связана с жестким определением главного значения аргумента. В теории функций комплексного переменного различают понятия $\arg z$ и $Arg\ z$, где $Arg\ z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathrm{Z}$, а главное значение аргумента $\arg z$ удовлетворяет одному из двойных неравенств: или $0 \le \arg z < 2\pi$ (или $-\pi < \arg z \le \pi$). Пусть $w \ne 0$ есть действительное положительное (действительное отрицательное) число, тогда легко указать последовательность $\{w_n\}$, сходящуюся к числу w, такую, что последовательность $\{\arg w_n\}$ расходится. Если же позволить аргументам последовательности $\{w_n\}$ принимать значения из множества аргументов $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, то и в последнем случае можно найти сходящуюся последовательность значений $Argw_n$. В указанном только что смысле мы и будем в дальнейшем понимать запись $\lim\limits_{n\to\infty} Argw_n = Argw$ и говорить, что последовательность $\{Argw_n\}$ сходится к аргументу $Argw$. Кроме того, если $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$ не есть действительное положительное число (действительное отрицательное число) , можем в качестве $Argw_n$ и $Argw$ брать главные значения аргумента, то есть $\arg w_n$ и $\arg w$. Далее рассматриваем главное значение аргумента, удовлетворяющее условию: $-\pi < \arg z \leq \pi$.

5. Нули аналитической функции

Нулями функции $f(z)$ *называются корни уравнения* $f(z) = 0$.

Из внутренней теоремы единственности (теорема 2.57) также следует: если однозначная аналитическая функция $f(z) \neq 0$ тождественно в области G, то множество ее нулей не может иметь ни одной предельной точки, принадлежащей области G. Отсюда вытекает, что любое ограниченное замкнутое множество F области G может содержать лишь конечное число нулей функции, аналитической в этой области. Действительно, допустив, что F содержит бесконечное множество нулей, мы имели бы предельную точку для них, принадлежащую F, а значит, и области G.

Пусть $f(z)$ – однозначная аналитическая функция в области G, а z_0 – какой-либо нуль этой функции, так что: $f(z_0) = 0$. Разложим $f(z)$ в ряд по степеням $z - z_0$. Получим:

$$f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots \tag{81}$$

Если $f(z)$ не равна нулю тождественно, то среди коэффициентов правой части (81) найдутся отличные от нуля. Пусть $(z - z_0)^m$ – младшая степень $z - z_0$, коэффициент при которой отличен от нуля. Тогда (81) имеет вид

$$f(z) = (z - z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \ldots \right], \tag{82}$$

где $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Натуральное число $m(m \geq 1)$ *из* (82) *называется* ***кратностью нуля*** z_0**.** Из равенства (82) следует: если z_0 есть нуль кратности m, то функция:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+...$$

является аналитической в окрестности точки z_0.

Теорема 2.74. *Если множество всех нулей однозначной аналитической функции* $f(z)$ *в ограниченной области* G *не является конечным, то оно является множеством счетным.*

▷ Мы будем рассматривать только ограниченные области. Пусть кривая Γ является границей области G, а n есть произвольное натуральное число. Пусть F_n – это множество всех точек области G, расстояние которых до границы не меньше $\frac{1}{n}$. Эти множества для любой области G, начиная с некоторого $n \geq n_0$ $(n_0 \geq 1)$, не будут пустыми и, начиная с некоторого n, произвольная точка $z \in G$ принадлежит всем F_n (при условии $\frac{1}{n} < \rho$, где ρ – расстояние от точки z до границы Γ). Каждое из множеств F_n является замкнутым и, следовательно, содержит лишь конечное число нулей функции $f(z)$.

Будем нумеровать эти нули, выбирая их сначала из множества F_1, затем – из множества $F_2 - F_1$, …, из $F_{n+1} - F_n$, …, располагая их в порядке неубывающих модулей: $|z_k| \leq |z_{k+1}|$ и нумеруя каждый нуль столько раз, какова его кратность. Мы получим последовательность $\{z_n\}$, в которую войдут все нули функции $f(z)$, принадлежащие области G. ◀

При доказательстве теоремы 2.74 мы воспользовались следующими двумя утверждениями:

1. Если функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ определена и непрерывна на всей плоскости R_2 и c – заданное число, то множество точек x, в которых эта функция не меньше, чем c, есть замкнутое множество.

2. Функция $f(x) = r(x, E)$ $(x \in R_2)$, где $r(x, E)$ – расстояние точки x плоскости до непустого множества E, расположенного на той же плоскости, есть непрерывная функция аргумента x. При этом расстоянием любой точки x^0 плоскости до множества E называется число:

$$r(x^0,E)=\inf_{x\in E}\left|x^0-x\right|=\inf_{x\in E}\sqrt{\left(x_1-x_1^0\right)^2+\left(x_2-x_2^0\right)^2}\ .$$

Замечание 2.15. Доказанная теорема утверждает следующее: все нули функции, однозначной и аналитической в области G, можно перенумеровать и расположить в виде последовательности

$$z_1, z_2,..., z_n,...$$

Эта последовательность не имеет предельных точек в G и, следовательно, все ее предельные точки лежат на границе Γ области G.

При доказательстве вышеприведённых теорем существенно использовалось разложение аналитической функции в степенной ряд. Рассматривая такой ряд:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+...,$$

сразу видим, является ли точка z_0 нулем функции $f(z)$ и, если «да», то какова его кратность (формулы (81–82)). Однако из этого ряда не видно, есть ли у функции другие нули, где они находятся, какова их кратность, то есть ряды (бесконечные суммы) не позволяют выявить все нули функции, что позволяют сделать бесконечные произведения.

6. Бесконечные произведения с отличными от нуля множителями

Пусть $\{u_n\}=u_1,u_2,...,u_n,...$ – последовательность комплексных чисел, отличных от нуля. Обозначим через $\prod_{k=1}^{n}u_k=u_1\cdot u_2\cdot ...\cdot u_n$

произведение первых n элементов этой последовательности.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}u_k$ *и этот предел, который обозначим* u, *отличен от нуля, то говорим, что* ***бесконечное произведение*** $\prod_{k=1}^{\infty}u_k$ ***сходится****, число* u *называем величиной этого произведения и пишем:*

$$u=\prod_{k=1}^{\infty}u_k.$$

Если предела $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}u_k$ *либо не существует, либо равен нулю (при отличных от нуля множителях), то говорим, что* ***бесконечное произведение расходится.***

Очевидно, что необходимым условием сходимости бесконечного произведения (далее – БП) является условие: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1.$ Последнее равенство вытекает из того, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} u_k = u \neq 0,$ то:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} u_k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} u_k} = \frac{u}{u} = 1.$$

Введем обозначение $u_n = 1 + v_n$. Тогда необходимое условие сходимости БП $\prod\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k)$ запишется в виде: $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0.$

Лемма 2.7. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды*: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln|1+v_k|$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\arg(1+v_k)$.

▷ Действительно, сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k)$ равносильна сходимости последовательности $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(1+v_k)\right\}$, а она – сходимости последовательностей $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}|1+v_k|\right\}$, $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\arg(1+v_k)\right\}$, (теорема 2.77, замечание 2.15). Сходимость последних – сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|1+v_k|, \sum\limits_{k=1}^{\infty}\arg(1+v_k)$. ◀

Теорема 2.75. *Для сходимости БП* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k)$ *необходимо и достаточно сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k)$.

▷ Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k)$ эквивалентна сходимости двух рядов (лемма 2.7):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln|1+v_k|, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\arg(1+v_k).$$

Из сходимости двух последних рядов следует, что последовательности:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln|1+v_k| = \ln\left|\prod_{k=1}^{n}(1+v_k)\right|\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\sum_{k=1}^{n}\arg(1+v_k) = Arg_n\left[\prod_{k=1}^{n}(1+v_k)\right]\right\}$$

сходятся (в последнем равенстве $Arg_n[\prod\limits_{k=1}^{n}(1+v_k)]$ обозначает то значение аргумента, которое дается левой частью этого равенства). Отсюда следует сходимость $\left\{\prod_{k=1}^{n}(1+v_k)\right\}$ и притом к пределу $u=1+v$, отличному от нуля, то есть БП сходится.

Обратно, если БП сходится:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+v_k)=u\neq 0,$$

то существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}|1+v_k|=|u|\neq 0,$$

и, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\ln|1+v_k|$ сходится. Кроме того, существует последовательность:

$$Arg\left[\prod_{k=1}^{n}(1+v_k)\right]=\sum_{k=1}^{n}\arg(1+v_k)+2\pi\mu_n=\varphi_n$$

значений аргумента, сходящаяся к одному из значений $Argu$ (μ_n – целые числа) (замечание 2.14). Из сходимости БП $\prod_{k=1}^{\infty}(1+v_k)$ следует, что $\lim_{n\to\infty}(1+v_n)=1$, поэтому при условии $n\geq n_0$ имеем: $|\arg(1+v_n)|<\pi$ и:

$$|\varphi_{n+1}-\varphi_n|=|\arg(1+v_{n+1})+2\pi(\mu_{n+1}-\mu_n)|>2\pi|\mu_{n+1}-\mu_n|-\pi\ .$$

Так как $\lim_{n\to\infty}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=0$, то целые неотрицательные числа $|\mu_{n+1}-\mu_n|$ должны обращаться в нуль, начиная с некоторого из них, то есть должны выполняться равенства $\mu_{n_1}=\mu_{n_1+1}=...=\mu$. Поэтому сходится не только последовательность $\{\varphi_n\}$, но и последовательность $\left\{\varphi_n-2\pi\mu_n=\sum_{k=1}^{n}\arg(1+v_k)\right\}$, откуда следует сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arg(1+v_n)\ .$$

Так как сходятся оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+v_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\arg(1+v_n)$, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+v_n)\ . \quad ◀$$

Так как справедливо равенство:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+v_k)=e^{\sum_{k=1}^{n}\ln(1+v_k)}\equiv\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1+v_k)\right],$$

то в случае сходимости БП выполняется равенство:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+v_k)=e^{\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k)}\equiv\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k)\right]\ . \qquad (83)$$

БП $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k)$ *называется* ***абсолютно сходящимся,*** *если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k)$ *сходится абсолютно.*

Ниже воспользуемся известными разложениями:
разложением:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{84}$$

имеющим место на всей комплексной плоскости,
и разложением:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots, \tag{85}$$

которое имеет место в круге $|z|<1$.

Так как при условии $|v_k|<1$ имеет место разложение (см. (85)):

$$\ln(1+v_k) = v_k(1 - \frac{1}{2}v_k + \frac{1}{3}v_k^2 - \ldots)$$

и при условии $|v_k| < \frac{1}{2}$ справедлива следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\frac{1}{2}|v_k| = |v_k|(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \ldots) < |\ln(1+v_k)| < |v_k|(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots) = \frac{3}{2}|v_k|, \tag{86}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\ln(1+v_k)|$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k|$. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2.76. *Для абсолютной сходимости БП* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k)$ *необходимо и достаточно абсолютной сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$.

Пусть $\{v_k(z)\}$ есть последовательность функций, однозначных и аналитических в области G и не принимающих в ней значения -1 $(-\pi < \arg z \le \pi)$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k(z))$ равномерно сходится внутри области G, то $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k(z))$ также сходится в этой области и, значит, представляет собой некоторую функцию $f(z)$, не обращающуюся в нуль. Согласно формуле (83) $f(z)$ можно записать в виде:

$$f(z) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k(z))\right],$$

т. е. $f(z)$ является аналитической функцией (теорема 2.51).

Лемма 2.8. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k(z))$ *равномерно сходится внутри области* G, *то внутри* G *равномерно сходится и БП* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k(z))$, *то есть последовательность* $\left\{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+v_k(z))\right\}$ *является равномерно сходящейся.*

▷ Пусть F – ограниченное замкнутое множество, лежащее в G, $M=\max\limits_F|f(z)|$ и $0<\varepsilon<M$ – произвольное число. В силу условия леммы, имеем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\ln(1+v_k(z))\right|<\frac{\varepsilon}{2M}<\frac{1}{2}\quad \text{при}\quad n\ge n_0(\varepsilon), z\in F.$$

Отсюда следует (ниже используются разложение $e^z\equiv\exp z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots$ (см. (84)) и обозначение $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k)=\sum\limits_{1}^{\infty}$)

$$\left|f(z)-\prod_{k=1}^{n}(1+v_k(z))\right|=\left|\exp\left(\sum_1^{\infty}\right)-\exp\left(\sum_1^{n}\right)\right|=\left|\exp\left(\sum_1^{\infty}\right)\right|\left|1-\exp\left(-\sum_{n+1}^{\infty}\right)\right|\le$$

$$\le M\left|1-\left(1-\sum_{n+1}^{\infty}+\frac{1}{2!}\left(\sum_{n+1}^{\infty}\right)^2-\ldots\right)\right|\le M\left[\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2+\ldots\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\left[1+\frac{1}{2!}\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2+\ldots\right]<\frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)=\varepsilon$$

при $n\ge n_0(\varepsilon), z\in F$. ◀

В силу последнего неравенства из (86), которое выполняется при условии: $|v_k(z)|<\dfrac{1}{2}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+v_k(z))$ абсолютно и равномерно сходится внутри области G, если существует сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ с постоянными и положительными слагаемыми такой, что $|v_k(z)|<a_k, \forall z\in D$, начиная с некоторого значения k, где $k\ge n^*$, а n^* – достаточно большое натуральное число. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.77. *Для того чтобы БП* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+v_k(z))$ *абсолютно и равномерно сходилось внутри области* G *и, следовательно, представляло в ней аналитическую, не обращающуюся в нуль функцию* $f(z)$, *достаточно, чтобы, начиная с некоторого* $k\ge n^*$, *во всей области* G *выполнялись неравенства* $|v_k(z)|<a_k$, *где* a_k *– слагаемые сходящегося ряда.*

Условие равномерной сходимости БП из последней теоремы является достаточным, но не является необходимым.

7. Обобщенные бесконечные произведения

В предыдущем пункте рассматривались БП с отличными от нуля множителями. В этом пункте рассмотрим обобщенные БП, в которых допускается обращение в нуль конечного числа множителей. Пусть в произведении $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ все нулевые множители находятся среди множителей с номерами из промежутка $1 \le n \le n_0 - 1$, а n_0 есть номер, начиная с которого все множители этого БП отличны от нуля.

Бесконечное произведение *(БП)* $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ *называется* ***сходящимся****, если сходится БП* $\prod_{k=n_0}^{\infty} u_k$ (*при* $k \ge n_0$ $u_k \ne 0$). *Значением всего БП считается нуль:*

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{n_0-1} u_k \prod_{k=n_0}^{n} u_k \right) = 0 .$$

Рассматривая обобщенные БП будем считать, что произведение $\prod_{k=n_0}^{\infty} u_k$ сходится. Тогда можно сформулировать лемму 2.9.

Лемма 2.9. *БП обращается в нуль тогда и только тогда, когда обращается в нуль хотя бы один из его множителей.*

Особенно важны БП вида: $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, где $f_k(z)$ $(k = 1,2,...)$ – аналитические функции, которые могут обращаться в нуль в отдельных точках области G. Мы будем рассматривать указанные БП при следующих ограничениях: 1) множество E точек, в которых по крайней мере одна из функций последовательности $\{f_k(z)\}$ обращается в нуль, не имеет предельных точек внутри области; 2) в каждой точке из множества E обращается в нуль лишь конечное число функций этой последовательности; 3) ряд $\sum_{k=n(F)}^{\infty} \ln f_k(z)$ равномерно сходится на каждом ограниченном замкнутом множестве $F \subset G$, где $n(F)$ – натуральное число, большее единицы и такое, что при условии $k \ge n(F)$ ни одна из функций $f_k(z)$ не обращается в нуль в точках множества F.

При этих ограничениях БП $\prod_{k=n(F)}^{\infty} f_k(z)$ (а, значит, и последовательность $\left\{\prod_{k=n(F)}^{n} f_k(z)\right\}$, где $n \ge n(F)$) равномерно сходится на F. Так как функция $\prod_{k=1}^{n(F)-1} f_k(z)$ непрерывна на F, то она ограничена по модулю.

Поэтому, последовательность функций:
$\prod_{k=1}^{n} f_k(z) = \prod_{k=1}^{n(F)-1} f_k(z) \prod_{k=n(F)}^{n} f_k(z)$, то есть $\prod_{k=1}^{n(F)-1} f_k(z) f_{n(F)}, \prod_{k=1}^{n(F)-1} f_k(z) f_{n(F)} f_{n(F)+1}, \ldots$
также равномерно сходится на F. Отсюда вытекает теорема.

Теорема 2.78. *При сделанных предположениях относительно последовательности* $\{f_k(z)\}$ *БП* $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *равномерно сходится внутри области* G *и представляет в этой области аналитическую функцию:*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z).$$

Функция $f(z)$ *обращается в нуль в тех и только в тех точках области* G, *в которых обращается в нуль хотя бы одна из функций* $f_k(z)$.

ГЛАВА III

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ A И H_δ. ТЕОРЕМЫ ГАРНАКА, НЕВАНЛИННА, ФИХТЕНГОЛЬЦА, БАНАХА

§ 1. Логарифмические полюсы. Функция Бляшке

1. Конформное отображение круга на себя

Теорема 3.1. *Дробно-линейное преобразование (дробно-линейная функция)*:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0$$

кроме свойства, указанного в теореме 2.60, *обладает свойствами*:

1) (*круговое свойство*) *при дробно-линейном преобразовании окружность переходит в окружность (прямая линия считается окружностью бесконечно большого радиуса);*

2) (*свойство симметрии*) *при дробно-линейном отображении любые две точки, симметричные относительно окружности, переходят в две точки, симметричные относительно образа этой окружности.*

Пусть дана окружность $\partial K : |z| = R$. Если точки z, z' симметричны относительно окружности ∂K, то они связаны равенством:

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}} \tag{1}$$

(гл. II, § 5, формула (51)).

Теорема 3.2. *Функция* $f(z)$, *аналитическая в кольце* $r < |z - z_0| < \rho$, *может быть разложена в этом кольце в абсолютно сходящийся ряд Лорана, который равномерно сходится в замкнутой области* $r_1 \le |z - z_0| \le \rho_1$, *где* $0 \le r < r_1, \rho_1 < \rho$.

Пусть требуется отобразить конформно круг $|z|<R$ на самого себя так, чтобы данная точка ζ, лежащая внутри этого круга, но не совпадающая с его центром , перешла в центр круга, то есть в точку $w=0$. Для решения этой задачи попытаемся найти дробно-линейную функцию $l(z)$ такую, что $l(\zeta)=0$. Но тогда, в силу свойства симметрии дробно-линейного преобразования, точка ζ', симметричная точке ζ относительно окружности $|z|=R$, перейдет в точку ∞, т. е. $l(\zeta')=\infty$. Учитывая вышесказанное, будем искать функцию $l(z)$ в виде:

$$w=l(z)=\lambda\frac{z-\zeta}{z-\zeta'},$$

где λ – комплексное число, отличное от нуля. Согласно (1):

$$z-\zeta'=z-\frac{R^2}{\bar{\zeta}}=\frac{z\bar{\zeta}-R^2}{\bar{\zeta}}$$

и тогда:

$$w=l(z)=-\lambda\bar{\zeta}\frac{z-\zeta}{R^2-z\bar{\zeta}}=\mu\frac{z-\zeta}{R^2-z\bar{\zeta}}.$$

Взяв $\mu=R^2e^{i\theta}$, θ – любое действительное число, получим преобразование:

$$w=l(z)=R^2e^{i\theta}\frac{z-\zeta}{R^2-z\bar{\zeta}}. \tag{2}$$

Покажем, что преобразование (2) является искомым. То, что точка $z=\zeta$ переходит в центр круга $w=0$, очевидно. Пусть точка z лежит на окружности, то есть $z=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, а точка ζ – это точка $\zeta=re^{i\psi},0<r<R$.

Тогда:

$$w=l(\mathrm{Re}^{i\varphi})=R^2e^{i\theta}\frac{\mathrm{Re}^{i\varphi}-\zeta}{R^2-R\bar{\zeta}e^{i\varphi}}=\mathrm{Re}^{i\theta}e^{-i\varphi}\frac{\mathrm{Re}^{i\varphi}-re^{i\psi}}{\mathrm{Re}^{-i\varphi}-re^{-i\psi}}=$$

$$=\mathrm{Re}^{i\theta}e^{-i\varphi}\frac{R(\cos\varphi+i\sin\varphi)-r(\cos\psi+i\sin\psi)}{R(\cos\varphi-i\sin\varphi)-r(\cos\psi-i\sin\psi)}=$$

$$=\mathrm{Re}^{i\theta}e^{-i\varphi}\frac{R(\cos\varphi-r\cos\psi)+i(R\sin\varphi-r\sin\psi)}{R(\cos\varphi-r\cos\psi)-i(R\sin\varphi-r\sin\psi)}.$$

Отсюда следует, что:

$$|w|=|l(\mathrm{Re}^{i\varphi})|=R\left|\frac{\mathrm{Re}^{i\varphi}-\zeta}{\mathrm{Re}^{-i\varphi}-\bar{\zeta}}\right|=R,$$

так как:

$$\left|\frac{\mathrm{Re}^{i\varphi}-\zeta}{\mathrm{Re}^{-i\varphi}-\bar{\zeta}}\right|=1.$$

Таким образом, если $|z| = R$, то и $|w| = R$, где w определяется формулой (2), и, значит, (2) задает отображение круга $|z| \le R$ самого на себя. Неопределенным в этом преобразовании остается число θ. Полагая $\theta = 0$, получаем следующую дробно-линейную функцию:

$$w = l(z) = R^2 \frac{z - \zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}}, \tag{3}$$

которая и будет применяться в дальнейшем. Заметим, что (см. теорему 2.60).

$$ad - bc = R^2(R^2 - \zeta\bar{\zeta}) = R^2(R^2 - r^2) \ne 0 \quad \text{и} \quad c = -\bar{\zeta} \ne 0\,.$$

2. Логарифмические полюсы гармонической функции

Получив формулу (3), перейдем к основному изложению. Легко проверяется, что функция $\ln\frac{1}{r} = -\ln r$, где $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $z_0 = (x_1^0, x_2^0)$, являющейся изолированной особой точкой этой функции. В дальнейшем изложении будем допускать существование подобных особых точек и начнем изложение со случая, когда внутри окружности некоторого радиуса ρ имеется единственная особая точка $z_0 = (x_1^0, x_2^0)$ однозначной гармонической функции $u(x_1, x_2)$. Не уменьшая общности, положим $(x_1^0, x_2^0) = (0{,}0)$ (этого всегда можно добиться заменой $(x_1, x_2) = (x_1', x_2') + (x_1^0, x_2^0)$) и рассмотрим $u(x_1, x_2)$ в области $\hat{K}: 0 < r < \rho$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Обозначая $v(x_1, x_2)$ гармоническую функцию, сопряженную с функцией $u(x_1, x_2)$, введем в рассмотрение аналитическую функцию $f(z) = u + iv$. Поскольку функция $v(x_1, x_2)$ по функции $u(x_1, x_2)$ определяется неоднозначно, то функция $f(z) = u + iv$ будет, вообще говоря, многозначной. Но, тем не менее, её производная $f'(z)$ является однозначной аналитической функцией и, следовательно, разлагается в области $0 < r < \rho$ в ряд Лорана:

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n z^n, n \ne -1,$$

откуда:

$$f(z) = A + A_{-1} Lnz + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A_n z^{n+1}}{n+1}, n \ne -1\,. \tag{4}$$

В (4) $Lnz = \ln|z| + iArgz$ (учтено, что $f(z)$ – многозначная функция и замечание 2.14).

С учетом того, что $z = x_1 + ix_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $A_n = \alpha_n + i\beta_n$, для действительной части $f(z)$ находим:

$$u(r,\theta) = \operatorname{Re} f(z) = \alpha + \alpha_{-1}\ln r - \beta_{-1}Argz +$$
$$+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{n+1}\left[\frac{\alpha_n}{n+1}\cos(n+1)\theta - \frac{\beta_n}{n+1}\sin(n+1)\theta\right], \quad \text{где} \quad n \neq -1.$$

Поскольку функция u есть функция однозначная, то должно быть $\beta_{-1} = 0$. Меняя обозначения коэффициентов и индекса суммирования, получаем:

$$u(r,\theta) = a\ln r + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^n\left[a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta\right] \tag{5}$$

т. е. $u(r,\theta)$ является действительной частью аналитической функции

$$f(z) = aLnz + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(a_n - ib_n)z^n = aLnz + \varphi(z),$$

где a – действительное число.

Если точка $z = 0$ – особая точка для функции $u(r,\theta)$, то она должна быть особой точкой и для функции $f(z)$. Поэтому или $\varphi(z)$ имеет особую точку в начале координат, или для функции $\varphi(z)$ эта точка правильная и тогда $a \neq 0$. Заметим далее, что

$$Lnz = \ln z + 2k\pi i = \ln|z| + iArgz = \ln r + (\arg z + 2k\pi)i,$$

и обозначим:

$$w_k = \ln r + (\arg z + 2k\pi)i \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Разным значениям k соответствуют разные значения w_k, то есть имеем бесконечное множество разных значений Lnz, соответствующих бесчисленным ветвям этой многозначной функции. Значения w_k имеют одну и ту же действительную часть, а коэффициенты при мнимой единице образуют арифметическую прогрессию с разностью 2π. Выделим конкретную ветвь рассматриваемой функции и ограничимся исследованием того из двух указанных выше случаев, при котором начало координат есть правильная точка для функции $\varphi(z)$ и $a \neq 0$. В этом случае разложение (5) имеет вид:

$$u(r,\theta) = a\ln r + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\left[a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta\right]. \tag{6}$$

Из (6) следует, что в зависимости от знака числа a $(a \neq 0)$:

$$u(r,\theta) \underset{r\to+0}{\longrightarrow} \pm\infty. \tag{7}$$

***Если** имеет место разложение* (6) *и выполняются условия* (4;5), *то точка* $z = 0$ *называется **логарифмическим полюсом** гармонической функции* $u(r,\theta)$ $(z = r(\cos\theta + i\sin\theta))$.

Итак, мы рассматривали случай, когда однозначная гармоническая функция имела один логарифмический полюс, находящийся в начале координат, и имела разложение (6). Если такая функция будет иметь еще логарифмические полюсы, кроме указанного выше, то, очевидно, разложение, аналогичное (6), будет содержать дополнительно слагаемые вида $a_i' \ln|z - z_i|$ и их может быть конечное или бесконечное число.

3. Формула Пуассона – Иенсена

Пусть $u(z) = u(r,\theta)$ – однозначная функция, гармоническая в круге $r < R$, где $R < \infty$, за исключением, быть может, логарифмических полюсов. Обозначим логарифмические полюсы, отличные от нуля, через $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n, ...$, располагая их в порядке неубывающих модулей, и пусть $\mu_j \ln|z - \zeta_j|$ – соответствующие им слагаемые в разложении вида (6). Пусть слагаемое $\mu_0 \ln|z|$ соответствует логарифмическому полюсу $z = 0$ (если указанная точка не является логарифмическим полюсом, то $\mu_0 = 0$).

Рассмотрим дробно-линейную функцию:

$$l_\zeta(z) = \rho^2 \frac{z - \zeta}{\rho^2 - z\bar{\zeta}} \qquad (|\zeta| < \rho < R),$$

которая конформно отображает круг $|z| \le \rho$ сам на себя так, что точка $\zeta \ne 0$ переходит в центр круга (формула (3)). Заметим, что $|\zeta| = |\bar{\zeta}|$ и при условиях $|\zeta| < \rho$, $|z| < \rho$ будет $|\bar{\zeta}||z| < \rho^2$ и $|z| < \rho < \frac{\rho^2}{|\zeta|}$. Отсюда следует, что $l_\zeta(z)$ является аналитической функцией в круге $|z| < \frac{\rho^2}{|\zeta|}$, имеет в этом круге единственный простой нуль в точке $z = \zeta$ $(|\zeta| < \frac{\rho^2}{|\zeta|})$ и ее модуль равен ρ во всех точках окружности $|z| = \rho$ (см. пункт 1).

Но тогда:

$$u_\zeta(z) = \ln\left(\frac{1}{\rho}|l_\zeta(z)|\right)$$

есть функция, гармоническая при условии $|z| < \frac{\rho^2}{|\zeta|}, z \neq \zeta$, имеющая логарифмический полюс в точке $z = \zeta$ с соответствующим слагаемым $\ln|z-\zeta|$ и обращающаяся в нуль на окружности $|z| = \rho$.

Пусть точки $0, \zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_{n(\rho)}$ являются логарифмическими полюсами функции $u(z)$ и лежат внутри окружности $|z| = \rho$, а остальные аналогичные точки $\zeta_{n(\rho)+1}, \zeta_{n(\rho)+2}, ...$ лежат вне этой окружности. Тогда функция:

$$v(z) = u(z) - \sum_{k=0}^{n(\rho)} \mu_k u_{\zeta_k}(z) = u(z) - \sum_{k=0}^{n(\rho)} \mu_k \ln\left|\frac{\rho(z-\zeta_k)}{\rho^2 - z\bar{\zeta}_k}\right|$$

является гармонической во всех точках некоторого круга, радиуса большего, чем ρ (этот радиус равен $\min\left\{|\zeta_{n(\rho)+1}|, \frac{\rho^2}{|\zeta_{n(\rho)}|}\right\}$). Так как на окружности $|z| = \rho$ функции $u_{\zeta_k}(z) = 0$ при любом $k = 0,1,2,...,n(\rho)$, то на этой окружности выполняется равенство $v(z) = u(z)$. Напомним, что $\mu_0 = 0$, если точка $z = 0$ не является логарифмическим полюсом функции $u(z)$, и что точки $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_{n(\rho)}, ...$ располагаются в порядке неубывающих модулей.

Для гармонической функции $v(z)$ при всех значениях z таких, что $|z| = r < \rho$, справедлива формула Пуассона.

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\rho,\alpha)\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$$

и тогда, в силу сказанного выше:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha = u(r,\theta) - \sum_{k=0}^{n(\rho)} \mu_k \ln\left|\frac{\rho(z-\zeta_k)}{\rho^2 - z\bar{\zeta}_k}\right|. \tag{8}$$

Равенство (8) *называют* ***формулой Пуассон – Иенсена.***

Важнейшим частным случаем этой формулы является случай, когда функция $u(r,\theta)$ имеет вид $u(r,\theta) = \ln|f(re^{i\theta})|$, где $f(re^{i\theta}) = f(z)$ есть функция, однозначная и аналитическая в круге $|z| < R$, за исключением, быть может, полюсов. Указав важнейший частный случай формулы (8), отметим, что мы будем рассматривать только случай, когда $f(z)$ является однозначной и аналитической функцией и не имеет ни полюсов, ни других особых точек, так как более общего случая нам в дальнейшем не потребуется.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – последовательность нулей $f(z)$, расположенных в порядке неубывающих модулей, каждый из которых повторен в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Отдельно рассмотрим точку $z = 0$, приписав ей кратность λ, где $\lambda \geq 0$ (если точка $z = 0$ не является нулем функции $f(z)$, то $\lambda = 0$). Очевидно, что $\ln|f(z)|$ есть функция, однозначная и гармоническая в круге $|z| < R$, за исключением точек $0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$, которым соответствуют слагаемые: $\lambda \ln|z|, \ln|z - a_1|, \ln|z - a_1|, ..., \ln|z - a_1|, \ln|z - a_2|, ...$ (точки $0, a_1, ..., a_n, ...$ – логарифмические полюса). Если $n(\rho)$ обозначает число нулей $f(z)$ (с учетом их кратности), лежащих в круге $|z| < \rho$, причем центр круга в расчет не принимается, то по формуле (8) получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(\rho e^{i\alpha})\right| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)} d\alpha = u(r, \theta) - \sum_{k=0}^{n(\rho)} \mu_k \ln\left|\frac{\rho(z - \zeta_k)}{\rho^2 - z\bar{\zeta}_k}\right|.$$

$$= \ln\left|f(re^{i\theta})\right| - \lambda \ln r + \lambda \ln \rho - \sum_{k=1}^{n(\rho)} \ln\left|\frac{\rho(z - a_k)}{\rho^2 - z\bar{a}_k}\right| = \ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right| + \lambda \ln \rho - \sum_{k=1}^{n(\rho)} \ln \frac{\rho|z - a_k|}{|\rho^2 - z\bar{a}_k|}. \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) были получены в предположении, что ни один из логарифмических полюсов функции $u(z)$ не лежит на окружности $|z| = \rho$. Можно показать, что они остаются верными и в том случае, когда имеются логарифмические полюсы, лежащие на указанной окружности. Другими словами, можем считать, что число $n(\rho)$ обозначает число нулей функции $f(z)$ в открытом круге $|z| < \rho$, и можем считать, что оно обозначает их число в замкнутом круге $|z| \leq \rho$.

Преобразуем формулу (9), вспоминая, что кратность нуля $z = z_0$ определялась из формулы (82), гл. 2:

$$f(z) = (z - z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + ...\right].$$

Ее в случае $m = \lambda, z_0 = 0$ можно записать:

$$f(z) = z^\lambda \left[\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} + \frac{f^{(\lambda+1)}(0)}{(\lambda+1)!} z + ...\right]$$

и тогда из формулы (9), полагая в ней $z = 0$ (то есть $r = 0$), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(\rho e^{i\alpha})\right| d\alpha = \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| + \lambda \ln \rho - \sum_{k=1}^{n(\rho)} \ln \frac{|a_k|}{\rho}$$

или:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(\rho e^{i\alpha})\right| d\alpha = \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| + \ln\left[\rho^\lambda \prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|}\right]. \qquad (10)$$

Очевидно, правая часть формулы (10) возрастает при возрастании ρ, так как возрастает каждый множитель $\dfrac{\rho}{|a_k|} > 1$ произведения, стоящего под знаком логарифма, а для тех значений $\rho = \rho_i$, для которых на окружности $|z| = \rho_i$ лежат нули функции $f(z)$, увеличивается и число множителей указанного произведения. Из вышесказанного следует, что при возрастании ρ возрастает и левая часть (10) и, значит, справедлива теорема.

Теорема 3.3. *Среднее значение логарифма модуля аналитической функции есть неубывающая функция радиуса окружности, по которой берется среднее.*

4. Функция Бляшке

Напомним, что мы рассматриваем функции, аналитические в круге конечного радиуса: $|z| < R < \infty$. Из теоремы 3.3 для аналитической функции $f(z)$, не равной тождественно нулю, следует, что всегда существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{\rho \to R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(\rho e^{i\alpha}) \right| d\alpha .$$

Далее будем рассматривать только функции, для которых этот предел конечен, то есть такие функции, для которых справедливо условие:

$$\lim_{\rho \to R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(\rho e^{i\alpha}) \right| d\alpha < \infty . \tag{11}$$

Это условие заведомо выполняется для функций, ограниченных по модулю в рассматриваемом круге. Однако оно может выполняться и для неограниченных функций. В силу формулы (10) и того, что:

$$\ln\left[\prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|}\right] > 0 ,$$

так как все множители $\dfrac{\rho}{|a_k|} \geq 1$, условие (11) будет выполняться, если произведения $\prod\limits_{k=1}^{n(\rho)} \dfrac{\rho}{|a_k|}$ ограничены сверху. Последнее же может иметь место в двух случаях:

1) общее число n нулей функции $f(z)$ в круге $|z| < R$ конечно и тогда:

$$\prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} < \prod_{k=1}^{n} \frac{R}{|a_k|} \ .$$

2) множество нулей функции $f(z)$ в круге бесконечно, но произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{R}{|a_k|}$ сходится. Действительно, из сходимости этого произведения следует, что:

$$\prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} < \prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{R}{|a_k|} < \prod_{k=1}^{\infty} \frac{R}{|a_k|} = C < \infty$$

для всех $\rho < R$. Обратно, если:

$$\prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} < C$$

для всех $\rho < R$, то для произвольного натурального числа n при условии $n(\rho) > n$ $(n(\rho) \to \infty$, если $\rho \to R)$ будем иметь:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\rho}{|a_k|} \le \prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} < C \ ,$$

откуда:

$$\lim_{\rho \to R} \prod_{k=1}^{n} \frac{\rho}{|a_k|} \le \prod_{k=1}^{n} \frac{R}{|a_k|} \le C \qquad (12)$$

при любом n и, значит, бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{R}{|a_k|}$ сходится.

Рассматривая далее конечное произведение как частный случай бесконечного сходящегося произведения, будем использовать запись $\prod \frac{R}{|a_k|}$, которая означает, что произведение распространяется на все нули функции $f(z)$, лежащие в круге $|z| < R$. Верхним индексом у символа $\prod$ в такой записи может быть или n, или ∞.

Заметим еще, что если условие (11) выполняется, то, в силу (10), будут выполняться неравенства (12) (при любом n), а это означает сходимость бесконечного произведения. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Условие* (11) *выполняется тогда и только тогда, когда произведение* $\prod \frac{R}{|a_k|}$ *сходится.*

Условие сходимости произведения можно заменить условием сходимости ряда, для чего представим $\frac{R}{|a_k|}$ в виде: $\frac{R}{|a_k|} = 1 + \frac{R - |a_k|}{|a_k|}$.

Напомним, что $f(z)$ является однозначной и аналитической функцией и не имеет ни полюсов, ни других особых точек. Множество нулей такой функции не имеет предельной точки, принадлежащей кругу $|z| < R < \infty$ (это следует из теоремы 2.55; см. также доказательство теоремы 2.67), а последовательность нулей $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ функции $f(z)$, расположена в порядке неубывающих модулей. Значит, при достаточно больших значениях k будет $\frac{R-|a_k|}{|a_k|} < \frac{1}{2}$. В силу теоремы 2.77 для сходимости произведения $\prod \frac{R}{|a_k|}$ необходимо и достаточно сходимости ряда $\sum \frac{R-|a_k|}{|a_k|}$ (верхним индексом у символа $\sum$ может быть или n, или ∞; конечную сумму рассматриваем как частный случай сходящегося ряда). Если же последний ряд не является конечной суммой и сходится, то $|a_k| \to R$ при условии $k \to \infty$ $(|a_k| < R)$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\frac{R}{2} < |a_k|$. Откуда получаем $\frac{1}{|a_k|} < \frac{2}{R}$. Значит, справедливо двойное неравенство:

$$\frac{1}{R}(R-|a_k|) < \frac{R-|a_k|}{|a_k|} < \frac{2}{R}(R-|a_k|),$$

из которого видно, что сходимость ряда $\sum \frac{R-|a_k|}{|a_k|}$ эквивалентна сходимости ряда $\sum (R-|a_k|)$. Последний ряд представляет собой бесконечную сумму расстояний нулей a_k функции $f(z)$ до окружности $|z| = R$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.5. *Для выполнения условия* (11) *необходимо и достаточно, чтобы сумма расстояний всех нулей функции* $f(z)$ *до окружности* $|z| = R$ *представляла собой сходящийся ряд, то есть*:

$$\sum (R-|a_k|) < \infty.$$

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы этого параграфа.

Теорема 3.6. *Для любого целого неотрицательного числа* λ *и любой последовательности точек* $\{a_k\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *такой, что* $|a_k| \le |a_{k+1}|$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} (R-|a_k|)$ *сходится, существует функция* $b(z)$, *аналитическая в круге* $|z| < R$, *модуль которой не превосходит единицы в этом круге и последовательность нулей которой, начиная с нуля с* *номером* $(\lambda+1)$, *совпадает с данной последовательностью точек, то есть последовательность её нулей имеет вид:*

$$\underbrace{0,0,...,0,}_{\lambda}a_1, a_2, ..., a_n, ... \tag{13}$$

$\triangleright$ Обозначим:

$$b_n(z) = \left(\frac{z}{R}\right)^{\lambda} \prod_{k=1}^{n} \frac{R|a_k|(a_k - z)}{a_k(R^2 - z\bar{a}_k)} . \tag{14}$$

Функция (14) имеет нули в точках $\underbrace{0,0,...,0,}_{\lambda}a_1, a_2, ..., a_n$ и только в них. Она является непрерывной при условии $|z| \le R$, аналитической в круге $K : |z| < R$, ее модуль равен единице на окружности $C : |z| = R$, а во внутренних точках круга выполняется неравенство:

$$|b_n(z)| < 1.$$

Чтобы заметить, что действительно $|b_n(z)| = 1$, если $z \in C$, и $|b_n(z)| < 1$, если $z \in K$, надо вспомнить преобразование, отображающее круг K сам на себя (формула (3), п. 1) :

$$w = l(z) = R^2 \frac{z - \zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}},$$

и представить k-й множитель произведения (14) в виде:

$$p_k = \frac{R|a_k|(a_k - z)}{a_k(R^2 - z\bar{a}_k)} = -\frac{|a_k|}{Ra_k} \cdot R^2 \frac{z - a_k}{R^2 - z\bar{a}_k} = -\frac{|a_k|}{Ra_k} \cdot l_k(z) .$$

Так как $\left|-\frac{|a_k|}{Ra_k}\right| = \frac{1}{R}$, то из равенства $|z| = R \;\Rightarrow\; |l_k(z)| = R \;\Rightarrow\; |p_k| = 1 \;\Rightarrow$ $|b_n(z)| = 1$ и из $|z| < R \;\Rightarrow\; |l_k(z)| < R \;\Rightarrow\; |p_k| < 1 \;\Rightarrow\; |b_n(z)| < 1$.

Теперь числитель дроби p_k приведем к следующему виду:

$$R|a_k|(a_k - z) = \left[R^2 a_k - |a_k|^2 z - \left(R^2 a_k + R|a_k|z - R|a_k|a_k - |a_k|^2 z\right)\right] =$$

$$= \left[R^2 a_k - |a_k|^2 z - \left(Ra_k + z|a_k|\right)\left(R - |a_k|\right)\right].$$

и представим k-й множитель произведения (14) в виде:

$$p_k = 1 - \frac{Ra_k + z|a_k|}{a_k(R^2 - z\bar{a}_k)}(R - |a_k|) = 1 + \lambda_k(R - |a_k|) .$$

Очевидно, для точек z, удовлетворяющих условию $|z| \le r < R$, справедливы следующие равенство и неравенства:

$$|\lambda_k| = \left|\frac{Ra_k + z|a_k|}{a_k(R^2 - z\bar{a}_k)}\right| \le \frac{R|a_k| + r|a_k|}{|a_k|(R^2 - r|a_k|)} < \frac{R + r}{R(R - r)} .$$

Так как по условию ряд $\sum(R - |a_k|)$ сходится, то сходится и ряд $\sum|\lambda_k(R - |a_k|)|$.. Отсюда следует, в силу теоремы 2.77, что бесконечное произведение:

$$b(z)=\left(\frac{z}{R}\right)^{\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{R|a_k|(a_k-z)}{a_k(R^2-z\bar{a}_k)} \tag{15}$$

абсолютно сходится (см. представление k-го множителя произведения (14)) и представляет собой в круге $|z|<R$ аналитическую функцию $b(z)$, нули которой совпадают с точками:

$$\underbrace{0,0,\ldots,0}_{\lambda},a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots.$$

Так как $b(z)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n(z)$, то $|b(z)|\le 1$. ◀

Функция (15) *называется* ***функцией Бляшке,*** *соответствующей данной последовательности нулей.*

Рассматривая произвольную функцию $f(z)$, не равную тождественно нулю и удовлетворяющую условию (11), и составляя для ее нулей соответствующую функцию Бляшке $b(z)$, найдем, что функция $g(z)=\dfrac{f(z)}{b(z)}$ является аналитической в круге $|z|<R$ и не имеет в нем нулей. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.7. *Для каждой аналитической функции $f(z)$, не равной тождественно нулю и удовлетворяющей условию (11), имеем следующее представление:*

$$f(z)=b(z)g(z)=g(z)\left(\frac{z}{R}\right)^{\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{R|a_k|(a_k-z)}{a_k(R^2-z\bar{a}_k)}\ , \tag{16}$$

где функция $g(z)$ не имеет нулей внутри круга $|z|<R$, а у функции $b(z)$ все нули являются общими с нулями функции $f(z)$ и по модулю она не превосходит единицы в круге $|z|<R$.

§ 2. Классы функций A и H_δ. Теорема Рисса

1. О некоторых свойствах интеграла Римана

Лемма 3.1. *Пусть дана числовая последовательность*:

$$\{\psi_n\}=\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n,\ldots \quad (\psi_k\ge 1,\quad k=1,2,\ldots).$$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\psi_n$*, то существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\psi_n=\ln(\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n)$.

▷ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\psi_n=a$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Существует натуральное число $n_0=n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n\ge n_0$ будет $|\ln\psi_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Преобразуя выражение под знаком модуля, находим:

$\ln\psi_n - a = \ln\psi_n - \ln e^a = \ln\frac{\psi_n}{e^a}$, $\left|\ln\frac{\psi_n}{e^a}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $-\frac{\varepsilon}{2} < \ln\frac{\psi_n}{e^a} < \frac{\varepsilon}{2}$, $e^{-\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\psi_n}{e^a} < e^{\frac{\varepsilon}{2}}$, $e^{a-\frac{\varepsilon}{2}} < \psi_n < e^{a+\frac{\varepsilon}{2}}$ (для любого $n \ge n_0$). Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем: $e^{a-\frac{\varepsilon}{2}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n \le e^{a+\frac{\varepsilon}{2}}$, откуда $a - \frac{\varepsilon}{2} \le \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n\right) \le a + \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n\right) - a\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Последнее неравенство может выполняться при любом $\varepsilon > 0$ только в случае $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n\right) - a = 0$. Таким образом, $\ln(\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n) = a = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\psi_n$. ◀

Лемма 3.2. *Если функция* $\ln\varphi(x)$ *на сегменте* $[0,b]$ *интегрируема по Риману, то имеет место равенство*:

$$e^{\frac{1}{b}\cdot(R)\int\limits_0^b \ln\varphi(x)dx} \equiv \exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int\limits_0^b \ln\varphi(x)dx\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^n \varphi\left(\frac{kb}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}},$$

где $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$ – *интеграл Римана.*

▷ Действительно, с одной стороны:

$$\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \ln\varphi\left(\frac{kb}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} = \frac{1}{b}\cdot(R)\int\limits_0^b \ln\varphi(x)dx.$$

С другой стороны, вводя обозначения:

$$\varphi\left(\frac{kb}{n}\right) = \varphi_k, \qquad \left(\prod_{k=1}^n \varphi\left(\frac{kb}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \psi_n.$$

Получаем:

$$\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \ln\varphi\left(\frac{kb}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\varphi_k = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{k=1}^n \varphi_k\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\ln\psi_n = \ln(\lim_{n\to\infty}\psi_n).$$

Последнее равенство справедливо в силу леммы 3.1. После этого находим:

$$e^{\frac{1}{b}\cdot(R)\int\limits_0^b \ln\varphi(x)dx} = \exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int\limits_0^b \ln\varphi(x)dx\right\} = e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n\right)} = \lim_{n\to\infty}\psi_n = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^n \varphi\left(\frac{kb}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$ ◀

Лемма 3.3. *Пусть* n – *произвольное натуральное число,* $a_1, a_2, ..., a_n$ – *любые неотрицательные числа, не все равные между собой. Тогда справедливо неравенство*:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \qquad \left(\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 ... a_n\right)$$

(*неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим). Если требование, состоящее в том, что не все числа* a_j *равны между собой, может не выполняться, то последнее неравенство приобретает вид*:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\triangleright$ Если $a_1 \ne a_2$, то:

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2, \qquad a_3 a_4 \le \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2$$

Если $a_3 a_4 \ne 0$, то:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \le \left(\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Если $a_3 a_4 = 0$, то неравенство $a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4$ очевидно. Повторив это рассуждение m раз, получим:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n,$$

но пока только для $n = 2^m$.

Пусть теперь n – любое натуральное число, меньшее 2^m, и

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \ldots, \quad b_n = a_n, \quad b_{n+1} = \ldots = b_{2^m} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = b.$$

Находим:

$$a_1 a_2 \ldots a_n b^{2^m-n} < \left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m} = \left(\frac{nb+(2^m-n)b}{2^m}\right)^{2^m} = b^{2^m}$$

или $a_1 a_2 \ldots a_n < b^n = \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n$, то есть $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. ◀

Левую часть неравенства преобразуем следующим образом:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left\{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right\} = \exp\left\{\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\right\} = \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k\right\},$$

где использовано обозначение $e^{\Phi} = \exp\{\Phi\}$. С учетом этого преобразования неравенство леммы 3.3 запишется в виде:

$$\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k\right\} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Лемма 3.4. *Пусть* n *– натуральное число. Тогда имеет место равенство* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

$\triangleright$ Представим $\sqrt[n]{n}$ в виде $\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{n-2}}$. Воспользовавшись леммой 3.3 при условии $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$, $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 1$, получим:

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le \frac{1}{n}\left(2\sqrt{n} + n - 2\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}\right) = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. ◀

Лемма 3.5. *Если непрерывная на сегменте* $[0,b]$ *функция* $f(x)$ *не есть тождественная константа и такова, что* $f(x) \ge 1$ *при любом* $x \in [0,b]$, *то справедливо неравенство*:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b \ln f(x)dx\right\} \le \frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b f(x)dx.$$

$\triangleright$ В силу леммы 3.3, при любом натуральном числе n справедливо неравенство: $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right)$.

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right).$$

Тогда, согласно лемме 3.2:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b \ln f(x)dx\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} = \frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b f(x)dx. \blacktriangleleft$$

Лемма 3.6. *Если* $0 < \delta < 1$, *то при выполнении условий леммы 3.5 справедливо неравенство*:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b \ln f(x)dx\right\} \le \left(\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b [f(x)]^{\delta}dx\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

$\triangleright$ Рассмотрим функцию $h(x) = \left(f(x)\right)^{\delta}$. Эта функция непрерывна и все ее значения не меньше единицы на рассматриваемом сегменте. Применяя к ней лемму 3.5, получим:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b \ln f^{\delta}(x)dx\right\} \le \frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b f^{\delta}(x)dx.$$

Справедливы равенства:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b \ln f^{\delta}(x)dx\right\} = \exp\left\{\frac{\delta}{b}\cdot(R)\int_0^b \ln f(x)dx\right\} =$$

$$= \left(\exp\left\{\frac{1}{b}(R)\int_0^b \ln f(x)dx\right\}\right)^{\delta}.$$

Отсюда находим:

$$\left(\exp\left\{\frac{1}{b}(R)\int_0^b \ln f(x)dx\right\}\right)^{\delta} \le \frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b f^{\delta}(x)dx$$

и, значит:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b \ln f(x)dx\right\} \le \left(\frac{1}{b}\cdot(R)\int_0^b [f(x)]^{\delta}dx\right)^{\frac{1}{\delta}}. \quad \blacktriangleleft$$

2. Связь между классами функций A и H_{δ}

Пусть функция $f(z)$ определена в единичном круге и в этом круге не равна тождественно нулю. Представим $\ln|f(z)|$ в виде $\ln^{+}|f(z)| - \ln^{-}|f(z)|$, где:

$$\ln^{+}|f(z)| = \begin{cases} \ln|f(z)|, |f(z)| \ge 1 \\ 0, |f(z)| < 1 \end{cases}, \qquad \ln^{-}|f(z)| = \begin{cases} 0, |f(z)| \ge 1 \\ -\ln|f(z)|, |f(z)| < 1 \end{cases}$$

(функции $f^{+}(x)$ и $f^{-}(x)$ определены в гл. 1, § 4, п. 2) и перепишем формулу (10) следующим образом (встречающиеся далее интегралы есть интегралы по Лебегу):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^{+}|f(\rho e^{i\theta})|d\theta = \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| + \ln\left[\rho^{\lambda}\prod_{k=1}^{n(\rho)}\frac{\rho}{|a_k|}\right] + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^{-}|f(\rho e^{i\theta})|d\theta.$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^{-}|f(\rho e^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^{+}|f(\rho e^{i\theta})|d\theta - \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| - \lambda\ln\rho$$

и, поэтому, ограниченность интеграла:

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^{+}|f(\rho e^{i\theta})|d\theta \quad (0<\rho<1)$ означает: $\overline{\lim_{\rho\to 1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^{-}|f(\rho e^{i\theta})|d\theta < +\infty$

Отсюда получаем:

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\ln|f(\rho e^{i\theta})|\right|d\theta < +\infty.$$

Но поскольку, с другой стороны:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta\ \le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right|\right|d\theta\ ,$$

то из вышесказанного следует, что условие:

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta<+\infty$$

эквивалентно условию:

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right|\right|d\theta<+\infty\ ,$$

если функция $f(z)$ не равна тождественно нулю.

***Говорят**, что **функция** $f(z)$, аналитическая в единичном круге, **принадлежит классу** A (или N), если она удовлетворяет условию:*

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta=A(f)<\infty\,.$$

***Говорят**, что **функция** $f(z)$, аналитическая в единичном круге, **принадлежит классу** H_δ $(\delta>0)$, если:*

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\delta}d\theta=H_\delta(f)<\infty\,.$$

Пределы $A(f)$ и $H_\delta(f)$ конечные или бесконечные существуют для каждой функции $f(z)$, аналитической в единичном круге, так как интегралы $\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta$ и $\int_0^{2\pi}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\delta}d\theta$ есть неубывающие функции от числа ρ $(\rho<1)$.

Лемма 3.7. *Пусть* $0<\tilde{\delta}<\delta$. *Тогда, если* $f(z)\in H_\delta$, *то* $f(z)\in H_{\tilde{\delta}}$, *то есть* $H_\delta\subset H_{\tilde{\delta}}$, *если* $0<\tilde{\delta}<\delta$. *В частности,* $H_\delta\subset H_1$, *если* $\delta>1$.

▷ Обозначим $E=[0,2\pi]$, $\hat{E}=E\left(|f|\ge 1\right)$, $\check{E}=E\left(|f|<1\right)$. Тогда, если $\theta\in\hat{E}$, то $|f|^{\tilde{\delta}}\le|f|^{\delta}$, если же $\theta\in\check{E}$, то $|f|^{\tilde{\delta}}<|f|^{0}=1$. Отсюда следует, что:

$$\frac{1}{2\pi}\int_E\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\tilde{\delta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\hat{E}}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\tilde{\delta}}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\check{E}}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\tilde{\delta}}d\theta<\frac{1}{2\pi}\int_{\hat{E}}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\delta}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\check{E}}d\theta\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_E\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\delta}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_E d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\delta}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=1+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^{\delta}d\theta\ .\ ◀$$

Лемма 3.8. *Пусть* E *есть измеримое множество, а функция* $f(x)$ *измерима и неотрицательна на этом множестве. Тогда справедливо равенство*:

$$\int\limits_E \ln^+ f(x)dx = \int\limits_{E^+} \ln f(x)dx\,,$$

где $E^+ = E(f \ge 1)$.

$\triangleright$ Напомним, что:

$$\ln^+ f(x) = \begin{cases} \ln f(x), & f(x) \ge 1, \\ 0, & f(x) < 1. \end{cases}$$

Введем обозначения: $E^+ = E(f \ge 1)$, $E^- = E(f < 1)$. Тогда $E = E^+ + E^-$, и получаем:

$$\int\limits_E \ln^+ f(x)dx = \int\limits_{E^+} \ln^+ f(x)dx + \int\limits_{E^-} \ln^+ f(x)dx = \int\limits_{E^+} \ln f(x)dx\,. \quad \blacktriangleleft$$

Лемма 3.9. *Пусть* $E = [0,2\pi]$ *и* $f(z)$ *принадлежит классу* A. *Тогда справедливо неравенство*:

$$\int\limits_E \ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \int\limits_E \ln\left(1+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta\,.$$

$\triangleright$ $$\int\limits_E \ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta = \int\limits_{E^+} \ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta + \int\limits_{E^-} \ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta = \int\limits_{E^+} \ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta =$$

$$= \int\limits_{E^+} \ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \int\limits_{E^+} \ln\left(1+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta \le \int\limits_E \ln\left(1+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta\,.$$

Таким образом:

$$\int\limits_E \ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \int\limits_E \ln\left(1+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta\,. \quad \blacktriangleleft$$

Теорема 3.8. *Если* $f(z)$ *принадлежит классу* H_1, *то* $f(z)$ *принадлежит классу* A, *т. е. связь между рассматриваемыми классами, с учетом леммы 3.7, выражается следующим образом:*

$$H_\delta \subset H_1 \subset A, \quad \delta > 1$$

$\triangleright$ Из условия теоремы следует, что $(E = [0,2\pi])$

$$\lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_E \left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta = H_1(f) < \infty$$

Отсюда:

$$\lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_E \left(1+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_E d\theta +$$

$$+ \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_E \left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta = 1 + H_1(f) < \infty\,.$$

Введем обозначения $b = 2\pi$, $1+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| = \varphi_\rho(\theta) = \varphi(\theta)$, $1 + H_1(f) = H_1(\varphi)$.

Если:

$$[\varphi(\theta)]_N = [\varphi]_N = \varphi_N = \begin{cases} \varphi, \varphi \le N, \\ N, \varphi > N \end{cases}$$

есть срезанная функция, то $1 \le \varphi_N \le N$. Пусть N – произвольное натуральное число и $\varepsilon_N = \dfrac{b}{N}$. Функция φ_N измерима и, значит, существует замкнутое множество $F_N \subset E$ такое, что $mF_N > mE - \varepsilon_N$, на котором функция φ_N непрерывна. Как известно, существует совершенное множество P_N такое, что $mP_N = mF_N$. Не уменьшая общности изложения, можем считать, что само множество F_N является совершенным. Пусть $G_N = E - F_N$. Тогда:

$F_N + G_N = E$, $F_N \cdot G_N = \varnothing$, $mG_N = mE - mF_N < mE - (mE - \varepsilon_N) = \varepsilon_N$, то есть

$$mG_N < \varepsilon_N .$$

Пусть ψ_N есть та непрерывная на множестве $E = [0,b]$ функция, определенная по функции φ_N, о которой говорится в теореме 1.26. Тогда:

$$\int_E \ln\varphi_N d\theta = \int_{F_N} \ln\varphi_N d\theta + \int_{G_N} \ln\varphi_N d\theta = \int_{F_N} \ln\psi_N d\theta + \int_{G_N} \ln\varphi_N d\theta < \int_E \ln\psi_N d\theta + \int_{G_N} \ln\varphi_N d\theta .$$

Значит:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\varphi_N d\theta\right\} < \exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\psi_N d\theta\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{b}\int_{G_N} \ln\varphi_N d\theta\right\}, \qquad (17)$$

причем:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\int_{G_N} \ln\varphi_N d\theta\right\} \le \exp\left\{\frac{1}{b}\ln N \cdot mG_N\right\} = \exp\left\{\ln N^{\frac{mG_N}{b}}\right\} = N^{\frac{mG_N}{b}} < N^{\frac{\varepsilon_N}{b}} = N^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{N} \qquad (18)$$

Кроме того, справедливы равенства:

$$\int_E \varphi_N d\theta = \int_{F_N} \varphi_N d\theta + \int_{G_N} \varphi_N d\theta \pm \int_{G_N} \psi_N d\theta = \int_E \psi_N d\theta + \int_{G_N} \varphi_N d\theta - \int_{G_N} \psi_N d\theta .$$

Так как $\psi_N \le N$, то получаем:

$$\int_E \varphi_N d\theta > \int_E \psi_N d\theta - \int_{G_N} \psi_N d\theta \ge = \int_E \psi_N d\theta - N \cdot mG_N .$$

Отсюда:

$$\int_E \psi_N d\theta < \int_E \varphi_N d\theta + N \cdot mG_N \quad . \qquad (19)$$

Применяя (17), (18) и леммы 3.4–3.5, находим:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\varphi_N d\theta\right\} < \exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\psi_N d\theta\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{b}\int_{G_N} \ln\varphi_N d\theta\right\} < \exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\psi_N d\theta\right\} \cdot \sqrt[N]{N} <$$

$$< \frac{1}{b}\int_E \psi_N d\theta \cdot \sqrt[N]{N} < \frac{1}{b}\int_E \varphi_N d\theta \cdot \sqrt[N]{N} + \frac{1}{b} \cdot N \cdot \frac{b}{N} \cdot \sqrt[N]{N} = \frac{1}{b}\int_E \varphi_N d\theta \cdot \sqrt[N]{N} + \sqrt[N]{N} \underset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{b}\int_E \varphi(\theta) d\theta + 1$$

Переходя к пределу при стремлении $N \to \infty$, получаем:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\varphi(\theta)d\theta\right\} \le \frac{1}{b}\int_E \varphi(\theta)d\theta + 1. \quad \blacktriangleleft$$

Пусть теперь $0 < \delta < 1$, функция $f(z) \in H_\delta$, $E = [0,2\pi]$, $E^+ = E\left(\left|f(\rho e^{i\theta})\right| \ge 1\right)$ $E^- = E\left(\left|f(\rho e^{i\theta})\right| < 1\right)$. Заметим, что $E^\pm = E^\pm(\rho)$. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(\theta)$ следующим образом:

$$\varphi(\theta) = \varphi_\rho(\theta) = \begin{cases} \left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|, \theta \in E^+, \\ 1, \theta \in E^-. \end{cases}$$

Лемма 3.10. *Для функции* $f(z)$, *принадлежащей классу* H_δ $(0 < \delta < 1)$, *справедливо равенство*:

$$\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta = \int_E \ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta = \int_E \ln\varphi(\theta)d\theta.$$

▷ Действительно, в силу определения функции $\varphi(\theta)$ и леммы 3.8

$$\int_E \ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta = \int_{E^+} \ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta = \int_{E^+} \ln\varphi(\theta)d\theta = \int_{E^+} \ln\varphi(\theta)d\theta + \int_{E^-} \ln\varphi(\theta)d\theta = \int_E \ln\varphi(\theta)d\theta \quad \blacktriangleleft$$

Теорема 3.9. *Если функция* $f(z)$ *принадлежит классу* H_δ $(0 < \delta < 1)$, *то* $f(z)$ *принадлежит классу* A.

▷ Так же, как и при доказательстве теоремы 3.8, получаем неравенство (19):

$$\int_E \psi_N d\theta < \int_E \varphi_N d\theta + N \cdot mG_N$$

и далее:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\varphi_N d\theta\right\} < \exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\psi_N d\theta\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{b}\int_{G_N} \ln\varphi_N d\theta\right\} < \exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\psi_N d\theta\right\} \cdot \sqrt[N]{N} <$$

$$< \frac{1}{b}\int_E \psi_N d\theta \cdot \sqrt[N]{N} < \frac{1}{b}\int_E \varphi_N d\theta \cdot \sqrt[N]{N} + \frac{1}{b} \cdot N \cdot \frac{b}{N} \cdot \sqrt[N]{N} =$$

$$= \frac{1}{b}\int_E \varphi_N d\theta \cdot \sqrt[N]{N} + \sqrt[N]{N} \underset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{b}\int_E \varphi(\theta)d\theta + 1.$$

В силу леммы 3.6, получаем:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\int_E \ln\psi_N d\theta\right\} \le \left(\frac{1}{b}\int_E \psi_N^\delta d\theta\right)^{\frac{1}{\delta}} \le \left(\frac{1}{b}\int_E \psi_N d\theta\right)^{\frac{1}{\delta}} \qquad (0 < \delta < 1).$$

Тогда:

$$\exp\left\{\frac{1}{b}\int\limits_E \ln\varphi_N d\theta\right\} < \exp\left\{\frac{1}{b}\int\limits_E \ln\psi_N d\theta\right\}\cdot \exp\left\{\frac{1}{b}\int\limits_{G_N} \ln\varphi_N d\theta\right\} < \exp\left\{\frac{1}{b}\int\limits_E \ln\psi_N d\theta\right\}\cdot \sqrt[N]{N} <$$

$$< \left(\frac{1}{b}\int\limits_E \psi_N d\theta\right)^{\frac{1}{\delta}} \cdot \sqrt[N]{N} < \left(\frac{1}{b}\int\limits_E \varphi_N d\theta + \frac{1}{b} N\cdot mG_N\right)^{\frac{1}{\delta}} \cdot \sqrt[N]{N} < \left(\frac{1}{b}\int\limits_E \varphi_N d\theta + 1\right)^{\frac{1}{\delta}} \cdot \sqrt[N]{N} \underset{N\to\infty}{\to}$$

$$\underset{N\to\infty}{\to} \left(\frac{1}{b}\int\limits_E \varphi(\theta) d\theta + 1\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

С учетом леммы 3.10, приходим к утверждению теоремы. ◀

З а м е ч а н и е 3.1. Из теорем 3.8 и 3.9 следует, что класс функций $H_\delta\ (\delta>0)$ содержится в классе A, то есть для любой функции $f(z)$ класса $H_\delta\ (\delta>0)$ выполняется соотношение:

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta = A(f) < \infty,$$

то есть $\qquad H_\delta \subset H_{\tilde{\delta}} \subset A \qquad (0<\tilde{\delta}<\delta)$.

3. Равенство Парсеваля. Теорема Рисса

Степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \tag{20}$$

можно рассматривать как некоторый аналог ряда Фурье для функции $f(z)$. Чтобы в этом убедиться, докажем сначала лемму.

Лемма 3.11. *На каждой окружности* $C_\rho : |z-z_0| = \rho$, лежащей в круге сходимости $K : |z-z_0| < R$ ряда (20) $(0<\rho<R)$, *справедливо*:

$$\int\limits_0^{2\pi}(z-z_0)^n\overline{(z-z_0)}^m d\theta = 0, \quad \text{при} \quad n\neq m, \tag{21}$$

где $\bar{z}$ обозначает комплексное число, сопряженное с числом z.

▷ Положим $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$. Тогда $(z-z_0)^n\overline{(z-z_0)}^m = \rho^{n+m}e^{i(n-m)\theta}$, откуда следует:

$$\int\limits_0^{2\pi}(z-z_0)^n\overline{(z-z_0)}^m d\theta = \rho^{n+m}\left[\frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = 0. \quad ◀$$

Так как на окружности C_ρ степенной ряд сходится равномерно, то на ней будет равномерно сходиться и ряд:

$$f(z)\overline{(z-z_0)}^m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\overline{(z-z_0)}^m.$$

Интегрируя его поэлементно и учитывая (21), получаем:

$$\int_0^{2\pi} f(z)\overline{(z-z_0)}^m d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} (z-z_0)^k \overline{(z-z_0)}^m d\theta = a_m \int_0^{2\pi} (z-z_0)^m \overline{(z-z_0)}^m d\theta = 2\pi\rho^{2m} a_m$$

и находим:

$$a_m = \frac{1}{2\pi\rho^{2m}} \int_0^{2\pi} f(z)\overline{(z-z_0)}^m d\theta \quad (m = 0,1,2,...). \tag{22}$$

Подставляя найденные коэффициенты в исходный ряд, записываем его в виде:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\rho^{2k}} \int_0^{2\pi} f(z)\overline{(z-z_0)}^k d\theta \cdot (z-z_0)^k$$

и замечаем, что он представляет собой разложение функции $f(z)$ в ряд по системе функций $\left((z-z_0)^k\right)$, ортогональной в смысле равенств (21) на каждой окружности с центром в точке z_0, лежащей в круге сходимости.

Теорема 3.10. *При выполнении условий леммы* 3.11 *справедливо*:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \rho^{2k}. \tag{23}$$

▷ Замечая, что $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z^m} = \bar{z}^m$, и применяя лемму 3.11, получаем цепочку равенств:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \cdot \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j (z-z_0)^j} \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \cdot \sum_{j=0}^{n} \bar{a}_j \overline{(z-z_0)}^j \right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k,j=0}^{n} a_k \bar{a}_j (z-z_0)^k \overline{(z-z_0)}^j \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k,j=0}^{n} a_k \bar{a}_j \int_0^{2\pi} (z-z_0)^k \overline{(z-z_0)}^j d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{a}_k \int_0^{2\pi} (z-z_0)^k \overline{(z-z_0)}^k d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \rho^{2k},$$

так как $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$, $(z-z_0)\overline{(z-z_0)} = |z-z_0|^2 = \rho^2$.

Итак, получено:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \rho^{2k}.$$

Поскольку последовательность $\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right\}$ на окружности C_ρ сходится равномерно, то и последовательность модулей $\left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right| \right\}$ будет равномерно сходящейся на этой окружности. Это вытекает из неравенства:

$$\left| \left| \sum_{k=0}^{n+p} a_k (z-z_0)^k \right| - \left| \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right| \right| \le \left| \sum_{k=0}^{n+p} a_k (z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right|.$$

Следовательно, возможен предельный переход под знаком интеграла, в результате которого получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+\rho e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k\right|^2 d\theta =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2\rho^{2k}.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\rho^{2k}$ сходится и его сумма есть интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+\rho e^{i\theta})\right|^2 d\theta,$$

то есть выполняется равенство (23). ◀

Равенство (23) аналогично равенству Парсеваля в теории рядов Фурье.

Будем** называть* (23) *также* ***равенством Парсеваля.

З а м е ч а н и е 3.2. Из (23) следует, что интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+\rho e^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

является неубывающей функцией ρ, а это означает, что всегда существует предел:

$$\lim_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+\rho e^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

(он может быть конечным или бесконечным).

З а м е ч а н и е 3.3. Из (22) при значении $z_0 = 0$ могут быть получены равенства:

$$a_m\rho^m = \frac{1}{2\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})\rho^m e^{-im\theta} d\theta \quad (m = 0,1,2,...). \tag{24}$$

Равенства (24) *называют* ***формулами Коши.***

Теорема 3.11 (теорема Рисса 2). *Если* $f(z)$ *– функция класса* H_δ $(\delta > 0)$*, то, каково бы ни было множество* E' *положительной меры на сегменте* $E = [0,2\pi]$ $(R = 1)$:

$$\lim_{\rho\to 1}\int_{E'}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|^\delta d\theta = \int_{E'}\left|f(e^{i\theta})\right|^\delta d\theta \tag{25}$$

и

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\right|^\delta d\theta = 0. \tag{26}$$

$\triangleright$ Пусть $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$ – функция класса H_2. Тогда при всех $\rho<1$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|g(\rho e^{i\theta})\right|^2 d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\alpha_k\right|^2\rho^{2k}.$$

Ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\alpha_k\right|^2$$

сходится и имеет некоторую конечную сумму $S_2(g)$.

Пусть $0<\lambda<1$. Тогда функция $g(z)-g(\lambda z)$ принадлежит классу H_2 и, следовательно, имеет место равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|g(\rho e^{i\theta})-g(\lambda\rho e^{i\theta})\right|^2 d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\alpha_k\right|^2\rho^{2k}(1-\lambda^k)^2.$$

Устремляя ρ к единице, в пределе, на основании неравенства Фату, получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|g(e^{i\theta})-g(\lambda e^{i\theta})\right|^2 d\theta\le\sum_{k=0}^{\infty}\left|\alpha_k\right|^2(1-\lambda^k)^2. \tag{27}$$

Сумма ряда, стоящего в правой части (27), стремится к нулю при стремлении $\lambda\to 1$. Поэтому и левая часть (27) стремится к нулю, откуда и следует справедливость соотношения (26) для $\delta=2$.

Мы рассматриваем только функции, для которых:

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta<\infty$$

(условие (11)). Так как справедливо неравенство

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta\le\ \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\theta=A(f)<\infty\ ,$$

то для функции $f(z)$ из класса H_δ $(\delta>0)$ (замечание 3.1) имеет место разложение:

$$f(z)=b(z)F(z), \tag{28}$$

где $b(z)$ – функция Бляшке, а функция $F(z)$ не имеет нулей в единичном круге. Используя разложение (28) и вводя обозначение $g(z)=\left(F(z)\right)^{\frac{\delta}{2}}$, можем функцию $f(z)$ класса H_δ представить в виде:

$$f(z)=b(z)\left(g(z)\right)^{\frac{2}{\delta}},$$

где $g(z)$ есть функция класса H_2.

Ради избавления от громоздкости введем сокращенные обозначения:

$$b(\rho e^{i\theta}) = b_\rho, \quad b(e^{i\theta}) = b, \quad g(\rho e^{i\theta}) = g_\rho, \quad g(e^{i\theta}) = g$$

и будем доказывать равенство (25).

Справедлива цепочка равенств:

$$\int_{E'} \left\{ \left| f(e^{i\theta}) \right|^\delta - \left| f(\rho e^{i\theta}) \right|^\delta \right\} d\theta = \int_{E'} \left\{ |b|^\delta |g|^2 - |b_\rho|^\delta |g_\rho|^2 \right\} d\theta =$$

$$= \int_{E'} \left\{ |b|^\delta - |b_\rho|^\delta \right\} |g|^2 d\theta + \int_{E'} \left\{ |g|^2 - |g_\rho|^2 \right\} |b_\rho|^\delta d\theta. \qquad (29)$$

Так как $\left| |b|^\delta - |b_\rho|^\delta \right| < 1$, то по теореме Лебега:

$$\lim_{\rho\to 1} \int_{E'} \left\{ |b|^\delta - |b_\rho|^\delta \right\} |g|^2 d\theta = \int_{E'} \lim_{\rho\to 1} \left\{ |b|^\delta - |b_\rho|^\delta \right\} |g|^2 d\theta = 0.$$

Для второго слагаемого из (29) получаем:

$$\left| \int_{E'} |b_\rho|^\delta \left\{ |g|^2 - |g_\rho|^2 \right\} d\theta \right| \le \int_{E'} \left| |g|^2 - |g_\rho|^2 \right| d\theta \le \int_{E'} \left| g^2 - g_\rho^2 \right| d\theta \le$$

$$\le \sqrt{\int_{E'} |g - g_\rho|^2 d\theta \cdot \int_{E'} |g + g_\rho|^2 d\theta} \le 2 \cdot \sqrt{2\pi \cdot S_2(g)} \cdot \sqrt{\int_0^{2\pi} |g - g_\rho|^2 d\theta}\ .$$

В силу (26) (равенство уже доказано для значения $\delta = 2$) получаем:

$$\lim_{\rho\to 1} \sqrt{\int_0^{2\pi} |g - g_\rho|^2 d\theta} = 0 \quad \text{и тогда} \quad \lim_{\rho\to 1} \left| \int_{E'} |b_\rho|^\delta \left\{ |g|^2 - |g_\rho|^2 \right\} d\theta \right| = 0.$$

Итак, равенство (25) доказано.

Следствие 3.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta > 0$, *что для любого множества* E'' *на отрезке* $[0, 2\pi]$ *с мерой меньшей, чем* η, *для всех достаточно больших* ρ *имеет место неравенство*:

$$\int_{E''} \left| f(e^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta}) \right|^\delta d\theta < \varepsilon. \qquad (30)$$

Действительно,

$$\int_{E''} \left| f(e^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta}) \right|^\delta d\theta \le 2^\delta \int_{E''} \left| f(e^{i\theta}) \right|^\delta d\theta + 2^\delta \int_{E''} \left| f(\rho e^{i\theta}) \right|^\delta d\theta.$$

В силу суммируемости $\left| f(e^{i\theta}) \right|^\delta$ можно выбрать η столь малым, чтобы

$$2^\delta \int_{E''} \left| f(e^{i\theta}) \right|^\delta d\theta < \frac{\varepsilon}{3}$$

Затем, в силу (25), можем выбрать ρ так, что:

$$\left| \int_{E''} \left\{ \left| f(e^{i\theta}) \right|^\delta - \left| f(\rho e^{i\theta}) \right|^\delta \right\} d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^\delta};$$

то есть
$$2^\delta \int_{E''} \left| f(\rho e^{i\theta}) \right|^\delta d\theta < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Неравенство (30) доказано.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное сколь угодно малое число и $\eta > 0$ – это то число η, о котором говорится в только что доказанном следствии 3.1 и для которого:

$$\int_{E''} \left| f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^{\delta} d\theta < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{как только} \quad mE'' < \eta.$$

По теореме Егорова на сегменте $[0,2\pi]$ найдем такое совершенное множество P, на котором $f\left(\rho e^{i\theta}\right)$ равномерно сходится к функции $f\left(e^{i\theta}\right)$ и $mP > 2\pi - \eta$. Значит, для всех достаточно больших ρ (ρ достаточно близких к единице) на множестве P будет $\left| f\left(\rho e^{i\theta}\right) - f\left(e^{i\theta}\right) \right|^{\delta} < \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$,

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^{\delta} d\theta = \int_P \left| f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^{\delta} d\theta + \int_{[0,2\pi]-P} \left| f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^{\delta} d\theta < \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot 2\pi +$$

$$+ \int_{[0,2\pi]-P} \left| f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^{\delta} d\theta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

так как $m([0,2\pi] - P) < \eta$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ из неравенства

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^{\delta} d\theta < \varepsilon$$

следует (26). ◀

§ 3. Теоремы Гарнака, Неванлинна, Фихтенгольца

1. Теорема Гарнака. Субгармонические функции

Для доказательства теоремы Гарнака нам потребуются формула (71), гл. II, § 6; теорема 2.65; замечание 2.10 и лемма 2.2.

Теорема 3.12 (теорема Гарнака). *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_1, x_2)$ *со слагаемыми, являющимися гармоническими неотрицательными в области* G *функциями, сходится в одной точке* $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$ *области* G, *то он равномерно сходится внутри всей области* G.

▷ Докажем равномерную сходимость ряда в круге $|z - z_0| < d(z_0)$, радиус $d(z_0)$ которого равен расстоянию от точки z_0 до границы области G. Отсюда будет вытекать его равномерная сходимость внутри всей области G.

Пусть r есть положительное число, удовлетворяющее условию $0 < r < d(z_0)$. Тогда для всех точек z замкнутого круга $|z - z_0| \le r$ и для ρ такого, что $r < \rho < d(z_0)$, имеем, в силу формулы Пуассона (гл. II, § 6, (71)) и теоремы 2.65,

$$u_n(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\rho,\alpha)\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha\,.$$

Так как $u_n(\rho,\alpha)$ и ядро Пуассона есть функции неотрицательные, то:

$$u_n(r,\theta) \le \max_{0\le\alpha\le 2\pi}\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\rho,\alpha)\,d\alpha\,.$$

Очевидно, что ядро Пуассона $\dfrac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha)}$ при фиксированных значениях r,ρ $(r<\rho)$ достигает максимума, когда $\theta - \alpha = 2k\pi$ и этот максимум равен $\dfrac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho} = \dfrac{\rho + r}{\rho - r}$.

Кроме того, $u(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)d\alpha$ (замечание 2.10). Поэтому из последнего неравенства получаем:

$$u_n(r,\theta) \le \frac{\rho + r}{\rho - r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\rho,\alpha)\,d\alpha = \frac{\rho + r}{\rho - r}u_n(x_1^0, x_2^0) \qquad (n = 1,2,\ldots)\,.$$

Так как по условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_1^0, x_2^0)$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(r,\theta)$ в круге $|z - z_0| \le r$ сходится равномерно, а в силу произвольности $r < d(z_0)$ он равномерно сходится внутри круга $|z - z_0| < d(z_0)$.

Итак, установлено: из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_1, x_2)$ в одной какой-либо точке области вытекает, при выполнении условий теоремы, его равномерная сходимость в круге, радиус которого равен расстоянию от этой точки до границы области. Пусть E – множество всех точек сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_1, x_2)$ в области G. Это множество, во-первых, не пусто $((x_1^0, x_2^0) \in E)$. Во-вторых, это множество открыто (если какая-либо точка $z = x_1 + ix_2 \in E$, то множеству E принадлежат и все точки круга с центром в точке z и радиуса, равного расстоянию от точки z до границы области G). В-третьих, множество E удовлетворяет и последнему условию леммы 2.2. Покажем, что это действительно так.

Пусть точка $\xi = (x_1', x_2')$ есть произвольная предельная точка множества E и $\xi \in G$. Поскольку множество G – область, то точка ξ – ее внутренняя точка. Отсюда следует: существует круг $K = \left\{(x_1, x_2) \,|\, \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2} < \delta\right\}$ такой, что точка $\xi \in K$, а круг $K \subset G$, $\delta > 0$ – радиус этого круга, точка $z^* = (x_1^*, x_2^*)$ – центр круга. В более краткой записи K: $\left|z - z^*\right| < \delta$ $(z = (x_1, x_2))$ и $\left|\xi - z^*\right| < \delta$.

Пусть C есть окружность, являющаяся границей круга K. Пусть, кроме того, $d_C(\xi)$ – расстояние от точки ξ до окружности C, $d(\xi)$ – расстояние от точки ξ до границы области G. Тогда $d_C(\xi) \le d(\xi)$. Положим $d_* = \frac{1}{2} \cdot d_C(\xi)$ и K_*: $|z - \xi| < d_*$. Так как ξ есть предельная точка множества E, а K_* – это окрестность точки ξ, то существует точка $\tilde{x} \in K_*$ такая, что $\tilde{x} \in E$.

Заметим, что расстояние между точками $\tilde{x}$ и ξ $\rho(\tilde{x}, \xi)$ удовлетворяет соотношениям $\rho(\tilde{x}, \xi) < d_* \le \frac{1}{2} \cdot d(\xi)$. Поскольку E – это множество всех точек сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_1, x_2)$ в области G и точка $\tilde{x}$ принадлежит E, то в точке $\tilde{x}$ этот ряд сходится. Тогда, в силу доказанного выше, наш ряд сходится в круге $|z - \tilde{x}| < d(\tilde{x})$, радиус $d(\tilde{x})$ которого равен расстоянию от точки $\tilde{x}$ до границы области G. Выше было замечено, что $|\xi - \tilde{x}| = \rho(\tilde{x}, \xi) < d_*$. Поэтому $d_C(\tilde{x}) > d_*$, где $d_C(\tilde{x})$ – расстояние от точки $\tilde{x}$ до окружности C. И значит, $|\xi - \tilde{x}| < d_*$ $< d_C(\tilde{x}) \le d(\tilde{x})$, то есть в точке ξ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_1, x_2)$ сходится. Отсюда следует, что $\xi \in E$. В силу леммы 2.2, $E = G$.

Итак, наш ряд сходится в любой точке $z \in G$ и, в силу доказанного выше, он сходится равномерно внутри круга $|\zeta - z| < d(z)$, где $d(z)$ – расстояние от точки z до границы области G. Последнее и означает (так как z – произвольная точка области G) равномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_1,x_2)$ внутри G, поскольку любое ограниченное замкнутое множество точек области G можно покрыть кругами вида $|\zeta - z| < d(z)$. ◀

Теорема Гарнака может быть сформулирована в терминах последовательности функций, а не их ряда. Тогда она формулируется так: *если последовательность функций* $\{v_n(r,\theta)\}$, *гармонических в области* G *и удовлетворяющих в этой области условию* $v_n(r,\theta) \le v_{n+1}(r,\theta)$, *сходится в некоторой точке области, то она равномерно сходится внутри области и, следовательно, ее предельная функция является также гармонической внутри области* G.

Эта теорема сводится к предыдущей, если положить $u_1(r,\theta) = v_1(r,\theta)$, $u_n(r,\theta) = v_n(r,\theta) - v_{n-1}(r,\theta)$ $(n = 2,3,...)$.

Действительная *функция* $h(x)$ $(x = (x_1,x_2))$ *называется* ***субгармонической*** *в области* G, *если она удовлетворяет условиям:*

1) *она определена и непрерывна во всех точках этой области, за исключением, быть может, конечного числа точек или точек некоторой последовательности* $\{x_n\}$ $(x = (x_1,x_2))$, *не имеющей предельных точек внутри* G, *причем, для каждой исключительной точки* x_n *выполнено соотношение:*

$$\lim_{x \to x_n} h(x) = -\infty;$$

учитывая последнее соотношение, полагаем $h(x_n) = -\infty$;

2) *для любой точки* $x \in G$ *и всех достаточно малых* ρ *справедливо:*

$$h(x) = h(x_1,x_2) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x_1 + \rho\cos\alpha, x_2 + \rho\sin\alpha)\,d\alpha. \qquad (31)$$

В силу этого определения, каждая гармоническая в некоторой области функция $u(x)$ является также и субгармонической. Для нее неравенство (31) переходит в соответствующее равенство.

Важный пример субгармонической функции, не являющейся, вообще говоря, функцией гармонической, дает модуль функции $f(z)$, аналитической в данной области. Для этого модуля в любой точке z области G $(z \in G)$ и для всех достаточно малых чисел ρ выполняется неравенство:

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z + \rho e^{i\alpha})\right| d\alpha \ .$$

Знак равенства, если $\rho > 0$, имеет место только в случае, когда $f(z) \equiv const$. Неравенство следует из принципа максимума модуля, а из неравенства, в свою очередь, следует, что $|f(z)|$ есть функция субгармоническая, но не гармоническая (если $f(z)$ не равна тождественно константе).

Другой важный пример субгармонической функции представляет функция $\ln|f(z)|$ ($f(z)$ не равна тождественно нулю). Эта функция является ***гармонической всюду, за исключением нулей*** функции $f(z)$, в которых она имеет логарифмические полюсы и обращается в $-\infty$. Если z не есть нуль функции $f(z)$, то для всех достаточно малых ρ справедливо равенство:

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(z+\rho e^{i\alpha})\right| d\alpha .$$

Если z есть нуль функции $f(z)$, то $\ln|f(z)| = -\infty$
и, значит:

$$\ln|f(z)| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(z+\rho e^{i\alpha})\right| d\alpha .$$

Лемма 3.12. *Если $h(z)$ – действительная функция, определенная в некоторой ограниченной области G, $M = \sup\limits_{z\in G} h(z)$ (M может быть как конечным числом, так и бесконечностью), то в замкнутой области $\overline{G}$ существует (хотя бы одна) точка, в любой окрестности которой точная верхняя грань функции $h(z)$ равна M.*

▷ Доказательство способом «от противного». Если лемма не верна, то для каждой точки $z_0 \in \overline{G}$ существует окрестность $U(z_0)$ такая, что $\sup\limits_{z\in U(z_0)} h(z) < M$. По лемме Гейне – Бореля, конечное число таких окрестностей покрывает область $\overline{G}$. Выбирая из конечного числа точных верхних граней, соответствующих указанным окрестностям, наибольшую, получим в качестве $\sup\limits_{z\in G} h(z)$ число, меньшее M. Это противоречит условию леммы. ◀

2. Свойства субгармонических функций

Лемма 3.13. *Если* $h(z)$ *есть функция, субгармоническая в ограниченной области* G*, и для каждой точки* ζ*, принадлежащей границе области* G*, выполняется соотношение*:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, h(z) \le 0,$$

то $h(z)\le 0$ *во всех точках области* G*, причем знак равенства для какой-нибудь внутренней точки возможен лишь в случае, когда* $h(z)\equiv 0$.

▷ Пусть $M = \sup\limits_{z\in G} h(z)$ и E есть множество точек замкнутой области $\overline{G}$, в любой окрестности которых точная верхняя грань функции $h(z)$ совпадает с числом M. В силу леммы 3.12 $E \ne \varnothing$.

Допустим, что ни одна из внутренних точек области $\overline{G}$ не принадлежит E, Тогда существует, по крайней мере одна, граничная точка $\zeta \in E$. Так как, по условию леммы, для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки ζ, в точках которой $h(z) < \varepsilon$, то точная верхняя грань функции $h(z)$ в этой окрестности не может превосходить ε. С другой стороны, она должна совпадать с M. Отсюда следует, что $M \le 0$, причем во внутренних точках области должно выполняться неравенство $h(z) < M$. Для случая, когда множество E не содержит внутренних точек области $\overline{G}$, лемма доказана.

Пусть теперь существуют внутренние точки области $\overline{G}$, принадлежащие E. Пусть E^0 – множество этих точек. Из того, что субгармоническая функция непрерывна (в обобщённом смысле) в области G, следует, что значение $h(z)$ во всех точках множества E^0 должно равняться M. Понятие непрерывности в обобщённом смысле содержится в определении субгармонической функции, условие 1.

Действительно, для точки $z_0 \in G$, в которой $h(z_0) < M$, существует окрестность, в которой выполняется неравенство $h(z) < M - \delta$ (δ – малое положительное число). Следовательно, точная верхняя грань функции $h(z)$ в такой окрестности не может равняться M. Отсюда, в частности, следует, что M, будучи одним из значений субгармонической функции, должно быть меньше $+\infty$. С другой стороны, должно быть $\sup h(z) = M > -\infty$, так как субгармоническая функция может принимать значение $-\infty$ только в некоторых точках области G. Итак, M есть число конечное.

Покажем, что E^0 является открытым множеством. Пусть $z_0 \in E^0$ и число $\rho_0 > 0$ таково, что для всех $\rho < \rho_0$ выполняется соотношение:

$$M = h(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\alpha})d\alpha \qquad (32)$$

(такое ρ_0 существует в силу определения субгармонической функции). Тогда в круге $|z - z_0| < \rho_0$ не может содержаться ни одной точки z_1, в которой $h(z_1) < M$, так как в противном случае в некоторой окрестности точки z_1 выполнялось бы неравенство $h(z) < M - \delta$ для некоторого положительного числа δ. Но тогда для значения $\rho = |z_1 - z_0|$ интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\alpha})d\alpha$$

был бы меньше, чем M, что противоречит неравенству (32). Итак, для каждой точки $z_0 \in E^0$ существует окрестность, в которой $h(z) = M$. Поэтому, указанная окрестность принадлежит E^0 и E^0 является открытым множеством. Так как во всех точках множества E^0 имеет место равенство $h(z) = M$, то, в силу непрерывности функции $h(z)$, и во всякой точке $z' \in G$, предельной для множества E^0, должно быть $h(z') = M$. Последнее означает, что каждая точка области G, предельная для множества E^0, принадлежит E^0. Тогда $E^0 = G$ (в силу леммы 2.2) и, значит, $h(z) \equiv M$. Но тогда для любой граничной точки ζ области $\overline{G}$ выполняется соотношение:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, h(z) = \lim_{z\to\zeta} h(z) = M,$$

откуда, в силу условия леммы, получаем $M \le 0$.

Итак, во всех случаях $\sup\limits_{z\in G} h(z) = M \le 0$, причем равенство $h(z_0) = 0$ в какой-либо точке области G означает, что $M \ge 0$ и, следовательно, $M = 0$ и тогда $h(z) \equiv 0$. ◀

Теорема 3.13 (обобщенный принцип максимума модуля). *Пусть* $h(z)$ *есть функция, субгармоническая в ограниченной области* G, $u(z)$ *есть функция, гармоническая в этой области. Если для каждой граничной точки* ζ *области* G, *за исключением, быть может, конечного числа точек* $\zeta_1,...,\zeta_m$ *выполняется соотношение*:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\big(h(z)-u(z)\big)\le 0,$$

причем для каждой точки ζ_j $(j=1,...,m)$:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta_j}}\big(h(z)-u(z)\big)<+\infty,$$

то всюду внутри G *выполняется неравенство*:

$$h(z)\le u(z),$$

в котором равенство для какой-либо внутренней точки области достигается только в том случае, когда:

$$h(z)\equiv u(z).$$

$\triangleright$ Введем вспомогательные функции:

$$v_j(z)=\ln\left|z-\zeta_j\right| \qquad (j=1,...,m).$$

Очевидно, $v_j(z)$ является гармонической при условии $z\ne\zeta_j$, в частности, она гармонична в области G. В точке $z=\zeta_j$ она обращается в $-\infty$. Если d – диаметр области G (то есть наибольшее расстояние между произвольной парой точек замкнутой области $\overline{G}$), то для каждой функции $v_j(z)$ выполняется неравенство:

$$v_j(z)\le\ln d \qquad (z\in\overline{G}).$$

Поэтому функции $v_j(z)-\ln d=u_j(z)$ принимают неположительные значения в точках замкнутой области $\overline{G}$, а в остальном обладают такими же свойствами, как и функции $v_j(z)$.

Вводя положительный параметр ε, образуем функцию:

$$w_\varepsilon(z)=h(z)-u(z)+\varepsilon\sum_{j=1}^{m}u_j(z).$$

Для каждой точки $z_0\in G$ и для всех окружностей, достаточно малого радиуса с центром в z_0, значение $h(z_0)$ не превосходит среднего значения функции $h(z)$, взятого по этой окружности. Значения же функций $u(z)$ и $u_j(z)$ совпадают с соответствующими средними значениями. Поэтому значение $w_\varepsilon(z_0)$ не превосходит среднего значения функции $w_\varepsilon(z)$ по любой окружности достаточно малого радиуса с центром в точке z_0. Следовательно, функция $w_\varepsilon(z)$ является субгармонической функцией в области G. Кроме того, в каждой граничной точке $\zeta \neq \zeta_j$ выполняется соотношение:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\ w_\varepsilon(z) = \overline{\lim_{z\to\zeta}}\left(h(z) - u(z) + \varepsilon\sum_{j=1}^{m} u_j(z)\right) \leq 0\ ,$$

а в точках $\zeta = \zeta_j$ – соотношение $\lim\limits_{z\to\zeta_j} w_\varepsilon(z) = -\infty$, так как функции $h(z) - u(z)$ и $u_k(z)$ $(k \neq j)$ ограничены сверху в окрестности точки ζ_j, а $u_j(z) \to -\infty$ при стремлении $z \to \zeta$. Отсюда следует, что к функции $w_\varepsilon(z)$ применима лемма 3.13 и, следовательно:

$$w_\varepsilon(z) \leq 0 \quad (z \in G)$$

или

$$h(z) \leq u(z) - \varepsilon\sum_{j=1}^{m} u_j(z)\,.$$

В пределе при стремлении $\varepsilon \to 0$ получаем $h(z) \leq u(z)$, то есть $u(z)$ является мажорантой для функции $h(z)$ в области G. Из вышесказанного следует:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}(h(z) - u(z)) \leq 0$$

для любой граничной точки ζ области $\overline{G}$ (включая и те точки ζ_j, которые были исключены в условии теоремы). Поэтому, если в некоторой внутренней точке $z_0 \in G$ выполняется равенство $h(z_0) - u(z_0) = 0$ то, в силу леммы 3.13, получаем, что субгармоническая функция $h(z) - u(z) \equiv 0$ в области G, то есть $h(z) \equiv u(z)$. ◀

Теорема 3.13 показывает, что ***функция*** $u(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы, является ***гармонической мажорантой*** $h(z)$ в области G.

Теорема 3.14. *Для того чтобы функция* $h(z)$, *субгармоническая в круге* $|z| < R$, *обладала гармонической мажорантой в этом круге, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*:

$$\lim_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\alpha})d\alpha < \infty\,.$$

$\triangleright$ Доказательство необходимости данного соотношения. Пусть $h(z)$ есть функция, субгармоническая в круге $|z|<R$, $u(z)$ – ее гармоническая мажоранта. Тогда для любого ρ $(0<\rho<R)$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\alpha})d\alpha \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\alpha})d\alpha = u(0).$$

Отсюда следует, что функция от переменной ρ:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\alpha})d\alpha,$$

является ограниченной на интервале $(0,R)$ и

$$\lim_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\rho e^{i\alpha})d\alpha<\infty.$$

Доказательство достаточности. Пусть соотношение, указанное в формулировке теоремы, выполнено. Рассмотрим строго возрастающую последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}$, сходящуюся к числу R. При этом выберем числа так, чтобы в точках окружностей $|z|=\rho_n$ функция $h(z)$ не обращалась в бесконечность (отрицательную). Тогда функция $u_n(z)$, принимающая на окружности $|z|=\rho_n$ те же самые значения, что и $h(z)$, будет гармонической мажорантой для функции $h(z)$ в круге $|z|<\rho_n$, причем ее значение $u_n(0)$ в центре круга будет удовлетворять соотношению:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\rho_n e^{i\alpha})d\alpha = u(0)<C<\infty\ ; \qquad (n=1,2,...).$$

Так как на окружности $|z|=\rho_n$ имеем неравенство:

$$u_n\left(\rho_n e^{i\alpha}\right)=h\left(\rho_n e^{i\alpha}\right)\le u_{n+1}\left(\rho_n e^{i\alpha}\right),$$

то в круге $|z|<\rho_n$ будет $u_n(z)\le u_{n+1}(z)$. Отсюда следует, что в любом круге $|z|<r<R$ функции $u_n(z)$ при достаточно большом n (таком, что $\rho_n\ge r$) составляют возрастающую последовательность гармонических функций, значения которых сходятся в центре круга. В силу теоремы Гарнака последовательность $\{u_n(z)\}$ сходится равномерно внутри круга $|z|<R$ к гармонической функции $u(z)$, удовлетворяющей неравенству $u(z)\ge h(z)$ и, значит, представляющей собой гармоническую мажоранту функции $h(z)$. ◀

3. Теорема Неванлинна и следствия из неё

Теорема 3.15 (теорема Неванлинна). *Класс* A *совпадает с классом всех аналитических в круге* $|z|<R$ *функций, допускающих представление в виде частного двух аналитических ограниченных по модулю функций:*

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \tag{33}$$

$\triangleright$ Не ограничивая общности, будем считать наш круг единичным $(R=1)$ и рассмотрим какую-либо функцию $f(z)\in A$. Пусть $\{\rho_n\}$ – строго возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к единице. Построим для каждого ρ_n функцию $u_n(z)$, непрерывную в замкнутом круге $|z|\le\rho_n$ и гармоническую внутри этого круга. При этом потребуем, чтобы она в точках окружности $|z|=\rho_n$ совпадала с функцией $\ln^+|f(z)|$. В силу теоремы 3.13 (обобщенный принцип максимума модуля), функция $u_n(z)$ будет гармонической мажорантой для функции $\ln^+|f(z)|$ в круге $|z|<\rho_n$. Кроме того, $u_n(z)$ не отрицательна в этом круге, так как она принимает неотрицательные значения на окружности $|z|=\rho_n$.

Убедимся в том, что $u_{n+1}(z)\ge u_n(z)$ во всех точках $|z|\le\rho_n$. Действительно, $u_{n+1}(z)$, являясь гармонической мажорантой для функции $\ln^+|f(z)|$ в круге $|z|<\rho_{n+1}$, превосходит значения функции $\ln^+|f(z)|=u_n(z)$ в точках окружности $|z|=\rho_n$ и, значит, является мажорантой для функции $u_n(z)$ в круге $|z|<\rho_n$. Для значений функций $u_n(z)$ в начале координат имеем:

$$u_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(\rho_n e^{i\alpha})d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(\rho_n e^{i\alpha}\right)\right|d\alpha .$$

Так как $f(z)\in A$, то последовательность $\{u_n(0)\}$ ограничена сверху. Но она является возрастающей и, значит, сходится. Тогда последовательность гармонических функций $\{u_n(z)\}$, по теореме Гарнака, равномерно сходится внутри каждого круга $|z|<\rho_m$ $(m=1,2,...)$, то есть равномерно сходится внутри круга $|z|<1$. Предельная функция $u(z)=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z)$ этой последовательности является гармонической неотрицательной в этом круге. Очевидно, что функция $u(z)$ в круге $|z|<1$ является мажорирующей для $\ln^+|f(z)|$, так как в случае $|z|<\rho_n$ имеем:

$$\ln^+|f(z)|\le u_n(z)\le u_{n+1}(z)\le u(z).$$

Образуем гармоническую функцию $v(z)$, сопряженную с функцией $u(z)$. Тогда $\exp\{-u(z)-iv(z)\}=f_2(z)$ – функция, аналитическая в круге $|z|<1$, не имеющая нулей и ограниченная по модулю: $|f_2(z)|\le 1$. Рассмотрим функцию $f(z)\cdot f_2(z)=f_1(z)$. Она также аналитическая в области $|z|<1$ и имеет в ней те же самые нули, что и функция $f(z)$. Находим оценку:

$$|f_1(z)|=|f(z)f_2(z)|=|f(z)|\exp\{-u(z)\}\le\exp\{\ln^+|f(z)|-u(z)\}\le 1.$$

Таким образом, функция $f_1(z)$ ограничена по модулю внутри круга $|z|<1$ и, значит, функция $f(z)\in A$ представима внутри этого круга в виде частного двух ограниченных функций:

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

причем знаменатель $f_2(z)$ не обращается в нуль внутри круга.

Докажем обратное утверждение: каждая функция, аналитическая в круге $|z|<1$, имеющая вид (33), где $f_1(z), f_2(z)$ – аналитические и ограниченные по модулю функции, принадлежит классу A.

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|d\alpha=A(f)<\infty. \qquad (34)$$

Выше записано условие (34) (условие из определения функций класса A). Его можно заменить следующим эквивалентным условием:

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\big|d\alpha=\tilde{A}(f)<\infty. \qquad (35)$$

Очевидно, что $A(f)\le\tilde{A}(f)$, то есть из (35) следует (34). С другой стороны, если выполнено (34), то $\tilde{A}(f)=\tilde{A}(F)$ $\quad (f(z)=b(z)F(z))$. Здесь $b(z)$ – функция Бляшке, а функция $F(z)$ не имеет нулей в единичном круге. Действительно, имеют место соотношения $\big|\ln|b(\rho e^{i\alpha})|\big|=-\ln|b(\rho e^{i\alpha})|$,

$\left\|\ln|f(\rho e^{i\alpha})| - |\ln|F(\rho e^{i\alpha})|\right\| \le -\ln|b(\rho e^{i\alpha})|$, то есть $\tilde{A}(f) = \tilde{A}(F)$. Но функция $\ln|F(z)|$ является гармонической в единичном круге и $|\ln a| = 2\ln^+ a - \ln a$. Поэтому:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\ln|F(\rho e^{i\alpha})|\right|d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\ln^+|F(\rho e^{i\alpha})|d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F(\rho e^{i\alpha})|d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\ln^+|F(\rho e^{i\alpha})|d\alpha - \ln|F(0)|.$$

Тогда $A(f) = \tilde{A}(F) = 2A(F) - \ln|F(0)| < \infty$, то есть из (34) следует (35).

Итак, условия (34) и (35) эквивалентны.

Так как $\left|\ln\frac{a}{b}\right| \le |\ln a| + |\ln b|$, то отношение двух функций класса A будет принадлежать классу A, если оно будет аналитической функцией в единичном круге. В частности, отношение двух ограниченных функций принадлежит классу A, если оно является аналитической функцией. ◀

Из теоремы Неванлинна, в силу теоремы 2.67 (теорема единственности для ограниченных функций) и теоремы 2.72 (теорема Фату о существовании угловых граничных значений), получаем следующие два утверждения.

Следствие 3.2. *Функция $f(z)$ класса A обладает* ***конечными угловыми граничными значениями*** *почти всюду на окружности $|z| = 1$.*

Следствие 3.3 (теорема единственности). *Если угловые граничные значения функции $f(z)$ класса A равны нулю на множестве положительной меры, то $f(z) \equiv 0$.*

Кроме этого, справедливы еще следующие утверждения.

Следствие 3.4. *Если $f(e^{i\theta})$ – угловое граничное значение функции $f(z)$ класса A, то функция $\ln|f(e^{i\theta})|$ суммируема,* так как, в силу неравенства Фату (лемма 1.8, следствие 1.10):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\ln|f(e^{i\theta})|\right|d\theta \le \tilde{A}(f).$$

Следствие 3.5. *Если* $f(z) \in H_\delta$ *и* $f(e^{i\theta})$ *есть ее угловое граничное значение, то функция* $\left|f(e^{i\theta})\right|^\delta$ *суммируема,* так как, в силу неравенства Фату:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(e^{i\theta})\right|^\delta d\theta \le H_\delta(f).$$

4. Об интегралах Коши и типа Коши

Множество точек *плоскости, являющееся непрерывным образом отрезка, называется* ***жордановой кривой.***

Жорданова кривая L может быть определена как множество точек $M(x,y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнениям $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где φ и ψ – непрерывные функции параметра t, $\alpha \le t \le \beta$.

Данное выше определение не исключает случая, когда разным значениям параметра t: t_1 и t_2 $(t_2 \ne t_1)$ соответствует одна и та же точка: $M_2(x_2,y_2)=M_1(x_1,y_1)$, где $x_k=\varphi(t_k)$, $y_k=\psi(t_k)$, $k=1,2$.

Говорят*, что кривая (жорданова)* L ***не содержит кратных точек,*** *если нет таких двух* ***различных*** *значений параметра* t: t_1 *и* t_2 $(t_2 \ne t_1)$, *принадлежащих сегменту* $[\alpha,\beta]$, *для которых справедливы оба равенства* $\varphi(t_2)=\varphi(t_1)$ *и* $\psi(t_2)=\psi(t_1)$.

Кривая L *называется* ***замкнутой,*** *если* $\varphi(\beta)=\varphi(\alpha)$ *и* $\psi(\beta)=\psi(\alpha)$.

Будем *называть дугу кривой (то есть ее часть)* ***аналитической,*** *если ее текущие координаты* x,y *являются функциями параметра* t, $x=x(t)$, $y=y(t)$, *в интервале* $\alpha<t<\beta$, *разложимыми в степенные ряды в окрестности всякой точки* t.

Назовем *аналитическую дугу* ***правильной,*** *если она не имеет кратных точек, причем* x' *и* y' *не обращаются в нуль одновременно.*

Жорданова *кривая называется* ***гладкой,*** *если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную.*

Она называется ***кусочно-гладкой,*** *если она состоит из конечного числа гладких дуг.*

Аналитически гладкая линия может быть представлена уравнением $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, где $z'(t)$ непрерывна и отлична от нуля, причем $z(t_1) \ne z(t_2)$, если $t_1 \ne t_2$, кроме, быть может, случая $t_1 = \alpha$, $t_2 = \beta$.

Пусть G есть односвязная область, ограниченная произвольной кусочно-гладкой спрямляемой кривой Γ, $f(z)$ – функция, аналитическая в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$, z – любая точка внутри Γ. Тогда справедлива формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Выражение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

где $f(z)$ есть функция, аналитическая в замкнутой области $\overline{G}$, границей которой служит контур Γ, называется ***интегралом Коши,*** *если выполняется равенство*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Выражение:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{x\psi'(\theta)d\theta}{x - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=1}\frac{\psi'(\theta)dx}{x - z},$$

где $x = e^{i\theta}$, *также называют* ***интегралом Коши,*** *если его предельные значения изнутри единичной окружности по всем некасательным путям совпадают с функцией $\psi'(\theta)$ почти всюду на окружности* [28₁].

Пусть L есть произвольная кусочно-гладкая линия, замкнутая или незамкнутая, $\varphi(z)$ – определенная вдоль L непрерывная функция.

Выражение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

называется ***интегралом типа Коши.***

Мы будем рассматривать только кривые, не содержащие кратных точек.

5. О представлении функций класса H_1 интегралом Коши и о принадлежности функции, представимой интегралом Пуассона, классу H_1

Пусть дан интеграл типа Коши:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\qquad (\zeta=e^{i\varphi},\, |z|<1).$$

Знаменатель подынтегральной дроби преобразуем следующим образом: $\zeta-z=e^{i\varphi}-z=e^{i\varphi}(1-e^{-i\varphi}z)$.

Тогда:

$$\frac{1}{1-e^{-i\varphi}z}=1+e^{-i\varphi}z+\ldots+e^{-ni\varphi}z^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ki\varphi}z^k .$$

Так как $d\zeta=ie^{i\varphi}d\varphi$,

то:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})d\varphi}{1-e^{-i\varphi}z}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(e^{i\varphi})\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ki\varphi}z^k\right)d\varphi \tag{36}$$

Лемма 3.14. *Пусть* $\{Q_n(\varphi)\}=\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}\left|f(e^{i\varphi})\right|\cdot\left|e^{-i\varphi}z\right|^k\right\}$ *– последовательность, в которой функция* $f(z)\in H_1$*. Тогда семейство функций* $\{C_n(\varphi)\}=\left\{\int\limits_0^{\varphi}Q_n(t)dt\right\}$ *обладает свойством равностепенной абсолютной непрерывности на сегменте* $[0,2\pi]$.

▷ Заметим, что

$$Q_n(\varphi)=\left|f(e^{i\varphi})\right|\left(1+\left|e^{-i\varphi}z\right|+\left|e^{-i\varphi}z\right|^2+\ldots+\left|e^{-i\varphi}z\right|^n\right)=\left|f(e^{i\varphi})\right|\cdot\frac{1-\left|e^{-in\varphi}\right|\cdot|z|^n}{1-\left|e^{-i\varphi}\right|\cdot|z|}\le$$

$$\le\left|f(e^{i\varphi})\right|\cdot\frac{1}{1-|z|} \tag{37}$$

и функция $p(\varphi)=\left|f(e^{i\varphi})\right|\cdot\dfrac{1}{1-|z|}$ суммируема на сегменте $E=[0,2\pi]$ при любом значении z, для которого $|z|<1$. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда, в силу теоремы 1.42, существует такое $\delta>0$, что для любого измеримого множества $E_0\subset E$ с мерой $mE_0<\delta$ будет $\left|\int\limits_{E_0}p(\varphi)d\varphi\right|<\varepsilon$ и, значит, в силу (37) и вида функции $p(\varphi)$,

$$\left|\int\limits_{E_0}Q_n(\varphi)d\varphi\right|\le\left|\int\limits_{E_0}p(\varphi)d\varphi\right|<\varepsilon,$$

что означает равностепенную абсолютную непрерывность семейства $\{C_n(\varphi)\}$. ◀

Рассмотрим последовательность:

$$\{S_n(\varphi)\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} f(e^{i\varphi}) \cdot \left(e^{-i\varphi} z\right)^k \right\} = \{u_n(\varphi) + i \cdot v_n(\varphi)\}.$$

Для неё:

$|S_n(\varphi)| \le \sum_{k=0}^{n} \left| f(e^{i\varphi}) \right| \cdot \left| e^{-i\varphi} z \right|^k = Q_n(\varphi)$ и, тем более, $|u_n(\varphi)| \le Q_n(\varphi)$, $|v_n(\varphi)| \le Q_n(\varphi)$.

Вводя в рассмотрение функции: $u_n^+ = \begin{cases} u_n, \varphi \in E_n^+, \\ 0, \varphi \in E_n^-, \end{cases}$ $\quad u_n^- = \begin{cases} 0, \varphi \in E_n^+, \\ -u_n, \varphi \in E_n^-, \end{cases}$

где $E_n^+ = E(u_n(\varphi) \ge 0)$, $E_n^- = E(u_n(\varphi) < 0)$, $E = [0, 2\pi]$, заметим, что: $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ и функции u_n^+ и u_n^- являются неотрицательными суммируемыми функциями. Аналогично получаем $|v_n| = v_n^+ + v_n^-$. Из вышесказанного и леммы 3.14 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3.15. *Семейство функций* $\{B_n^+(\varphi)\} = \left\{ \int_0^{\varphi} u_n^+(t) dt \right\}$, *а также аналогичные семейства, образованные с использованием функций* u_n^-, v_n^+, v_n^-, *обладают свойством равностепенной абсолютной непрерывными.*

Следствие 3.6. *Последовательности* $\{u_n^+(\varphi)\}$, $\{u_n^-(\varphi)\}$, $\{v_n^+(\varphi)\}$, $\{v_n^-(\varphi)\}$ *можно поэлементно интегрировать на сегменте* $[0, 2\pi]$ (теорема 1.61).

Из последнего следствия вытекает следующая лемма.

Лемма 3.16. *Последовательность*:

$$\{S_n(\varphi)\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} f(e^{i\varphi}) \cdot \left(e^{-i\varphi} z\right)^k \right\} = \{u_n(\varphi) + i \cdot v_n(\varphi)\}$$

можно поэлементно интегрировать на сегменте $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим интеграл типа Коши: $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ $(\zeta = e^{i\varphi}, |z| < 1)$.

Теорема 3.16. *Каждую функцию* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *класса* H_1 *можно представить в виде интеграла Коши.*

▷ Пусть функция $f(z)\in H_1$. Тогда $f(z)$ внутри единичного круга раскладывается в степенной ряд (теорема 2.31): $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$.

Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\quad(\zeta=e^{i\varphi},\quad |z|<1).$$

Выше этот интеграл был приведён к виду (36):

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})d\varphi}{1-e^{-i\varphi}z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\varphi})\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ki\varphi}z^k\right)d\varphi.$$

Отсюда, в силу леммы 3.16, получаем:

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi\right)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

С другой стороны, по формулам Коши (24):

$$a_k\rho^k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

В силу (26) $(\delta=1)$:

$$\lim_{\rho\to1}\left|a_k\rho^k-c_k\right|\le\lim_{\rho\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\varphi})-f(e^{i\varphi})\right|d\varphi=0,$$

т. е. $a_k=c_k$ и $g(z)\equiv f(z)$. Таким образом, доказано: если $f(z)\in H_1$, то $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$ (см. вид функции $g(z)$). ◀

Теорема 3.17. *Аналитическая функция, представимая внутри единичного круга при помощи интеграла Пуассона, принадлежит классу* H_1.

▷ Пусть функция $f(z)=f(\rho e^{i\varphi})$ представима в виде интеграла Пуассона, т. е. $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$, где:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\theta)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta,$$

$$v(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(\theta)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta,$$

функции $U(\theta)$, $V(\theta)$ непрерывны на отрезке $[0,2\pi]$. Покажем, что $f(z)\in H_1$. Имеем:

$$|U(\theta)|\le M_1,\quad |V(\theta)|\le M_2;$$

$$|u(\rho,\varphi)|\le\frac{M_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta;$$

$$|v(\rho,\varphi)|\le\frac{M_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta.$$

Отсюда:

$$\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|\le\sqrt{M_1^2+M_2^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta=$$

(вводя обозначение, равенство продолжаем следующим образом)

$$=[\sqrt{M_1^2+M_2^2}=M]=M\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta.$$

Справедлива следующая цепочка неравенства и равенств:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\le M\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\theta\right\}d\varphi=$$

$$=M\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}d\varphi\right\}d\theta=M\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=M.$$

И тогда:

$$\lim_{\rho\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi=M=H_1(f)<\infty;$$

т. е. $f(z)\in H_1$. ◀

Следствие 3.7. *Если аналитическая функция* $F(z)$ *внутри единичного круга представима при помощи одного из двух интегралов*: *интеграла Коши*:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=1}\frac{F(x)dx}{x-z}$$

или интеграла Пуассона:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\theta \quad (z=re^{i\varphi}),$$

то эта функция представима посредством и другого интеграла. Класс функций, представимых указанными интегралами, совпадает с классом H_1.

Действительно, высказанное утверждение следует из цепочки теорем: 3.16, 2.57, 3.17. Оно представляет собой неполную теорему Г.М. Фихтенгольца и доказано нами при условии непрерывности функции $F(z)$ в замкнутом круге, но является справедливым и без этого последнего требования (см. [28_1, гл. II, § 5]).

Теорема Г.М. Фихтенгольца формулируется так.

Теорема (Фихтенгольц). *Если аналитическая функция* $F(z)$ *внутри единичного круга представима при помощи одной из четырёх формул:*

1. $F(z)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{|x|=1}\frac{F(x)dx}{x-z}$ (интеграл Коши);

2. $F(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F\left(e^{i\theta}\right)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\theta$ (интеграл Пуассона);

3. $F(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\psi(\theta)$ (интеграл Пуассона-Стилтьеса);

4. $F(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{xd\psi(\theta)}{x-z}$ (интеграл Коши-Стилтьеса),

то эта функция представима посредством трёх остальных формул. Класс функций, представимых вышеуказанными формулами, совпадает с классом H_1.

§ 4. Теорема Банаха. Формула Коши для функций класса E_1

1. Теорема Банаха

Функция f, *определённая и непрерывная на открытом множестве* G (плоскости), *называется* ***непрерывно продолжаемой на его замыкание*** $\overline{G}$, *если существует такая непрерывная на* $\overline{G}$ *функция* F, *что* $F = f$ *на* G. ***Функция*** F *называется* ***непрерывным продолжением функции*** f.

Для простоты обозначений это продолжение F будет обозначаться старым символом f.

Несложно доказать следующую теорему (теорема не доказывается) [13_2, т. 2, гл.V, § 39, п. 39.3], [26_1, т. I, гл. 7, § 7.11].

Теорема 3.18. *Если функция* f *равномерно непрерывна на ограниченном открытом множестве* G, *то она непрерывно продолжаема на его замыкание* $\overline{G}$.

Пусть G – ограниченная односвязная область в плоскости z, граница Γ которой есть замкнутая, спрямляемая, гладкая, жорданова кривая. Пусть K: $|w|<1$ – единичный круг в плоскости w, ограниченный окружностью C: $|w|=1$ И пусть, кроме того, $w=\chi(z)$ – функция, конформно и взаимно однозначно отображающая область G на круг K, а $z=\sigma(w)$ – обратная ей функция.

При указанном отображении границы Γ и C преобразовываются друг на друга взаимно однозначно и непрерывно; функции $w=\chi(z)$ и $z=\sigma(w)$ равномерно непрерывны (каждая в своей области) (гл. II, § 4, п. 3, теорема о соответствии границ). Функция $z=\sigma(w)$ непрерывно продолжаема на замкнутый круг $|w|\le 1$ (теорема 3.18). Выполнив продолжение и оставив для продолженной функции старое обозначение, получаем функцию $z=\sigma(w)$, непрерывную на замкнутом круге $|w|\le 1$. Легко видеть, что функция $\sigma(w)$ будет функцией с ограниченным изменением на окружности $|w|=1$.

Действительно, из факта, что Γ есть спрямляемая кривая, следует: точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в кривую Γ, конечна. Длина ломаной с вершинами в точках $\sigma\left(e^{i\theta_1}\right)$, $\sigma\left(e^{i\theta_2}\right)$, … , $\sigma\left(e^{i\theta_{n+1}}\right)$ равна сумме длин её звеньев $\sum_{k=1}^{n}\left|\sigma\left(e^{i\theta_{k+1}}\right)-\sigma\left(e^{i\theta_k}\right)\right|$, поэтому $\sup\sum_{k=1}^{n}\left|\sigma\left(e^{i\theta_{k+1}}\right)-\sigma\left(e^{i\theta_k}\right)\right|<\infty$, где точная верхняя грань берётся по всевозможным разбиениям отрезка $[0,2\pi]$ (см. определение спрямляемой кривой в гл. 2, § 1, п. 4). Таким образом, продолженная функция $\sigma(w)$ является непрерывной в замкнутом круге $|w| \le 1$ и функцией с ограниченным изменением на окружности $|w| = 1$.

В главе 1, § 6, мы касались функций с ограниченным изменением, не затронув при этом непрерывных функций с указанным свойством. Но именно к таким функциям С. Банахом был найден весьма интересный подход, связанный с исследованием числа корней некоторого уравнения. Для его рассмотрения введём предварительно необходимые обозначения. Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная на $[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – разбиение сегмента $[a,b]$ (см. гл. 1, § 6). Пусть $\max\limits_{k=\overline{0,n-1}}(x_{k+1} - x_k) = \lambda$, $V = \sum\limits_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, $\Omega = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k$ (ω_k – колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$).

Колебанием функции *на множестве* E *называется* ***разность*** *между точными верхней и нижней гранями значений функции на этом множестве .* ***Колебание непрерывной функции*** $f(x)$ ***на сегменте*** $[\alpha,\beta]$ *равно* $\omega_{[\alpha,\beta]}(f) = \max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) - \min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$.

Теорема 3.19. *Если* $\lambda \to 0$*, то каждая из сумм* V *и* Ω *стремится к полному изменению* $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ *функции* $f(x)$.

Заметим: во-первых, что *конечности* изменения $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ не предполагается, во-вторых, существенно, что речь идёт о *непрерывной* функции.

$\triangleright$ С одной стороны, очевидно, что сумма V не убывает при добавлении новой точки разбиения. С другой стороны, если новая точка попадает в интервал (x_k, x_{k+1}), то увеличение суммы V за счёт появления этой точки не превосходит удвоенного колебания ω_k функции $f(x)$ в сегменте $[x_k, x_{k+1}]$.

Возьмём какое-либо число $A < \overset{b}{\underset{a}{V}} f$ и найдём сумму V^* , что $V^* > A$. Пусть эта сумма отвечает следующему разбиению: $a = x_0^* < x_1^* < ... < x_m^* = b$. Выберем столь малое $\delta > 0$, что как только $|x'' - x'| < \delta$, так сейчас же:

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{V^* - A}{4m},$$

и покажем, что для любого разбиения, у которого $\lambda < \delta$, будет:

$$V > A. \tag{38}$$

В самом деле, имея подобный способ деления, назовём его способ (I), составим новый способ (II), получающийся из (I) добавлением всех точек множества $\{x_k^*\}$. Если способу (II) соответствует сумма V_0, то:

$$V_0 \ge V^*. \tag{39}$$

С другой стороны, способ (II) получается из (I) путём m-кратного добавления по одной точке. Так как каждое добавление вызывает увеличение суммы V меньшее, чем на $\frac{V^*-A}{2m}$, то $V_0 - V < \frac{V^*-A}{2}$. Отсюда и из (39) следует, что:

$$V > V_0 - \frac{V^*-A}{2} \ge \frac{A+V^*}{2} > A.$$

Итак, при $\lambda < \delta$ выполнено (38), но поскольку всегда $V \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f$, то: $\lim\limits_{\lambda\to 0} V = \overset{b}{\underset{a}{V}} f$.

Обратимся к суммам Ω. С одной стороны, ясно, что

$$\Omega \ge V. \tag{40}$$

Но если найдём сумму Ω, отвечающую какому-нибудь разбиению, а затем добавим в качестве новых точек деления те точки, в которых функция $f(x)$ принимает значения:

$$m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x),$$

то сумма V', отвечающая получившемуся новому разбиению, не будет меньшей, чем Ω, откуда:

$$\Omega \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f. \tag{41}$$

Из (40) и (41) и следует, что $\lim\limits_{\lambda\to 0} \Omega = \overset{b}{\underset{a}{V}} f$. ◀

Приведём без доказательства (легко доказываемую) теорему, которая потребуется ниже.

Теорема 3.20 (Б. Леви). *Пусть на множестве* E *задана возрастающая последовательность измеримых неотрицательных функций* $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$. *Если* $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, *то*:

$$\int\limits_E F(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx.$$

Пусть $f(x)$ задана и непрерывна на сегменте $[a,b]$ и $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Введём функцию $N(y)$, заданную на сегменте $[m, M]$ следующим образом: $N(y)$ есть число корней уравнения $f(x)=y$. Если множество этих корней бесконечно, то $N(y)=+\infty$.

Функцию $N(y)$ *называют* ***индикатрисой Банаха.***

Теорема 3.21 (С. Банах). *Индикатриса Банаха измерима и*

$$\int_m^M N(y)dy = \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

$\triangleright$ Разобьём $[a,b]$ на 2^n равных частей и положим:

$$d_1 = \left[a, a+\frac{b-a}{2^n}\right], \quad d_k = \left(a+(k-1)\frac{b-a}{2^n}, a+k\frac{b-a}{2^n}\right] \quad (k=2,3,...,2^n).$$

Пусть функция $L_k(y)=1$ $(k=1,2,...,2^n)$, если уравнение:

$$f(x)=y \tag{42}$$

имеет в промежутке d_k хотя бы один корень, и $L_k(y)=0$, если в d_k нет ни одного корня этого уравнения. Если m_k и M_k есть, соответственно, точная нижняя и точная верхняя грани функции $f(x)$ в промежутке d_k, то $L_k(y)=1$ в интервале (m_k, M_k) и $L_k(y)=0$ вне сегмента $[m_k, M_k]$, так что эта функция может иметь не больше двух точек разрыва и, очевидно, измерима. Отметим ещё, что:

$$\int_m^M L_k(y)dy = M_k - m_k = \omega_k,$$

где ω_k есть колебание $f(x)$ на сегменте $\overline{d_k}$.

Теперь введём функцию $N_n(y) = L_1(y) + L_2(y) + ... + L_{2^n}(y)$, равную числу тех промежутков d_k, в которых содержится хоть по одному корню уравнения (42). Очевидно, функция $N_n(y)$ измерима. При этом

$$\int_m^M N_n(y)dy = \sum_{k=1}^{2^n} \omega_k, \quad \text{так что, в силу теоремы 3.19,} \quad \lim_{n\to\infty}\int_m^M N_n(y)dy = \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

Легко понять, что $N_1(y) \le N_2(y) \le N_3(y) \le ...$ и, стало быть, существует конечный или бесконечный предел $N^*(y) = \lim_{n\to\infty} N_n(y)$, который является измеримой функцией. Согласно теореме 3.20:

$$\int_m^M N^*(y)dy = \lim_{n\to\infty}\int_m^M N_n(y)dy = \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

Если мы покажем, что:

$$N^*(y) = N(y), \tag{43}$$

теорема будет доказана. Сразу ясно, что $N_n(y) \le N(y)$, откуда и

$$N^*(y) \le N(y). \tag{44}$$

Пусть теперь q есть натуральное число, не большее, чем $N(y)$. Тогда можно указать q различных корней $x_1 < x_2 < ... < x_q$ уравнения

(42). Если n настолько велико, что: $\frac{b-a}{2^n} < \min\,(x_{k+1} - x_k)$, то все q корней x_k попадут в разные промежутки d_k, так что $N_n(y) \geq q$, откуда и подавно:

$$N^*(y) \geq q\,. \tag{45}$$

Если $N(y) = +\infty$, то q можно брать сколь угодно большим, так что и $N^*(y) = +\infty$; если $N(y)$ конечно, то можно взять $q = N(y)$. Тогда (45) примет вид: $N^*(y) \geq N(y)$. Из последнего соотношения и из (44) следует (43). ◀

Следствие 3.8. *Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ имела ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы её индикатриса Банаха $N(y)$* была суммируема.

Следствие 3.9. *Если $f(x)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением, то множество значений, принимаемых ею бесконечно много раз, имеет* (*на оси ординат*) *меру нуль.*

Последнее следствие имеет место в силу того, что индикатриса Банаха, будучи суммируемой, почти всюду конечна.

2. О прообразе открытого множества. Теорема Банаха – Зарецкого

Теорема 3.22. *Существуют ограниченные неизмеримые множества* [25, гл. III, § 6].

Следствие 3.10. *Всякое множество положительной меры содержит неизмеримую часть.*

Из теоремы 1.11 (гл. 1, § 1) можно получить следующую теорему (теперь, говоря об ограниченных множествах, уже не предполагаем, что они принадлежат сегменту $[0,1]$).

Теорема 3.23. *Если E – ограниченное множество, содержащееся в некотором интервале Δ, то множества E и его дополнение $CE = \Delta - E$ одновременно измеримы или неизмеримы.*

Далее, в § 1 главы 1 рассматривались, как правило, множества попарно без общих точек. Ниже мы отказываемся от этого ограничения.

Теорема 3.24. *Если ограниченное множество E является суммой счётного множества измеримых множеств, то E измеримо.*

Теорема 3.25. *Пересечение счётного множества измеримых множеств измеримо.*

Из двух последних теорем докажем одну, например, 3.24.

▷ Пусть $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$. Введём множества $A_k \quad (k=1,2,...)$, полагая:

$$A_1=E_1,\quad A_2=E_2-E_1,\quad A_3=E_3-(E_1+E_2),\ \ldots\ .$$

Тогда $E=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ и при этом все множества A_k измеримы и попарно не пересекаются. Осталось применить следствие 1.3 (глава I, § 1). ◀

Если множество F *представимо в виде суммы счётного множества замкнутых множеств* $F=\sum_{k=1}^{\infty}F_k$, *то говорят:* F *есть* ***множество типа*** F_σ.

Из теорем 3.24 и 3.25 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.26. *Всякое ограниченное множество типа* F_σ *измеримо.*

Пусть на некотором множестве A задана функция $f(x)$. Эта функция всякому множеству $E\subset A$ соотносит множество $f(E)$, состоящее из всех точек $f(x) \quad (x\in E)$. Другими словами, $f(E)$ состоит из всех таких и только таких точек y, для которых в E найдётся корень x уравнения $f(x)=y$.

Множество $f(E)$ *называется* ***образом множества*** E, *а множество* E *называется* ***прообразом множества*** $f(E)$. *Операция перехода от* E к $f(E)$ *называется* ***отображением*** E ***на*** $f(E)$.

Теорема 3.27. *Если* $E_1\subset E_2$, *то* $f(E_1)\subset f(E_2)$; *если* $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$, *то* $f(E)=\sum_{k=1}^{\infty}f(E_k)$.

Утверждения теоремы очевидны.

З а м е ч а н и е 3.4. Если отображающая функция устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между множествами A и $f(A)$, то существует и обратная функция $x=g(y)$, заданная на множестве $f(A)$ и имеющая значения, лежащие во множестве A. При взаимно однозначном отображении, помимо равенства $f(E)=\sum_{k=1}^{\infty}f(E_k)$, имеет место и равенство $f\left(\prod_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}f(E_k)$; в частности, если множества E_1 и E_2 не пересекаются, то не пересекаются и их образы $f(E_1)$ и $f(E_2)$. Если отображение задаётся непрерывной и строго возрастающей на сегменте $A=[a,b]$ функцией $f(x)$, то: $f(A)=[f(a),f(b)]$.

В нижеследующих теоремах 3.28, 3.30, 3.31 $f(x)$ означает непрерывную функцию, заданную на сегменте $[a,b]$. В теореме 3.29 $g(y)$ означает непрерывную функцию, заданную на образе сегмента $[a,b]$

($g(y)$ – функция, обратная к $f(x)$ в случае, когда функция $f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между сегментом $[a,b]$ и его образом $f([a,b])$).

Теорема 3.28. *Образ $f(F)$ замкнутого множества F есть замкнутое множество.*

$\triangleright$ Пусть y_0 есть предельная точка множества $f(F)$. Тогда $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ $(y_n \in f(F))$. Соотнесём каждой точке y_n такую точку $x_n \in F$, что $f(x_n) = y_n$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из неё выделяется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$, причём, в силу замкнутости F, $x_0 \in F$ и, стало быть, $f(x_0) \in f(F)$.

С другой стороны, из непрерывности $f(x)$ следует, что:

$$\lim_{n\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0).$$

Поэтому $y_0 = f(x_0)$ и $y_0 \in f(F)$. Таким образом, множество $f(F)$ содержит все свои предельные точки. ◀

Из сопоставления этой теоремы с теоремой 3.27 вытекает следствие.

Следствие 3.11. *Если F есть множество типа F_σ, то и его образ $f(F)$ есть множество типа F_σ.*

Ниже, вплоть до теоремы 3.29 включительно, предполагается, что рассматриваемые множества X, G лежат на плоскости.

Точка *x называется* ***точкой прикосновения множества*** *X, если любая окрестность этой точки содержит, по крайней мере, одну точку множества X.* ***Совокупность*** *всех точек прикосновения множества X называется* ***замыканием множества*** *X и обозначается $\overline{X}$.* ***Множество*** *X называется* ***замкнутым****, если $\overline{X} = X$, т. е. если оно содержит все свои точки прикосновения.*

Точка *x называется* ***граничной точкой множества*** *X, если в любой окрестности этой точки существуют точки, как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему.* ***Совокупность*** *всех граничных точек множества X называется* ***его границей*** *и обозначается ∂X.*

Очевидно, что $\partial X \subset \overline{X}$. При этом каждая точка прикосновения множества X является либо его граничной точкой, либо его внутренней точкой, поэтому $\overline{X} = X + \partial X = X \cup \partial X$. Если G – открытое множество, то $G \cap \partial G = \emptyset$ (или $G \cdot \partial G = \emptyset$), т.е. G и ∂G не пересекаются .

Множество *P с заданным на нём отношением $\le$, удовлетворяющим условиям (для любых $x, y, z \in P$): либо $x \le y$, либо $y \le x$; если $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$; если $x \le y$ и $y \le z$, то $x \le z$, называется* ***линейно упорядоченным множеством.***

Разбиение *линейно упорядоченного множества* P *на два такие непустые множества* A *и* B*, в сумме дающие* P*, что для каждого элемента* $a \in A$ *и каждого элемента* $b \in B$ *выполняется неравенство* $a < b$*, называется* ***сечением множества*** P ($a < b \Leftrightarrow a \le b$ и $a \ne b$). *При этом множество* A *называется* ***нижним****, а множество* B *–* ***верхним классами*** *сечения.*

Сечение *множества* P *называют* ***сечением Дедекинда****, если оно обладает свойством: либо в нижнем классе имеется наибольший элемент, но в верхнем классе нет наименьшего; либо в верхнем классе имеется наименьший элемент, но в нижнем классе нет наибольшего.* ***Линейно упорядоченное множество*** *называют* ***непрерывным****, если все его сечения есть* ***сечения Дедекинда.***

Пусть $X = [A, B]$, $Y = [a, b\}$ – два отрезка числовой прямой; функции $f: X \to Y$ и $g = f^{-1}: Y \to X$ – две взаимно однозначные функции, непрерывные на своих множествах определения (функция $f = f(x)$ – на множестве X, обратная ей функция $g = g(y)$ – на множестве Y). Пусть, кроме того, $E \subset X$, $e \subset Y$, $f(E) = e$, $g(e) = E$, E – открытое множество, f – строго возрастающая функция и множества X, Y непрерывны.

Теорема 3.29. *При выполнении перечисленных выше условий прообраз* e (*при отображении* g) *открытого множества* $E = g(e)$ *есть открытое множество.*

$\triangleright$ Обозначим $\alpha_E = \inf E$, $\beta_E = \sup E$, $\alpha_e = f(\alpha_E)$, $\beta_e = f(\beta_E)$. Тогда $E \subset [\alpha_E, \beta_E]$, $e \subset [\alpha_e, \beta_e]$. Если $y_0 \in e$ есть произвольная точка множества e и $g(y_0) = x_0$, то $x_0 \in E$ (теорема 3.27). Так как E – множество открытое, то $x_0 \ne \alpha_E$ и $x_0 \ne \beta_E$. Но тогда $x_0 - \alpha_E > 0$ и $\beta_E - x_0 > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \min\{x_0 - \alpha_E,\ \beta_E - x_0\}$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$ $(\varepsilon > 0)$. Кроме того, поскольку рассматриваемые отображения взаимно однозначные и $f(\alpha_E) = \alpha_e$, $f(\beta_E) = \beta_e$, то $f(x_0) \ne \alpha_e$, $f(x_0) \ne \beta_e$. Последнее означает, что $y_0 \ne \alpha_e$, $y_0 \ne \beta_e$.

Поскольку $g(y)$ есть функция непрерывная, то для выбранного $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом y: $|y - y_0| < \delta$ будет $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. При этом интервал $(g(y_0) - \varepsilon, g(y_0) + \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset E$ (см. выбор ε_1). В силу теоремы 3.27, интервал $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset e$ (множества X, Y непрерывны). Последнее включение и означает, что множество e открыто, т. к. y_0 – произвольная точка, принадлежащая e. $\blacktriangleleft$

Если непрерывная *на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *обладает свойством: для любого множества* $E \subset [a, b]$ *с мерой* $mE = 0$ *образ этого множества* $f(E)$ *также имеет меру нуль, то говорим, что* ***функция*** $f(x)$ ***на*** $[a, b]$ ***обладает*** N ***-свойством Лузина.***

Теорема 3.30. *Для того чтобы образ* $f(E)$ *любого измеримого множества* E *представлял собой измеримое множество, необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *обладала* N*-свойством Лузина.*

$\triangleright$ Пусть $f(x)$ обладает N-свойством и E есть измеримое множество, лежащее на $[a,b]$. Тогда $E = A + e$, где A есть множество типа F_σ, а $me = 0$.

Чтобы это доказать, достаточно всякому номеру n соотнести замкнутое множество $F_n \subset E$ с мерой $mF_n > mE - \frac{1}{n}$ и положить: $A = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$. Тогда получаем: $f(E) = f(A) + f(e)$ и, следовательно, множество $f(E)$ измеримо.

Теперь допустим, что функция $f(x)$ N-свойством не обладает. Тогда найдётся лежащее на $[a,b]$ множество e_0, мера которого равна нулю, но внешняя мера его образа положительна $m^* f(e_0) > 0$. В таком случае из множества $f(e_0)$ можно выделить неизмеримую часть B (теорема 3.22). Если само $f(e_0)$ неизмеримо, то полагаем $B = f(e_0)$. Соотнеся каждому $y \in B$ такое $x \in e_0$, что $f(x) = y$, мы получим прообраз A множества B, причём $A \subset e_0$. Ясно, что множество A измеримо, т. к. $m^* A \le me_0 = 0$. В то же время множество $f(A) = B$ неизмеримо, т. е. функция $f(x)$ отображает измеримое множество во множество неизмеримое. ◀

Теорема 3.31 (Банаха – Зарецкого). *Если* $f(x)$ *есть непрерывная функция с ограниченным изменением, обладающая* N*-свойством Лузина, то эта функция абсолютно непрерывна.*

$\triangleright$ Допустим, что $f(x)$ не абсолютно непрерывна. Тогда найдётся такое число $\varepsilon_0 > 0$, что ни при каком $\delta > 0$ неравенство $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ (при попарно не налегающих интервалах (a_k, b_k)) не обеспечивает неравенства $\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) < \varepsilon_0$.

Возьмём сходящийся положительный ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i$ и для каждого δ_i найдём систему попарно не налегающих интервалов $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$, где $k = 1,2,\ldots,n_i$, таких, что:

$$\sum_{k=1}^{n_i}\left(b_k^{(i)} - a_k^{(i)}\right) < \delta_i, \qquad \sum_{k=1}^{n_i}\left(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}\right) \ge \varepsilon_0,$$

где $M_k^{(i)}$ и $m_k^{(i)}$ есть наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в $\left[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right]$.

Положим $E_i = \sum_{k=1}^{n_i} \left(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right)$, $A = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} E_i$. Тогда $mA = 0$, откуда следует:

$$mf(A) = 0 \tag{46}$$

Введём в рассмотрение функцию $L_k^{(i)}(y)$, равную 1 или 0, смотря по тому, есть или нет хоть один корень уравнения

$$f(x) = y \tag{47}$$

в интервале $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$. Эта функция равна единице при y, содержащемся в интервале $(m_k^{(i)}, M_k^{(i)})$, и равна нулю при y, лежащем вне сегмента $[m_k^{(i)}, M_k^{(i)}]$, и потому:

$$\int_m^M L_k^{(i)}(y)dy = M_k^{(i)} - m_k^{(i)}, \tag{48}$$

где $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$.

Пусть $N_i(y) = \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(i)}(y)$. Ясно, что $N_i(y)$ есть число тех интервалов $(a_k^{(i)}, b_k^{(i)})$, в которых есть хоть один корень уравнения (47). Поэтому:

$$N_i(y) \le N(y), \tag{49}$$

где $N(y)$ есть индикатриса Банаха функции $f(x)$. В силу (48):

$$\int_m^M N_i(y)dy \ge \varepsilon_0. \tag{50}$$

Для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что почти для всех y из отрезка $[m, M]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} N_i(y) = 0, \tag{51}$$

т. к. индикатриса Банаха суммируема и из (49) и (51) будет следовать, что:

$$\lim_{i\to\infty} \int_m^M N_i(y)dy = 0,$$

а это противоречит (50).

Обозначим символом B множество точек y, в которых (51) не выполняется, а символом C – множество тех y, в которых $N(y) = +\infty$. Поскольку $N(y)$ есть суммируемая функция, $mC = 0$, то для доказательства теоремы достаточно установить, что:

$$B - C \subset f(A). \tag{52}$$

Пусть $y_0 \in B - C$. Тогда найдётся такая последовательность $\{i_r\}$, что $N_{i_r}(y_0) \ge 1$ $(r = 1,2,...)$. Это значит: существует при каждом r такая точка x_{i_r}, что $f(x_{i_r}) = y_0$, $x_{i_r} \in E_{i_r}$. Ввиду того, что $N(y_0) < +\infty$, среди точек x_{i_r} может быть лишь конечное число различных. Поэтому одна из них, пусть это будет x_0, встречается в последовательности $\{x_{i_r}\}$ бесконечно много раз.

Таким образом, найдена точка x_0, которая принадлежит бесконечному множеству множеств E_i, и в которой $f(x_0) = y_0$. Но тогда $x_0 \in A$ и отсюда следует $y_0 \in f(A)$. Этим доказано включение (52), а с ним и теорема. ◀

3. О принадлежности функции классу H_1

Множество**, не являющееся непрерывным, назовём **разрывным.

Например, множество $X = [a,b] - (c_1, c_2)$, где $a < c_1 < c_2 < b$, будет разрывным. Однако оно содержит в себе интервалы, например, интервал (a, c_1).

***Замкнутое множество** называем **всюду разрывным**, если оно **не содержит в себе никакого интервала. Канторовым множеством** называют подмножество точек отрезка* $[0,1]$ *числовой оси, состоящее из всех чисел вида* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{3^k}$, *где ε_k равно* 0 *или* 2 (обозначим канторово множество P_0).

Понятие «мощность множества»** есть обобщение на произвольные множества понятия «**число элементов».** Это новое понятие определяется, как то **общее**, что есть во всех множествах, эквивалентных* (*количественно*) *данному множеству. **Наименьшая** бесконечная мощность – это мощность множества натуральных чисел* (*её называют **счётной мощностью).

Было выяснено, что мощность множества действительных чисел больше, чем счётная мощность.

Мощность** множества всех действительных чисел называют **мощностью континуума.

Пусть дано соответствие между двумя множествами M и M_0 такое, что каждой точке множества M соответствует лишь одна точка множества M_0 и каждая точка M_0 поставлена в соответствие хоть одной точке M. Обозначим ξ_0 точку множества M_0, соответствующую точке $\xi \in M$, и U_0 – произвольную окрестность точки ξ_0.

***Будем говорить**, что описанное выше соответствие **непрерывно в точке** $\xi \in M$, если выполнено следующее условие: существует такая окрестность U точки ξ, что всякой точке x множества M, лежащей в U, соответствует точка x_0 множества M_0, лежащая в U_0. **Если данное соответствие** непрерывно в каждой точке множества M, то оно называется **непрерывным на** M. В этом случае говорят также, что множество M_0 является **непрерывным образом множества** M.*

Если *данное соответствие* ***взаимно однозначно и непрерывно*** *в каждой точке* $\xi \in M$ *и одновременно в каждой точке* $\xi_0 \in M_0$, *то оно называется* ***взаимно непрерывным*** *или* ***топологическим соответствием. Два множества,*** *между которыми возможно установить топологическое соответствие, называются* ***гомеоморфными.*** *Взаимно однозначное соответствие между двумя топологическими пространствами, при котором оба взаимно обратных отображения, определяемые этим соответствием, непрерывны, называется* ***гомеоморфизмом.***

Определение топологического пространства будет дано ниже. Замкнутые всюду разрывные множества были досконально изучены (см. [2, гл. IV, § 4]). Там же аккуратно доказаны все пять утверждений, которые формулируются ниже:

1) *множество* P_0 *есть совершенное всюду разрывное множество, имеющее мощность континуума;*

2) *всякое замкнутое множество* F *или само всюду разрывно, или есть сумма всюду разрывного замкнутого множества* Φ *и открытого множества* G, *не имеющего общих точек с множеством* Φ (G *есть множество всех внутренних точек множества* F, $F - G = \Phi$);

3) *всякое замкнутое множество либо конечно, либо счётно, либо имеет мощность континуума;*

4) *все совершенные всюду разрывные непустые множества являются гомеоморфными канторову совершенному множеству* P_0

5) *канторово совершенное множество* P_0 *имеет меру нуль.*

Теорема 3.32. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3.29, *между множествами* X *и* Y *установлено топологическое соответствие и* f *– функция, устанавливающая это соответствие. Тогда функция* $g = f^{-1}$ *обладает* N*-свойством Лузина.*

$\triangleright$ Пусть $me = 0$. Докажем: $mE = 0$. Для этого заметим, что соответствие между отрезками $[A,B]$ и $[a,b]$ является гомеоморфизмом. Поэтому множество E не может быть неизмеримым, т. к. в этом случае должно быть $m^*E > 0$. Но внешняя мера m^*E множества E, по определению, есть $\inf mG_E$, где точная нижняя грань берётся по мерам всех открытых множеств G_E, содержащих E (и содержащихся в отрезке $[A,B]$) (глава 1, § 1). Пусть G_E – произвольное открытое множество, содержащее E. Если $m^*E > 0$, то $mG_E \geq m^*E > 0$ (т. к. $E \subset G_E$). Нужно показать, что при выполнении условий теоремы последнее неравенство не может иметь места. Подробное проведение рассуждений оказывается слишком долгим. Приведём план рассуждений, после чего их проведение, хотя и долгое, становится несложным.

Множество $f(E)=e\subset f(G_E)=G_e$ (теорема 3.27), причём G_e – множество открытое (теорема 3.29). Всякое ограниченное открытое множество есть сумма конечного или счётного числа попарно непересекающихся интервалов (глава 1, § 1, после теоремы 1.4). Таким образом, $G_e=\sum(a_k,b_k)$ и, в силу указанного в теореме топологического соответствия, $G_E=\sum(A_k,B_k)$, где интервал (A_k,B_k) соответствует интервалу (a_k,b_k).

При фиксированном k рассматриваем отрезок $[a_k,b_k]$ (и параллельно – отрезок $[A_k,B_k]$) . Вводим обозначения:

$a_k^{(0)}=a_k$, $b_k^{(0)}=b_k$; $a_k^{(1)}=\dfrac{a_k^{(0)}+b_k^{(0)}}{2}$, $b_k^{(1)}=\dfrac{a_k^{(1)}+b_k^{(0)}}{2}$; $a_k^{(2)}=\dfrac{a_k^{(1)}+b_k^{(1)}}{2}$, $b_k^{(2)}=\dfrac{a_k^{(2)}+b_k^{(1)}}{2}$ …

(и аналогичные обозначения для точек из отрезка $[A_k,B_k]$). Отрезки $[a_k^{(n)},b_k^{(n)}]$ (и отрезки $[A_k^{(n)},B_k^{(n)}]$) $(n=0,1,2,...)$ образуют последовательность вложенных стягивающихся отрезков, имеющую единственную точку, принадлежащую всем отрезкам. Обозначим эту точку a_k^* (и A_k^*).

Рассматриваем последовательно отрезки $[A_k^{(0)},B_k^{(0)}]$, $[A_k^{(1)},B_k^{(1)}]$, $[A_k^{(2)},B_k^{(2)}]$ и т. д., следя за внешней мерой подмножеств, которые оказываются выброшенными при каждом шаге из множества E. На первом шаге при переходе от рассмотрения $[A_k^{(0)},B_k^{(0)}]$ к рассмотрению $[A_k^{(1)},B_k^{(1)}]$ из множества E выбрасываются подмножества $[A_k^{(0)},A_k^{(1)})\cdot E$ и $(B_k^{(1)},B_k^{(0)}]\cdot E$ Ни одно из этих подмножеств не содержит в себе никакого интервала (т. е. является, по определению, всюду разрывным множеством). Действительно, если бы некоторый интервал (α,β) содержался, например, в $[A_k^{(0)},A_k^{(1)})\cdot E$, то его образ $f(\alpha,\beta)\subset[a_k^{(0)},a_k^{(1)})\cdot e$ (замечание 3.4). Но поскольку $g\big(f(\alpha,\beta)\big)=(\alpha,\beta)$, а прообраз открытого множества открыт, то $f(\alpha,\beta)$ было бы открытым множеством и тогда было бы $mf(\alpha,\beta)>0$, что невозможно. Отсюда следует, что на первом шаге, выброшенным из множества E, оказывается подмножество с внешней мерой, равной нулю. Обозначим это подмножество E_1.

На последующих шагах (втором, третьем и т. д.) из E также выбрасываются подмножества внешней меры нуль. Обозначим их $E_2,E_3,...$. Очевидно, что $\sum m^*E_k$ есть сходящийся ряд. В силу теоремы 1.13, $m^*\big(\sum E_k\big)\le\sum m^*E_k=0$.

Выше мы зафиксировали k и рассмотрели отрезок $[A_k,B_k]$). Позволим теперь номеру k принимать значения $1,2,3,...$ (этих значений не более, чем счётное число). Для каждого из этих значений повторим прежние рассуждения и придём к следующей ситуации: из множества E выброшено подмножество меры нуль, во множестве G_E ($E \subset G_E$) осталось не более, чем счётное число точек (это точки A_1^*, A_2^*, ...). Мы получили: $m\{A_k^*\} = 0$. Отсюда следует, что мера множества тех точек из множества E, которые могли быть не выброшены, также равна нулю. Последнее означает, что $m^*E = 0$, т. е. множество $E = g(e)$ не может быть неизмеримым. В случае измеримого множества E такими же рассуждениями показывается, что $mE = 0$ (с заменой слов «внешняя мера» словом «мера»). ◀

Следствие 3.12. *При выполнении условий теоремы* 3.32*, в силу теоремы* 3.31 (Банаха – Зарецкого)*, функция* $g(y)$ *является абсолютно непрерывной функцией. В силу утверждений, доказанных выше* (*начиная со следствия* 3.8)*, функция* $\sigma(w)$*, рассмотренная в п.*1*, является абсолютно непрерывной на окружности* $|w| = 1$.

Теорема 3.33 (теорема Рисса). *Пусть функция* $F(z)$ *регулярна в круге* $|z| < 1$. *Для того чтобы функция* $F'(z)$ *принадлежала классу* H_1, *необходимо и достаточно, чтобы первообразная* $F(z)$ *этой функции была непрерывной в замкнутом круге* $|z| \le 1$ *и абсолютно непрерывной на окружности* $|z| = 1$ (теорема доказана Риссом в [57]) .

▷ Пусть $F(z)$ есть непрерывная в круге $|z| \le 1$ функция, причём $F(e^{i\theta})$ абсолютно непрерывна. Покажем, что $F'(z)$ принадлежит H_1.

Имеем:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x|=1} \frac{F(x)dx}{(x-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x|=1} \frac{F'(x)dx}{x-z}.$$

Отсюда видно, что $F'(z)$ принадлежит классу H_1, т.к. она представима интегралом Коши.

Обратно, пусть $F'(z)$ есть функция класса H_1. Тогда $F'(z) - F'(0)$ тоже есть функция класса H_1, т. е. она представима интегралом Коши или, что то же самое, интегралом Коши – Стилтьеса

$$F'(z) - F'(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x d\psi(\theta)}{x-z} = \frac{z}{2\pi} \int\limits_{|x|=1} \frac{\psi(\theta)dx}{(x-z)^2},$$

где $\psi(\theta)$ абсолютно непрерывна. Далее получаем:

$$\frac{F'(z) - F'(0)}{zi} = \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x|=1} \frac{\psi(\theta)dx}{x-z} \right)'.$$

Отсюда следует: $F'(z) = iz\varphi'(z) + F'(0)$, где:
где

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=1}\frac{\psi(\theta)dx}{x-z}$$

есть непрерывная в $|z| \le 1$ и абсолютно непрерывная на окружности $|z| = 1$ функция, т. к. она представима интегралом Коши, а следовательно, интегралом Пуассона от абсолютно непрерывной функции $\psi(\theta)$.

Таким образом:

$$F(z) = iz\varphi(z) - i\int\limits_0^z \varphi(z)dz + F'(0)z\,,$$

откуда следует, что функция $F(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \le 1$ и абсолютно непрерывна на окружности $|z| = 1$. ◀

Следствие (из теоремы Рисса). Функция $\sigma(w)$ регулярна в круге $|w| < 1$, непрерывна в круге $|w| \le 1$ и абсолютно непрерывна на окружности $|w| = 1$. Следовательно, функция $\sigma'(w)$ принадлежит классу H_1 (см. п.1 и следствие 3.12).

Теорема 3.34 (теорема Коши). *Для любой функции* $f(z) \in H_1$ *имеет место равенство*:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(e^{it})de^{it} = 0\,.$$

▷ Для односвязной области G имеет место теорема Коши (теорема 2.6) $\int\limits_L f(z)dz = 0$, где $f(z)$ – аналитическая в области G функция; L – замкнутая спрямляемая кривая, целиком лежащая в G. Пусть область G есть единичный круг $|z| < 1$, функция $f(z) \in H_1$ и $0 < r < \rho < 1$. В силу последнего равенства:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})d(re^{it}) = \int\limits_0^{2\pi} f(\rho e^{it})d(\rho e^{it}) \quad \text{или} \quad r\int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(re^{it})dt = \rho\int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(\rho e^{it})dt\,.$$

Отсюда получаем:

$$r\int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(re^{it})dt - \int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(e^{it})dt = \rho\int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(\rho e^{it})dt - \int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(e^{it})dt \pm \rho\int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(e^{it})dt =$$

$$= \rho\int\limits_0^{2\pi} e^{it}\left(f(\rho e^{it}) - f(e^{it})\right)dt + (\rho - 1)\int\limits_0^{2\pi} e^{it} f(e^{it})dt$$

(в силу следствия 3.5 из теоремы Неванлинна, функция $\left|f(e^{it})\right|$ суммируема).

Рассматривая самую левую и самую правую части вышестоящей цепочки равенств, получаем неравенство:

$$\left| r\int_0^{2\pi} e^{it} f(re^{it})dt - \int_0^{2\pi} e^{it} f(e^{it})dt \right| \le \rho\int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) - f(e^{it}) \right| dt + |\rho - 1| \cdot \int_0^{2\pi} \left| f(e^{it}) \right| dt .$$

Переходя к пределу при стремлении $\rho \to 1$, в правой части неравенства получаем нуль (первое слагаемое правой части даёт нуль в силу теоремы Рисса 2 (теорема 3.11)). Т. к. $r\int_0^{2\pi} e^{it} f(re^{it})dt = 0$, то $\int_0^{2\pi} f(e^{it})de^{it} = 0$. ◀

4. Классы E_p

Доказывая теорему 2.9 (гл. 2, § 2, п.1) и рассматривая интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$, мы предполагали известным определение понятия интеграла в комплексной области по спрямляемой кривой, т. е. интеграла вида $I = \int_\Gamma f(z)dz$ [28₂, гл. IV, § 1]. Пусть Γ – спрямляемая кривая Γ: $z = z(t)$, $a \le t \le b$; $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ – разбиение отрезка $[a,b]$, $z_k = z(t_k)$ и точки $z_0, z_1, ..., z_n$ расположены последовательно в положительном направлении линии Γ. Определим интеграл вида: $I = \int_\Gamma f(z)|dz|$.

Пределом *интегральных сумм вида*:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|z_k - z_{k-1}|$$

является интеграл*, который будем обозначать* $I = \int_\Gamma f(z)|dz|$.

Функцию, которую мы назвали *регулярной,* называют ещё и ***голоморфной функцией*** (см., например, [28₂, гл. V, § 2]). При этом часто *аналитическими в области* D *функциями* называют как *голоморфные,* так и *мероморфные* в этой области функции (определение мероморфной функции было дано в гл. II, § 3, п.3). Поэтому, когда надо уточнить, какие же аналитические функции рассматриваются, *голоморфные функции* называют ***регулярными аналитическими,*** или просто ***регулярными*** (что соответствует нашему определению регулярной функции). Всюду ниже рассматриваем только регулярные аналитические функции, которые кратко называем *аналитическими* (*или регулярными*). Напомним: если область G является односвязной и выпуклой, то функция, аналитическая в ней, будет в ней и регулярной (гл. 2, § 3, п. 2, теорема 2.31). Результаты, касающиеся уравнений Навье – Стокса, будут доказываться в указанной только что области.

Смирнова классом *$E_p(G)$ называют совокупность функций $f(z)$*, ***голоморфных в односвязной области*** *G* ***с жордановой спрямляемой границей*** *Γ и таких, что для каждой из этих функций существует последовательность замкнутых жордановых спрямляемых кривых $\Gamma_n(f)\subset G$, $n=1,2,\ldots$, со свойствами*: 1) $\Gamma_n(f)\underset{n\to\infty}{\to}\Gamma$ *в том смысле, что если $G_n(f)$ – ограниченная область с границей $\Gamma_n(f)$, то $G_1(f)\subset G_2(f)\subset\ldots\subset G_n(f)\subset\ldots$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}G_k(f)=G$;*

$$2)\ \sup_n\left\{\int\limits_{\Gamma_n(f)}|f(z)|^p|dz|\right\}\le C\ (p>0,\ C\ \textit{не зависит от}\ n). \qquad (53)$$

Данное определение было предложено М.В. Келдышем и М.А. Лаврентьевым (см. [28_1, гл. III, § 6]). Оно эквивалентно определению В.И. Смирнова, в котором вместо кривых $\Gamma_n(f)$ фигурируют кривые $\gamma(r)$, являющиеся образами соответствующих окружностей $|w|=r<1$ при некотором однолистном конформном отображении $z=\varphi(w)$ круга $|w|<1$ на область G, а супремум $(\sup)$ берётся по $r\in(0,1)$ (см. [8, гл. X, §5]).

Классы $E_p(G)$ связаны с классами H_p следующим соотношением: $f\in E_p(G)$ тогда и только тогда, когда:

$$f(\varphi(w))\cdot(\varphi'(w))^{1/p}\in H_p$$

(см. § 2, классы H_δ).

Определение класса $E_p(G)=E_p$ И.И. Привалов даёт в следующей формулировке ([28_1, гл. III, § 6]). Пусть односвязная область G ограничена жордановой спрямляемой кривой Γ.

Функция *$f(z)$, аналитическая в области G*, ***принадлежит классу*** *E_p $(p>0)$, если* ***существует последовательность*** *жордановых спрямляемых кривых Γ_n*, ***сходящихся к кривой*** *Γ $(\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma_n=\Gamma)$, и таких, что*:

$$\int\limits_{\Gamma_n}|f(z)|^p|dz|\le C \qquad (53^*)$$

(C не зависит от n).

Функции класса E_p обладают рядом свойств, которые потребуются в дальнейшем. Можно показать, что из условия (53^*) следуют два утверждения: первое:

$$\int_{C_r} |f(z)|^p |dz| \le C,$$

где C_r – образ окружности $|w| = r$ при конформном отображении круга $|w| < 1$ на область G $(0 < r < 1)$, и второе – функция $f(z)$ имеет почти всюду на кривой Γ угловые граничные значения $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$ (см. [28_1, гл. III, § 6]).

Поскольку из $\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| \le C$ следует $\int_{C_r} |f(z)|^p |dz| \le C$ (доказано И.И. Приваловым), а обратное следование очевидно, то оба определения класса E_p эквивалентны, о чём и было сказано выше. По поводу связи классов E_p и H_p: $f(z) \in E_p(G)$ тогда и только тогда, когда

$$f(\varphi(w)) \cdot (\varphi'(w))^{1/p} \in H_p,$$

о чём тоже сказано выше, смотри [28_1, гл. III, § 6] и [8, гл. X, § 5]. При значении $p = 1$ это утверждение звучит так: функция $f(z)$ тогда и только тогда принадлежит классу E_1, когда: $f(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w) \in H_1$.

5. Класс E_1

Пусть G есть ограниченная односвязная область плоскости z, её граница Γ – замкнутая спрямляемая жорданова кривая, $w = \chi(z)$ – функция, конформно отображающая область G на круг K: $|w| < 1$, $z = \sigma(w)$ – обратная ей функция и выполняются условия теоремы 2.43, гл. 2, § 3, п. 5. Тогда функции $w = \chi(z)$, $z = \sigma(w)$ и их производные, являются однолистными в соответствующих областях. Но из однолистности функции $\sigma'(w)$ в круге $|w| < 1$ следует её однолистность в каждой точке этого круга (замечание после теоремы 2.42). Из этого, в свою очередь, следует: $\sigma'(w) \ne 0$ в каждой точке $w \in K$ (теорема 2.42).

При доказательстве того, что если $\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| \le C$, то $\int_{C_r} |f(z)|^p |dz| \le C$, было показано: $f(\sigma(w))\sqrt[p]{\sigma'(w)} \in H_p$ [28_1, гл. III, §6, §7]; в случае $p = 1$: $f(\sigma(w))\sigma'(w) \in H_1$. Следовательно, эта функция имеет почти всюду на окружности $|w| = 1$ угловые граничные значения – предел по любому некасательному к этой окружности пути, которые мы обозначим $F(e^{i\alpha})$ (§ 3, п. 3, следствие 3.2). Но функция $\sigma'(w) \in H_1$ (это следует из теоремы 3.33, п. 3) и, значит, она также имеет почти всюду на указанной окружности угловые граничные значения $\sigma'(e^{i\alpha})$.

При условии, что $\sigma'(w)$ является функцией, ограниченной в круге K: $|w|<1$, значения $\sigma'(e^{i\alpha})$ почти всюду на окружности $|w|=1$ (точнее, почти всюду на множестве тех точек окружности, в которых эти значения существуют), отличны от нуля. Действительно, допустим, что на множестве точек E нашей окружности, где $mE>0$, значения $\sigma'(e^{i\alpha})$ равны нулю. Тогда, в силу теоремы 2.67, $\sigma'(w)\equiv 0$ в круге K. Значит, в силу теоремы 1.57 (которая переносится на двумерный случай; см. [25, гл. XII, § 2]), функция $\sigma(w)$ в круге K постоянна, что противоречит неравенству $\sigma'(w)\neq 0$, справедливому в каждой точке $w\in K$.

Из этого следует, что функция $f(\sigma(w))$ имеет почти всюду на окружности $|w|=1$ (в точках, в которых $\sigma'(e^{i\alpha})$ существует и $\sigma'(e^{i\alpha})\neq 0$) угловые граничные значения $f(\sigma(e^{i\alpha}))=\dfrac{F(e^{i\alpha})}{\sigma'(e^{i\alpha})}$ – предел по любому некасательному к единичной окружности пути. Из этого же следует, что функция $f(z)$ имеет почти всюду на границе Γ угловые граничные значения $f(\zeta)$ – предел по любому некасательному к Γ пути . Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.35 (Смирнов). *Для того чтобы функция $f(z)$, регулярная в области G, имела почти всюду на Γ определённые предельные значения по некасательным путям, и чтобы для неё в области G имела место формула Коши*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(x)dx}{x-z},$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(z)\in E_1$ (см. [8, гл. X, § 5]) .

Мы докажем одно из утверждений теоремы 3.35 (теорема 3.36) , причём при более жёстком требовании, предъявляемом к функции $f(z)$ (функция класса E_1 нас интересует лишь в случае, когда её действительная часть является решением задачи Дирихле; см. определение задачи Дирихле в гл. II, § 6, п. 3).

Теорема 3.36. *Если функция $f(z)$, регулярная в области G, принадлежа классу E_1, является непрерывной в области $\overline{G}$, то почти всюду на границе Γ она имеет определённые предельные значения по некасательным путям и для функции $f(z)$ в области G имеет место формула Коши*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(x)dx}{x-z}.$$

▷ Пусть функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и $f(z) \in E_1$. Тогда функция $f(z)$ почти всюду на границе Γ имеет определённые предельные значения по некасательным путям, суммируемые на кривой Γ. Это утверждение следует из того, что функция $f(z) \in E_1$ $\Leftrightarrow$ $f(\sigma(w)) \cdot \sigma'(w) \in H_1$. Но производная $\sigma' \in H_1$, функция $\sigma(w)$ непрерывна в замкнутом круге $\overline{K}$ (см. п.1) и функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{G}$. Очевидно, что тогда $f(\sigma(w))$ непрерывна в круге $\overline{K}$, откуда и следует $f(\sigma(w)) \cdot \sigma'(w) \in H_1$.

Теперь рассмотрим интеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma(e^{i\alpha}))\sigma'(e^{i\alpha})de^{i\alpha}}{\sigma(e^{i\alpha}) - \sigma(w)}. \qquad (54)$$

Положим:

$$\frac{1}{\sigma(t) - \sigma(w)} = \frac{1}{\sigma'(t)(t-w)} + R(t,w) \quad (e^{i\alpha} = t).$$

Тогда (54) примет вид:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma(e^{i\alpha}))de^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - w} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\sigma(e^{i\alpha}))\sigma'(e^{i\alpha})R(e^{i\alpha}, w)de^{i\alpha} = I_1 + I_2.$$

Для первого слагаемого получаем

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma(e^{i\alpha}))de^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(\sigma(t))dt}{t-w} = f(\sigma(w)),$$

$e^{i\alpha} = t$ (формула Коши).

Для функции $R(t,w)$ находим выражение:

$$R(t,w) = \frac{\sigma'(t)(t-w) - (\sigma(t) - \sigma(w))}{\sigma'(t)(t-w)(\sigma(t) - \sigma(w))},$$

и второе слагаемое приобретает вид:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(\sigma(t))(\sigma'(t)(t-w) - (\sigma(t) - \sigma(w)))dt}{(t-w)(\sigma(t) - \sigma(w))}.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле принадлежит H_1; следовательно, по теореме Коши, этот интеграл равен нулю (теорема 3.34) . В результате имеем:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma(e^{i\alpha}))\sigma'(e^{i\alpha})de^{i\alpha}}{\sigma(e^{i\alpha}) - \sigma(w)} = f(\sigma(w)).$$

Переходя теперь на плоскость z, получаем формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(x)dx}{x-z}. \qquad ◀$$

6. О функциях, непрерывных в замкнутой области

Пусть S – кусочно-гладкая, замкнутая или незамкнутая кривая Жордана, $f(\zeta) = u(\xi,\eta) + iv(\xi,\eta)$ – заданная на кривой S непрерывная функция переменной $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда:

$$f(\zeta)d\zeta = (u + iv)(d\xi + id\eta) = ud\xi - vd\eta + i(ud\eta + vd\xi)$$

и криволинейные интегралы:

$$\int_S ud\xi - vd\eta, \quad \int_S ud\eta + vd\xi \tag{55}$$

существуют.

Комплексным интегралом $\int_S f(\zeta)d\zeta$ *от функции* $f(\zeta)$ *по кривой* S *называется комплексное выражение*:

$$\int_S f(\zeta)d\zeta = \int_S ud\xi - vd\eta + i\int_S ud\eta + vd\xi .$$

Если S представляет собой совокупность попарно не имеющих общих точек замкнутых кривых $S_0, S_1, ..., S_m$, составляющих границу $(m+1)$-связной ограниченной области D, причём $S_1, ..., S_m$ лежат внутри области D_0 с границей S_0 и движение по ним происходит в направлении движения часовой стрелки (кривые $S_1, ..., S_m$ ориентированы по часовой стрелке), то:

$$\int_S f(\zeta)d\zeta = \int_{S_0} f(\zeta)d\zeta - \sum_{k=1}^{m} \int_{S_k} f(\zeta)d\zeta \tag{56}$$

(по поводу знака перед суммой в (56) см. [4_2, гл. 6, § 6.6, равенство (8)]).

Теорема 3.37 (теорема Коши). *Если функция* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *аналитична в ограниченной односвязной области* D *с кусочно-гладким контуром* S, S *– граница области* D, *функции* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в* $\overline{D} = D + S$, *то*:

$$\int_S f(\zeta)d\zeta = 0 . \tag{57}$$

$\triangleright$ Преобразуем криволинейные интегралы (55) по формуле Грина (см. [10_2, гл. 11, § 11.2]):

$$\int_S f(\zeta)d\zeta = \int_S ud\xi - vd\eta + i\int_S ud\eta + vd\xi = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta .$$

Каждый из полученных двойных интегралов, в силу условий Коши – Римана, равен нулю и, значит, имеет место (57). ◀

З а м е ч а н и е 3.5. Теорема Коши (теорема 3.37) остаётся справедливой и при менее жёстких требованиях к границе области и подынтегральной функции. В частности, (57) верно и в тех случаях, когда от аналитической в области D функции $f(z)$ потребовать, чтобы она была лишь непрерывной в области $\bar{D}$ [28_2, гл. IV, § 2, п. 8].

Покажем, что:

$$\int_L \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i, \tag{58}$$

где L есть окружность с центром в точке z, ориентированная против часовой стрелки. Для этого уравнение нашей окружности запишем в виде $\zeta = z + \rho \cdot e^{it}$ $(0 \le t < 2\pi)$, где ρ – её радиус, и тогда получим:

$$\int_L \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cdot i \cdot e^{it}}{\rho \cdot e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \cdot i .$$

Теорема 3.38. *Пусть* D *– конечная область, ограниченная кусочно-гладким контуром* S*, а* $f(z)$ *– аналитическая в* D *функция, непрерывная в* $\bar{D}$*. Тогда справедлива следующая интегральная формула Коши*:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \qquad (z \in D). \tag{59}$$

▷ Удаляя из области замкнутый круг $|\zeta - z| \le \varepsilon$, имеющий центр в точке z и лежащий в D, учитывая то, что функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ в оставшейся части D_ε области D является функцией аналитической по переменной ζ и непрерывной вплоть до границы, в силу (57) и (56), получаем:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} f(z) \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Переходя к пределу при стремлении $\varepsilon \to 0$, учитывая, что:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

в силу (58), получаем (59). ◀

Очевидно, что формула (59) остаётся справедливой и тогда, когда область D представляет собой $(m+1)$-связную ограниченную область, граница s которой состоит из замкнутых попарно не имеющих общих точек кусочно-гладких кривых $s_0, s_1, ..., s_m$ (см. перед формулой (56)). В силу (56) можем написать:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2i\pi}\int_{S_k}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\ , \quad z \in D. \qquad (60)$$

Если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и аналитична в D всюду, кроме изолированных особых точек $z_k \in D$, $k = \overline{1,m}$, и граница s конечной области D является кусочно-гладкой замкнутой кривой Жордана, то, в силу (60), имеем:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S} f(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{|z-z_k|=\delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m}\underset{z=z_k}{res}\, f(z). \qquad (61)$$

7. Формула Шварца

Пусть требуется определить аналитическую в круге K: $|z|<1$ функцию $f(z)$, если известно, что её действительная часть $u(x,y)$ непрерывна при $|z| \le 1$ и на окружности $|\zeta| = 1$ принимает изнутри заданные непрерывные значения $\varphi(\zeta)$:

$$u^+(\zeta) = \varphi(\zeta), \quad u^+(\zeta) = \lim_{z\to\zeta, z\in K} u(z), \ |\zeta| = 1, \ z = x + iy.$$

На окружности $|\zeta| = R$, $R < 1$ имеем $f(\zeta) + \overline{f(\zeta)} = 2u(\zeta)$. Умножая обе части этого равенства на $\dfrac{1}{2i\pi(\zeta - z)}$, $|z| < R$, и интегрируя по окружности $|\zeta| = R$, в силу интегральной формулы Коши (59), получаем:

$$f(z) + \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{\overline{f(\zeta)}d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{i\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| < R. \qquad (62)$$

Применяя тейлоровское разложение $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в круге $|z|<1$ при условии $|z| = R$, в записи $\bar{\zeta} = \mathrm{R}e^{-i\varphi} = \dfrac{R^2}{\zeta}$ получаем:

$$\overline{f(\zeta)} = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{a}_k\bar{\zeta}^k = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{a}_k\frac{R^{2k}}{\zeta^k}.$$

И тогда второе слагаемое в левой части (62) примет вид:

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{a}_k R^{2k}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta^k(\zeta-z)}, \quad |z|<R.$$

Для вычисления интеграла $\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{d\zeta}{\zeta^k(\zeta-z)}$ применяется формула (61), а вычеты вычисляют по известной формуле вычисления вычетов в полюсах (см., например, [10_3, гл. 17, § 17.7]). После выполнения указанных действий (более подробно см. [3_2, гл. II, § 3, п. 7]) формула (62) принимает вид:

$$f(z)=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\bar{a}_0,$$

где $\bar{a}_0=\bar{f}(0)=u(0,0)-iv(0,0)$. Из последнего равенства в пределе при стремлении $R\to 1$ с учётом условия $u^+(\zeta)=\varphi(\zeta)$, $|\zeta|=1$ находим:

$$f(z)=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-u(0,0)+iv(0,0).$$

Когда $z=0$,

$$f(0)+\bar{f}(0)=2u(0,0)=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta}, \text{ т. е. } u(0,0)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta}.$$

Из последних равенств получаем формулу Шварца:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\varphi(\zeta)d\vartheta+iC, \tag{63}$$

$$\zeta=e^{i\vartheta}, \quad C=v(0,0),$$

которая восстанавливает с точностью до произвольного мнимого слагаемого аналитическую в круге $|z|<1$ функцию $f(z)$ по краевым значениям на окружности $|\zeta|=1$ её действительной части.

§ 5. Топологические пространства. Соответствие границ

1. О функциях, непрерывных на компакте

Если *$f: X\to R$, $E\subset X\subset R^2$ и в точке $x^0\in E$ $(x^0=(x_1^0,x_2^0))$ выполняется равенство*:

$$\lim_{x\to x^0,x\in E} f(x)=f\left(x^0\right),$$

то функция f называет ***непрерывной*** *в точке x^0* ***по множеству*** *E*.

Множество $A \subset R^2$ *называется* ***компактом,*** *если из любой последовательности его точек можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству* A .

Теорема 3.39. *Из любой ограниченной последовательности точек пространства* R^n (в частности R^2) *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Эта теорема, как и в одномерном случае, называется *теоремой Больцано – Вейерштрасса* (см. гл. 1, § 3, п. 5). Как и в главе 1, доказывать эту теорему не будем.

Теорема 3.40. *Для того чтобы множество* $X \subset R^n$ *было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

$\triangleright$ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть X – компакт. Если бы множество X было неограниченным, то для любого натурального числа (номера) m нашлась бы такая точка $x^m \in X$, что $\rho(O, x^m) > m$, $m = 1,2, \ \dots$. Здесь ρ – расстояние между двумя точками, $O = (0,0,\dots,0)$ (оно определено в гл. 2, § 3, п. 1 для случая $n = 2$. В пространстве R^n это расстояние определяется аналогично). Очевидно, $\lim\limits_{m \to \infty} x^m = \infty$. Поэтому любая подпоследовательность последовательности $\{x^m\}$ также стремится к ∞ и, следовательно, из $\{x^m\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит условию: X есть компакт. Итак, X – ограниченное множество.

Если бы множество X не было замкнутым, то у него существовала бы точка прикосновения x, которая в нём бы не содержалась: $x \notin X$. Для этой точки нашлась бы такая последовательность $\{x^m\} \subset X$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^m = x$. Поэтому любая её подпоследовательность также имела бы своим пределом точку $x \notin X$, т. е. множество X снова не было бы компактом. Значит, X – замкнутое множество.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть X – ограниченное замкнутое множество, $\{x^m\}$ – какая-либо последовательность его точек: $x^m \in X$, $m = 1,2, \ \dots$. Эта последовательность, в силу ограниченности множества X, также ограничена. Следовательно, по теореме 3.39, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$. Обозначим её предел буквой x: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{m_k} = x$. Очевидно, что точка x – точка прикосновения множества X, т. к. $x^{m_k} \in X$. А так как X – замкнутое множество, то $x \in X$, т. е. X есть компакт. ◀

Теорема 3.41. *Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена на нём и достигает своих точных верхней и нижней граней* (другими словами, *функция, непрерывная на компакте, принимает на нём наибольшее и наименьшее значения*).

▷ Пусть функция f непрерывна на компакте $A \subset R^n$ и пусть $M = \sup\limits_A f$. Выберем последовательность таких чисел a_m, что:

$$\lim_{m\to\infty} a_m = M, \quad a_m < M, \quad m = 1,2,\ldots .$$

Согласно определению точной верхней грани, для каждого $m = 1,2,\ldots$ существует такая точка $x^m \in A$, что $f(x^m) > a_m$. Так как A – компакт, то из последовательности $\{x^m\}$ можно выделить сходящуюся под-последовательность $\{x^{m_k}\}$, предел x^0 которой принадлежит компакту A:

$$\lim_{k\to\infty} x^{m_k} = x^0 \in A.$$

Для любого $k = 1,2,\ldots$ справедливо неравенство $a_{m_k} < f(x^{m_k}) \le M$. Переходя в нём к пределу при стремлении $k \to \infty$, получим $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{m_k}) = M$. В силу непрерывности функции f в точке x^0 по множеству A, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{m_k}) = f(x^0)$ и, следовательно, $M = f(x^0)$. Показано, что точная верхняя грань функции f конечна, поэтому функция f ограничена сверху. Кроме того, эта точная верхняя грань достигается в точке $x^0 \in A$. В случае рассмотрения $\inf\limits_A f$ рассуждения проводятся аналогично. ◀

Точную верхнюю грань (в случае справедливости теоремы 3.41) *функции f называют **максимумом этой функции** на компакте A и обозначают его так: $\max\limits_A f$, т.е. $\max\limits_A f = \sup\limits_A f$.* Аналогично *точную нижнюю грань называют **минимумом этой функции** на A и пишут $\min\limits_A f = \inf\limits_A f$.*

2. Понятия топологического и метрического пространств

Выше (§ 4, п. 4) мы применили понятия «топологическое соответствие» и «гомеоморфные множества». Они связаны с понятием «топологическое пространство», которое и введём в рассмотрение.

Пусть есть множество X, состоящее из элементов произвольной природы, называемых ***точками***.

***Множество** X называется **топологическим пространством**, если в нем выделено семейство G подмножеств, называемых **открытыми**, которое удовлетворяет следующим трем условиям* (*аксиомам топологического пространства*)*:*

1) *пустое множество* Λ *и все множество* X *входят в* G*;*

2) *если* $G_\xi \in G$ $(\xi \in \Xi)$*, то* $\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} G_\xi\right) \in G$*;*

3) *если* $G_1 \in G$*,* $G_2 \in G$*, то* $(G_1 \bigcap G_2) \in G$*.*

Такое семейство G *называется* ***топологией*** *в* X (*говорят, что во множестве* X *введена* ***топология***).

Множество F *топологического пространства* X *называется* ***замкнутым****, если его дополнение, т. е. множество* $G = X - F$*, открыто.*

В топологическом пространстве X всё пространство X и пустое множество Λ (и только эти два множества) являются одновременно и замкнутыми, и открытыми. *Их называют* ***«тривиальными» открыто-замкнутыми*** *множествами.*

Окрестностью точки x *в данном топологическом пространстве* X *называют всякое открытое множество, содержащее эту точку.*

Понятно, что если в X выделено семейство G открытых подмножеств, то, тем самым, в нём определено множество всех окрестностей (для этого определения надо каждое множество из G соотнести со всеми точками, в нём содержащимися, в качестве окрестности этих точек). Множество всех окрестностей, определённых в данном топологическом пространстве X, будем обозначать, как и семейство всех его открытых множеств, символом G.

Топологическое пространство*, окрестности точек которого удовлетворяют четырём нижеследующим аксиомам, называют* ***хаусдорфовым пространством.***

Аксиома 1. *Всякая точка имеет, по крайней мере, одну окрестность и содержится во всякой своей окрестности.*

Аксиома 2. *Пересечение двух окрестностей какой-нибудь точки всегда содержит третью окрестность той же точки (быть может, совпадающую с одной из двух данных окрестностей).*

Аксиома 3. *Если* $U(x)$ *– любая окрестность любой точки* x *топологического пространства, а* y *– какая-нибудь точка множества* $U(x)$*, то существует окрестность точки* y*, являющаяся подмножеством множества* $U(x)$*.*

Аксиома 4. *У всяких двух различных точек* x *и* y *топологического пространства имеются две непересекающиеся окрестности* $U(x)$ *и* $U(y)$ [2, гл. III, прибавление к гл. III (топологические пространства)].

З а м е ч а н и е 3.6. Важно обратить внимание на следующее обстоятельство: если X – хаусдорфово пространство, а A – его подмножество, $A \subset X$, то A – также хаусдорфово пространство (достаточно под окрестностью точки $a \in A$ в пространстве A понимать пересечение с A любой окрестности этой точки в пространстве X. Только что сказанное даёт возможность, в частности, рассматривать каждое множество, лежащее на прямой, на плоскости (в n-мерном евклидовом пространстве), как хаусдорфово пространство.

Подмножество *Б множества G всех окрестностей, определённых в данном топологическом пространстве X, называется* ***базисом системы*** *G, если выполнено следующее условие: каковы бы ни были точка x и окрестность $U(x)$ этой точки, можно найти принадлежащую к множеству Б окрестность $V(x)$ той же точки, являющуюся подмножеством окрестности $U(x)$.*

Будем говорить, *что хаусдорфово пространство X есть пространство* ***со счётным базисом****, если система окрестностей, определённая в этом пространстве, имеет счётный базис (или, если всё пространство состоит лишь из конечного числа точек).*

Очевидно, что всякое множество, лежащее в хаусдорфовом пространстве со счётным базисом, есть хаусдорфово пространство со счётным базисом.

Хаусдорфово пространство *X называется* ***компактным,*** *если оно удовлетворяет следующему условию: всякое бесконечное подмножество пространства X имеет хотя бы одну предельную точку в этом пространстве.* ***При этом точка*** *$x \in X$ называется* ***предельной точкой*** *множества $M \subset X$, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от точки x.* ***Компактное*** *хаусдорфово пространство со счётным базисом называется* ***компактом.***

Теорема 3.42. *Множество M, лежащее в евклидовом пространстве и рассматриваемое как хаусдорфово пространство, тогда и только тогда есть компакт, когда множество M одновременно замкнуто и ограничено* (см. теорему 3.40).

С понятием топологического пространства тесно связано понятие непрерывного отображения одного пространства в другое, которым мы воспользуемся для топологических хаусдорфовых пространств.

Если каждой точке *x топологического пространства X поставлена в соответствие единственная точка $f(x)$ топологического пространства Y, то говорят, что* ***задано отображение*** *f пространства X в пространство Y, и записывают $f:\ X \to Y$.*

Отображение *$f:\ X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется* ***непрерывным в точке*** *$x \in X$, если для любой окрестности U_y точки $y = f(x) \in Y$ в пространстве Y существует такая окрестность U_x точки x в X, что $f(U_x) \subset U_y$ (****условие Коши****).* ***Если ото-***

бражение $f: X \to Y$ *непрерывно в каждой точке* $x \in X$***,*** *то оно называется* ***непрерывным отображением*** *пространства* X *в пространство* Y .

В частности, для метрических пространств (определение ниже) это определение непрерывности переходит в обычное её определение, известное из курса математического анализа.

Выше была отмечена возможность рассматривать каждое множество, лежащее на прямой, на плоскости (в n-мерном евклидовом пространстве), как хаусдорфово пространство (замечание 3.6). Теперь отметим, что n-мерное евклидово пространство можно рассматривать как пространство метрическое. Дадим необходимые для этого определения.

Множество $X = \{x, y, z, ...\}$ *называется* ***метрическим пространством*** X***,*** *если на совокупности упорядоченных пар* (x, y) *элементов этого множества определена* ***неотрицательная функция*** $\rho(x, y)$*, называемая* ***расстоянием*** (*или* ***метрикой***)*, такая, что*

1. $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$*;*
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $x \in X$, $y \in X$ *;*
3. $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $x \in X$, $y \in X$ *;* $z \in X$.

Всякое подмножество *метрического пространства* X *является метрическим пространством относительно той же метрики и называется* ***подпространством пространства*** X **.**

З а м е ч а н и е 3.7. Очевидно, что евклидово пространство R^n размерности n является метрическим пространством, если расстояние между его точками $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ определено по формуле $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$. Ниже будем считать, что встречающиеся евклидовы пространства являются пространствами метрическими, с указанной выше метрикой, и рассматриваются как топологические.

Множество, *состоящее из всех точек множества* M *и из предельных точек этого множества, называется* ***замыканием множества*** M *и обозначается символом* $\overline{M}$ ($M \subset X$, X – топологическое пространство). ***Точки*** *множества* $\overline{M}$ *называются* ***точками прикосновения*** *множества* M .

Легко видеть, что каждая окрестность точки $x \in \overline{M}$ содержит хотя бы одну точку множества M , не обязательно отличную от самой точки x .

Приведём без доказательства теорему о необходимых и достаточных условиях для непрерывности отображения.

Теорема 3.43. *Для непрерывности отображения* $f: X \to Y$ *топологического пространства* X *в топологическое пространство* Y *каждое из следующих условий необходимо и достаточно*:

1) *если* x *есть точка прикосновения какого-либо множества* $M \subset X$, *то* $f(x)$ *есть точка прикосновения множества* $f(M)$ *в* Y;

2) *полный прообраз* $f^{-1}(Y^0)$ *всякого открытого в* Y *множества* Y^0 *есть открытое множество в* X.

Утверждение, аналогичное утверждению 2, имеет место и для замкнутых множеств.

Взаимно однозначное соответствие *между двумя топологическими пространствами* X *и* Y, *при котором* ***оба взаимно обратных отображения*** f ***и*** f^{-1}, *определяемые этим соответствием,* ***непрерывны****, называется* ***гомеоморфизмом*** (в этом случае $f(X) = Y$), *а пространства называют* ***гомеоморфными.***

Если $X_0 \subset X$ *и* G_0 – *совокупность всех пересечений* $X_0 \cap V$, *где* $V \in G$, *то* G_0 ***является топологией во множестве*** X_0 (*её называют топологией,* ***наследуемой*** X_0 *из* X).

Теорема 3.44. *Если дано непрерывное отображение* f *топологического пространства* X *в топологическое пространство* Y *и* $X_0 \subset X$, *то, в силу отображения* f, X_0 *отображается в* Y *и это отображение также непрерывно. Если при этом пространства* X *и* Y *являются гомеоморфными* (f *и* f^{-1} *непрерывны*), $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$, $f(X_0) = Y_0$ *и множества* X_0, Y_0 *наследуют топологию из соответствующих топологических пространств, то* X_0 *и* Y_0 *также являются гомеоморфными.*

Пусть мы имеем два отображения:

$$f: X \to Y \quad \text{и} \quad g: Y \to Z.$$

Результирующее отображение топологического пространства X *в топологическое пространство* Z *называется* ***композицией отображений*** f *и* g, *которая обозначается символом* $g \circ f$.

Ясно, что образ точки $x \in X$ при отображении $g \circ f$ выражается формулой $g(f(x))$. Таким образом, композиция отображений – это не что иное, как сложная функция. Легко доказываются следующие два утверждения, которые сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.45. *Если непрерывны отображения* f *и* g, *то непрерывно и отображение* $g \circ f$. *Если* f *и* g – *гомеоморфизмы, то отображение* $g \circ f$ – *также гомеоморфизм.*

3. Достижимая граничная точка как совокупность точки и класса кривых

В главе II, § 1 были даны достаточно громоздкие определения пути, кривой и другие. Такие определения потребовались, для того чтобы показать: в качестве параметра t при параметрическом задании кривой может быть выбрана переменная длина дуги s. Показав это, перейдём к более простым определениям.

Пусть *$x(t)$, $y(t)$ –* ***непрерывные*** *на отрезке $[0,1]$ функции параметра t.*

Уравнение:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

назовём ***параметрическим уравнением (непрерывной)*** *кривой* (расположенной на комплексной плоскости).

Будем считать, что два параметрических уравнения $z = z_1(t)$ и $z = z_2(t)$ определяют одну и ту же *непрерывную кривую* в том и только в том случае, когда существует такая непрерывная на отрезке $[0,1]$ строго возрастающая от 0 до 1 функция $\varphi(t)$, что $z_2(t) \equiv z_1(\varphi(t))$.

Направление *движения точки $z(t)$, отвечающее возрастанию параметра t, назовём* ***положительным. Кривую,*** *не имеющую точек самопересечений, будем называть* ***простой кривой.***

Заметим, что параметр t можно считать меняющимся на любом сегменте $[\alpha, \beta] \subset R$, т.е. на произвольном ***ограниченном*** отрезке прямой R. Отрезок $[0,1]$ был выбран лишь с целью упрощения обозначений (аналогично мы поступили в гл. 1, § 1, п. 2). И ещё заметим, что имея дело с функцией $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, часто бывает удобно рассматривать функцию $f(z)$ как *отображение*, переводящее точки одной комплексной плоскости в точки другой комплексной плоскости (а функцию $z(t) = x(t) + iy(t)$ – как отображение отрезка в комплексную плоскость). При этом введение в рассмотрение топологических пространств (выполненное выше) позволяет развить более общий подход к понятию отображения.

Рассматривая отрезок $[0,1]$ и некоторую окружность конечного радиуса как хаусдорфовы пространства, с помощью понятия отображения определим понятие кривой в любом хаусдорфовом пространстве X. Именно:

Непрерывной кривой *в пространстве X мы назовём образ отрезка $[0,1]$ действительной оси* ***при его непрерывном отображении*** *в пространство X.*

Замкнутой непрерывной кривой *назовём образ окружности* ***при непрерывном отображении*** *этой окружности в пространство* X .

Простой кривой *в пространстве* X *мы назовём* ***гомеоморфный образ*** *отрезка* $[0,1]$ *в пространстве* X *.* ***Простой замкнутой кривой*** (***жордановой кривой***) *назовём* ***гомеоморфный образ*** *окружности.*

Отметим: каждое отображение отрезка или окружности в хаусдорфово пространство есть не что иное, как параметрическое уравнение кривой $l:\ z = z(t)$ (это легко усмотреть из сказанного выше).

Точка $x \in X$ *называется* ***граничной точкой множества*** $A \subset X$ ***,*** *если в любой её окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству* A, *так и принадлежащие множеству* $X - A$. *Совокупность* ***всех граничных точек*** *множества* A *называется* ***его границей*** *и обозначается* ∂A. *Таким образом, высказывание: «точка* x *есть* ***точка границы*** *множества* A $(x \in \partial A)$*» равносильно высказыванию: «точка* x *есть* ***граничная точка*** *множества* A*».*

Множество *в топологическом пространстве называется* ***связным,*** *если любые две точки этого множества можно соединить* ***непрерывной кривой****, целиком в нём лежащей.* ***Открытое связное множество*** *в топологическом пространстве называется* ***областью****; при этом* ***область*** *называется* ***односвязной****, если любая замкнутая кривая, лежащая в этой области, является гомотопической нулю.* ***Область*** *топологического пространства назовём* ***жордановой****, если она ограничена* ***жордановой кривой.***

Пусть D – ограниченная область на плоскости комплексной переменной z, ζ – точка границы ∂D и $l:\ z = z(t)$ – простая кривая, $t \in [\alpha, \beta]$, причём $z(t) \in D$ при значениях $\alpha \le t < \beta$, $z(\beta) = \zeta$ (отрезок $[0,1]$ заменён отрезком $[\alpha, \beta]$; по поводу замены см. выше).

В этом случае *говорят, что кривая* l ***ведёт в точку*** ζ (изнутри D) *и определяет* ***достижимую граничную точку****, изображаемую точкой* ζ *.*

Две простые кривые, *ведущие в точку* ζ *изнутри* D, *называются* ***эквивалентными,*** *или* ***определяющими одну и ту же*** *достижимую граничную точку, если существует третья простая кривая, также ведущая в* ζ *изнутри* D *и имеющая с каждой из рассматриваемых двух кривых непустые пересечения внутри* D *в любой близости от* ζ *.* ***Совокупность*** *точки* $\zeta \in \partial D$ *и класса эквивалентных простых кривых, ведущих в точку* ζ *изнутри* D, *называется* ***достижимой граничной точкой*** *области* D.

4. Соответствие границ

Рассмотрим некоторые факты, относящиеся к соответствию границ при конформном отображении областей. Введём на гладкой границе ∂D области D действительный параметр s – длину дуги, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки кривой ∂D, так что на границе ∂D будем иметь $\zeta = \zeta(s)$ (см. гл. 2, § 1, п. 4, следствие 2.2).

Если функция $f(z)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$*, то положим на границе* ∂D *этой области*:

$$f(\zeta) = f(\zeta(s)) = \varphi(s)$$

и будем называть $\varphi(s)$ ***граничной функцией*** *для функции* $f(z)$.

Имеет место следующая теорема *о соответствии границ* (теорема формулируется только для случая областей с жордановыми границами, не содержащими бесконечных ветвей, и приводится без доказательства).

Теорема 3.46. *Пусть функция* $w = f(z)$ *осуществляет конформное отображение областей* D_1 *и* D_2*. Тогда*:

1) *функция* $w = f(z)$ *непрерывна на границе* ∂D_1 *и граничная функция* $w = f(\zeta) = \varphi(s)$ *осуществляет непрерывное и взаимно однозначное соответствие границ* ∂D_1 *и* ∂D_2*;*

2) *если границы* ∂D_1 *и* ∂D_2 *обладают в каждой точке непрерывной* (*следовательно, и ограниченной*) *кривизной, то граничная функция* $\varphi(s)$ *непрерывно дифференцируема* [14, гл. II, § 1, п. 29].

Более точный результат, чем только что приведённый, даёт теорема Келлога. Она будет ниже.

Что касается ***принципа*** *соответствия границ* (теорема 2.43, гл. 2, § 3, п. 5), то мы будем его применять в следующей формулировке (этот принцип в некотором смысле является обратным теореме 3.46).

Теорема 3.47. *Пусть даны две ограниченные односвязные области* D_1 *и* D_2 *с границами* ∂D_1 *и* ∂D_2*. Если функция* $w = f(z)$:

1) *является аналитической в области* D_1*, непрерывной в области* $\overline{D}_1$ *и*

2) *осуществляет взаимно однозначное отображение* ∂D_1 *на* ∂D_2 *с сохранением направления обхода, то она осуществляет и* (*однолистное*) *конформное отображение области* D_1 *на область* D_2 [14, гл. II, § 1, п. 29].

В теории конформных отображений важную роль играют *условия единственности конформного отображения,* обеспечивающие выделение единственной функции из рассматриваемого бесконечного класса конформных отображений одной заданной области на другую (в случае односвязных областей, с которыми мы только и будем иметь дело). Одним из условий единственности конформного отображения $f(z)$ в случае односвязных областей D_1, D_2 с непустыми границами ∂D_1, ∂D_2 соответственно, не вырождающимися в точки, является: заданная конечная точка $a \in D_1$ переходит в заданную конечную точку $b \in D_2$, причём $\arg f'(a) = \theta$, где θ – наперёд заданное действительное число, $0 \le \theta < 2\pi$ (теорема 2.50, гл. 2, § 4, п. 5).

Это условие единственности можно заменить условием соответствия трёх пар достижимых граничных точек областей D_1, D_2:

$$f(\zeta_k) = \omega_k \quad (k = 1,2,3),$$

взятых произвольно, но с соблюдением порядка их следования при обходе границ. Более точно это второе условие единственности звучит так: заданные три различные достижимые граничные точки области D_1, т. е. точки $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \partial D_1$ (в совокупности с классами эквивалентных внутри каждого класса простых кривых, ведущих в эти точки изнутри D_1), переходят соответственно в аналогичные заданные точки области D_2, т. е. точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \partial D_2$ (в совокупности с $\ldots$). При этом, если при движении по ∂D_1 от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2 область D_1 остаётся слева, то при движении по ∂D_2 от ω_1 к ω_3 через ω_2 область D_2 также должна оставаться слева (см. теорему 2.43, гл. 2, § 3, п. 5).

З а м е ч а н и е 3.8. Для произвольных областей могут существовать точки границы, не являющиеся достижимыми граничными точками. Понятно, что условием соответствия трёх пар достижимых граничных точек особенно удобно пользоваться в случае областей, для которых указанных только что точек не существует. Тогда в последнем условии единственности слова «заданные три различные достижимые граничные точки» можно заменить словами «заданные три различные точки границы».

Чтобы выяснить, для каких областей из условия единственности можно убрать слово «достижимые», несколько переформулируем определение достижимой граничной точки.

Пусть *ζ – граничная точка области D, а L –* ***простая кривая****, лежащая в D, за исключением её конечной точки ζ.* ***Совокупность*** *(ζ, L) точки ζ и ведущей в неё (изнутри D) кривой L назовём* ***достижимой граничной точкой*** *области D.*

Пусть (ζ, L_j), $j = 1,2$, есть достижимые граничные точки, а D_ρ есть пересечение области D с кругом $|z - \zeta| < \rho$, которое в общем случае может распадаться на несколько связных частей.

Если *кривые L_1 и L_2 таковы, что их части, лежащие в круге $|z - \zeta| < \rho$,* ***попадают в одну и ту же связную часть*** *пересечения D_ρ (при всех достаточ-*

но малых ρ), то считаем ***достижимые граничные точки*** (ζ, L_1), (ζ, L_2) ***совпадающими.***

Нетрудно заметить, что если (ζ, L_1) и (ζ, L_2) совпадают, то существует простая кривая L_3, ведущая в точку ζ изнутри D и имеющая с каждой из кривых L_1 и L_2 непустые пересечения внутри упомянутой связной части пересечения D_ρ. Если область D ограничена простой кусочно-гладкой замкнутой кривой, то при достаточно малых ρ пересечение области D с кругом $|z-\zeta|<\rho$ состоит из одной связной части. Для таких «хороших» областей нет разницы между достижимой граничной точкой и точкой границы [9, гл. IV, § 1]. Далее будем рассматривать только такие «хорошие» области и учитывать замечание 3.8.

Теорема 3.48. *Существует одно и только одно конформное отображение $w = f(z)$ области D_1 на область D_2, переводящее три граничные точки ζ_k области D_1 в три граничные точки ω_k области D_2. Точки ζ_k и ω_k задаются произвольно, но с соблюдением порядка следования при обходе границ областей* [14, гл. II, § 3, п. 35].

Граничные точки ζ_k *и* ω_k, $k = 1,2,3$, *областей* D_1 *и* D_2, *заданные с соблюдением требования второго предложения теоремы* 3.48, *назовём* ***согласованными. Преобразование*** *границы* ∂D_1 *области* D_1 *в границу* ∂D_2 *области* D_2 *назовём* ***правильным,*** *если точки* ζ_k *при этом преобразовании переходят в точки* ω_k, $k = 1,2,3$, *соответственно* (*точки* ζ_k *и* ω_k *являются согласованными*).

С учётом последних определений теорему 3.48 можно сформулировать так.

Теорема 3.48*. *Существует одно и только одно конформное отображение $w = f(z)$ области D_1 на область D_2, осуществляющее правильное преобразование границы ∂D_1 в границу ∂D_2.*

В связи с последней формулировкой теоремы 3.48 необходимо замечание.

З а м е ч а н и е 3.9. Основная задача теории конформных отображений состоит в следующем: *даны две односвязные области D_1 и D_2 соответственно в плоскостях z и w; требуется найти функцию $w = f(z)$, аналитическую в области D_1, которая осуществляла бы взаимно однозначное* (*следовательно, и конформное*) *отображение этих областей друг на друга.*

При решении этой задачи, не уменьшая общности, мы можем принимать, что одна из данных областей, например D_2, есть круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице, т. к., чтобы осуществить взаимно однозначное и конформное отображение двух произвольных односвязных областей друг на друга, достаточно получить взаимно однозначные и конформные отображения каждой из этих областей на такой круг.

Что же касается отображений на круг, то справедлива следующая теорема: *пусть G есть область плоскости z, ограниченная линией Жордана Γ; допустим, что функция $w = f(z)$ отображает взаимно однозначно и конформно эту область на внутренность единичного круга плоскости w, границей которого является окружность C. Тогда посредством той же функции $w = f(z)$ границы Γ и C преобразовываются друг на друга взаимно однозначно и непрерывно* [28_2, гл. XII, § 6, до п. 1 и § 7, до п. 1].

Пусть область D_2, о которой говорится в предыдущей теореме, есть круг. Более точно, пусть K: $|w|<1$ – единичный круг, C: $|w|=1$ – его граница (единичная окружность) и $w=\chi(z)$ – функция, осуществляющая конформное отображение области D_1, которую теперь обозначим G, на круг K и удовлетворяющая условиям теоремы 3.48. Тогда эта функция осуществляет однолистное конформное отображение области G на круг K, т.е. является однолистной в области G (определение конформного отображения). Но тогда она является однолистной в каждой точке области G и, значит, в каждой точке $z \in G$ будет $\chi'(z) \neq 0$ (теорема 2.42, гл. 2, § 3, п. 5). Отсюда следует, в силу теоремы 2.36 и определения регулярности функции в области, что функция $z=\sigma(w)$, обратная к функции $w=\chi(z)$, является *регулярной* в круге K.

Напомним: если область G является односвязной и выпуклой, то функция, аналитическая в ней, будет в ней и регулярной (гл. 2, § 3, п. 2, теорема 2.31). Далее о функциях $\chi(z)$ и $\sigma(w)$ будем говорить как о функциях аналитических. В добавление к сказанному, заметим: функции $\chi(z)$ и $\sigma(w)$ являются равномерно непрерывными в соответствующих областях, каждая в своей области (гл. II, § 4, п. 3, теорема о соответствии границ), и, следовательно, они непрерывно продолжаемы на замыкания $\overline{G}$ и $\overline{K}$ (§ 4, п. 1, теорема 3.18). В результате вышесказанного приходим к теореме.

Теорема 3.49. *Пусть $w=\chi(z)$ – однолистное конформное отображение ограниченной односвязной выпуклой области G с границей Γ, Γ – замкнутая жорданова кривая, на единичный круг K: $|w|<1$ с границей C: $|w|=1$, $z=\sigma(w)$ – ему обратное конформное отображение:*

$\sigma(\chi(z))=z$, $z\in G$. *Тогда* χ *непрерывно продолжается на границу* Γ, *а* σ *– на окружность* C, *так что продолженные функции осуществляют взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение (гомеоморфизм) замкнутых областей* $\overline{G}$ *и* $\overline{K}$ *друг на друга.*

§ 6. Конформное отображение аналитической функции

1. Принцип максимума модуля аналитической функции

Ниже из двух обозначений $\dfrac{\partial w}{\partial\eta}$ и w'_η для частных производных будем использовать более сжатое. Напомним условия Коши – Римана и формулы для нахождения производных аналитической функции комплексной переменной $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$:

$$u'_x=v'_y,\quad u'_y=-v'_x;\qquad f'(z)=u'_x+iv'_x,\quad f'(z)=v'_y-iu'_y.$$

Теперь введём обозначение, позволяющее две последние формулы объединить в одну, и затем, применяя его, найдём производную функции $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$. Итак, обозначим $\dfrac{d}{dz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$. Тогда:

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{1}{2}\Big((u+iv)'_x-i(u+iv)'_y\Big)=\frac{1}{2}(u'_x+iv'_x-iu'_y+v'_y)=f'(z),$$

$$\frac{d\,\overline{f(z)}}{dz}=\frac{1}{2}\Big((u-iv)'_x-i(u-iv)'_y\Big)=\frac{1}{2}(u'_x-iv'_x-iu'_y-v'_y)=0.$$

Ниже нам придётся обратиться к логарифмической функции, которая является многозначной, да и не только к ней. В связи с этим необходим краткий экскурс в область некоторых понятий. Так, помимо наиболее распространённого определения функции комплексной переменной [10_3, гл. 17, § 17.1; 20, разд. 18, § 18.1, п. 3$^{\text{o}}$], можно дать и следующее ниже определение (наиболее удобное в данном пункте; см. [3_2, гл. II, § 1, п. 2$^{\text{o}}$]).

Выражение вида $u(x,y)+iv(x,y)=f(z)$, *где* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *– действительные функции действительных переменных* x, y *называется* (*комплексной*) ***функцией комплексной переменной*** $z=x+iy$.

Для комплексной функции $w=f(z)$ допускается, чтобы одному аргументу z соответствовало несколько значений w.

Если *каждому значению* z *соответствует* ***единственное значение*** w, *то функция* $w=f(z)$ *называется* ***однозначной.*** *Если существуют такие значения* $z\in D$ (D *– область определения* w), *которым отвечают* ***несколько*** (*или*

бесконечно много) *значений* w*, то функция называется* ***многозначной*** (***бесконечнозначной***).

Если *функция* $w = f(z)$ *осуществляет* ***взаимно однозначное*** *соответствие между точками области* D *её определения и области* E *её значений, то говорят, что функция* $w = f(z)$ ***однолистна.*** *При этом область* D *называют* ***областью её однолистности.***

Рассмотрим теперь наряду с плоскостью комплексной переменной z плоскость комплексной переменной w и, в качестве примера, степенную функцию $w = z^n$ с натуральным показателем. Очевидно, что областью однолистности этой функции является любой угол D с вершиной в точке $z = 0$ раствора $\frac{2\pi}{n}$. Внутри угла D для функции $z = f^{-1}(w)$, обратной w и обозначаемой $z = \sqrt[n]{w} = w^{\frac{1}{n}}$, выполняются равенства:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}.$$

В обозначениях $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$ получаем $r^n = \rho$, $n\varphi = \psi + 2k\pi$ и в каждом из углов D_k: $\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}$, $k = 0,...,n-1$, имеем:

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\psi+2k\pi}{n}}.$$

Каждую *из величин* z_k *принято называть* ***ветвью многозначной функции*** $z = w^{\frac{1}{n}}$.

Рассмотрим несколько подробней такое понятие, как ветвь многозначной функции.

Если выполняется двойное неравенство $\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}$, то $2k\pi < \arg z^n < 2k\pi + 2\pi$, т. е. при области D_k определения функции $w = z^n$ областью E_k её значений будет угол раствора 2π, функция $w = z^n$ будет устанавливать взаимно однозначное соответствие между точками областей D_k и E_k, обратная функция $z = \sqrt[n]{w}$ будет однозначной (E_k состоит из всех точек плоскости w, не принадлежащих положительной части действительной оси).

Таким образом, каждая из n областей D_0, D_1, … , D_{n-1} преобразуется в одну и ту же область $E_k = E$, представляющую собой плоскость комплексной переменной w с выброшенной положительной частью действительной оси. Обратно, если w изменяется в области E, то переменную z можно считать изменяющейся в любой из n областей D_0,

D_1, … , D_{n-1} и, значит, можно было бы говорить не об одной, а об n функциях, обратных функции $w = z^n$, определённых в области E. Однако их удобнее рассматривать не как различные функции, а как различные ветви многозначной (n-значной) функции $z = \sqrt[n]{w}$. Более того, как показано в [28₂, гл. II, § 4, п. 10], было бы неправильно рассматривать ветви одной и той же многозначной функции как отдельные функции. Для того чтобы фиксировать какую-либо одну из ветвей, достаточно указать, в какой из областей однолистности должна изменяться z.

Областью однолистности экспоненциальной функции $w = e^z$ является любая полоса D ширины 2π, параллельная действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$.

Функция $z = f^{-1}(w)$, ***обратная*** $w = e^z$ *в полосе* D, *называется* ***логарифмической функцией***, *которая обозначается* $z = \ln w$, *причём*:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\dfrac{dw}{dz}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

В каждой полосе D_k: $2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi$ для функции $z = \ln w$ имеем $z_k = \ln|w| + i\arg w + 2ik\pi$, $0 \le \arg w < 2\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. [3₂, гл. II, §1, п.4°]. Полагая $w = re^{i\varphi}$, получаем:

$$z_k = (\ln w)_k = \ln r + (\varphi + 2k\pi)\, i \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

[28₂, гл. II, § 4, п. 10]. При этом, какую бы ветвь логарифмической функции мы ни рассматривали, она будет иметь одну и ту же производную, задаваемую формулой [20, разд. 18, § 18.4, п. 3°]

$$\frac{dz}{dw} = \frac{d}{dw}\ln w = \frac{1}{w}.$$

Пусть теперь $f(z)$ – аналитическая в области D функция, а M – точная верхняя грань значений $|f(z)|$ для всех $z \in D$. Тут и далее считаем, что рассматриваемая аналитическая в области D функция либо является однозначной, либо, в противном случае, мы рассматриваем вполне определённую её ветвь.

Принцип максимума модуля (аналитической функции) [3₂, гл. II, § 3, п. 1°]: *модуль аналитической в области* D *функции* $f(z)$ *, отличной от постоянной, ни в одной точке этой области не может принимать значения* M .

▷ Если $M = \infty$, справедливость утверждения очевидна, т. к. в каждой точке $z \in D$ функция $f(z)$ принимает лишь конечное значение. Предположим, что число M конечно и что в некоторой точке $z_0 \in D$

имеет место равенство $|f(z_0)| = M$. Пусть $|\zeta - z_0| \le \delta_0$ – замкнутый круг, лежащий в D. В силу интегральной формулы Коши:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$$

имеем:

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta - z_0| = \delta_0}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta_0 e^{i\theta})d\theta, \quad \zeta - z_0 = \delta_0 e^{i\theta},$$

откуда, по принятому допущению, получаем:

$$M \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0 + \delta_0 e^{i\theta})\right|d\theta.$$

Из этого неравенства следует, что на окружности $|\zeta - z_0| = \delta_0$ всюду $|f(\zeta)| = M$. В самом деле, допустим, что в точке $\zeta_0 = \delta_0 e^{i\theta_0}$ имеет место неравенство $|f(\zeta_0)| < M$ (обратное неравенство исключено). В силу непрерывности $|f(\zeta)|$ неравенство $|f(\zeta)| < M$ сохраняется для некоторого промежутка $\theta_0 - \varepsilon < \theta < \theta_0 + \varepsilon$. Но тогда, по $M \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0 + \delta_0 e^{i\theta})\right|d\theta$, получим невыполняющееся неравенство $M < M$. Отсюда $|f(z)| = M$ для всех значений δ, $0 \le \delta \le \delta_0$, т. е. в окрестности $|z - z_0| < \delta_0$ точки z_0.

Так как $\ln|f(z)| = \frac{1}{2}\ln\left(f(z)\overline{f(z)}\right)$, то:

$$\frac{d}{dz}\ln|f(z)| = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln\left(f(z)\overline{f(z)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(f(z)\right)'\cdot\overline{f(z)} + f(z)\cdot\left(\overline{f(z)}\right)'}{f(z)\overline{f(z)}} = \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)},$$

значит:

$$\frac{d}{dz}\ln|f(z)| = \frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\ln M = 0$$

для всех значений z в круге $|z - z_0| < \delta_0$, т. е. в этом круге всюду $f'(z) = 0$ и, стало быть, $f(z) = const$.

Пусть теперь z – произвольная фиксированная точка области D и l – непрерывная кривая, соединяющая z с z_0 и лежащая в D. Пусть число δ_0 меньше, чем расстояние между границей ∂D и кривой l.

Расстоянием *между границей ∂D области D и кривой l называют* ***величину*** $\rho(\partial D, l) = \inf\limits_{\zeta\in\partial D, \xi\in l}\rho(\zeta,\xi)$, *где* $\rho(\zeta,\xi)$ *– расстояние между точками* ζ *и* ξ.

Рассмотрим круг $|\eta - q| < \delta_0$. Передвигая центр q этого круга (вместе с кругом) из точки z_0 в точку z по кривой l и опираясь на уже доказанный факт, что при любом положении q внутри передвигаемого круга $|f| = M$ (рассуждения, проведённые в начале доказательства, имеют силу при любом $z_0 \in D$), получаем $|f(z)| = M$. Следовательно, $|f(z)| = M$ всюду в области D, а это исключено. Таким образом, допущеие $|f(z_0)| = M$, $z_0 \in D$ является неверным и утверждение доказано. ◀

Отметим, что в проведённом доказательстве не столь очевидные рассуждения, связанные с рассмотрением логарифмического равенства $\ln|f(z)| = \frac{1}{2}\ln\left(f(z)\overline{f(z)}\right)$, можно заменить рассуждениями более очевидными и приводящими к тому же результату: если $|f(z)| = M$ для всех значений δ, $0 \le \delta \le \delta_0$, т. е. в окрестности $|z - z_0| < \delta_0$ точки z_0, то в круге $|z - z_0| < \delta_0$ $f(z)$ есть постоянное число.

В самом деле, функция $\ln f(z)$ имеет постоянную действительную часть (в круге $|z - z_0| < \delta_0$), т. к. действительная часть логарифма равна логарифму модуля. Вследствие условий Коши – Римана голоморфная функция $\ln f(z)$ с постоянной действительной частью есть постоянное число, а значит, и $f(z)$ есть постоянное число в указанном круге [28_2, гл. V, § 2, п. 3 и п. 5].

Результат предыдущего параграфа может быть получен (в том же самом круге) и без привлечения логарифмической функции. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – функция, аналитическая в круге $|z - z_0| < \delta_0$. Тогда:

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2; \quad \left(|f|^2\right)'_x = 2uu'_x + 2vv'_x, \quad \left(|f|^2\right)'_y = 2uu'_y + 2vv'_y;$$

$$\left(|f|^2\right)''_{xx} = 2\left((u'_x)^2 + uu''_{xx} + (v'_x)^2 + vv''_{xx}\right), \quad \left(|f|^2\right)''_{yy} = 2\left((u'_y)^2 + uu''_{yy} + (v'_y)^2 + vv''_{yy}\right).$$

Складывая два последних равенства и учитывая, что действительная и мнимая части аналитической функции есть функции гармонические, получаем:

$$\left(|f|^2\right)''_{xx} + \left(|f|^2\right)''_{yy} = 2\left((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + u(u''_{xx} + u''_{yy}) + (v'_x)^2 + (v'_y)^2 + v(v''_{xx} + v''_{yy})\right) =$$
$$= 2\left((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2\right).$$

Так как $|f(\zeta)| = M$ в окрестности $|z - z_0| < \delta_0$ точки z_0, то в этой окрестности $|f(\zeta)|^2 = M^2 = const$, $\left(|f|^2\right)''_{xx} + \left(|f|^2\right)''_{yy} = 0$, отсюда $\left((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2\right) = 0$.

Из последнего равенства следует, что $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$ и тогда для производной $f'(z)$ будет $f'(z) = u'_x + iv'_x = 0$ для всех значений z в круге $|z - z_0| < \delta_0$, и, значит, $f(z) = const$.

В [28_2, гл. V, § 2, п. 5] приводится ещё одно доказательство принципа максимума модуля. Из доказанного принципа вытекает:

если $f(z)$ есть функция, голоморфная в области D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, то максимальное значение её модуля необходимо достигается на границе области D при условии, что $f(z)$ не есть постоянное число.

2. О функциях, непрерывных в замкнутом круге

Теорема 3.50 (Ф. Рисс). *Для того чтобы функция* $f(z)$*, регулярная в круге* K: $|z|<1$*, была непрерывна в замкнутом круге* $\overline{K}$: $|z|\le 1$ *и абсолютно непрерывна на окружности* C: $|z|=1$*, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(z)\in H_1$*. Если* $f'(z)\in H_1$*, то почти всюду на окружности* C *имеем* $\frac{df(e^{i\theta})}{d\theta}=ie^{i\theta}f'(e^{i\theta})$.

В последнем равенстве под записью $f'(e^{i\theta})$ понимаются предельные значения производной $f'(z)$ при стремлении z к значению $e^{i\theta}$ $(\lim\limits_{r\to 1}\frac{df(re^{i\theta})}{d\theta}=ie^{i\theta}f'(e^{i\theta}))$, а под $\frac{df(e^{i\theta})}{d\theta}$ – производная от $f(e^{i\theta})$ по θ [8, гл. IX. § 5] (ср. эту теорему с теоремами 2.70 и 2.71 гл. II, § 7 и теоремой 3.33 гл. III, § 4).

Теорема 3.51. *Если функция* $f(z)$*, регулярная в* K *и непрерывная в* $\overline{K}$*, имеет ограниченное изменение на окружности* C (*т. е. вещественная и мнимая части функции* $f(z)$ *есть функции с ограниченным изменением на* C)*, то* $f(z)$ *абсолютно непрерывна на* C.

Теорема 3.52 (Харди и Литтльвуд). *Для того чтобы функция* $f(z)$*, регулярная в круге* K: $|z|<1$*, была непрерывна в замкнутом круге* $\overline{K}$: $|z|\le 1$ *и на окружности* C: $|z|=1$ *удовлетворяла условию Гёльдера* (*условию* $H(\mu)$):

$$\left|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})\right|\le k|\theta_1-\theta_2|^{\mu},\quad 0<\mu\le 1, \tag{64}$$

необходимо и достаточно, чтобы в круге K *выполнялось неравенство:*

$$|f'(z)|\le \frac{M}{(1-r)^{1-\mu}},\qquad r=|z|, \tag{65}$$

где M *– конечная постоянная* (см. [8, гл. IX, § 5]).

Мы докажем эту теорему в следующей формулировке.

Теорема 3.52 ***.** *Для того чтобы функция* $f(z)$*, регулярная в круге* K: $|z|<1$, *была непрерывна в замкнутом круге* $\overline{K}$: $|z|\le 1$, *на окружности* C: $|z|=1$ *удовлетворяла условию Гёльдера* (*условию* $H(\mu)$) (64) *и её в круге* K *можно было бы представить в виде* $f(z)=(1-r)^{\mu}\Psi(z)$, *где величины* U, V, $(1-r)U_r'$, $(1-r)V_r'$ *ограничены в* $|z|<1$ *вплоть до границы,* U *– действительная,* V *– мнимая части функции* $\Psi(z)$, $\Psi(z)$ *удовлетворяет условию* (64), *необходимо и достаточно, чтобы в круге* K *выполнялось неравенство* (65), *где* M *– конечная постоянная.*

$\triangleright$ Пусть функция $f(z)$ непрерывна в круге $\overline{K}$, на окружности C выполняется (64) и её в круге K можно представить $f(z)=(1-r)^{\mu}\Psi(z)$. Так как функция $f(z)$ представима в круге K по формуле Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it}-z}dt,$$

то в круге K имеем $(z=re^{i\theta})$:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})e^{it}}{(e^{it}-z)^2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})-f(e^{i\theta})}{(e^{it}-z)^2}e^{it}dt. \qquad (66)$$

Последнее равенство справедливо, потому что $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})e^{it}}{(e^{it}-z)^2}dt=0$.

Из (66) следует:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{i(\theta-\varphi)})-f(e^{i\theta})}{e^{i(\theta-\varphi)}(1-re^{i\varphi})^2}dt,\quad |f'(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(e^{i(\theta-\varphi)})-f(e^{i\theta})|}{1+r^2-2r\cos\varphi}d\varphi,$$

$\varphi=\theta-t$, т. к. $\left|1-re^{i\varphi}\right|^2=\left|(1-r\cos\varphi)-i\cdot r\sin\varphi\right|^2$.

Выполнив в знаменателе последней подынтегральной функции универсальную тригонометрическую подстановку $tg\frac{\varphi}{2}=t$, для выражения $\frac{d\varphi}{1+r^2-2r\cos\varphi}$ получим $\frac{2dt}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}$. После этого находим

$$|f'(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r)^{\mu}k\,|\varphi|^{\mu}}{1+r^2-2r\cos\varphi}d\varphi\le$$

$$\le\frac{k\pi^{\mu}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-r)^{\mu}dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}=\frac{k\pi^{\mu}}{\pi}\cdot\frac{(1-r)^{\mu}\pi}{(1+r)\cdot(1-r)},$$

$$|f'(z)|\le\frac{k\pi^{\mu}}{1+r}\cdot\frac{1}{(1-r)^{1-\mu}}\le\frac{k\pi^{\mu}}{(1-r)^{1-\mu}}.$$

Теперь обратно. Пусть в круге K выполняется (65). Тогда интеграл $\int_0^1 f'(re^{i\theta})dr$ сходится при каждом θ и, следовательно, предел

$\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ существует при каждом θ. Записав левую часть (65) в виде $|f'(\rho\cdot e^{i\theta})|$ и затем, интегрируя (65) по переменной ρ от 0 до r, $0<r<1$, видим, что $f(z)=f(\rho\cdot e^{i\theta})$ ограничена в K и, поэтому, представима интегралом Пуассона через свои предельные значения $f(e^{i\theta})$. Когда мы докажем неравенство (64), из него будет следовать, что функция $f(z)$ непрерывна в круге $\bar{K}$ (гл. II, § 6, теоремы 2.65 и 2.66).

Начиная доказывать (64), заметим, что это неравенство достаточно доказать при условии $|\theta_1-\theta_2|<1$. Имеем:

$$f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2}) = \int_\gamma f'(z)dz,$$

где в качестве γ возьмём кривую, составленную из радиальных отрезков $[e^{i\theta_1}, he^{i\theta_1}]$, $[e^{i\theta_2}, he^{i\theta_2}]$ и дуги $(he^{i\theta_1}, he^{i\theta_2})$ на окружности $|z|=h$, причём $h=1-|\theta_1-\theta_2|$. Из последнего равенства получим:

$$\left|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})\right| \le \int_h^1 \left|f'(re^{i\theta_1})\right|dr + \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h\left|f'(he^{it})\right|dt\right| +$$

$$+\int_h^1 \left|f'(re^{i\theta_2})\right|dr \le 2\int_h^1 \frac{Mdr}{(1-r)^{1-\mu}} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{Mh}{(1-h)^{1-\mu}}dt =$$

$$= M\left(2\frac{(1-h)^\mu}{\mu} + \frac{h|\theta_1-\theta_2|}{(1-h)^{1-\mu}}\right) = M\left(\frac{2}{\mu}+h\right)\cdot|\theta_1-\theta_2|^\mu,$$

т. е. (64) со значением $k=M\left(\dfrac{2}{\mu}+1\right)$.

Осталось доказать представимость $f(z)=(1-r)^\mu\Psi(z)$. Само это равенство говорит, что надо обратиться к тригонометрической форме числа z и записать его в виде $z=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$. Тогда производную $f'(z)$ можно записать в виде:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right), \qquad z\ne 0$$

[20, раздзел 18, § 18.2, п. 2°]. Так как $\dfrac{r}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$, получаем

$|f'(z)| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)^2}$. Из неравенства $|f'(z)| \le \dfrac{k\pi^\mu}{(1-r)^{1-\mu}} = k\pi^\mu(1-r)^{\mu-1}$ следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial r} = (1-r)^{\mu-1}\cdot\tilde{U}$, и, значит, $u=(1-r)^\mu U$, $\dfrac{\partial u}{\partial r} = (1-r)^{\mu-1}(-\mu U + (1-r)U'_r)$. Аналогичное выражение имеет $\dfrac{\partial v}{\partial r}$. ◀

Теорема 3.53 (Харди и Литтльвуд). *Если функция $f(z)$, регулярная в круге K, непрерывна в замкнутом круге $\bar{K}$ и на окружности C удовлетворяет условию Гёльдера*:

$$\left|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})\right|\le k|\theta_1-\theta_2|^{\mu},\quad 0<\mu\le 1,\tag{67}$$

то в $\overline{K}$ *она удовлетворяет комплексному условию Гёльдера*

$$\left|f(z_1)-f(z_2)\right|\le K|z_1-z_2|^{\mu},\quad 0<\mu\le 1.\tag{68}$$

$\triangleright$ Легко видеть, что (68) будет доказано, если докажем два частных неравенства:

$$\left|f(re^{i\theta})-f(re^{i\theta'})\right|\le K\left|re^{i\theta}-re^{i\theta'}\right|^{\mu},\tag{69}$$

$$\left|f(re^{i\theta})-f(r'e^{i\theta})\right|\le K\left|re^{i\theta}-r'e^{i\theta}\right|^{\mu},\tag{70}$$

для любых точек $re^{i\theta}$, $re^{i\theta'}$, $r'e^{i\theta}$ круга K: $|z|<1$ (в неравенствах (68) – (70) K – это константа). При доказательстве (69) можно считать, что выполняется условие $|\theta-\theta'|<\pi$. Теперь функция $\varphi_{\theta,\theta'}(z)=\dfrac{f(ze^{i\theta})-f(ze^{i\theta'})}{z}$ регулярна в круге K и непрерывна в $\overline{K}$; поэтому максимум её модуля в замкнутом круге $\overline{K}$ не превосходит максимума величины $\left|f(e^{i(t+\theta)})-f(e^{i(t+\theta')})\right|$ в промежутке $[0,2\pi)$ (принцип максимума модуля), а этот максимум по (67) не больше $k|\theta-\theta'|^{\mu}$. Следовательно, имеем:

$$\left|f(re^{i\theta})-f(re^{i\theta'})\right|\le kr|\theta-\theta'|^{\mu}.\tag{71}$$

Но:

$$\frac{|\theta-\theta'|}{2}\le\frac{\pi}{2}\left|\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right|=\frac{\pi}{4}\left|e^{i\theta}-e^{i\theta'}\right|,$$

так что из (71) следует (69) с $K=\dfrac{\pi^{\mu}}{2^{\mu}}k$.

Теперь докажем (70). Пусть $0\le r<r'<1$. По теореме 3.52 в круге K имеет место оценка (65), из которой получаем:

$$\left|f(re^{i\theta})-f(r'e^{i\theta})\right|\le\int_r^{r'}\left|f'(te^{i\theta})\right|dt\le\int_r^{r'}\frac{Mdt}{(1-t)^{1-\mu}}.$$

Если $r'<\dfrac{1+r}{2}$ и, значит, $r'-r<1-r'$, то:

$$\left|f(re^{i\theta})-f(r'e^{i\theta})\right|\le\frac{M}{(1-r')^{1-\mu}}\int_r^{r'}dt\le M\,\frac{r'-r}{(r'-r)^{1-\mu}}=M|r'-r|^{\mu}.$$

Если $r'>\dfrac{1+r}{2}$ и, значит, $r'-r>1-r'$, то:

$$\left|f(re^{i\theta})-f(r'e^{i\theta})\right|\le M\frac{(1-t)^{\mu}}{\mu}\Bigg|_r^{r'}<M\,\frac{(1-r')^{\mu}}{\mu}\le\frac{M}{\mu}|r'-r|^{\mu}.$$

В обоих случаях получили (70). ◀

Теорема 3.54 (И.И. Привалов). *Если функция* $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ *регулярна в круге* K: $|z|<1$, *а* $u(r,\theta)$ *непрерывна в замкнутом круге* $\overline{K}$: $|z|\le 1$ *и на окружности* C: $|z|=1$ *удовлетворяет условию Гёльдера*:

$$|u(\theta_1)-u(\theta_2)|\le k|\theta_1-\theta_2|^{\mu}, \quad 0<\mu\le 1,$$

то $f(z)$ *удовлетворяет в* $\bar{K}$ *комплексному условию Гёлдера.*

$\triangleright$ Представим $f(z)$ в круге K по формуле Шварца:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\varphi(\zeta)d\vartheta+iC, \quad \zeta=e^{i\vartheta}, \quad C=v(0,0),$$

и запишем её в виде:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt+iC.$$

Отсюда получаем:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2u(t)e^{it}}{(e^{it}-z)^2}dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u(t)-u(\theta)}{(e^{it}-z)^2}e^{it}dt.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 3.52*, приходим к неравенству:

$$|f'(z)|\le\frac{M}{(1-r)^{1-\mu}}, \quad r=|z|,$$

которое показывает, что $f(z)$ удовлетворяет условию указанной теоремы. Но тогда по теоремам 3.52 и 3.53 получаем (68). ◀

Теорема 3.55 (В.И. Смирнов). *Если функция* $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ *регулярна в круге* K: $|z|<1$, *а* $u(r,\theta)$ *непрерывна в замкнутом круге* $\bar{K}$: $|z|\le 1$, *то* $e^{if(z)}\in H_p$ *при всех* $p>0$.

3. Теорема Келлога

Теорема 3.56 (Каратеодори). *При однолистном конформном отображении области* G, *ограниченной замкнутой кривой Жордана, на круг* $|z|<1$ *отображение* $\bar{G}$ *на* $|z|\le 1$ *будет взаимно однозначным и непрерывным.*

Пусть есть спрямляемая кривая Жордана, задаваемая уравнением $z(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$. Определение длины спрямляемой кривой дано в §1 главы II. Из определения очевидно: для того чтобы кривая Жордана была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$ и $y(t)$ были функциями с ограниченным изменением. Длину дуги $z=z(t)$, $a\le t\le t'$, являющуюся функцией от t' обозначим $s(t')$.

Лемма 3.17. *Если функции* $x(t)$ *и* $y(t)$ *абсолютно непрерывны в интервале* (a,b), *то*:

$$s(t)=\int_a^t |z'(\tau)|d\tau\,, \quad a\le t\le b.$$

Пусть теперь конечная односвязная область G плоскости z ограничена спрямляемой замкнутой кривой Жордана Γ, пусть функция $\zeta=\chi(z)$ конформно отображает область G на круг $|\zeta|<1$, а $z=\omega(\zeta)$ есть обратная функция. По теореме 3.56 функция $\chi(z)$ непрерывна в $\overline{G}$, а функция $\omega(\zeta)$ непрерывна в $|\zeta|\le 1$, причём кривая Γ может быть параметрически представлена в виде $z=\omega(e^{it})$, $0\le t\le 2\pi$. Так как Γ спрямляема, то функция $\omega(e^{it})$ – функция с ограниченным изменением в $(0,2\pi)$. По теоремам 3.50 и 3.51 и лемме 3.17 получаем теорему.

Теорема 3.57. *Если функция* $z=\omega(\zeta)$, *регулярная в* $|\zeta|<1$, *однолистно отображает круг* $|\zeta|<1$ *на конечную область* G, *ограниченную замкнутой спрямляемой кривой Жордана* Γ, *то*:

1) $\omega(\zeta)$ *непрерывна в* $|\zeta|\le 1$ *и абсолютно непрерывна на* $|\zeta|=1$;

2) $\omega'(\zeta)\in H_1$;

3) $\dfrac{d\omega(e^{it})}{dt}=ie^{it}\omega'(e^{it})$ *почти всюду на* $|\zeta|=1$;

4) *длина* $s(t',t'')$ *дуги* $z=\omega(e^{it})$, $t'\le t\le t''$, *определяется по формуле*:

$$s(t',t'')=\int_{t'}^{t''}|\omega'(e^{it})|dt. \tag{72}$$

Теорема 3.58 (Линделёф). *Если функция* $z=\omega(\zeta)$, *регулярная в* $|\zeta|<1$, *однолистно отображает круг* $|\zeta|<1$ *на область* G, *ограниченную замкнутой гладкой кривой Жордана* Γ, *а* $\zeta=\chi(z)$ – *обратная функция, то* $\arg\omega'(\zeta)$ *есть непрерывная функция в* $|\zeta|\le 1$, *а* $\arg\chi'(z)$ – *непрерывная функция в* $\overline{G}$. *Кроме того, на* $|\zeta|=1$ *имеем*:

$$\arg\omega'(\zeta)=\theta(\zeta)-\arg\zeta-\frac{\pi}{2}.$$

Теорема 3.59. *При условиях теоремы* 3.58 *справедливы утверждения:* $\ln\omega'(\zeta)\in H_1$, $\omega'(\zeta)\in H_p$ *при всех* $p>0$.

$\triangleright$ Из неравенства, связывающего среднее арифметическое и среднее геометрическое, имеем при условии $0<r<1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\omega'(re^{it})\right|dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|\omega'(re^{\frac{2\pi\cdot i}{n}k})\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\omega'(re^{\frac{2\pi\cdot i}{n}k})\right|}\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\omega'(re^{\frac{2\pi\cdot i}{n}k})\right|=\ln\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\omega'(re^{it})\right|dt\,.$$

Значит, в области $0<r<1$, в силу теоремы 3.57, интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\omega'(re^{it})\right|dt$ ограничен. Так как по теореме 3.58 и интеграл $\int_0^{2\pi}\left|\arg\omega'(re^{i\theta})\right|d\theta$ также ограничен в $0<r<1$, то $\ln\omega'(\zeta)\in H_1$. Второе утверждение теоремы следует из теоремы 3.55, если её применить к функции $u(r,\theta)=\arg\omega'(re^{i\theta})$, которая непрерывна в замкнутом круге $|\zeta|\le 1$ по теореме 3.58. ◀

Простая непрерывная кривая *L на плоскости называется* ***кривой Ляпунова****, если она удовлетворяет следующим условиям:* 1) *в каждой точке L существует определённая касательная и, следовательно, нормаль;* 2) *существуют такие два числа $A>0$ и λ, $0<\lambda\le 1$, одни и те же для всей кривой L, что для любых двух точек $y_1, y_2\in L$ выполняется неравенство*:

$$|\theta|<A|y_1-y_2|^{\lambda},$$

где θ – угол между касательными или нормалями к L в точках y_1, y_2.

Будем называть дугу *l* ***дугой Ляпунова,*** *если она спрямляема, имеет в каждой точке касательную и угол ϑ наклона этой касательной с осью x как функция длины дуги s удовлетворяет условию Гёльдера:*

$$|\vartheta(s_2)-\vartheta(s_1)|<K|s_2-s_1|^{\alpha},$$

где K – некоторая постоянная и $0<\alpha\le 1$.

Пусть *E – линейно упорядоченное измеримое множество.* ***Пространство*** *всех измеримых по Лебегу на E функций $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^p$ суммируема на E $(p\ge 1)$, называется* ***пространством*** *$L_p(E)$****;*** *при этом пишут $f(x)\in L_p(E)$ (или $f(x)\in L_p$ на E).*

Если $p=1$, то вместо L_1 пишем L.

Лемма 3.18 (неравенство Гёльдера). *Если* $g(x)\in L_p$, $f(x)\in L_q$ *на* E, $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *то произведение* $g(x)f(x)\in L$ *на* E *и справедливо неравенство*:

$$\left|\int_E g(x)f(x)dx\right| \le \left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

▷ Заметим, что если $a>0$, $b>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$, то

$$a^\alpha b^\beta \le \alpha a+\beta b. \tag{73}$$

Действительно, функция $\varphi(x)=b^\beta x^\alpha-\alpha x-\beta b$ возрастает в промежутке $0<x<b$, т. к. $\varphi'(x)=\alpha\left(\left(\frac{b}{x}\right)^\beta-1\right)>0$. А поскольку $\varphi(b)=0$, то в $0<x\le b$ имеем $\varphi(x)\le 0$, т. е. (73) доказано при $a\le b$. Меняя ролями a и b, аналогично докажем (73) и при $a\ge b$. Заменим в (73) α, β, a и b на $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, a^p и b^q; тогда при $a>0$, $b>0$, $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ получаем неравенство:

$$ab\le \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q. \tag{74}$$

Так как функции $|g(x)|^p$ и $|f(x)|^q$ суммируемы на E, то из (74) следует суммируемость произведения $g(x)f(x)$. Далее, в силу (74), получаем:

$$\int_E\left(\frac{|g(x)|}{\left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{|f(x)|}{\left(\int_E |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}\right)dx \le \int_E\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{|g(x)|^p}{\left(\int_E |g(x)|^p dx\right)}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|f(x)|^q}{\left(\int_E |f(x)|^q dx\right)}\right)dx,$$

замечая, что $\int_E \frac{|g(x)|^p}{\int_E |g(x)|^p dx}dx=\int_E \frac{|f(x)|^q}{\int_E |f(x)|^q dx}dx=1$, и учитывая, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, видим: неравенство, которое требовалось доказать, доказано. ◀

Доказанное** неравенство называют **неравенством Гёльдера.

Теорема 3.60 (О. Келлог). *Если функция* $z=\omega(\zeta)$, *регулярная в* $|\zeta|<1$, *однолистно отображает круг* $|\zeta|<1$ *на одласть* G, *ограниченную замкнутой гладкой кривой Жордана* Γ , *у которой угол* $\theta(s)$ *наклона касательной к вещественной оси, как функция длины дуги* s *на* Γ, *удовлетворяет условию Гёльдера*:

$$|\theta(s)-\theta(s')|\le k|s-s'|^\mu, \quad 0<\mu\le 1, \quad k=const,$$

то $\omega'(\zeta)$ *непрерывна в* $|\zeta|\le 1$, *а на* $|\zeta|=1$ *имеют место условия Гёльдера*:

$$\left|\omega'(e^{i\theta})-\omega'(e^{i\theta'})\right|\le k_1|\theta-\theta'|^{\mu}; \tag{75}$$

$$\left|\ln\omega'(e^{i\theta})-\ln\omega'(e^{i\theta'})\right|\le k_2|\theta-\theta'|^{\mu}, \tag{76}$$

где k_1, k_2 *— const*.

▷ По теореме 3.58 имеем:

$$\arg\omega'(\zeta)=\theta(\zeta)-\arg\zeta-\frac{\pi}{2},$$

а по теореме 3.59 – $\omega'(\zeta)\in H_p$ *при всех* $p>0$. На основании этого и формулы (72) получаем $(\theta'<\theta)$:

$$|s-s'|=\int_{\theta'}^{\theta}\left|\omega'(e^{i\vartheta})\right|d\vartheta\le\sqrt{\int_{\theta'}^{\theta}\left|\omega'(e^{i\vartheta})\right|^2 d\vartheta\int_{\theta'}^{\theta}d\vartheta}\le k_3|\theta-\theta'|^{\frac{1}{2}},$$

так что:

$$\left|\arg\omega'(e^{i\theta})-\arg\omega'(e^{i\theta'})\right|\le|\theta(s)-\theta(s')|+|\theta-\theta'|\le$$

$$\le k_4|s-s'|^{\mu}+|\theta-\theta'|<k_5|\theta-\theta'|^{\frac{\mu}{2}}.$$

По теореме 3.54 отсюда следует, что $\ln\omega'(\zeta)$, следовательно, и $\omega'(\zeta)$, должны быть непрерывными функциями в $|\zeta|\le 1$. Но тогда получаем:

$$|s-s'|=\int_{\theta'}^{\theta}\left|\omega'(e^{i\vartheta})\right|d\vartheta\le k_6\cdot|\theta-\theta'|,\quad k_6=\max_{|\zeta|=1}|\omega'(\zeta)|,$$

и, следовательно:

$$\left|\arg\omega'(e^{i\theta})-\arg\omega'(e^{i\theta'})\right|\le k_7|\theta-\theta'|^{\mu},$$

откуда, опять по теореме 3.54, следует (76). Далее, при любых w, w' из круга $|w|<M$ имеем:

$$\left|e^{w}-e^{w'}\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^n-w'^n}{n!}\right|\le|w-w'|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{nM^{n-1}}{n!}=k_M|w-w'|.$$

Применяя это к w и w', равным: $w=\ln\omega'(e^{i\theta})$, $w'=\ln\omega'(e^{i\theta'})$, с учётом (76), получаем (75). ◀

4. О переходе аналитической функции в функцию аналитическую

Теорема 3.61. *Если функция* $w=f(z)$, $z=x+iy$, *аналитическая в области* D_z *плоскости* (x,y), *осуществляет однолистное конформное взаимно однозначное отображение* D_z *на область* D_w *плоскости* (u,v),

$f(z)=u+iv$*, то при этом отображении функция, аналитическая в области* D_z*, переходит в функцию, аналитическую в области* D_w (*при этом гармоническая функция, её действительная часть, переходит в гармоническую функцию*).

$\triangleright$ Пусть функция $w=f(z)$ осуществляет указанное отображение и пусть $z=\varphi(w)$ есть обратное отображение. Рассмотрим соответствующие им преобразования, осуществляемые функциями двух действительных переменных:

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y), \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v). \end{cases}$$

Пусть $Q=Q(x,y)$ – некоторая вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция, определённая в области D_z. Выясним, как изменяется при рассматриваемом преобразовании оператор Лапласа функции $Q=Q(x(u,v),y(u,v))=P(u,v)$. Найдём производные $\frac{\partial Q}{\partial x}=Q_x$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=Q_y$ и аналогично обозначенные вторые производные:

$$Q_x=P_u u_x+P_v v_x,\quad Q_y=P_u u_y+P_v v_y,\quad Q_{xx}=P_{uu}u_x^2+P_{vv}v_x^2+2P_{uv}u_x v_x+P_u u_{xx}+P_v v_{xx},$$

$$Q_{yy}=P_{uu}u_y^2+P_{vv}v_y^2+2P_{uv}u_y v_y+P_u u_{yy}+P_v v_{yy}.$$

Далее получаем:

$$Q_{xx}+Q_{yy}=P_{uu}(u_x^2+u_y^2)+P_{vv}(v_x^2+v_y^2)+2P_{uv}(u_x v_x+u_y v_y)+$$
$$+P_u(u_{xx}+u_{yy})+P_v(v_{xx}+v_{yy}).$$

Поскольку u и v являются сопряжёнными гармоническими функциями, то, в силу условий Коши – Римана, выполняются соотношения:

$$u_x^2+u_y^2=u_x^2+v_x^2=v_y^2+v_x^2=|f'(z)|^2\neq 0,\qquad u_x v_x+u_y v_y=0 \text{ и, значит,}$$

$$Q_{xx}+Q_{yy}=(P_{uu}+P_{vv})|f'(z)|^2,\text{ т.е. } \Delta_{u,v}P=\frac{1}{|f'(z)|^2}\Delta_{x,y}Q,\quad |f'(z)|\neq 0.$$

Видим, что в результате нашего преобразования гармоническая в области D_z функция $Q(x,y)$ переходит в функцию $P(u,v)$, гармоническую в области D_w.

Покажем, что в результате нашего преобразования *сопряжённые* гармонические в области D_z функции $O(x,y)$ и $Q(x,y)$ переходят в *сопряжённые* гармонические функции $P(u,v)$ и $R(u,v)$ в области D_w. Пусть функции $O(x,y)$ и $Q(x,y)$ есть сопряжённые гармонические, т. е. в каждой точке $z\in D_z$ выполняются равенства: $O_x=Q_y$ и $O_y=-Q_x$, и пусть $w=f(z)$. Находя производные функций O и Q:

$$O_x = P_u u_x + P_v v_x, \quad O_y = P_u u_y + P_v v_y; \qquad Q_x = R_u u_x + R_v v_x, \quad Q_y = R_u u_y + R_v v_y,$$

в силу сопряжённости этих функций, получаем:

$$O_x = P_u u_x + P_v v_x = Q_y = R_u u_y + R_v v_y; \quad O_y = P_u u_y + P_v v_y = -Q_x = -R_u u_x - R_v v_x,$$

т. е.:

$$P_u u_x + P_v v_x = R_u u_y + R_v v_y; \quad P_u u_y + P_v v_y = -R_u u_x - R_v v_x. \tag{77}$$

Складываем левые и правые части двух последних равенств (равенств (77))

$$P_u(u_x + u_y) + P_v(v_x + v_y) = R_u(u_y - u_x) + R_v(v_y - v_x).$$

Применяя соотношения $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$ (u и v – сопряжённые гармонические функции), приводим последнее равенство к равенству:

$$P_u(u_x + u_y) + P_v(u_x - u_y) = -R_u(u_x - u_y) + R_v(u_x + u_y),$$

из которого следует:

$$(u_x + u_y)(P_u - R_v) = -(u_x - u_y)(P_v + R_u). \tag{78}$$

Вычитая левые и правые части равенств (77), аналогично предыдущему найдём:

$$(u_x + u_y)(P_v + R_u) = -(u_x - u_y)(R_v - P_u). \tag{79}$$

Будем рассматривать (78) и (79) в произвольной точке $z \in D_z$, $w = f(z)$:

$$(u_x + u_y)(P_u - R_v) = -(u_x - u_y)(P_v + R_u). \tag{78}$$

$$(u_x + u_y)(P_v + R_u) = -(u_x - u_y)(R_v - P_u). \tag{79}$$

Условия Коши – Римана для функций P и R имеют вид:

$$P_u = R_v, \quad P_v = -R_u.$$

Сначала покажем, что если выполняется одно из этих условий, то выполняется и другое. Пусть, например, выполняется первое условие. Тогда из равенств (78) и (79) следует:

$$(u_x - u_y)(P_v + R_u) = 0, \quad (u_x + u_y)(P_v + R_u) = 0.$$

Равенства $u_x - u_y = 0$, $u_x + u_y = 0$ не могут выполняться одновременно. В самом деле, решая систему двух последних уравнений, найдём $u_x = 0$, $u_y = 0$. Этого быть не может, т.к. $u_x^2 + u_y^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$. Значит, хотя бы в одном из уравнений:

$$(u_x - u_y)(P_v + R_u) = 0, \quad (u_x + u_y)(P_v + R_u) = 0$$

коэффициент при сумме $(P_v + R_u)$ не равен нулю. Из него находим $P_v + R_u = 0$, т. е. выполняется и другое условие Коши – Римана. Из доказанного следует, что если не выполняется одно из условий Коши –

Римана, то не выполняется и другое, т. е. эти условия или оба выполняются, или оба не выполняются.

Допустим, что эти условия не выполняются, и будем доказывать, что допущение является неверным. Для этого запишем их в виде:

$$P_u - R_v = 0, \quad P_v + R_u = 0 \tag{80}$$

и рассмотрим все возможные случаи значений коэффициентов при левых частях равенств (80) в соотношениях (78) и (79). Таких случаев может быть три:

1) $u_x + u_y \neq 0$, $u_x - u_y \neq 0$;

2) $u_x + u_y \neq 0$, $u_x - u_y = 0$ (или $u_x + u_y = 0$, $u_x - u_y \neq 0$);

3) $u_x = 0$, $u_y \neq 0$ (или $u_x \neq 0$, $u_y = 0$).

Случай $u_x + u_y = 0$, $u_x - u_y = 0$ невозможен (см. выше).

Итак, $P_u - R_v \neq 0$, $P_v + R_u \neq 0$ и начинаем со случая 1.

Получаем: $\dfrac{P_u - R_v}{P_v + R_u} = \dfrac{-(P_v + R_u)}{P_u - R_v}$, откуда $(P_u - R_v)^2 = -(P_v + R_u)^2$ или $P_u - R_v = 0$, $P_v + R_u = 0$.

Рассмотрим случай 2. Здесь $u_x = u_y \neq 0$. Из (78) находим

$2u_x(P_u - R_v) = 0$, откуда $P_u - R_v = 0$. Из (79) $P_v + R_u = 0$.

В 3 случае (78) и (79) принимают вид:

$$u_y(P_u - R_v) = u_y(P_v + R_u), \quad u_y(P_v + R_u) = -u_y(P_u - R_v).$$

А поскольку $P_u - R_v \neq 0$, $P_v + R_u \neq 0$ (по нашему допущению), то получим: $\dfrac{P_u - R_v}{P_v + R_u} = \dfrac{-(P_v + R_u)}{P_u - R_v}$, откуда: $(P_u - R_v)^2 = -(P_v + R_u)^2$ или $P_u - R_v = 0$, $P_v + R_u = 0$.

Итак, показано, что в результате нашего преобразования сопряжённые гармонические в области D_z функции $O(x, y)$ и $Q(x, y)$ переходят в сопряжённые гармонические функции $P(u, v)$ и $R(u, v)$ в области D_w.

Другими словами, если функция $w = f(z)$, $z = x + iy$, аналитическая в области D_z плоскости (x, y), осуществляет однолистное конформное взаимно однозначное отображение D_z на область D_w плоскости (u, v), $w = f(z) = u + iv$, то при этом отображении функция, аналитическая в области D_z, переходит в функцию, аналитическую в области D_w. ◄

5. О задаче Дирихле в области с гладкой границей

Пусть дана плоская ограниченная односвязная выпуклая область G плоскости z ограниченная гладкой спрямляемой жордановой кривой $\partial G = \Gamma$ (длиной L); на кривой Γ задана непрерывная функция φ и требуется найти функцию $U = U(x,y)$, которая:

1) была бы определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{G} = G + \Gamma$;

2) имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяла уравнению Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{в области } G;$$

3) принимала на границе Γ значения заданной непрерывной функции φ (задача Дирихле).

Пусть выполняются условия теоремы 3.49. И пусть длина кривой Γ равна L, а окружность C имеет длину 2π. Возьмём за параметр кривой Γ переменную длину l её дуги, отсчитываемую от некоторой начальной точки $\zeta_0 = \zeta(0)$, т. е. Γ: $\zeta = \zeta(l)$, $0 \le l \le L$; Аналогично возьмём за параметр окружности C переменную длину s её дуги, отсчитываемую от начальной точки $\omega_0 = \omega(0)$, т. е. C: $\omega = \omega(s)$, где $0 \le s \le 2\pi$ (гл. 2, § 1, п. 4, следствие 2.2). Выберем на кривой Γ три точки $\zeta_k = \zeta(l_k)$ такие, что $0 < l_1 < l_2 < l_3 < L$, а на кривой C – три точки $\omega_k = \omega(s_k)$ такие, что $s_k = \frac{2\pi}{L} \cdot l_k$, т. е. $\omega_k = \omega\left(\frac{2\pi}{L} \cdot l_k\right)$, $k = 1,2,3$.

Пусть $w = \chi(z)$ – то единственное конформное и взаимно однозначное отображение области G на круг K, которое три выбранные граничные точки $z_k = \zeta_k$ области $\overline{G}$ переводит в три выбранные граничные точки $w_k = \omega_k$ области $\overline{K}$ (осуществляет правильное преобразование границ), а $z = \sigma(w)$ – обратное отображение (теоремы 3.48 и 3.48*) (*точки* z *области* $\overline{G}$, *лежащие на границе* Γ, *обозначаются* ζ, *а для точек* w *круга* $\overline{K}$, *лежащих на окружности* C, *применяется символ* ω).

При указанном отображении границы Γ и C преобразовываются друг на друга взаимно однозначно и непрерывно (гомеоморфно) (см. теорему 3.44). При этом точки $\zeta = \zeta(l)$ и $\omega = \omega(s) = \omega\left(\frac{2\pi}{L}\cdot l\right)$, $0 \le l \le L$, соответствуют друг другу, что указываем так: $\zeta(l) \leftrightarrow \omega\left(\frac{2\pi}{L}\cdot l\right)$.

Определим на C функцию ψ, положив $\psi\left(\omega\left(\frac{2\pi l}{L}\right)\right) = \varphi(\zeta(l))$ (функция φ – это непрерывная функция из задачи Дирихле, сформулированной выше). Очевидно, что так определённая функция ψ будет непрерывной на окружности C. Решение задачи Дирихле в круге K при граничной функции ψ даётся интегральной формулой Пуассона для гармонической функции:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(1,t)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}dt. \qquad (81)$$

функция $u(r,\theta)$ непрерывна в круге $|w| \le 1$ (последнее равенство получается после определения функции $u(r,\theta)$ на окружности C равенством $u(1,t) = \psi(t)$; гл. 2, § 6, п.4, теорема 2.65).

В дальнейшем нам будет недостаточно только непрерывности функция ψ на окружности C, поэтому мы усилим требования, предъявляемые к функции φ, а именно потребуем, чтобы функция φ удовлетворяла условию Гёльдера с показателем μ, где $0 < \mu \le 1$. Кроме того, докажем следующую лемму.

Лемма 3.19. *Если производная $\sigma'(w)$ функции $\sigma(w)$ из теоремы* 3.49 *непрерывна в замкнутом круге $\bar{K}$: $|w| \le 1$, то для любых двух точек $w_1 = (x_1, x_2) \in \bar{K}$ и $w_2 = (y_1, y_2) \in \bar{K}$ выполняется неравенство*:

$$|\sigma(w_1) - \sigma(w_2)| \le 2M \cdot |w_1 - w_2|,$$

где M – $const$.

▷ Пусть для определённости $y_1 < x_1$. Тогда:

$$\frac{|\sigma(w_1)-\sigma(w_2)|}{|w_1-w_2|} \le \frac{|\sigma(w_1)-\sigma(w^*)|}{|w_1-w_2|} + \frac{|\sigma(w^*)-\sigma(w_2)|}{|w_1-w_2|},$$

где $w^* = (y_1, x_2)$, отрезок $[w^*, w_2]$ (или $[w_2, w^*]$) может вырождаться в точку. Полученные слагаемые рассматриваются одинаково. Рассмотрим, например, первое:

$$\frac{|\sigma(w_1)-\sigma(w^*)|}{|w_1-w_2|} \le \frac{|\sigma(x_1,x_2)-\sigma(y_1,x_2)|}{|x_1-y_1|} = |\sigma'_{x_1}(\xi_1, x_2)|, \qquad y_1 < \xi_1 < x_1.$$

Отсюда: $\dfrac{|\sigma(w_1)-\sigma(w^*)|}{|w_1-w_2|} \le |\sigma'_{x_1}(\xi_1,x_2)|$, $\quad |\sigma(w_1)-\sigma(w^*)| \le |\sigma'_{x_1}(\xi_1,x_2)| \cdot |w_1-w_2|$.

Для второго слагаемого получаем (оно рассматривается только тогда, когда отрезок с концами w^* и w_2 не вырождается в точку):

$$\left|\sigma(w_2)-\sigma(w^*)\right| \le \left|\sigma'_{x_2}(y_1,\xi_2)\right|\cdot\left|w_1-w_2\right|,$$

точка (y_1,ξ_2) лежит между точками (y_1,x_2) и (y_1,y_2). Обозначая символом M величину $\max\limits_{w\in\bar{K},\, j=1,2}\left|\sigma'_{x_j}(w)\right|$, получаем доказываемое неравенство. ◀

Пусть $w=\chi(z)$ – однолистное конформное отображение ограниченной односвязной выпуклой области G с границей Γ, Γ – замкнутая жорданова кривая, на круг K: $|w|<1$ с границей C: $|w|=1$, $z=\sigma(w)$ – ему обратное конформное отображение.

Теорема 3.62. *Пусть* $\psi\left(\omega\left(\frac{2\pi l}{L}\right)\right)=\varphi(\zeta(l))$, *функция* φ *удовлетворяет на кривой* Γ *условию Гёльдера с показателем* μ, *где* $0<\mu\le 1$, *(*φ *– функция из задачи Дирихле) и пусть, кроме того, функция* $z=\sigma(w)$ *и граница* Γ *области* G *удовлетворяют условиям теоремы Келлога. Тогда на окружности* $|w|=1$ *или, что то же самое, на* $|\omega|=1$ *имеет место неравенство:*

$$\left|\psi(\omega_2)-\psi(\omega_1)\right| \le \tilde{M}\cdot\left|\omega_2-\omega_1\right|^{\mu}$$

с некоторой константой $\tilde{M}$.

▷ Так как, в силу леммы 3.19, выполняется неравенство $\left|\sigma(w_1)-\sigma(w_2)\right|\le 2M\cdot\left|w_1-w_2\right|$, то справедлива цепочка неравенств и равенств:

$$\left|\psi(\omega_2)-\psi(\omega_1)\right| = \left|\varphi(\zeta_2)-\varphi(\zeta_1)\right| \le A\left|\zeta_2-\zeta_1\right|^{\mu} =$$
$$= A\left|\sigma(\omega_2)-\sigma(\omega_1)\right|^{\mu} \le A(2M)^{\mu}\cdot\left|\omega_2-\omega_1\right|^{\mu},$$

точки ω и ζ с одинаковыми индексами – это точки, лежащие на границах соответствующих областей и соответствующие друг другу при взаимно обратных отображениях χ и σ. ◀

Напомним, что обозначения $u(r,\theta)$ и $v(r,\theta)$ употребляются в качестве обозначений, равнозначащих с обозначениями $u(x,y)$, $v(x,y)$ и для краткости вместо $u(x,y)$, $v(x,y)$ пишем $u(w)$, $v(w)$, где $w=x+iy$. И ещё, гармоническая в круге $K:|w|<1$ функция $u(x,y)$ есть действительная часть некоторой аналитической в этом круге функции $f(w)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $v(x,y)$ – гармоническая функция, сопряженная с $u(x,y)$, причём функция $f(w)$ будет однозначной в круге K, если вполне определенным образом выбрать константу, которая появляется при нахождении функции $v(x,y)$ [20, раздзел 18, § 18.2, п. 4$^{\text{o}}$].

Пусть теперь $f(w)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ – аналитическая в круге $|w|<1$ функция, $v(r,\theta)$ – гармоническая функция, сопряжённая с функцией $u(r,\theta)$, а $u(r,\theta)$ – решение задачи Дирихле, определяемое формулой (81) (определения гармонической функции и сопряжённых гармонических функций содержатся в гл. II, § 4, п. 4). Функция $f(w)$ и её действительная часть $u(r,\theta)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.54 $(u(1,\omega)=\psi(\omega))$. Следовательно, $f(w)$ удовлетворяет в замкнутом круге $|w|\le 1$ комплексному условию Гёльдера (теорема 3.54) и, значит, она непрерывна в $|w|\le 1$. Но тогда непрерывны её действительная и мнимая части (в том же круге) [20, раздзел 18, параграф 18.1, п. 4°]. Таким образом, у функции $f(w)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ её мнимая часть непрерывна в указанном замкнутом круге (как и её действительная часть).

Зададим на окружности $|w|=1$ непрерывную функцию ψ_v, положив её в точках окружности, которые обозначаются ω, равной $\psi_v(\omega)=v(\omega)$. Образуем для функции $\psi_v(\omega)$ интеграл Пуассона, который обозначим, например, $\Theta(r,\theta)$:

$$\Theta(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_v(\alpha)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha .$$

Докажем, что функции $\Theta(r,\theta)$ является гармонической в круге $|w|<1$ и непрерывной в замкнутом круге $|w|\le 1$ (так же, как при доказательстве теоремы 2.65 (п. 4, § 6, гл. II)). Это будет означать, что функция $\Theta(r,\theta)$ есть решение задачи Дирихле в круге для заданной на окружности функции ψ_v. Поскольку это решение единственно, а функция $v(r,\theta)$ является гармонической в открытом круге, непрерывной в круге замкнутом и принимает на окружности значения $v(\omega)=\psi_v(\omega)$, т. е. является решением той же самой задачи Дирихле, то указанные две функции совпадают $v(r,\theta)=\Theta(r,\theta)$. Но тогда функция $v(r,\theta)$, как и функция $u(r,\theta)$, представима интегралом Пуассона. Таким образом:

$$f(w)=u(r,\theta)+iv(r,\theta), \qquad u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\alpha)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha ,$$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_v(\alpha)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}d\alpha .$$

Отсюда следует, что $f(w)\in H_1$ (§3, п.5, теорема 3.17).

Возвращаясь на плоскость z, в области $\overline{G}$ определим функцию $F(z)$, положив $F(z)=F(\sigma(w))=f(w)$, $w\in\overline{K}$, где $\overline{K}$: $|w|\le 1$ (см. теорему 3.49). Эта функция является аналитической в G (теорема 3.61) и непрерывной в $\overline{G}$ (функция $f(w)$ непрерывна в $\overline{K}$). Как мы знаем, функция $F(z)\in E_1$ тогда и только тогда, когда $F(\sigma(w))\cdot\sigma'(w)\in H_1$ (см. § 4, п. 4). При выполнении условий теоремы 3.62 $F(\sigma(w))\cdot\sigma'(w)\in H_1$, т. к. $F(\sigma(w))=f(w)$, и, следовательно, $F(z)\in E_1$. Но в этом случае функция $F(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.36 и, в силу этой теоремы, для неё имеет место формула Коши:

$$F(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \tag{82}$$

(теоремы 3.35, 3.36, 3.49, 3.61).

Известно, что *функция* $F(z)$, *определяемая формулой* (82), *однозначна в односвязной области* G, *для которой кривая* Γ *является границей, и имеет в области производную* $F'(z)$ [28_2, гл. IV, § 3, п. 3].

Известно также следующее: *если однозначная функция* $F(z)$ *комплексной переменной* z *имеет всюду в области* G *первую производную, то она имеет в этой области и производные всех высших порядков* [28_2, гл. IV, § 3, п. 4]. В частности, для такой функции $F(z)$ её действительная и мнимая части U и V имеют непрерывные частные производные второго порядка в области G.

Дифференцируя первое из условий Коши – Римана по x, второе по y и складывая полученные равенства, приходим к уравнению Лапласа для функции U (гл. II, § 2, п. 1 и § 4, п. 4). Это означает, что действительная часть функции $F(z)$ является функцией гармонической. Аналогично можно показать, что её мнимая часть также есть функция гармоническая. Из сказанного выше следует, что функция $U(z)=U(x,y)$ есть решение задачи Дирихле в области G с граничной функцией $\varphi(\zeta)$, заданной на границе Γ $(\zeta\in\Gamma)$ этой области.

Обосновать последнее высказанное утверждение можно было бы и проведением следующих рассуждений. Выше были выбраны согласованные граничные точки $\zeta_k\leftrightarrow\omega_k$ на границах Γ и C, благодаря чему обеспечивалось правильное преобразование границ, и тем самым единственность конформного отображения $w=\chi(z)$ (см. начало этого пункта и теорему 3.48*). При этом функции φ и ψ связывались равенством $\psi\left(\omega\left(\frac{2\pi l}{L}\right)\right)=\varphi(\zeta(l))$. Возвращаясь на плоскость z и полагая $U(z)=U(\sigma(w))=u(w)$, $z=\sigma(w)$ – функция, обратная функции $w=\chi(z)$, в силу теоремы 3.61, делаем вывод, что функция $U(z)=U(x,y)$ является гармонической в области G. Она непрерывна в области $\overline{G}$, т. к.

$u(w)=u(\chi(z))$, функция χ продолжена по непрерывности на границу Γ и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$, а функция u непрерывна в $\overline{K}$ как решение задачи Дирихле в круге. Кроме того, $U(z)$ совпадает на границе Γ с заданной там непрерывной функцией φ (удовлетворяющей условию Гёльдера $H(\mu)$, $(0<\mu\le 1)$) (теорема 3.49 и равенство $\psi\left(\omega\left(\frac{2\pi l}{L}\right)\right)=\varphi(\zeta(l))$. Таким образом, функция $U(z)$, т.е. функция $U(x,y)$, является решением задачи Дирихле в области G.

§ 7. О принадлежности интеграла типа Коши классу $C_{m+\alpha}(\overline{G})$

1. Угловые граничные значения интеграла типа Коши

Пусть:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \tag{83}$$

есть интеграл типа Коши, $L-$ гладкая (непрерывно дифференцируемая, без особых точек) жорданова спрямляемая кривая (она может быть замкнутой или незамкнутой) и $\varphi(\zeta)$ – функция, непрерывная на кривой L, точка $z\notin L$ (чуть ниже мы потребуем от функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворения условию Гёльдера). Будем рассматривать переменную ζ как функцию переменной длины s дуги кривой L, отсчитываемой от её начальной точки $\zeta(0)$:

$$\zeta=\zeta(s),\quad 0\le s\le l \quad (l \ -\text{длина } L).$$

Такое рассмотрение возможно (гл. 2, § 1, п. 4, следствие 2.2).

Действительно, если $\bar r(t)=(x(t),y(t))$ $(r(t)=(x(t),y(t)),\ \ z(t)=x(t)+iy(t))$, то из равенства $|\bar r'|=\sqrt{x'^2+y'^2}$ имеем: точка $(x(t),y(t))$ кривой L не является особой тогда и только тогда, когда в ней имеет место неравенство $x'^2+y'^2>0$ (L – кривая без особых точек, вектор-функция $\bar r(t)$ и отображения $r(t)$, $z(t)$ соответствуют друг другу) . Если в качестве параметра t взять переменную длину дуги s, то $\zeta'(s)=x'(s)+iy'(s)$. Условие отсутствия на кривой особых точек примет вид:

$$|\zeta'(s)|^2=(x'(s))^2+(y'(s))^2>0, \text{ т. е. } |\zeta'(s)|>0,\quad \forall s\in[0,l].$$

Пусть s_0 – произвольное значение длины дуги s $(s_0\in[0,l])$, причём $s_0\ne 0$, $s_0\ne l$ (если кривая является незамкнутой), и пусть $\zeta_0=\zeta(s_0)$. Пусть, кроме того, существуют числа $K>0$ и :

$0<\alpha\le 1$ и такие, что:

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)|<K|\zeta-\zeta_0|^{\alpha},$$

где $\zeta=\zeta(s)$ $(\forall s\in[0,l])$. Таким образом, ζ_0 и ζ есть точки линии L, причём $\zeta_0=\zeta(s_0)$ – произвольная, но фиксированная точка на L, а $\zeta=\zeta(s)$ – точка, которая может перемещаться по кривой L (вышезаписанное неравенство означает, что функция φ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ при фиксированной точке ζ_0 на кривой L. Введём в рассмотрение интеграл:

$$I_0=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$$

и покажем, что он абсолютно сходится (при стремлении $\zeta\to\zeta_0$ знаменатель подынтегральной дроби стремится к нулю). Имеем:

$$\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right|=\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{(\zeta-\zeta_0)^{\alpha}}(\zeta-\zeta_0)^{\alpha-1}\zeta'(s)ds\right|<KMm^{\alpha-1}|s-s_0|^{\alpha-1}ds,$$

где $m>0$ – наименьшее значение производной $\zeta'(s)$ на отрезке $[0,l]$, M – её наибольшее значение на этом отрезке. Получение неравенства $|\zeta-\zeta_0|\le m^{\alpha-1}(s-s_0)^{\alpha-1}$ в случае $s-s_0>0$ показано ниже более подробно. С учётом последнего неравенства получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right|<K_1\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_0^{s_0-\varepsilon_1}(s_0-s)^{\alpha-1}ds+K_1\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{s_0+\varepsilon_2}^{l}(s-s_0)^{\alpha-1}ds=$$

$$=-K_1\frac{1}{\alpha}\lim_{\varepsilon_1\to+0}(s_0-s)^{\alpha}\Big|_0^{s_0-\varepsilon_1}+K_1\frac{1}{\alpha}\lim_{\varepsilon_2\to+0}(s-s_0)^{\alpha}\Big|_{s_0+\varepsilon_2}^{l}=\frac{K_1}{\alpha}\left(s_0^{\alpha}+(l-s_0)^{\alpha}\right)<\frac{2K_1}{\alpha}l^{\alpha}=K_2,$$

где $K_1=\dfrac{1}{2\pi}KMm^{\alpha-1}$.

Абсолютную сходимость несобственного интеграла:

$$I_0=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta \tag{84}$$

можно было показать и так. Договоримся обозначать часть кривой L, соответствующую определенному сегменту изменения ее длины $s:a\le s\le b$, символом $[a,b]$. Тогда $[a,b]$ – это часть кривой L, которая соответствует изменению длины s от значения a до значения b. Для любой части $[a,b]$, не содержащей точки $\zeta_0=\zeta(s_0)$ (пусть, для определенности, будет $s_0<a<b$), в силу наложенного выше условия $H(\alpha)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds<\frac{K}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}ds.$$

Так как $\lim\limits_{s\to s_0}\left|\frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0}\right|=|\zeta'(s_0)|\neq 0$, то получаем $\left|\frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0}\right|>\frac{1}{2}|\zeta'(s_0)|=c_1>0$ при условии $|\zeta-\zeta_0|<\rho$, где ρ – достаточно малое положительное число. И $\left|\frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0}\right|>\frac{\rho}{l}=c_2>0$ при $|\zeta-\zeta_0|\geq\rho$. Таким образом, $\left|\frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0}\right|>c>0$ при всех $\zeta\in L$, где $c=\min\{c_1,c_2\}$.

Отсюда: $|\zeta-\zeta_0|^{1-\alpha}>c^{1-\alpha}|s-s_0|^{1-\alpha}$, $|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}<c^{\alpha-1}|s-s_0|^{\alpha-1}$.

И, кроме того:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds<\frac{K}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}ds.$$

Получаем $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds<K'\int\limits_a^b(s-s_0)^{\alpha-1}ds=K'\frac{(b-s_0)^\alpha-(a-s_0)^\alpha}{\alpha}\underset{a,b\to s_0}{\to}0$,

где $K'=\frac{Kc^{\alpha-1}}{2\pi}$.

Или рассуждаем так. Пусть $m>0$ есть наименьшее значение производной $\zeta'(s)$ на $[0,l]$ и $s_0\neq 0$, $s_0\neq l$. При $s_0<a<b<l$, $s\in(a,b)$ будет

$$|\zeta-\zeta_0|=|\zeta(s)-\zeta(s_0)|=\zeta(s)-\zeta(s_0)=\zeta'(\xi)(s-s_0)\geq m(s-s_0),$$

$$|\zeta-\zeta_0|^{1-\alpha}\geq m^{1-\alpha}(s-s_0)^{1-\alpha}\quad\text{или}\quad|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}\leq m^{\alpha-1}(s-s_0)^{\alpha-1},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds<\frac{K}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}ds\leq\frac{Km^{\alpha-1}}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}(s-s_0)^{\alpha-1}ds \qquad (*)$$

При $0<a<b<s_0$, $s\in(a,b)$ имеем:

$$|\zeta-\zeta_0|=|\zeta(s)-\zeta(s_0)|=-\left(\zeta(s)-\zeta(s_0)\right)=-\zeta'(\xi)(s-s_0)=\zeta'(\xi)(s_0-s)\geq m(s_0-s)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |\zeta-\zeta_0|^{1-\alpha}\geq m^{1-\alpha}(s_0-s)^{1-\alpha}\quad\text{или}\quad|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}\leq m^{\alpha-1}(s_0-s)^{\alpha-1}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds<\frac{K}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}ds\leq\frac{Km^{\alpha-1}}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}(s_0-s)^{\alpha-1}ds; \qquad (**)$$

$$|\zeta-\zeta_0|^{1-\alpha}>c^{1-\alpha}|s-s_0|^{1-\alpha}\quad\text{или}\quad|\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}<c^{\alpha-1}|s-s_0|^{\alpha-1}.$$

Получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds<K'\int\limits_a^b(s-s_0)^{\alpha-1}ds=K'\frac{(b-s_0)^\alpha-(a-s_0)^\alpha}{\alpha}\underset{a,b\to s_0}{\to}0,$$

где $K'=\frac{Kc^{\alpha-1}}{2\pi}$.

Итак, интеграл (84) абсолютно сходится. Выше было получено (и рассматривался случай $s_0 < a < b < l$, $s \in (a,b)$):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds < K'\int\limits_a^b (s-s_0)^{\alpha-1}ds = K'\frac{(b-s_0)^{\alpha}-(a-s_0)^{\alpha}}{\alpha}\underset{a,b\to s_0}{\to} 0 .$$

В случае $a = s_0+\varepsilon < l$, $b = l$ будет $(s_0 > 0)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[a,b]}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\right|ds < K'\frac{(l-s_0)^{\alpha}-(s_0+\varepsilon-s_0)^{\alpha}}{\alpha}\underset{\varepsilon\to+0}{\to}\frac{K'(l-s_0)^{\alpha}}{\alpha} < \frac{K'l^{\alpha}}{\alpha},$$

так как: $\dfrac{du^{\alpha}}{du} = \alpha u^{\alpha-1} > 0$ при $\alpha > 0$, $u > 0$ и $0 < l-s_0 < l$.

Представим теперь интеграл типа Коши (83) в виде:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta_0)d\zeta}{\zeta-z} . \tag{85}$$

Теорема 3.63. *Справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta = I_0 . \tag{86}$$

$\triangleright$ Будем предполагать, что $z\to\zeta_0$, оставаясь внутри произвольного угла g_θ раствора 2θ, где $2\theta < \pi$, с вершиной в точке ζ_0 и биссектрисой, совпадающей с нормалью к кривой в той точке. Такого рода стремление $z\to\zeta_0$ называют *«стремлением по некасательным к кривой L путям».*

Итак, пусть θ удовлетворяет условию $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. Фиксируем θ_0 такое, что $\theta<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$, и рассмотрим окрестность $|z-\zeta_0|<\rho$ такую, что ни одна точка кривой L (кроме точки ζ_0), лежащая в этой окрестности, не принадлежит углу g_{θ_0} (а также углу, вертикальному с ним). Пусть $g_{\theta,\rho}$ – часть угла g_θ, принадлежащая указанной окрестности. Двигаясь по кривой L от точки ζ_0 в двух направлениях, до первых точек ее пересечения с окружностью $|\xi-\zeta_0|=\rho$, получим точки A, B и дугу кривой между ними $\sigma_\rho=[s_0-\varepsilon', s_0+\varepsilon'']\subset L$ (рисунок 2).

Пусть z есть произвольная точка, принадлежащая $g_{\theta,\rho}$. Рассмотрим окружность C, с центром в точке ζ_0, проходящую через точку z, и точку z', лежащую на этой окружности, причём точка z'

является точкой пересечения окружности C и стороны угла g_θ (рисунок 2*). Пусть точка z'' есть основание перпендикуляра, опущенного из точки z' на сторону угла g_{θ_0} (точки z, z', z'' указаны на рисунке 2* стрелками). Очевидно, что для любой точки $\zeta \in \sigma_\rho$ (точка ζ также указана стрелкой) будет:

$$\frac{|z-\zeta|}{|z-\zeta_0|} = \frac{|z-\zeta|}{|z'-\zeta_0|} > \frac{|z'-\zeta|}{|z'-\zeta_0|} > \frac{|z'-z''|}{|z'-\zeta_0|} = \sin(\theta_0 - \theta)$$

Тогда: $$\frac{|z-\zeta_0|}{|z-\zeta|} < \frac{1}{\sin(\theta_0 - \theta)}.$$

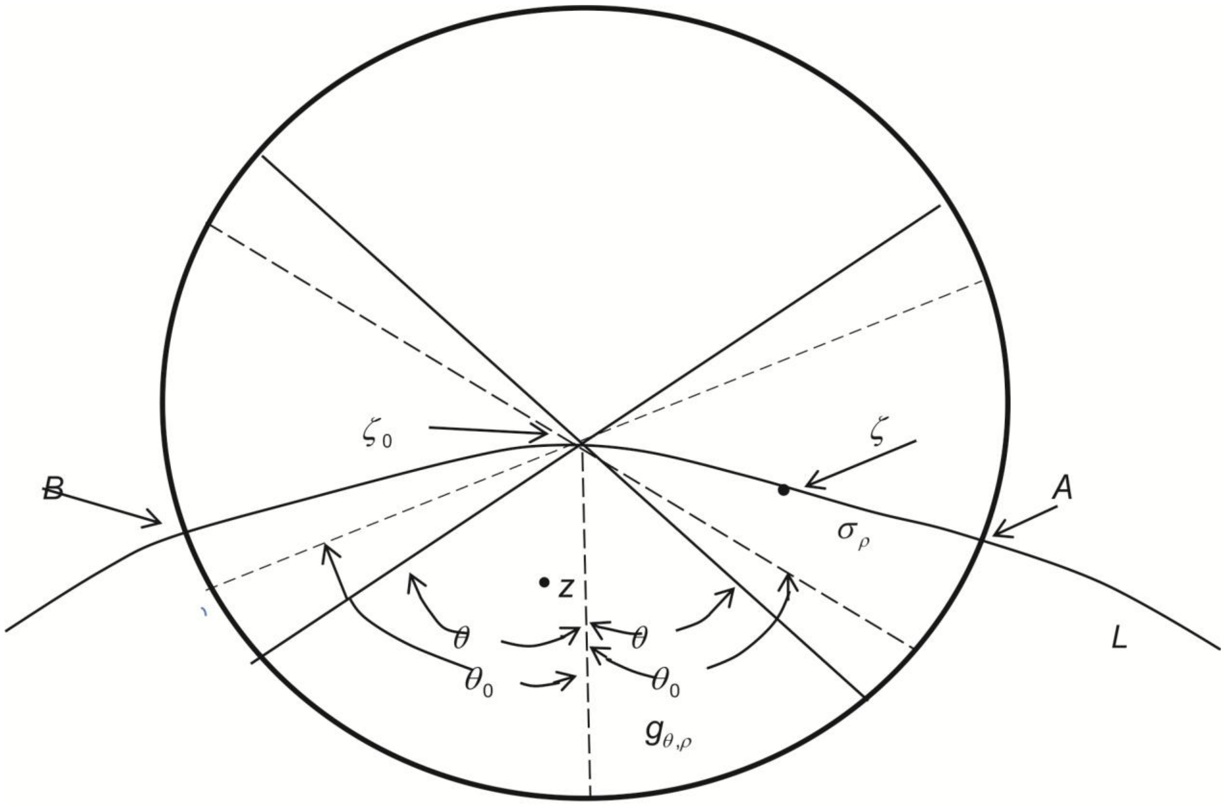


Рис. 2

Справедливы равенства:

$$I = \left| I_0 - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\right)\frac{\zeta_0 - z}{(\zeta - z)(\zeta-\zeta_0)} d\zeta \right| = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{L-\sigma_\rho} \left(\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\right)\frac{\zeta_0 - z}{(\zeta - z)(\zeta-\zeta_0)} d\zeta \right|, \quad I_2 = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_\rho} \left(\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\right)\frac{\zeta_0 - z}{(\zeta - z)(\zeta-\zeta_0)} d\zeta \right|.$$

С учетом ранее полученного неравенства находим:

$$I_2 < \frac{1}{2\pi \cdot \sin(\theta_0 - \theta)} \int\limits_{\sigma_\rho} \left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right| d\zeta .$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Так как несобственный интеграл I_0 абсолютно сходится, то существует такое число $\rho > 0$, что $I_2 < 0.5\varepsilon$. Зафиксируем это значение ρ и рассмотрим I_1.

Расстояние δ_0 точки ζ_0 до дуги $L - \sigma_\rho$ больше нуля. Если $\zeta \in L - \sigma_\rho$, то $0 < \delta_0 \le |\zeta - \zeta_0| \le |\zeta - z| + |\zeta_0 - z|$, откуда находим $|\zeta - z| \ge \delta_0 - |\zeta_0 - z|$. Поэтому при условии $|z - \zeta_0| < \frac{\delta_0}{2}$ будет:

$$I_1 < \frac{|\zeta_0 - z|}{\pi\delta_0^2} \int\limits_{L-\sigma_\rho} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| d\zeta \le \frac{|\zeta_0 - z|}{\pi\delta_0^2} \int\limits_{L} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| d\zeta .$$

Отсюда следует, что при всех z, достаточно близких к точке ζ_0, будет $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, при всех z, достаточно близких к точке ζ_0 и принадлежащих $g_{\theta,\rho}$, выполняется неравенство $I < \varepsilon$. Поскольку:

$$I = \left| I_0 - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta \right|,$$

то равенство (86) доказано (оно доказано для точек z, стремящихся к точке ζ_0 по путям, не касательным к кривой L). ◀

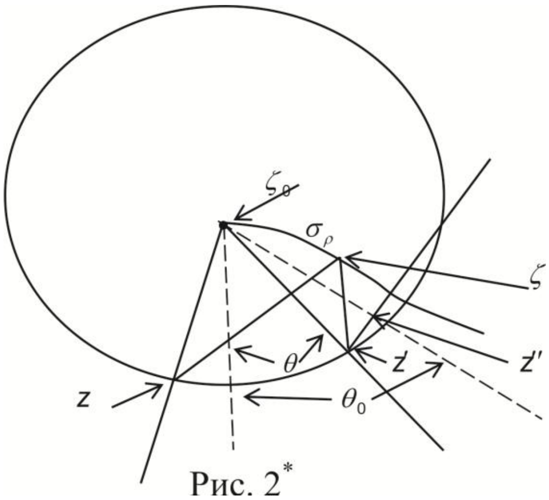


Рис. 2*

Будем теперь считать кривую L замкнутой, точку z – лежащей внутри области, ограниченной кривой L, и рассмотрим второй из интегралов правой части равенства (85), т. е. интеграл

$$I'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\zeta_0) d\zeta}{\zeta - z} .$$

Это – интеграл типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

с постоянной, т. е. аналитической функцией $\varphi(\zeta)$ (числитель дроби, стоящей под интегралом есть функция $\varphi(\zeta) \equiv \varphi(\zeta_0)$). В [20, раздзел 18, 18.5, 8$^{\text{o}}$] показано, что в случае, когда функция $\varphi(\zeta)$ является аналитической на замкнутом контуре L, справедливо равенство:

$$\lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0),$$

т. е. в нашем случае:

$$\lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta_0)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta_0)d\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0),$$

так как $\varphi(\zeta) \equiv \varphi(\zeta_0)$. Значит:

$$\lim_{z\to\zeta_0} F(z) = \lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$I_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta_0)d\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0).$$

Рассмотрим интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta_0)d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0}.$$

Здесь L – гладкая спрямляемая жорданова замкнутая кривая длины l, ζ_0 – произвольная фиксированная точка, лежащая на этой кривой. Более общий вид интеграла, стоящего в правой части, следующий:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta . \tag{87}$$

Но интеграл типа Коши определён при условии $z \notin L$. Если же точка $z = \zeta_0$ лежит на контуре L (как и точка ζ), то этот интеграл, вообще говоря, расходится, т. к. знаменатель подынтегральной функции стремится к нулю при стремлении $\zeta \to \zeta_0$, и функция $\dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}$ оказывается неинтегрируемой. Поэтому, прежде всего, необходимо определить смысл выражения (87). С этой целью обозначим s_0 значение дуги s контура L, соответствующее точке ζ_0, а L_ε – часть кривой L, оставшуюся после удаления из L меньшей дуги (содержащей точку ζ_0), концами которой служат точки $\zeta_0^- = \zeta(s_0 - \varepsilon)$, $\zeta_0^+ = \zeta(s_0 + \varepsilon)$ $\left(\zeta(s_0) = \zeta_0\right)$.

Интегралом (87) (*в смысле* ***главного значения*** *по Коши*) *называется* ***следующий предел***:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\,. \qquad (88)$$

Этот предел существует, если функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию Гёльдера:

$$|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)| < K|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha,$$

$0<\alpha\le 1$, K – некоторая постоянная, ζ_1,ζ_2 – любые две точки кривой L [28_2, гл. IV, § 3, п. 8].

Нам потребуется (88) в случае $\varphi(\zeta)=const$ и следующая лемма.

Лемма 3.20. *При сформулированных выше предположениях имеет место равенство*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\zeta-\zeta_0}d\zeta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon}\frac{1}{\zeta-\zeta_0}d\zeta = \frac{1}{2}\,.$$

Для доказательства этой леммы воспользуемся рисунком 3, на котором обозначены точки $\zeta_0^- = \zeta(s_0-\varepsilon)$, $\zeta_0^+ = \zeta(s_0+\varepsilon)$, $\zeta_0=\zeta(s_0)$ и часть кривой L, названная L_ε, и напомним некоторые определения.

Элементом *в точке* $\alpha\in L$ *называем* ***функцию*** $f_\alpha(z)$, *регулярную в некоторой области, содержащей точку* $z=\alpha$. ***Функцию*** $\eta=W(z)$, *аналитическую на кривой* L, *называем* ***аналитическим продолжением элемента*** $f_a(z)$***,*** *заданного в начальной точке* $z=a$ *этой кривой* (см. [9, гл. III, § 1]) .

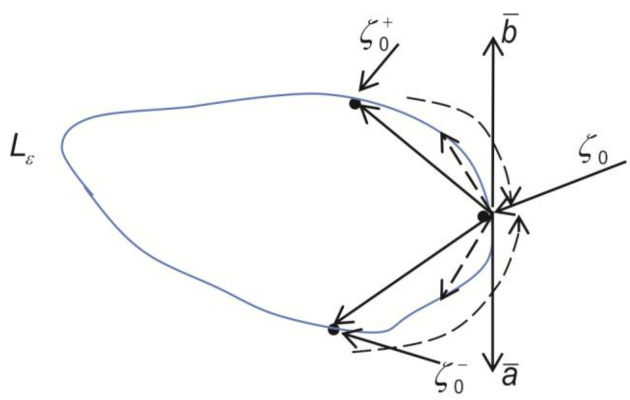


Рис. 3

Переходим к доказательству леммы 3.20.

▷ Заметим, что $\dfrac{1}{\zeta-\zeta_0}=\left(\ln(\zeta-\zeta_0)\right)'$, а интеграл $\int\limits_{L_\varepsilon}\left(\ln(\zeta-\zeta_0)\right)' d\zeta$ равен изменению элемента аналитической функции $\ln(\zeta-\zeta_0)$ при непрерывном продолжении по кривой L_ε. Вспомним теперь определение главного значения логарифма (для доказательства леммы главного значения достаточно) $\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z$, где $\arg z$ – главное значение аргумента, и рассмотрим изменения слагаемых $\ln|\zeta-\zeta_0|$, $i\cdot\arg(\zeta-\zeta_0)$ при указанном изменении элемента функции $\ln(\zeta-\zeta_0)$. Для первого слагаемого получаем:

$$\underset{L_\varepsilon}{\text{Изм.}}\ln|\zeta-\zeta_0|=\ln|\zeta_0^+-\zeta_0|-\ln|\zeta_0^--\zeta_0|-\ln\varepsilon+\ln|-\varepsilon|=\ln\left|\frac{\dfrac{\zeta(s_0+\varepsilon)-\zeta(s_0)}{\varepsilon}}{\dfrac{\zeta(s_0-\varepsilon)-\zeta(s_0)}{-\varepsilon}}\right|$$

и, переходя к пределу, находим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\dfrac{\dfrac{\zeta(s_0+\varepsilon)-\zeta(s_0)}{\varepsilon}}{\dfrac{\zeta(s_0-\varepsilon)-\zeta(s_0)}{-\varepsilon}}\right|=\ln\left|\dfrac{\zeta'(s_0)}{\zeta'(s_0)}\right|=0$.

Рассматривая второе слагаемое, заметим, что комплексные числа $\zeta_0^\pm-\zeta_0$ изображаются векторами с начальной точкой ζ_0 и конечными точками $\zeta_0^\pm$ (эти векторы изображены на рисунке 3). Угол между любым из этих векторов и осью Ox есть аргумент соответствующего комплексного числа. Следовательно, изменение аргумента $\arg(\zeta-\zeta_0)$, которое мы рассматриваем, будет равным углу ψ между векторами $\overline{\zeta_0\zeta_0^-}$ и $\overline{\zeta_0\zeta_0^+}$ (этот угол можем считать положительным). Переход к пределу при $\varepsilon\to 0$ показан на рисунке 3, из которого видно, что предельное значение угла ψ равно π. Предельные положения векторов $\overline{\zeta_0\zeta_0^-}$ и $\overline{\zeta_0\zeta_0^+}$ показаны на рисунке 3 векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Лемма доказана. ◀

Следствие 3.13. Из леммы 3.20 следует, что:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta=\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)$$

(интеграл находился в смысле его главного значения).

В результате получаем равенство:

$$\lim_{z\to\zeta_0} F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0} + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0),$$

где $F(z)$ – интеграл типа Коши, и тогда:

$$\lim_{z\to\zeta_0} F(z) = \lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = I_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta_0)d\zeta}{\zeta-\zeta_0} + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0) = I_0 + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0) + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0).$$

С учётом (84) можем записать:

$$\lim_{z\to\zeta_0} F(z) = \lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0} + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \qquad (88^*)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.14. *При сформулированных выше предположениях интеграл типа Коши имеет угловые граничные значения, являющиеся суммируемой функцией.*

Теорема 3.64. *Пусть* Γ *– гладкий замкнутый контур и* $\varphi(t)$ *удовлетворяет на линии* Γ *условию* $H(\mu)$, $0<\mu<1$. *Пусть* S^+, S^- *есть части плоскости, ограниченные* Γ. *Тогда в каждой из областей* $S^+ + \Gamma, S^- + \Gamma$ *функция:*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}$$

удовлетворяет условию $H(\mu)$:

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \le C|z_2 - z_1|^\mu,$$

где C *есть постоянная, а под* $\Phi(z)$ *при* $z\in\Gamma$ *следует понимать соответствующее граничное значение* Φ^+ *или* Φ^- (они определены ниже).

В формулировке теоремы S^+ обозначает конечную часть плоскости, т. е. находящуюся внутри контура, а S^- – бесконечную её часть [23, гл. I, отдел II, § 21]. Формулы, дающие граничные значения интеграла $\Phi(z)$ (формулы Сохоцкого) имеют вид:

$$\Phi^+(t_0) = \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad \Phi^-(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}.$$

В правых частях последних двух равенств фигурируют главные значения интеграла (ср. с (88^*)).

2. Классы кривых и областей. Свойства интеграла типа Коши

Пусть Γ – некоторая простая замкнутая или незамкнутая спрямляемая гладкая (непрерывно дифференцируемая) жорданова кривая (без особых точек). В качестве её представления может быть выбрано следующее (гл. II, § 1):

$$\tilde{\zeta}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t).$$

Переменная длина дуги $s = s(t)$ такой кривой является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией, для которой существует обратная функция $t = t(s)$, которая также строго возрастает и имеет непрерывную, не обращающуюся в нуль производную на соответствующем отрезке (гл. II, § 1, теорема 2.4, следствие 2). Уравнение кривой Γ, в силу сказанного, можно записать в виде:

$$\zeta(s) = x(s) + iy(s),$$

где $\zeta(s)$ – аффикс комплексного числа $x(s) + iy(s)$, соответствующего длине дуги s, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки на кривой Γ.

Аффиксом комплексного числа $z = x + iy$ *при геометрическом его представлении называется* ***точка комплексной плоскости,*** *соответствующая этому числу, т.е. точка* ***с декартовыми координатами*** (x, y).

В дальнейшем аффикс и само комплексное число, ему соответствующее, не различаются. Пусть l – длина кривой Γ. Начало отсчета длины дуги можем всегда выбрать так, чтобы выполнялось условие $0 \le s \le l$, причем $\zeta(0) = \zeta(l)$, если Γ – замкнутая кривая. Поэтому в случае замкнутой кривой $\zeta(s)$ является периодической функцией с периодом, равным длине этой кривой.

Будем говорить*, что* ***кривая*** Γ ***принадлежит классу*** C_m, *если все производные функции* $\zeta(s)$ *до порядка* m *включительно* ***непрерывны на сегменте*** $0 \le s \le l$. *Если же, кроме того,* ***производная*** $\zeta^{(m)}(s)$ *порядка* m ***удовлетворяет*** *на сегменте* $0 \le s \le l$ ***условию Гельдера*** *с показателем* α, $0 < \alpha \le 1$, *то будем говорить, что* $\Gamma \in C_{m+\alpha}$.

Если граница ∂G *области* G *есть простая замкнутая* (*или незамкнутая*) *спрямляемая жорданова кривая, то будем говорить, что* G *принадлежит классу* C $(G \in C)$. *Если же эта* ***кривая замкнута*** *и принадлежит классу*

C_m или $C_{m+\alpha}$, то будем говорить, что ***область*** *G* ***принадлежит классу*** *C_m или $C_{m+\alpha}$ и писать $G \in C_m$ или $G \in C_{m+\alpha}$.*

Пусть на простой спрямляемой жордановой кривой Γ задана функция $f(\zeta)$ точки $\zeta \in \Gamma$. Можем рассматривать эту функцию как функцию длины дуги s: $f(\zeta(s)) = \tilde{f}(s)$. Чтобы не вводить новых обозначений, для функции $\tilde{f}$ будем использовать прежний символ f и в дальнейшем всегда записывать $f(\zeta(s)) = f(s)$.

Если *$f(s)$ и* ***все её производные*** *до порядка m включительно* ***непрерывны*** *на сегменте $0 \le s \le l$, то будем говорить, что f* ***принадлежит классу*** *$C_m(\Gamma)$ и писать $f \in C_m(\Gamma)$. Если же, кроме того, $f^{(m)}(s)$* ***удовлетворяет условию Гёльдера*** *с показателем α, $0 < \alpha \le 1$, то* ***будем говорить****, что $f \in C_{m+\alpha}(\Gamma)$.*

Теорема 3.65. *Пусть $G \in C_{m+1+\alpha}$, $f \in C_{m+\alpha}(\Gamma)$, где Γ: $\zeta(s) = x(s) + iy(s)$ – граница области G (гладкая замкнутая кривая), $\Gamma \in C_{m+1+\alpha}$, l – длина кривой Γ, $0 < \alpha < 1$, $m \ge 0$. Тогда интеграл типа Коши*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

принадлежит классу $C_{m+\alpha}(G+\Gamma)$.

$\triangleright$ Так как $\Gamma \in C_{m+1+\alpha}$, то все производные функции $\zeta(s)$ до порядка $m+1$ включительно непрерывны на сегменте $[0,l]$ и $\zeta^{(m+1)}(s)$ удовлетворяет на этом сегменте условию Гёльдера. Будем считать, что все эти производные не обращаются в нуль на указанном сегменте.

Замечаем, что:

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta .$$

Так как $\quad -f(\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = -\frac{d}{d\zeta}\left(f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}\right) + f'(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}$, то

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d}{d\zeta}\big(f(\zeta)\big)\cdot\frac{1}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d}{d\zeta}\left(f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}\right)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}I_1 - \frac{1}{2\pi i}I_2 .$$

А поскольку: $\frac{d}{ds}\big(\Psi(\zeta(s))\big) = \frac{d}{d\zeta}\big(\Psi(\zeta)\big)\cdot\zeta'(s)$, откуда $\frac{d}{d\zeta}\big(\Psi(\zeta)\big) = \frac{d}{ds}\big(\Psi(\zeta(s))\big)\cdot\frac{1}{\zeta'(s)}$,

то $$I_2 = \int_\Gamma \frac{d}{d\zeta}\left(f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}\right)d\zeta = \int_0^l \frac{d}{ds}\left(f(\zeta(s))\cdot\frac{1}{\zeta(s) - z}\right)\cdot\frac{1}{\zeta'(s)}\cdot\zeta'(s)ds =$$

$$= \left(f(\zeta(s))\frac{1}{\zeta(s) - z}\right)\Bigg|_0^l = \left(f(\zeta(l))\frac{1}{\zeta(l) - z}\right) - \left(f(\zeta(0))\frac{1}{\zeta(0) - z}\right) = 0 \quad (\zeta(0) = \zeta(l)).$$

И значит,

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{d}{d\zeta}\big(f(\zeta)\big)\cdot\frac{1}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f'(\zeta)\cdot\frac{1}{\zeta-z}d\zeta,$$

где $f'(\zeta)=\dfrac{df}{d\zeta}=\big(\zeta'(s)\big)^{-1}\dfrac{df}{ds}$, т. к. $\dfrac{df}{ds}=f'(s)=f'(\zeta)\cdot\zeta'(s)$, $\zeta'(s)=\dfrac{d\zeta}{ds}$.

Представим выражение для $\Phi'(z)$ в другом виде . Сначала замечаем, что если $z=x+iy$ $(z\neq 0)$, то $z^{-1}=\dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\dfrac{\bar z}{x^2+y^2}=\dfrac{\bar z}{|z|^2}$. Отсюда заключаем, что $(\zeta'(s))^{-1}=\dfrac{\overline{\zeta'(s)}}{|\zeta'(s)|^2}$. Далее вспоминаем, что кривая была определена с использованием понятия эквивалентных путей (гл. II, § 1), а путь может иметь и векторное, и комплексное представления. Следовательно, кривую Γ можем задать и в виде Γ: $\bar r(t)=\big(x(t),y(t)\big)$, и в виде Γ: $\zeta(t)=x(t)+iy(t)$ ($\bar r(t)$ – радиус-вектор точки $\zeta(t)$).

Находим $\bar r'(t)=\big(x'(t),y'(t)\big)$ (гл. II, § 1) и $\zeta'(t)=x'(t)+iy'(t)$ [6, Ч. 1,7, 7.5]. И значит: $|\bar r'(t)|^2=\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2=|\zeta'(t)|^2$. Если же в качестве параметра непрерывно дифференцируемой кривой взята переменная длина дуги s, то $|\bar r'(t)|=|\bar r'(s)|=1$ (гл. II, §1, теорема 2.4). И в этом случае:

$$|\zeta'(s)|=|\bar r'(s)|=1,\quad \big(\zeta'(s)\big)^{-1}=\frac{\overline{\zeta'(s)}}{|\zeta'(s)|^2}=\overline{\zeta'(s)}.$$

Тогда:

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f'(\zeta)\cdot\frac{1}{\zeta-z}d\zeta,\ \text{где}\qquad f'(\zeta)=\frac{df}{d\zeta}=\overline{\zeta'(s)}\frac{df}{ds}.$$

Аналогично:

$$\Phi''(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f''(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

где $\quad\dfrac{d^2 f}{d\zeta^2}=\overline{\zeta'(s)}\dfrac{d}{ds}\left[\overline{\zeta'(s)}\dfrac{df}{ds}\right].$

Повторив проведённые рассуждения m раз, убедимся, что:

$$\Phi^{(m)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f^{(m)}(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},\tag{89}$$

где $\quad f^{(m)}(\zeta)=\dfrac{d^m f}{d\zeta^m}=\overline{\zeta'(s)}\dfrac{d}{ds}\left(\overline{\zeta'(s)}\dfrac{d}{ds}\left(...\overline{\zeta'(s)}\dfrac{df}{ds}\right)\right)$, $\zeta'(s)=\dfrac{d\zeta}{ds}$, причём в правой части этого равенства операция $\overline{\zeta'(s)}\dfrac{d}{ds}$ повторяется m раз. Так как граница $\Gamma \in C_{m+1+\alpha}$, то производная $\zeta'(s) \in C_{m+\alpha}(\Gamma)$. Кроме того, функция $f \in C_{m+\alpha}(\Gamma)$. Отсюда следует, что: $f^{(m)}(\zeta) \in C_{\alpha}(\Gamma)$. Поэтому, согласно известному свойству интеграла типа Коши (теорема 3.64), функция $\Phi^{(m)}(z) \in C_{\alpha}(\overline{G})$ при $0 < \alpha < 1$, т.е. $\Phi \in C_{m+\alpha}(\overline{G})$.

Итак:

$$\Phi_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f_m(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \text{ где } \Phi_m(z) = \Phi^{(m)}(z),\ f_m(\zeta) = f^{(m)}(\zeta);\ \ \Phi \in C_{m+\alpha}(\overline{G}). \ \blacktriangleleft$$

Г Л А В А IV

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

§ 1. Оценки производных и их коэффициентов Гёльдера функций класса $C_{n+\lambda}(\overline{\tilde{\Omega}})$

1. Оценки величин U_n и U_p для функций классов $C_{n+\lambda}$ и C_n

В § 1: область $\tilde{\Omega}$ – плоская ограниченная односвязная выпуклая область, ограниченная гладкой спрямляемой жордановой кривой $\partial\tilde{\Omega} = \Gamma$. Пусть функция $u(x)$ определена в замкнутой области $T = \overline{\tilde{\Omega}}$, а функция $f(x)$ определена на границе Γ, $T = \overline{\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega} + \Gamma$.

Говорят, *что* $u(x)$ *удовлетворяет* ***условию Гёльдера*** *с показателем* λ ($условию$ $H(\lambda)$) *в* T*, если отношение:*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}}$$

ограничено сверху при любых x *и* y*, принадлежащих* T.

Точную верхнюю грань *этого отношения называют* (*минимальным*) ***коэффициентом Гёльдера*** *функции* $u(x)$*. Таким бразом, если* $\sup\limits_{x,y \in T} \frac{|u(x) - u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}} = A$,

то A *называют к**оэффициентом Гёльдера функции*** $u(x)$.

В определениях, приведённых выше, $\overline{xy}$ – расстояние между точками x и y, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Говорят, *что* $u(x)$ *принадлежит в области* T ***классу*** $C_k = C_k(T)$ $[C_{k+\lambda} = C_{k+\lambda}(T)]$*, если* ***её производные*** k*-го порядка* ***непрерывны в*** T [*удовлетворяют в* T ***условию Гёльдера*** *с показателем* λ].

Естественно считать, что $C_0 = C_0(T)$ $[C_{0+\lambda} = C_{0+\lambda}(T)]$ есть класс функций, непрерывных [удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем λ] в T.

Говорят, *что* $f(x)$ *принадлежит на* Γ_T ***классу*** $C_k = C_k(\Gamma_T)$ $[C_{k+\lambda} = C_{k+\lambda}(\Gamma_T)]$, *если её производные* k*-го порядка непрерывны на* Γ_T [*удовлетворяют на* Γ_T *условию Гёльдера с показателем* λ]. ***Говорят****, что* $u(x)$ *принадлежит в области* $\tilde{\Omega}$ ***классу*** $C_k = C_k(\tilde{\Omega})$ *или классу* $C_{k+\lambda} = C_{k+\lambda}(\tilde{\Omega})$, *если она принадлежит соответствующему классу в каждой ограниченной замкнутой области* $T \subset \tilde{\Omega}$.

Пусть функция $u(x)$ задана в замкнутой области $\bar{\tilde{\Omega}}$ и принадлежит там классу $C_{n+\lambda}$. Обозначим $U_k(\bar{\tilde{\Omega}}) = U_k$ сумму максимумов модулей всех производных порядка k $(1 \le k \le n)$ от функции $u(x)$ и $U_{k,\lambda}(\bar{\tilde{\Omega}}) = U_{k,\lambda}$ – сумму коэффициентов Гельдера (для показателя λ) этих производных. Обозначения $U_0(\bar{\tilde{\Omega}}) = U_0$ и $U_{0,\lambda}(\bar{\tilde{\Omega}}) = U_{0,\lambda}$ будем применять для максимума модуля и коэффициента Гельдера функции $u(x)$ в области $\bar{\tilde{\Omega}}$.

Коэффициентом Гёльдера *функции* $u(x)$ *в области* $\bar{\tilde{\Omega}}$ *мы называем следующую* ***точную верхнюю грань:***

$$U_{0,\lambda}(\bar{\tilde{\Omega}}) = U_{0,\lambda} = \sup_{x,y \in \bar{\tilde{\Omega}}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}},$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\overline{xy}$ – *расстояние между точками* x *и* y (см. выше).

Указание на зависимость этих величин от области $\bar{\tilde{\Omega}}$ будет опускаться там, где очевидно, о какой области идет речь. В случае появления функций, отличных от $u(x)$, будем применять подобные обозначения: функции будем обозначать малыми буквами, а величины, аналогичные величинам U_k и $U_{k,\lambda}$, – соответствующими большими буквами с индексами k или (k,λ).

Пусть ограниченная замкнутая область T обладает следующим свойством: каждой точке x, где $x \in \Gamma$, а Γ – граница области T, можно поставить в соответствие круг $\bar{B}(x)$ с центром в точке x таким образом, чтобы часть границы $\Gamma \subset \bar{B}(x)$ допускала по отношению к некоторой системе координат (ξ_1, ξ_2) с началом в точке x представление вида:

$$\xi_2 = \zeta(\xi_1).$$

Здесь функция ζ определена в некоторой области $G = G(x)$, в которой она принадлежит, по крайней мере, классу C_1, и в начале системы координат (ξ_1, ξ_2) обращается в нуль вместе со своими производными первого порядка.

Если замкнутая область T обладает вышеуказанным свойством, то в каждой точке $x \in \Gamma$ имеется определенная касательная к границе Γ, а именно касательная $\xi_2 = 0$, и внешняя нормаль $\bar{n}$, направляющие косинусы которой есть непрерывные функции на границе Γ.

Говорят, *что* ***замкнутая область*** *(или, что ее граница), для которой выполняются только что указанные свойства, принадлежит* ***классу*** C_1. ***Говорят****, что такая замкнутая* ***область*** *(её граница) принадлежит* ***классу*** C_k $[C_{k+\lambda}]$*, если функция* ζ*, которая входит в представление* $\xi_2 = \zeta(\xi_1)$*, для каждого* $x \in \Gamma$ *принадлежит* C_k $[C_{k+\lambda}]$.

Пусть $\bar{\bar{\Omega}}$ принадлежит классу $C_{1,\lambda}$, имеет диаметр R и в ней справедливы следующие утверждения: А, Б, В.

Утверждение А. *Существует число* $L = L(\bar{\bar{\Omega}})$ *такое, что любые две точки* $x' \in \bar{\bar{\Omega}}$ *и* $x'' \in \bar{\bar{\Omega}}$ *можно соединить гладкой кривой длины, меньшей* $L \cdot \overline{x'x''}$*, лежащей в области* $\bar{\bar{\Omega}}$.

Утверждение Б. *Существует число* $\theta = \theta(\bar{\bar{\Omega}})$ *такое, что для любого круга* $\bar{B}(x,\delta)$ *с центром* x *и радиусом* δ *при условиях* $x \in \bar{\bar{\Omega}}$ *и* $0 < \delta \le R$ *в пересечении* $\bar{\bar{\Omega}} \cap \bar{B}(x,\delta)$ *найдется сегмент* $[x_i', x_i'']$ *длины* $\overline{x_i' x_i''} = \theta\delta$*, параллельный оси* x_i, $i = 1,2$.

Утверждение В. *Любые две различные точки, лежащие в пересечении* $\bar{\bar{\Omega}} \cap \bar{B}(x,\delta)$*, где* $x \in \bar{\bar{\Omega}}$*, можно соединить ломаной линией, состоящей из двух отрезков, один из которых параллелен оси* x_1*, а другой параллелен оси* x_2*. Один из отрезков может вырождаться в точку.*

Для сокращения записей обозначим

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} = p_{ik}.$$

Лемма 4.1. *Для всех функций* $u(x)$, *принадлежащих классу* C_1 *в области* $\tilde{\bar{\Omega}}$, *равномерно выполняется оценка*

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}} \le \begin{cases} LU_1\delta^{1-\lambda}, \overline{xy} \le \delta \\ \omega\delta^{-\lambda}, \overline{xy} \ge \delta \end{cases}, \tag{1}$$

где δ – *фиксированное число из промежутка* $(0,R]$, *а* ω – *колебание функции* $u(x)$ *в области* $\tilde{\bar{\Omega}}$.

▷ Действительно:

при $\overline{xy} \ge \delta$: $$\frac{|u(x)-u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}} = |u(x)-u(y)| \cdot \overline{xy}^{-\lambda} \le \omega\delta^{-\lambda}$$

при $\overline{xy} \le \delta$: $$\frac{|u(x)-u(y)|}{\overline{xy}} \cdot \overline{xy}^{1-\lambda} \le U_1 \frac{L \cdot \overline{xy}}{\overline{xy}} \cdot \delta^{1-\lambda} = LU_1\delta^{1-\lambda}.$$

Итак, установлено: $$\frac{|u(x)-u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}} \le \begin{cases} LU_1\delta^{1-\lambda}, \overline{xy} \le \delta \\ \omega\delta^{-\lambda}, \overline{xy} \ge \delta \end{cases}. \quad ◀$$

Лемма 4.2. *Для всех функций* $u(x)$, *принадлежащих классу* C_1 *в области* $\tilde{\bar{\Omega}}$, *равномерно выполняется оценка*

$$U_{0,\lambda} \le K_{0,\lambda} U_1^{\lambda} U_0^{1-\lambda}, \qquad \left(K_{0,\lambda} = K_{0,\lambda}(R,L,\delta,\lambda)\right). \tag{2}$$

▷ Сначала заметим, что справедливы неравенства

$$\omega \le RLU_1 \quad \text{и} \quad \omega \le 2U_0.$$

Действительно, если $u(x') = \max\limits_{x\in\tilde{\bar{\Omega}}} u(x)$, $u(x'') = \min\limits_{x\in\tilde{\bar{\Omega}}} u(x)$, то:

$$\omega = u(x') - u(x'') = \frac{u(x')-u(x'')}{\overline{x'x''}} \cdot \overline{x'x''} \le U_1 \cdot \frac{L\overline{x'x''}}{\overline{x'x''}} \cdot R = RLU_1, \text{ то есть } \omega \le RLU_1.$$

$$\omega = u(x') - u(x'') \le |u(x')| + |u(x'')| \le 2U_0.$$

1) Пусть $\omega\delta^{-\lambda} \ge LU_1\delta^{1-\lambda}$. Тогда $\omega\delta^{-\lambda}$ есть верхняя грань отношения $\frac{|u(x)-u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}}$ и, значит, $U_{0,\lambda} \le \omega\delta^{-\lambda} = \omega^{\lambda}\omega^{1-\lambda}\delta^{-\lambda} \le (RLU_1)^{\lambda} \cdot (2U_0)^{1-\lambda} \cdot \delta^{-\lambda} = K'U_1^{\lambda}U_0^{1-\lambda}$,

где $K' = K'(R,L,\delta,\lambda)$.

2) Пусть $\omega\delta^{-\lambda} \le LU_1\delta^{1-\lambda}$. Тогда:

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}} = \frac{|u(x)-u(y)|^{\lambda} \cdot |u(x)-u(y)|^{1-\lambda}}{\overline{xy}^{\lambda}} \le (2U_0)^{1-\lambda} \frac{|u(x)-u(y)|^{\lambda}}{\overline{xy}^{\lambda}}.$$

Рассмотрим отношение: $\frac{u(x)-u(y)}{\overline{xy}}$, где $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, и введем в рассмотрение точку $x^* = (y_1, x_2)$. Будем считать, для определенности, что $x_1 > y_1$ и что отрезки $[x,x^*]$, $[x^*,y]$, параллельные осям

x_1, x_2 соответственно, лежат в области $\tilde{\bar{\Omega}}$ (один из последних двух отрезков может вырождаться в точку). Если бы последние предположения не выполнялись, то мы вместо точки x^* ввели бы в рассмотрение точку $y^* = (x_1, y_2)$. Итак, получаем

$$\frac{u(x)-u(y) \pm u(x^*)}{\overline{xy}} = \frac{u(x)-u(x^*)}{\overline{xy}} + \frac{u(x^*)-u(y)}{\overline{xy}}.$$

Рассматривая первое из двух слагаемых, стоящих в правой части последнего равенства (второе слагаемое рассматривается аналогично), получаем:

$$\frac{\left|u(x)-u(x^*)\right|}{\overline{xy}} \le \frac{\left|u(x)-u(x^*)\right|}{\overline{xx^*}} = \frac{\left|u(x)-u(x^*)\right|}{x_1 - y_1}.$$

Но:

$$\frac{u(x_1,x_2)-u(y_1,x_2)}{x_1 - y_1} = u'_{x_1}(\xi_1), \quad \text{где} \quad y_1 < \xi_1 < x_1.$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{\left|u(x)-u(x^*)\right|}{x_1 - y_1} = \left|u'_{x_1}(\xi_1)\right| \quad \text{и тогда} \quad \frac{\left|u(x)-u(y)\right|}{\overline{xy}} \le \left|u'_{x_1}(\xi_1)\right| + \left|u'_{x_2}(\xi_2)\right| \le U_1.$$

Поэтому: $$\frac{\left|u(x)-u(y)\right|}{\overline{xy}^{\lambda}} \le \left(2U_0\right)^{1-\lambda} \frac{\left|u(x)-u(y)\right|^{\lambda}}{\overline{xy}^{\lambda}} \le K'' U_1^{\lambda} U_0^{1-\lambda}$$ и

$U_{0,\lambda} \le K'' U_1^{\lambda} U_0^{1-\lambda}$.

Учитывая оба случая получаем оценку:

$$U_{0,\lambda} \le K_{0,\lambda} U_1^{\lambda} U_0^{1-\lambda}, \qquad K_{0,\lambda} = \max\{K', K''\}. \quad ◀$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые проводились при доказательстве леммы 4.2, может быть доказана следующая лемма.

Лемма 4.3. *Для всех функций* $u(x)$, *принадлежащих классу* C_{k+1} *в области* $\tilde{\bar{\Omega}}$, *равномерно выполняется оценка:*

$$U_{k,\lambda} \le K_{k,\lambda} U_{k+1}^{\lambda} U_k^{1-\lambda}, \quad \left(K_{k,\lambda} = K_{k,\lambda}(R, L, \delta, \lambda, k)\right). \tag{3}$$

Лемма 4.4. *Для всех функций, принадлежащих классу* $C_{1+\lambda}$ *в области* $\tilde{\bar{\Omega}}$, *равномерно выполняется оценка:*

$$U_1 \le L_1\left(U_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} U_{1,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}} + U_0 R^{-1}\right), \tag{4}$$

где $$L_1 = \max\left\{2\left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}(1+\lambda)\lambda^{-\frac{\lambda}{1+\lambda}}, 2\left(\frac{2}{\theta\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, \frac{4}{\theta}\right\}.$$

$\triangleright$ Пусть в точке x^0 величина $|p_i|$ $(p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i})$ принимает свое наибольшее значение P_i, и пусть, для определенности, $p_i(x^0) = P_i$. При выполнении неравенства $\overline{xx^0} \le \delta$ $(0 < \delta \le R)$ имеем: $P_i - \delta^\lambda U_{1,\lambda} \le p_i(x)$

Действительно, так как: $\dfrac{|p_i(x^0) - p_i(x)|}{\overline{xx^0}^{\,\lambda}} \le U_{1,\lambda}$,

то: $$\frac{P_i - p_i(x)}{\delta^\lambda} \le U_{1,\lambda} \quad \text{и} \quad P_i - \delta^\lambda U_{1,\lambda} \le p_i(x).$$

Из неравенства $P_i - \delta^\lambda U_{1,\lambda} \le p_i(x)$ следует:

$$U_1 \le 2\delta^\lambda U_{1,\lambda} + \frac{2\cdot 2}{\theta\delta} U_0 = 2\left(\delta^\lambda U_{1,\lambda} + \frac{2}{\theta\delta} U_0\right). \tag{5}$$

Неравенство (5) очевидно в случае $P_i < \delta^\lambda U_{1,\lambda}$. Рассмотрим случай $P_i \ge \delta^\lambda U_{1,\lambda}$. В пересечении $\overline{\overline{\Omega}} \cap B(x^0, \delta)$ возьмем сегмент $[x_1, y_1]$ длины $\overline{x_1 y_1} = \theta\delta$, параллельный оси x_1 (утверждение Б). Существует точка $\xi \in (x_1, y_1)$ такая, что:

$$\frac{u(x_1, x_2^*) - u(y_1, x_2^*)}{\overline{x_1 y_1}} = \frac{u(x_1, x_2^*) - u(y_1, x_2^*)}{\theta\delta} = \frac{\partial u(\xi, x_2^*))}{\partial x_1} = p_1(\xi, x_2^*)$$

(x_2^* – значение координаты x_2, соответствующее взятому сегменту).

Введем обозначения: $x^\xi = (\xi, x_2^*)$, $U_{1,\lambda}^{(1)}$ – коэффициент Гёльдера функции p_1. Так как $\overline{x^0 x^\xi} \le \delta$, то :

$$\frac{p_1(x^0) - p_1(x^\xi)}{\overline{x^0 x^\xi}^{\,\lambda}} = \frac{P_1 - p_1(x^\xi)}{\overline{x^0 x^\xi}^{\,\lambda}} \le U_{1,\lambda}^{(1)},$$

$$\frac{P_1 - p_1(x^\xi)}{\delta^\lambda} \le U_{1,\lambda}^{(1)}.$$

Отсюда следует: $P_1 - \delta^\lambda U_{1,\lambda}^{(1)} \le p_1(x^\xi) = p_1(\xi, x_2^*) = \dfrac{u(x_1, x_2^*) - u(y_1, x_2^*)}{\theta\delta}$.

И значит:

$$P_1 \le \delta^\lambda U_{1,\lambda}^{(1)} + \frac{|u(x_1, x_2^*) - u(y_1, x_2^*)|}{\theta\delta} \le \delta^\lambda U_{1,\lambda} + \frac{2U_0}{\theta\delta}.$$

Аналогично найдем:

$$P_2 \le \delta^\lambda U_{1,\lambda} + \frac{2U_0}{\theta\delta},$$

где P_2 – наибольшее значение величины $|p_2|$.

Складывая два последних неравенства, получаем (5).

Теперь рассмотрим функцию $\psi(\delta)=\delta^{\lambda}U_{1,\lambda}+\dfrac{2}{\theta\delta}U_0$ и решим уравнение $\psi'(\delta)=0$, которое имеет вид $\lambda\delta^{\lambda-1}U_{1,\lambda}-\dfrac{2U_0}{\theta\delta^2}=0$. Решая, находим:

$$\theta\delta^{1+\lambda}\lambda U_{1,\lambda}=2U_0; \qquad \delta^{1+\lambda}=\frac{2}{\theta\lambda}U_0U_{1,\lambda}^{-1};$$

$$\delta_0=\left(\frac{2}{\theta\lambda}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}U_0^{\frac{1}{1+\lambda}}U_{1,\lambda}^{(-1)\cdot\frac{1}{1+\lambda}},$$

где δ_0 и есть решение уравнения: $\psi'(\delta)=0$.

Итак, при значении $\delta=\delta_0$ имеет место равенство:

$$\lambda\delta^{\lambda-1}U_{1,\lambda}-\frac{2U_0}{\theta\delta^2}=0. \tag{6}$$

Находя вторую производную $\psi''(\delta)$, замечаем, что ее при значении $\delta=\delta_0$ можно представить в виде:

$$\psi''(\delta)=\lambda\delta^{\lambda-1}U_{1,\lambda}\cdot\frac{\lambda-1}{\delta}-\frac{2U_0}{\theta\delta^2}\cdot\left(-\frac{2}{\delta}\right). \tag{7}$$

Так как $\left|-\dfrac{2}{\delta}\right|>\left|\dfrac{\lambda-1}{\delta}\right|$, то с учетом (6) и знака второго слагаемого в правой части (7) получаем $\psi''(\delta_0)>0$, то есть δ_0 – точка локального минимума функции $\psi(\delta)$, где $0<\delta\le R$.

Для получения возможно более точной оценки для значения U_1 будем подбирать δ таким образом, чтобы правая часть неравенства (5) приняла наименьшее возможное значение в промежутке $(0,R]$. Если оказалось, что $0<\delta_0<R$, то полагаем: $\delta=\delta_0=\left(\dfrac{2}{\theta\lambda}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}U_0^{\frac{1}{1+\lambda}}U_{1,\lambda}^{(-1)\cdot\frac{1}{1+\lambda}}$ и после несложных преобразований из (5) получаем:

$$U_1\le 2\left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\cdot(1+\lambda)\lambda^{-\frac{\lambda}{1+\lambda}}U_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}U_{1,\lambda}^{\cdot\frac{1}{1+\lambda}}.$$

Если же $\delta_0\ge R$, то замечаем, что при изменении δ от δ_0 до R первое слагаемое в (5) уменьшается, а второе слагаемое увеличивается. Поэтому, при условии $\delta_0\ge R$ справедливо неравенство:

$$U_1\le 2\left(\frac{2}{\theta\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}U_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}U_{1,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}}+\frac{4}{\theta}U_0R^{-1}.$$

Из двух последних неравенств и следует (4). ◀

З а м е ч а н и е 4.1. Рассуждениями, аналогичными тем, которые проводились при доказательстве леммы 4.4, для функций класса $C_{n+\lambda}\left(\overline{\tilde{\Omega}}\right)$ может быть получена оценка:

$$U_n \le L_n\left(U_{n-1}^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}U_{n,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}} + U_{n-1}R^{-1}\right) . \qquad (4^*)$$

Лемма 4.5. *Для всех функций, принадлежащих классу* C_n *в области* $\overline{\tilde{\Omega}}$, *равномерно выполняется оценка*:

$$U_p \le L'\left(U_{p-1}^{\frac{1}{2}}U_{p+1}^{\frac{1}{2}} + U_{p-1}R^{-1}\right) \qquad (8)$$

где $L' = \max\left\{4\left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{4}{\theta}\right\}$, $1 \le p \le n-1$, p *— целое.*

▷ Заменяя $\frac{|p_i(x^0) - p_i(x)|}{\overline{xx^0}^{\lambda}} \le U_{1,\lambda}$ неравенством $\frac{|p_i(x^0) - p_i(x)|}{\overline{xx^0}} \le U_2$ (см. доказательство леммы 4.4), тем же методом, каким было доказано (4), можно получить $U_1 \le L'\left(U_0^{\frac{1}{2}}U_2^{\frac{1}{2}} + U_0R^{-1}\right)$,т. е. (8) при $p = 1$. Рассматривая вместо неравенства $\frac{|p_i(x^0) - p_i(x)|}{\overline{xx^0}} \le U_2$ соответствующее неравенство, в котором справа стоит U_{p+1}, тем же методом докажем (8) в случаях $p = 2,3,....,n-1$. ◀

2. Неравенство Юнга. Оценка величины $U_{k+\lambda}$

Докажем теперь несколько лемм (кроме леммы 4.6, которую примем без доказательства, поскольку она хорошо известна). Леммы, доказываемые в этом пункте, потребуются для продолжения цепочки оценок, начатой в пункте 1.

Лемма 4.6 (неравенство Бернулли). *Пусть* $x > -1$, $\alpha > 1$. *Тогда справедливо неравенство*:

$$(1+x)^{\alpha} \ge 1 + \alpha \cdot x . \qquad (9)$$

Неравенство (9) будем применять при значениях $x > 0$.

Лемма 4.7. *Пусть* $a>0$, $b>0$, $0<\alpha\le 1$. *Тогда справедливо неравенство*:

$$(a+b)^{\alpha}\le a^{\alpha}+b^{\alpha}. \qquad (10)$$

▷ При $\alpha=1$ неравенство (10) выполняется . Осталось его доказать для $0<\alpha<1$. Перепишем (10) в виде $(a+b)\le\left(a^{\alpha}+b^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ и рассмотрим два случая.

1) Пусть $\frac{1}{\alpha}a^{1-\alpha}\ge b^{1-\alpha}$, Тогда, в силу (9), получаем:

$$\left(a^{\alpha}+b^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(a^{\alpha}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}=a\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ge a\left(1+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\right)=a+\frac{1}{\alpha}a^{1-\alpha}b^{\alpha}\ge a+b.$$

2) Пусть теперь $\frac{1}{\alpha}a^{1-\alpha}<b^{1-\alpha}$. Тогда:

$$\left(a^{\alpha}+b^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(b^{\alpha}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}=b\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ge b\left(1+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}\right)=b+\frac{1}{\alpha}b^{1-\alpha}a^{\alpha}. \qquad (11)$$

Во втором случае справедлива цепочка неравенств:

$1\cdot a^{1-\alpha}<\frac{1}{\alpha}a^{1-\alpha}<b^{1-\alpha}<\frac{1}{\alpha}b^{1-\alpha}$. Отсюда $a<\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}b^{1-\alpha}$ и с учетом (11) находим: $\left(a^{\alpha}+b^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}>b+a$. ◀

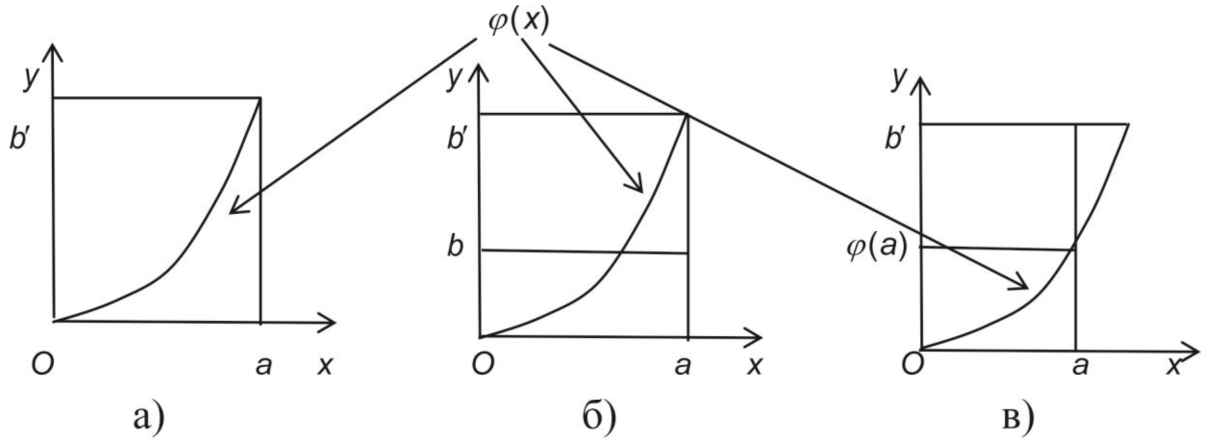
Лемма 4.8. *Пусть выполнены следующие условия:* $a>0, b>0, \varepsilon>0$ *и, кроме того.* $p_1>1, p_2>1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$. *Тогда справедливо неравенство (частный случай неравенства Юнга)*:

$$ab\le\varepsilon^{p_1}a^{p_1}+\varepsilon^{-p_2}b^{p_2}. \qquad (12)$$

▷ Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная возрастающая на отрезке $[0,a]$ функция и $\varphi(0)=0$. Пусть, кроме того, $\psi(y)$ – функция, обратная функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0,\varphi(a)]$ и являющаяся непрерывной и возрастающей на $[0,b']$, где $b'=\max\{b,\varphi(a)\}$. Тогда выполняется неравенство:

$$ab\le\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy. \qquad (13)$$

Справедливость (13) следует из рисунка 4. Из него также следует, что при условии $\varphi(a)=b$ в (13) имеет место равенство, а при $\varphi(a)\ne b$ неравенство (13) является строгим.



а) — $b' = b = \varphi(a)$; б) — $b' = \varphi(a)$; в) — $b' = b$

Рис. 4

Из (13) получаем:

$$ab \le \max_{x\in[0,a]} \varphi(x)\cdot a + \max_{y\in[0,b]} \psi(y)\cdot b = a\varphi(a) + b\psi(b) \tag{14}$$

Полагая $\varphi(x) = \varepsilon^{\frac{1}{q_1}} x^{\frac{1-q_1}{q_1}}$, где $0 < q_1 < 1$, $x \in [0,a]$, и обозначая $\varphi(x) = y$, находим:

$$x^{\frac{1-q_1}{q_1}} = \varepsilon^{-\frac{1}{q_1}} y, \quad x = \psi(y) = \varepsilon^{-\frac{1}{1-q_1}} y^{\frac{q_1}{1-q_1}}$$

и, в силу (14), получаем:

$$ab \le a\varepsilon^{\frac{1}{q_1}} a^{\frac{1-q_1}{q_1}} + b\varepsilon^{-\frac{1}{1-q_1}} b^{\frac{q_1}{1-q_1}} =$$

$$= \varepsilon^{\frac{1}{q_1}} a^{\frac{1}{q_1}} + \varepsilon^{-\frac{1}{1-q_1}} b^{\frac{1}{1-q_1}}.$$

Обозначая $\dfrac{1}{q_1} = p_1$, $\dfrac{1}{1-q_1} = p_2$, приходим к неравенству:

$$ab \le \varepsilon^{p_1} a^{p_1} + \varepsilon^{-p_2} b^{p_2},$$

где $p_1 > 1$, $p_2 > 1$, $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = q_1 + 1 - q_1 = 1$. ◀

Лемма 4.9. *Пусть* $a > 0$, $b > 0$, $a_i > 0$, $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1,2)$ *и при некотором числе* $C_1 > 0$ *выполняется неравенство*

$$a \le C_1(a_1 a^{\alpha_1} + a_2 a^{\alpha_2} + b).$$

Тогда существует число $C_2 > 0$ *такое, что имеет место неравенство:*

$$a \le C_2\left(a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + a_2^{\frac{1}{1-\alpha_2}} + b\right). \tag{15}$$

$\triangleright$ Введем обозначения $\alpha_1 = \dfrac{1}{p_1}$, $1-\alpha_1 = \dfrac{1}{p_2}$. Тогда $p_1 > 1$, $p_2 > 1$, $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = 1$.

В силу (12) получаем:

$$a^{\alpha_1} a_1 = a^{\frac{1}{p_1}} a_1 \le \varepsilon^{p_1} a + \varepsilon^{-p_2} a_1^{p_2} = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_1}} a + \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_1 - 1}} a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}$$

Аналогично находим: $a^{\alpha_2} a_2 \le \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_2}} a + \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} a_2^{\frac{1}{1-\alpha_2}}$

Выберем $\varepsilon > 0$ удовлетворяющим следующим двум неравенствам $\varepsilon < \dfrac{1}{(4C_1)^{\alpha_i}}$, $i = 1,2$. Тогда $C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_i}} < \dfrac{1}{4}$. В силу полученных выше неравенств и условия леммы $a \le C_1(a_1 a^{\alpha_1} + a_2 a^{\alpha_2} + b)$ находим:

$$a \le C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_1}} a + C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_1 - 1}} a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_2}} a + C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} a_2^{\frac{1}{1-\alpha_2}} + C_1 b < \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} a +$$

$$+ C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_1 - 1}} a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}} a_2^{\frac{1}{1-\alpha_2}} + C_1 b$$

Вводя обозначение:

$$C_2 = \max\left\{ 2C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_1 - 1}}, 2C_1 \varepsilon^{\frac{1}{\alpha_2 - 1}}, 2C_1 \right\}, \tag{16}$$

из последнего неравенства получаем:

$$a \le C_2 \left(a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + a_2^{\frac{1}{1-\alpha_2}} + b \right),$$

где C_2 определяется соотношением (16). ◀

З а м е ч а н и е 4.2. Из доказательства леммы 4.9 видно, что если выполняются неравенство:

$$a \le C_1(a_1 a^{\alpha_1} + b)$$

и все остальные условия этой леммы, то существует число $C_2 > 0$ такое, что имеет место неравенство: $a \le C_2 \left(a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + b \right)$.

Лемма 4.10. *Для всех функций* $u(x) \in C_n(\tilde{\overline{\Omega}})$ *для всех* k, *удовлетворяющих неравенствам* $1 \le k < n$, *равномерно выполняются оценки*:

$$U_k \le L_k^{(n)} \left(U_0^{\frac{n-k}{n}} U_n^{\frac{k}{n}} + U_0 R^{-k} \right) \tag{17}$$

$\triangleright$ Докажем (17) методом математической индукции.

При значениях $n=2, k=1$ неравенство справедливо. Оно при указанных значениях n и k имеет вид: $U_1 \le L'\left(U_0^{\frac{1}{2}}U_2^{\frac{1}{2}} + U_0 R^{-1}\right)$, где $L' = L_1^{(2)}$, и было доказано в лемме 4.5. Предположим, что неравенство (17) верно при $n=p, k<p$ $(p\ge 2)$ и докажем его для $n=p+1$, $k=p$. По предположению индукции (при $n=p$, $k=p-1$) имеем:

$$U_{p-1} \le L_{p-1}^{(p)}\left(U_0^{\frac{1}{p}}U_p^{\frac{p-1}{p}} + U_0 R^{-(p-1)}\right). \tag{18}$$

Применяя (8), находим:

$$U_p \le L'\left(U_{p-1}^{\frac{1}{2}}U_{p+1}^{\frac{1}{2}} + U_{p-1}R^{-1}\right) \le$$

$$\le L'\left\{U_{p+1}^{\frac{1}{2}}\left(L_{p-1}^{(p)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(U_0^{\frac{1}{p}}U_p^{\frac{p-1}{p}} + U_0 R^{-(p-1)}\right)^{\frac{1}{2}} + L_{p-1}^{(p)}\left(U_0^{\frac{1}{p}}U_p^{\frac{p-1}{p}} + U_0 R^{-(p-1)}\right)R^{-1}\right\} \le$$

$$\le L'\left\{U_{p+1}^{\frac{1}{2}}\left(L_{p-1}^{(p)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(U_0^{\frac{1}{2p}}U_p^{\frac{p-1}{2p}} + U_0^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{p-1}{2}}\right) + L_{p-1}^{(p)}U_0^{\frac{1}{p}}U_p^{\frac{p-1}{p}}R^{-1} + L_{p-1}^{(p)}U_0 R^{-p}\right\} =$$

$$\le L'\left(L_{p-1}^{(p)}\right)^{\frac{1}{2}}U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2p}}\cdot U_p^{\frac{p-1}{2p}} + L'L_{p-1}^{(p)}U_0^{\frac{1}{p}}R^{-1}\cdot U_p^{\frac{p-1}{p}} + L'\left(L_{p-1}^{(p)}\right)^{\frac{1}{2}}U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{p-1}{2}} + L'L_{p-1}^{(p)}U_0 R^{-p}.$$

Обозначим $L'' = \max\left\{L'\left(L_{p-1}^{(p)}\right)^{\frac{1}{2}}, L'L_{p-1}^{(p)}\right\}$. Тогда:

$$U_p \le L''\left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2p}}\cdot U_p^{\frac{p-1}{2p}} + U_0^{\frac{1}{p}}R^{-1}\cdot U_p^{\frac{p-1}{p}} + U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{p-1}{2}} + U_0 R^{-p}\right).$$

Полагая $\frac{p-1}{2p} = \alpha_1$, $\frac{p-1}{p} = \alpha_2$, находим: $\frac{1}{1-\alpha_1} = \frac{2p}{p+1}$, $\frac{1}{1-\alpha_2} = p$.

Согласно лемме 4.9 существует $C_p' > 0$ такое, что:

$$U_p \le C_p'\left(U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}U_0^{\frac{1}{p+1}} + U_0 R^{-p} + U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{p-1}{2}} + U_0 R^{-p}\right). \tag{19}$$

Третье слагаемое, стоящее в скобках в неравенстве (19), преобразуем так: $U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1-p}{2}} = \left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2p}}\right)\cdot\left(U_0^{\frac{p-1}{2p}}R^{\frac{1-p}{2}}\right) = \left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2p}}\right)\cdot\left(U_0^{\frac{p-1}{2p}}R^{\frac{1-p}{2}\cdot\frac{2p}{p-1}\cdot\frac{p-1}{2p}}\right) =$

$$= \left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2p}}\right)\cdot \tag{20}$$

Рассмотрим теперь два числа $\frac{2p}{p+1}=q_1$ и $\frac{2p}{p-1}=q_2$. При $p>1$: $q_1>1$, $q_2>1$ и $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=1$. Согласно лемме 4.8 $(\varepsilon=1)$, с учетом (20), получаем:

$$U_{p+1}^{\frac{1}{2}}U_0^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1-p}{2}} \le U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}U_0^{\frac{1}{p+1}}+U_0R^{-p}.$$

Тогда из (19) следует:

$$U_p \le C_p'\left(U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}U_0^{\frac{1}{p+1}}+2U_0R^{-p}+U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}U_0^{\frac{1}{p+1}}+U_0R^{-p}\right),$$

$$U_p \le C_p\left(U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}U_0^{\frac{1}{p+1}}+U_0R^{-p}\right). \tag{21}$$

Сравнивая (21) и (17), видим, что (17) доказано для $n=p+1, k=p$. Докажем теперь (17) для $n=p+1, k=p-1$, то есть докажем:

$$U_{p-1} \le L_{p-1}^{(p+1)}\left(U_{p+1}^{\frac{p-1}{p+1}}U_0^{\frac{2}{p+1}}+U_0R^{-p+1}\right).$$

По предположению индукции при значениях $n=p, k=p-1$ справедливо неравенство (18), а по-доказанному справедливо (21). В силу этих неравенств, получаем цепочку:

$$U_{p-1} \le L_{p-1}^{(p)}\left(C_p^{\frac{p-1}{p}}\left(U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}U_0^{\frac{1}{p+1}}+U_0R^{-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}U_0^{\frac{1}{p}}+U_0R^{-p+1}\right) \le$$

$$\le L_{p-1}^{(p)}\left(C_p^{\frac{p-1}{p}}U_{p+1}^{\frac{p-1}{p+1}}U_0^{\frac{2}{p+1}}+C_p^{\frac{p-1}{p}}U_0R^{-p+1}+U_0R^{-p+1}\right) \le$$

$$\le L_{p-1}^{(p+1)}\left(U_{p+1}^{\frac{p-1}{p+1}}U_0^{\frac{2}{p+1}}+U_0R^{-p+1}\right).$$

Неравенство (17) доказано для значений $n=p+1, k=p-1$. Продолжая процесс $(k=p-2, p-3, \ldots, 1)$, докажем (17) для значений $n=p+1, k<p+1$ ◀ (см. [22, гл. V, п.33]).

Заметим, что ниже могут встретиться несколько изменённых обозначений. Изменённые обозначения имеют тот же самый смысл, какой имели соответствующие старые обозначения. Изменения следующие: $C_{n+\lambda}$ меняется на $C^{(n,\lambda)}$; $U_{k+\lambda}$ – на $U_{k,\lambda}$; C_n – на $C^{(n)}$.

Из (3) и (17) при условии $k < n-1$ получаем:

$$U_{k,\lambda} \le K_{k,\lambda} U_{k+1}^{\lambda} U_k^{1-\lambda} \le K_{k,\lambda} \left(L_{k+1}^{(n)}\right)^{\lambda} \left(L_k^{(n)}\right)^{1-\lambda} \cdot \left(U_n^{\frac{(k+1)\lambda}{n}} U_0^{\frac{(n-k-1)\lambda}{n}} + U_0^{\lambda} R^{-(k+1)\lambda} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(U_n^{\frac{k(1-\lambda)}{n}} U_0^{\frac{(n-k)(1-\lambda)}{n}} + U_0^{1-\lambda} R^{-k(1-\lambda)} \right).$$

Обозначим: $\overline{L}_{k,\lambda}^{(n)} = K_{k,\lambda} \left(L_{k+1}^{(n)}\right)^{\lambda} \left(L_k^{(n)}\right)^{1-\lambda}$. Тогда:

$$U_{k,\lambda} \le L_{k,\lambda}^{(n)} \left(U_n^{\frac{k+\lambda}{n}} U_0^{\frac{n-k-\lambda}{n}} + U_n^{\frac{k(1-\lambda)}{n}} U_0^{\frac{n-k(1-\lambda)}{n}} R^{-(k+1)\lambda} + U_n^{\frac{(k+1)\lambda}{n}} U_0^{\frac{n-k\lambda-\lambda}{n}} R^{-k(1-\lambda)} + U_0 R^{-k-\lambda} \right).$$

Так как: $\dfrac{k-k\lambda}{k+\lambda} + \dfrac{k\lambda+\lambda}{k+\lambda} = 1$, то, в силу леммы 4.8, преобразуем со-

ответственно второе и третье слагаемые из круглой скобки последнего неравенства следующим образом $(\varepsilon = 1)$:

$$U_n^{\frac{k(1-\lambda)}{n}} U_0^{\frac{n-k(1-\lambda)}{n}} R^{-\lambda(k+1)} \le U_0 \left(\left(U_n^{\frac{k(1-\lambda)}{n}} U_0^{-\frac{k(1-\lambda)}{n}} \right)^{\frac{k+\lambda}{k(1-\lambda)}} + R^{-\lambda(k+1)\cdot\frac{k+\lambda}{\lambda(k+1)}} \right) =$$

$$= U_0 \left(U_n^{\frac{k+\lambda}{n}} U_0^{-\frac{k+\lambda}{n}} + R^{-(k+\lambda)} \right); \quad U_0 \left(U_n^{\frac{\lambda(k+1)}{n}} U_0^{-\frac{\lambda(k+1)}{n}} R^{-k(1-\lambda)} \right) \le U_0 \left(U_n^{\frac{k+\lambda}{n}} U_0^{-\frac{k+\lambda}{n}} + R^{-(k+\lambda)} \right).$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 4.11. *Для всех функций* $u(x) \in C^{(n)}\left(\overline{\widetilde{\Omega}}\right)$ *для всех* $k < n-1$ *равномерно выполняется оценка*

$$U_{k,\lambda} \le L_{k,\lambda}^{(n)} \left(U_n^{\frac{k+\lambda}{n}} U_0^{\frac{n-(k+\lambda)}{n}} + U_0 R^{-(k+\lambda)} \right) \tag{22}$$

где $L_{k,\lambda}^{(n)} = 3\overline{L}_{k,\lambda}^{(n)}$.

Лемма 4.11*. *В условиях леммы* 4.11 *неравенство* (22) *выполняется и при значении* $k = n-1$, *то есть имеет место неравенство*:

$$U_{n-1,\lambda} \le L_{n-1,\lambda}^{(n)} \left(U_n^{\frac{n+\lambda-1}{n}} U_0^{\frac{1-\lambda}{n}} + U_0 R^{-(n+\lambda-1)} \right).$$

▷ Из (3) и (17) находим:

$$U_{n-1,\lambda} \le 2^{n-1} K_0 U_n^{\lambda} U_{n-1}^{1-\lambda} \le 2^{n-1} K_0 \left(L_{n-1}^{(n)}\right)^{1-\lambda} U_n^{\lambda} \left(U_n^{\frac{n-1}{n}} U_0^{\frac{1}{n}} + U_0 R^{-(n-1)} \right)^{1-\lambda} \le$$

$$\le 2^{n-1} K_0 \left(L_{n-1}^{(n)}\right)^{1-\lambda} \left(U_n^{\frac{n+\lambda-1}{n}} U_0^{\frac{1-\lambda}{n}} + U_n^{\lambda} U_0^{1-\lambda} R^{-(n-1)(1-\lambda)} \right).$$

Пусть $p_1 = \frac{n+\lambda-1}{n\lambda}$, $p_2 = \frac{n+\lambda-1}{(n-1)(1-\lambda)}$. Тогда $(n>1)$ $p_i > 1, i=1,2$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$.

Согласно лемме 4.8 получаем:

$$U_0\left(U_n^{\lambda}U_0^{-\lambda}R^{-(n-1)(1-\lambda)}\right) \le U_0\left(U_n^{\frac{n+\lambda-1}{n}}U_0^{-\frac{n+\lambda-1}{n}} + R^{-(n+\lambda-1)}\right) = U_n^{\frac{n+\lambda-1}{n}}U_0^{\frac{1-\lambda}{n}} + U_0R^{-(n+\lambda-1)}. \quad \blacktriangleleft$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 4.1. *Для всех функций* $u(x)\in C^{(n)}\left(\tilde{\overline{\Omega}}\right)$ *для всех* $k<n$ *равномерно выполняется оценка* (22):

$$U_{k,\lambda} \le L_{k,\lambda}^{(n)}\left(U_n^{\frac{k+\lambda}{n}}U_0^{\frac{n-(k+\lambda)}{n}} + U_0R^{-(k+\lambda)}\right), \tag{22}$$

где $L_{k,\lambda}^{(n)} = 3\overline{L}_{k,\lambda}^{(n)}$.

Теорема 4.2. *Для всех функций класса* $C^{(n,\lambda)}\left(\tilde{\overline{\Omega}}\right)$ *равномерно выполняются оценки*:

$$U_k \le M_k^{(n)}\left(U_{n,\lambda}^{\frac{k}{n+\lambda}}U_0^{\frac{n+\lambda-k}{n+\lambda}} + U_0R^{-k}\right), \quad k\le n, \tag{23}$$

$$U_{k,\lambda} \le M_{k,\lambda}^{(n)}\left(U_{n,\lambda}^{\frac{k+\lambda}{n+\lambda}}U_0^{\frac{n-k}{n+\lambda}} + U_0R^{-(k+\lambda)}\right), \quad k<n. \tag{24}$$

$\triangleright$ Неравенство (17) при значении $k=n-1$ имеет вид:

$$U_{n-1} \le L_{n-1}^{(n)}\left(U_n^{\frac{n-1}{n}}U_0^{\frac{1}{n}} + U_0R^{-(n-1)}\right).$$

Из него с учетом (4^*) и леммы 4.7 получаем неравенство:

$$U_{n-1} \le L_{n-1}^{(n)}\left(L_n^{\frac{n-1}{n}}\left(U_{n-1}^{\frac{\lambda(n-1)}{n(1+\lambda)}}U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n(1+\lambda)}} + U_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}R^{-\frac{n-1}{n}}\right)U_0^{\frac{1}{n}} + U_0R^{-(n-1)}\right)$$

и, усиливая его, можем прийти к неравенству:

$$U_{n-1} \le L_{n-1}^{(n)}\left(L_n^{\frac{n-1}{n}}+1\right)\cdot\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n(1+\lambda)}}U_0^{\frac{1}{n}}U_{n-1}^{\frac{\lambda(n-1)}{n(1+\lambda)}} + U_0^{\frac{1}{n}}R^{-\frac{n-1}{n}}U_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} + U_0R^{1-n}\right).$$

Согласно лемме 4.9 существует константа $\tilde{C}>0$ такая, что:

$$U_{n-1} \le \frac{\tilde{C}}{2}\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n+\lambda}}U_0^{\frac{1+\lambda}{n+\lambda}} + 2U_0R^{1-n}\right)$$

или

$$U_{n-1} \le M_{n-1}^{(n)}\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n+\lambda}}U_0^{\frac{1+\lambda}{n+\lambda}} + U_0R^{1-n}\right).$$

Последнее неравенство – это неравенство (23) при значении $k = n-1$.

Применяя (4^*), находим:

$$U_n \le L_n\left(\tilde{C}^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\left(U_{n,\lambda}^{\frac{\lambda(n-1)}{(n+\lambda)(1+\lambda)}}U_0^{\frac{\lambda}{n+\lambda}} + U_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}R^{\frac{\lambda(1-n)}{1+\lambda}}\right)U_{n,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}} + \tilde{C}U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n+\lambda}}U_0^{\frac{1+\lambda}{n+\lambda}}R^{-1} + \tilde{C}U_0R^{-n}\right) =$$

$$= L_n\left(\tilde{C}^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n}{n+\lambda}}U_0^{\frac{\lambda}{n+\lambda}} + U_{n,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}}U_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}R^{\frac{\lambda(1-n)}{1+\lambda}}\right) + \tilde{C}U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n+\lambda}}U_0^{\frac{1+\lambda}{n+\lambda}}R^{-1} + \tilde{C}U_0R^{-n}\right).$$

Второе и третье слагаемые в последнем выражении оценим, применяя лемму 4.8. При значениях $p_1 = \dfrac{n+n\lambda}{n+\lambda}$, $p_2 = \dfrac{n+n\lambda}{n\lambda-\lambda}$ $(n>1)$ получаем (для второго слагаемого):

$$U_0\left(U_{n,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}}U_0^{-\frac{1}{1+\lambda}}R^{\frac{\lambda(1-n)}{1+\lambda}}\right) \le U_0\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n}{n+\lambda}}U_0^{-\frac{n}{n+\lambda}} + R^{-n}\right)$$

При значениях $p_1 = \dfrac{n}{n-1}$, $p_2 = n$ получаем (для третьего слагаемого):

$$\tilde{C}U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n+\lambda}}U_0^{\frac{1+\lambda}{n+\lambda}}R^{-1} \le \tilde{C}U_0\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n}{n+\lambda}}U_0^{-\frac{n}{n+\lambda}} + R^{-n}\right).$$

С использованием (17) находим:

$$U_n \le M_n^{(n)}\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n}{n+\lambda}}U_0^{\frac{\lambda}{n+\lambda}} + U_0R^{-n}\right).$$

Это есть формула (23) при значении $k = n$. Используя теперь последнее неравенство в оценке (17), получим (23) при значениях $k < n$.

Используя его же в оценке (22), получим (24). ◀

§ 2. Теоремы Хаусдорфа и Арцеля – Асколи. Полнота $C_\alpha(D)$

1. Метрическое пространство

Дадим некоторые определения.

Векторное пространство *X называется* ***нормированным пространством,*** *если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $\|x\|$, называемое* ***нормой*** *x, такое, что выполняются сле-*

дующие условия (для любых $x, y \in X$ *и любого скаляра* α *из поля, над которым рассматривается векторное пространство):*

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\qquad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

$\|x\| > 0$, *если* $x \ne 0$ *и* $\|x\| = 0$, *если* $x = 0$.

Множество X *элементов произвольной природы называется* ***метрическим пространством****, если каждой паре элементов* $x, y \in X$ *соотнесено вещественное число* $\rho(x, y)$ *–* ***расстояние*** *между элементами* x *и* y *– удовлетворяющее условиям:*

$\rho(x, y) \ge 0$; $\rho(x, x) = 0$ *и, если* $\rho(x, y) = 0$, *то* $x = y$;

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(неравенство треугольника).*

Эти условия называются ***аксиомами*** *метрического пространства. Элементы множества* X *называются также его* ***точками.*** *Если введением расстояния множество* X *превращено в метрическое пространство, то говорят, что во множестве* X *введена* ***метрика.***

Легко заметить, что каждое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое, в котором расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y равно $\|x - y\|$.

Последовательность $\{x_n\}$ *точек метрического пространства* X *называют* ***фундаментальной (последовательностью, сходящейся в себе; последовательностью Коши),*** *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное число (такой номер)* $n_0 = n_0(\varepsilon)$, *что для всех номеров* m, n *таких, что* $m \ge n_0$, $n \ge n_0$, *выполняется неравенство:* $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, *т. е. если* $\rho(x_m, x_n) \underset{m,n\to\infty}{\to} 0$.

Метрическое пространство X *называется* ***полным****, если каждая фундаментальная последовательность* $\{x_n\}$ *его точек сходится к его же точке* x_0, *т. е. найдется такая точка* $x_0 \in X$, *для которой существует предел этой последовательности и он равен* x_0, *т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. *В другой записи* $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$; $x_n \to x_0$.

Очевидно, в любом метрическом пространстве каждая сходящаяся последовательность сходится и в себе. Таким образом, в **полном** пространстве имеет место ***признак сходимости Коши***: *для того чтобы последовательность* $\{x_n\}$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе.*

Справедлива следующая теорема: *Для того чтобы последовательность* $\{x_n\}$, *в которой* x_n *– действительные числа, была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе* [2]. Другими словами, всякая фундаментальная последовательность действительных чисел является сходящейся.

В связи со сказанным заметим, что не всегда фундаментальные последовательности сходятся. Пусть, например, есть угол ABC с вершиной в точке B, и требуется в пространстве гладких кривых, лежащих в плоскости этого угла и проходящих через точки A, B, C, найти кривую наименьшей длины. Эта задача не имеет решения, хотя и можно построить фундаментальную последовательность гладких кривых, длины которых стремятся к точной нижней грани длин всех гладких кривых, проходящих через точки A, B, C. Для этого достаточно, приближаясь к вершине B угла ABC, гладко скруглять стороны этого угла (поясняющий рисунок есть в [13_3, гл. VIII, § 57, п. 57.2]. Представление о скруглении даёт также рисунок 7, имеющийся в § 4, п. 3 этой главы. На нём изображён прямоугольный канал с закруглёнными углами). Полученная таким образом фундаментальная последовательность не имеет предела в множестве гладких кривых. Это связано с тем, что наименьшую длину имеет ломаная с вершинами A, B, C.

Рассмотрим пространство C, элементами (точками) которого являются произвольные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Расстояние между точками x и y этого пространства определяется следующим образом:

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Очевидно, что, при таком определении расстояния, выполняются все аксиомы метрического пространства. Таким образом, расстояние, по определению, есть максимальное расстояние между кривыми (см. рисунок 5).

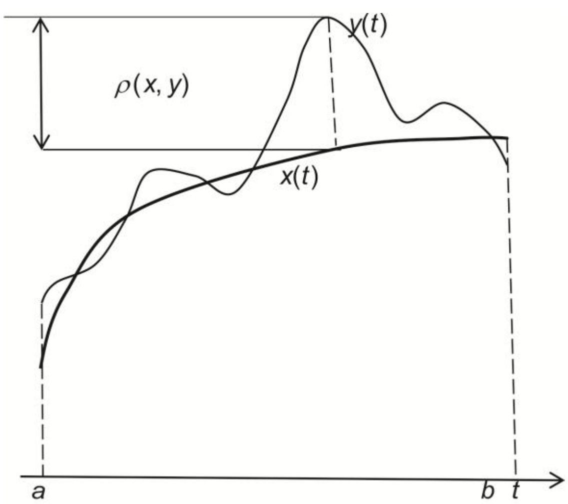


Рис. 5

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ точек пространства C к точке x_0 означает ***равномерную сходимость*** последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x_0(t)$.

Действительно, если произвольному числу $\varepsilon > 0$ соответствует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, что при условии $n \ge n_0$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$, то это значит, что для указанных натуральных чисел n будет:

$$\max_{t\in[a,b]}\left|x_n(t) - x_0(t)\right| < \varepsilon .$$

Поэтому, для всех $t \in [a,b]$ справедливо неравенство:

$$\left|x_n(t) - x_0(t)\right| < \varepsilon \quad (n \ge n_0),$$

откуда и следует равномерная сходимость.

Наоборот: из равномерной сходимости последовательности непрерывных функций к непрерывной функции следует сходимость соответствующих элементов в пространстве C. Значит, справедлива лемма.

Лемма 4.12. *Равномерная сходимость последовательности функций* $\{x_n(t)\}$ *к функции* $x_0(t)$ *означает сходимость последовательности* $\{x_n\}$ *точек пространства* C *к точке* x_0.

В качестве области определения функций, образующих пространство C, можно рассматривать не только отрезок $[a,b]$, но и любое замкнутое ограниченное множество T, лежащее в произвольном евклидовом пространстве. В этом случае используется обозначение $C(T)$. Все сказанное выше по поводу пространства C без каких-либо изменений переносится и на пространство $C(T)$. Укажем еще на пространство C_n, элементы которого – функции, определенные на отрезке $[a,b]$ и имеющие на нем непрерывные производные до производной n-го порядка включительно. Расстояние между элементами $x, y \in C_n$ можно определить так:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \max_{a\le t\le b}\left|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)\right|,$$

при $k = 0$: $\left(x^{(0)}(t) = x(t), y^{(0)}(t) = y(t)\right)$.

Сходимость в пространстве C_n означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательности k-х производных $(k=1,2,...,n)$. Можно рассматривать и пространство $C_n(T)$, состоящее из функций, непрерывных вместе со всеми своими частными производными до n-го порядка включительно в замкнутой ограниченной области T многомерного пространства. Ниже, в связи с рассмотрением пространств $C_n(T)$, вместо обозначения $C(T)$ применяется обозначение $C_0(T)$.

Ниже доказываются теоремы Хаусдорфа и Арцеля – Асколи.

2. Теоремы Хаусдорфа и Арцеля – Асколи

Множество *E метрического пространства X называется* ***компактным в пространстве*** *X, если из любой последовательности $\{x_n\}\subset E$ можно выделить сходящуюся* (в X) *подпоследовательность $\{x_{n_l}\}$.* ***Пространство*** *X называется* ***компактным****, если оно представляет компактное в самом себе множество.*

Свойство компактности множества не зависит от того, в каком ***полном*** пространстве рассматривается это множество. Точнее, если множество $E\subset X_0\subset X$, где X_0 есть подпространство пространства X, то E одновременно компактно или нет и в X_0, и в X.

Теорема 4.3. *Компактное пространство полно.*

▷ Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся в себе (фундаментальная) последовательность компактного пространства X. Выделим из $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0\in X$: $x_{n_k}\to x_0$. Для произвольного k имеем

$$\rho(x_k,x_0)\le\rho(x_k,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_0).$$

Оба слагаемых в правой части полученного неравенства стремятся к нулю (первое – в силу сходимости последовательности в себе, второе – в силу сходимости под-последовательности $\{x_{n_k}\}$к точке x_0). Поэтому $\rho(x_k,x_0)\to 0$, т.е. x_0 является пределом всей последовательности. Значит, пространство X является полным. ◀

Пусть $\varepsilon>0$ – данное положительное число, а M – множество метрического пространства X.

Множество *M называется* ***ε-сетью для множества*** *E, если для каждой точки $x\in E$ в M найдется такая точка z, что $\rho(x,z)<\varepsilon$.*

Теорема 4.4 (Хаусдорф). *Для того чтобы множество* E *метрического пространства* X *было компактным, необходимо, а если* X *полное пространство, то и достаточно, чтобы при каждом* $\varepsilon > 0$ *в* X *существовала конечная* ε*-сеть для* E.

$\triangleright$ *Необходимость.* Допустим, что множество E компактно, но при некотором $\varepsilon > 0$ не существует конечной ε-сети. Покажем, что тогда во множестве E существует последовательность точек, из которой нельзя выделить сходящуюся в пространстве X подпоследовательность, построив такую последовательность. Возьмем произвольную точку $x_1 \in E$. Множество, состоящее из одного элемента x_1, не образует ε-сети для E, поэтому найдется точка $x_2 \in E$ такая, что $\rho(x_2, x_1) \ge \varepsilon$. Множество $\{x_1, x_2\}$ также не может быть ε-сетью для E, значит, найдется $x_3 \in E$, причем $\rho(x_i x_3) \ge \varepsilon \quad (i = 1,2)$. Продолжая процесс, мы придем к последовательности $\{x_n\}$ точек из E такой, что $\rho(x_m, x_n) \ge \varepsilon \quad (m \ne n; m, n = 1,2,...)$. Очевидно, из этой последовательности нельзя выделить никакой сходящейся подпоследовательности и, значит, множество E не компактно. Но это противоречит допущению.

Достаточность. Пусть X – полное пространство и при каждом $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть для E. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ элементов множества E и докажем, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для этого зададимся числовой последовательностью $\varepsilon_n \to 0 \quad (\varepsilon_n > 0)$ и рассмотрим ε_1-сеть. Если построить сферы с центрами в точках ε_1-сети и радиусом ε_1, то каждая точка множества E попадет по крайней мере в одну из этих сфер. Так как сфер конечное число, то в одной из них окажется бесконечно много элементов рассматриваемой последовательности. Пусть это будет сфера $K_{\varepsilon_1}(z_1)$.

Возьмем ε_2-сеть и рассмотрим сферы радиуса ε_2 с центрами в ее точках. В одну из этих сфер попадет бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, содержащихся в $K_{\varepsilon_1}(z_1)$. Пусть это будет сфера $K_{\varepsilon_2}(z_2)$. Продолжая таким образом, получим последовательность сфер $K_{\varepsilon_1}(z_1)$, $K_{\varepsilon_2}(z_2)$, … , $K_{\varepsilon_n}(z_n)$, … такую, что в пересечении любого их числа попадает бесконечное множество точек взятой последовательности. Поэтому можем выбрать:

$$x_{n_1} \in K_{\varepsilon_1}(z_1); \quad x_{n_2} \in K_{\varepsilon_2}(z_2) \cap K_{\varepsilon_1}(z_1) \ (n_2 > n_1); \ \dots ; \quad x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^{k} K_{\varepsilon_i}(z_i) \ (n_k > n_{k-1} > ... > n_1).$$

Так как $x_{n_k}, x_{n_l} \in K_{\varepsilon_k}(z_k) \quad (l \ge k)$, то $\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \le \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(z_k, x_{n_l}) < 2\varepsilon_k$, а, значит, последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в себе и, в силу полноты пространства X, сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$. Таким образом, E компактно. ◀

З а м е ч а н и е 4.3. Для компактности множества достаточно также (в случае полноты пространства X) существования компактной ε-сети.

Действительно, для этой компактной ε-сети будет существовать конечная ε-сеть, которая будет, очевидно, (2ε)-сетью для исходного множества.

Лемма 4.13. *Пространство* C *является полным.*

▷ Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся в себе последовательность элементов из пространства C. Если $\varepsilon > 0$, то для достаточно больших значений m и $n \quad (m, n \ge n_0)$:

$$\rho(x_m, x_n) = \max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon .$$

Значит, при любом $t \in [a,b]$ будет

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon . \tag{25}$$

Фиксируя значение $t \in [a,b]$, видим, что числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в себе, следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$, который обозначим $x_0(t)$ (совокупность всех действительных чисел R с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y| \quad (x, y \in R)$ является полным метрическим пространством (см. выше)). Остается доказать, что x_0 принадлежит C и что имеет место сходимость $\{x_n\}$ к x_0 в смысле метрики этого пространства . Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (25), получим (при любом $t \in [a,b]$):

$$|x_0(t) - x_n(t)| \le \varepsilon .$$

Последнее означает: последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходится к функции $x_0(t)$ равномерно, что влечет непрерывность функции $x_0(t)$ и сходимость последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 в пространстве C (см. лемма 4.12). ◀

Доказательство полноты $C(T)$ аналогично доказательству, приведённому выше. Аналогично можно проверить полноту пространства $C_n(T)$.

Теорема 4.5 (Арцель – Асколи). *Для того чтобы множество E непрерывных функций было компактным в пространстве C, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие требования: функции множества E ограничены в совокупности, т. е. существует такая постоянная K, что*

$$|x(t)| \le K \quad (x \in E; t \in [a,b]);$$

функции множества E удовлетворяют условию ***равностепенной непрерывности****, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|t - t'| < \delta$, то $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ для всех $x \in E$; $t, t' \in [a,b]$.*

▷ *Необходимость.* Пусть E – компактное множество пространства C. Согласно теореме Хаусдорфа (теорема 4.4) для множества E существует конечная ε-сеть. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – непрерывные функции, образующие эту сеть. Так как каждая из функций x_k ограничена, а для произвольного элемента $x \in E$ найдется x_k так, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$, то:

$$|x(t)| \le |x_k(t)| + |x(t) - x_k(t)| \le \max_{a \le t \le b} |x_k(t)| + \rho(x, x_k) < \max_{a \le t \le b} |x_k(t)| + \varepsilon$$

и, следовательно, требование 1) выполнено, если в качестве постоянной K взять увеличенную на ε общую границу функций $|x_k(t)|$ $(k = 1,2,...,n; \ a \le t \le b)$.

Далее, для каждой из функций x_k найдется такое δ_k, что:

$$|x_k(t') - x_k(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t' - t| < \delta_k .$$

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Возьмем произвольную функцию x из множества E. Пусть x_k – тот элемент, для которого $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. Тогда:

$$|x(t') - x(t)| \le |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t)| + |x_k(t) - x(t)| \le$$
$$\le \rho(x, x_k) + |x_k(t') - x_k(t)| + \rho(x, x_k) < 2\varepsilon + |x_k(t') - x_k(t)|.$$

Если $|t - t'| < \delta$, то абсолютная величина разности в последней сумме будет меньше ε, а потому $|x(t') - x(t)| < 3\varepsilon$, т. е. функции множества E удовлетворяют условию 2) равностепенной непрерывности.

Достаточность. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем по нему $\delta > 0$ в соответствии с условием равностепенной непрерывности. Разобьем промежуток $[a,b]$ на части $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ так, что $t_{k+1} - t_k < \delta$, и обозначим символом H семейство ломаных $\bar{x}(t)$ (кусочно-линейных функций) с вершинами в точках (t_k, η_k) $(|\eta_k| \le K)$. H – компактное множество, т. к. каждый его элемент – функция $\bar{x}(t)$ – определяется набором чисел $\eta_0, \eta_1, ..., \eta_n$ так, что сходимость последовательности этих функций означает сходимость последовательностей соответствующих чисел $\{\eta_i\}$.

Множество H образует ε-сеть, т. к. для любой $x \in E$ можно построить $\bar{x} \in H$ как кусочно-линейную функцию, график которой проходит через точки: $(t_k, x(t_k))$ $(k = 0,1,...,n)$, Проверим, что $\rho(x, \bar{x}) < \varepsilon$, т. е. что $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [a,b]$. Пусть $t \in [a,b]$. Это значение t попадает в один из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$. Если обозначить m_k и M_k точные границы функции x в промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, то $M_k - m_k < \varepsilon$ (так как $t_{k+1} - t_k < \delta$). Но, очевидно, что:

$$m_k \le x(t) \le M_k, \qquad m_k \le \bar{x}(t) \le M_k.$$

Откуда:

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \le M_k - m_k < \varepsilon.$$

Наличие компактной ε-сети доказывает компактность множества E (см. замечание к теореме Хаусдорфа). ◀

Следствие 4.1. *Пусть множество* E *есть множество функций, удовлетворяющих условию Гёльдера*:

$$|x(t') - x(t)| \le M|t' - t|^{\alpha} \quad (x \in E; t', t \in [a,b]; 0 < \alpha < 1).$$

Если функции множества ограничены в совокупности, то E *компактно.*

Действительно, $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ обеспечивает равностепенную непрерывность функций множества E и, следовательно, выполнены оба условия теоремы Арцеля – Асколи (при $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $|t' - t|^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{M}$ и $|x(t') - x(t)| \le M|t' - t|^{\alpha} < \varepsilon$).

Отметим: теорема Арцеля – Асколи имеет место и для пространства $C(T)$.

Введём в рассмотрение пространства, связанные с условием Гёльдера. Пусть D – ограниченная область в R_2. Через $C_0(D)$ будем обозначать пространство непрерывных в области D ограниченных функций с нормой:

$$\| f \|_0^D = \sup_{x \in D} | f(x) | .$$

Через $C_m(D)$, где m – натуральное число, – пространство m раз непрерывно дифференцируемых в области D функций с ограниченными производными и нормой:

$$\| f \|_m^D = \sum_{k_1+k_2=0}^{m} \left\| \frac{\partial^{k_1+k_2} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_0^D .$$

Рассмотрим множество $Ш_\alpha$ функций, удовлетворяющих в D условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$. Заметим, что каждая такая функция принадлежит $C_0(D)$. Для каждой функции $f \in Ш_\alpha$ положим:

$$\| f \|_\alpha^D = \| f \|_0^D + \sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{| f(x) - f(y) |}{|x - y|^\alpha} .$$

Если $f, g \in Ш_\alpha$, то и их линейная комбинация принадлежит $Ш_\alpha$. Покажем, что $\| f \|_\alpha^D$ удовлетворяет аксиомам нормы и, таким образом, $Ш_\alpha$ с этой нормой является линейным нормированным пространством. Будем обозначать его через $C_\alpha(D)$. Итак, надо проверить, что

$\| f \|_\alpha^D \geq 0$, $\| f \|_\alpha^D = 0$ при $f = 0$;

$\| \lambda f \|_\alpha^D = |\lambda| \cdot \| f \|_\alpha^D$;

$\| f + g \|_\alpha^D \leq \| f \|_\alpha^D + \| g \|_\alpha^D$.

Проверим третье условие (выполнение первых двух очевидно). Имеем:

$$\| f + g \|_0^D \leq \| f \|_0^D + \| g \|_0^D$$

и $$\sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{\| [f(x) + g(x)] - [f(y) + g(y)] \|}{|x - y|^\alpha} = \sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{\| [f(x) - f(y)] - [g(y) - g(x)] \|}{|x - y|^\alpha} \leq$$

$$\leq \sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{\| [f(x) - f(y)] \|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{\| [g(x) - g(y)] \|}{|x - y|^\alpha}$$ и, значит,

$$\| f + g \|_\alpha^D \leq \| f \|_\alpha^D + \| g \|_\alpha^D .$$

Пусть функция f и последовательность функций $\{f_n\}$ заданы на некотором множестве X. Будем рассматривать последовательность чисел:

$$\left\{\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\right\}=\sup_{x\in X}|f_1(x)-f(x)|,\ \sup_{x\in X}|f_2(x)-f(x)|,\ \dots\ . \tag{26}$$

Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X к функции f (для чего применяем обозначение $f_n \rightrightarrows_X f$), то для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $n_0=n_\varepsilon$, что для всех $n\ge n_0$ верхние грани (26) конечны. В самом деле, если $f_n \rightrightarrows_X f$, то для любого $\varepsilon>0$, например, для $\varepsilon=1$, существует такой номер n_1, что для всех $x\in X$ и всех $n\ge n_1$ выполняется неравенство $|f_n(x)-f(x)|<1$, значит, и неравенство

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\le 1.$$

Поэтому при выполнении неравенства $n\ge n_1$ все верхние грани числовой последовательности (26) конечны.

Теорема 4.6. *Последовательность функций* $\{f_n\}$, *определенных на* X, *равномерно сходится на этом множестве* X *к функции* f *тогда и только тогда, когда*:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{27}$$

▷ Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ существует такой номер $n_0=n_0(\varepsilon)$, что для всех $n\ge n_0$ и всех $x\in X$ будет $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Взяв указанное n_0, для всех $n\ge n_0$ будем иметь:

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

а это, согласно определению предела числовой последовательности, и означает выполнение условия (27).

Обратно: если условие (27) выполнено, то, по определению конечного предела последовательности элементов из множества R (здесь R – множество действительных чисел), для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $n_0=n_0(\varepsilon)$, что для всех $n\ge n_0$ выполняется неравенство:

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $n\ge n_0$ и всех $x\in X$ справедливо неравенство:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

т. е. последовательность функций $\{f_n\}$, равномерно сходится на множестве X к функции f. ◀

В силу того, что почти все (начиная с n_1) элементы последовательности верхних граней (26) для равномерно сходящихся последовательностей функций конечны, критерий (27), по существу, сводит понятие равномерной сходимости функциональной последовательности к понятию сходимости числовой последовательности.

Следствие 4.2. *Для того чтобы последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходилась на множестве* X *к функции* f, *необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая числовая последовательность* $\{a_n\}$, *что*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \ge 0, \tag{28}$$

и существовал такой номер n_0, *что для всех* $n \ge n_0$ *и всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*:

$$|f_n(x) - f(x)| \le a_n. \tag{29}$$

$\triangleright$ Если $f_n \rightrightarrows_X f$, то существует такой номер n_1, что для всех $n \ge n_1$ все верхние грани числовой последовательности (26) конечны. Поэтому в качестве последовательности $\{a_n\}$ можно взять

$$a_n = \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_1, n_1+1, \ldots,$$

выбрав первые элементы $a_1, \ldots, a_{n_1-1}$ произвольно. Тогда при справедливости неравенства $n \ge n_1$ условие (29) выполняется, а в силу (27), имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теперь в обратную сторону. Пусть существует числовая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условиям (28) и (29). Тогда, в силу (29), для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство:

$$\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \le a_n.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу, получим, согласно (28), что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Выполнение этого условия означает, что $f_n \rightrightarrows_X f$ (теорема 4.5). $\blacktriangleleft$

3. О полноте пространства $C_\alpha(D)$

Заметим: в пространстве $C_0(D)$ (пространство непрерывных ограниченных в области D функций с нормой $\|f\|_0^D = \sup\limits_{x\in D}|f(x)| = \sup\limits_D|f(x)|$) выполняются равенства $\rho(f,g) = \|f-g\|_0^D = \sup\limits_{x\in D}|f(x) - g(x)|$,

$$\rho(f_{n+p}, f_n) = \sup_{x\in D}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right|, \qquad \rho(f_m, f_n) = \sup_{x\in D}\left|f_m(x) - f_n(x)\right|,$$

а в пространстве $C_\alpha(D)$ (пространство функций, удовлетворяющих в области D условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha<1$, с нормой $\|f\|_\alpha^D$, $C_\alpha(D)\subset C_0(D)$) выполняются равенства:

$$\|f\|_\alpha^D = \sup_{x\in D}\left|f(x)\right| + \sup_{x,y\in D, x\neq y}\frac{\left|f(x)-f(y)\right|}{\left|x-y\right|^\alpha}; \quad \rho(f,g) = \|f-g\|_\alpha^D = \|f-g\|_0^D +]f-g[_\alpha^D;$$

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in D}\left|f(x)-g(x)\right| + \sup_{x,y\in D, x\neq y}\frac{\left|[f(x)-g(x)]-[f(y)-g(y)]\right|}{\left|x-y\right|^\alpha};$$

$$\rho(f_m, f_n) = \sup_{x\in D}\left|f_m(x)-f_n(x)\right| + \sup_{x,y\in D, x\neq y}\frac{\left|[f_m(x)-f_n(x)]-[f_m(y)-f_n(y)]\right|}{\left|x-y\right|^\alpha} < \varepsilon .$$

Последовательность $\{f_m\}$ *точек метрического пространства называется* ***фундаментальной (или последовательностью Коши)****, если для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует такой номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$*, что для всех номеров* $n \ge n_0$ *и* $m \ge n_0$ *выполняется неравенство* $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$.

Можно дать и другое определение.

Последовательность $\{f_n\}$ *точек метрического пространства* $C_s(D)$ $(s = 0,\alpha)$ *называется* ***фундаментальной****, если для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует такой номер* $n_0 = n_0(\varepsilon)$*, что для всех номеров* $n\ge n_0$ *и всех целых* $p\ge 0$ *выполняется неравенство:* $\rho(f_{n+p}, f_n) < \varepsilon$.

Сходимость последовательности точек пространства $C_0(D)$ к точке означает ***равномерную*** сходимость последовательности соответствующих функций к соответствующей функции. И обратно, из равномерной сходимости последовательности непрерывных и ограниченных функций к непрерывной функции следует сходимость соответствующих элементов в пространстве $C_0(D)$. Пространство $C_0(D)$ полное (доказано). В полном пространстве имеет место ***признак сходимости Коши***:

Для того чтобы последовательность функций $\{f_n\}$ *из пространства* $C_0(D)$ *равномерно сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной в пространстве* $C_0(D)$:

$$\rho(f_{n+p}, f_n) = \sup_{x\in D}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon;$$

$(n\ge n_0$ *и* $p \ge 0)$.

Теорема 4.7. *Пространство* $C_\alpha(D)$ *полно.*

$\triangleright$ Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве $C_\alpha(D)$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности указанной последовательности, существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \ge n_0$ и всех целых $p \ge 0$ выполняется неравенство:

$$\rho(f_{n+p}, f_n) = \sup_{x\in D}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| + \sup_{x,y\in D, x\ne y}\frac{\left|[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(y) - f_n(y)]\right|}{|x-y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{8} \ ,$$

а поэтому и неравенство:

$$\sup_{x\in D}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{8} \, .$$

Значит, существует функция $f \in C_0(D)$, к которой $\{f_n\}$ равномерно сходится. Это означает: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ при любом $x \in D$ и, значит, $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$. Перейдем к пределу при стремлении $p \to \infty$ в неравенстве:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| + \frac{\left|[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(y) - f_n(y)]\right|}{|x-y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{8}$$

(оно справедливо при $\forall x, y \in D, x \ne y$, для всех номеров $n \ge n_0$ и всех целых чисел $p \ge 0$). Получим

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| + \frac{\left|[f(x) - f_n(x)] - [f(y) - f_n(y)]\right|}{|x-y|^\alpha} \le \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad \forall x, y \in D, x \ne y, \quad n \ge n_0 \, .$$

Тогда: $\dfrac{\left|[f(x) - f_n(x)] - [f(y) - f_n(y)]\right|}{|x-y|^\alpha} < \dfrac{\varepsilon}{4}$ при $\forall x, y \in D, x \ne y$, $n \ge n_0$, откуда следует:

$$\frac{\left|f(x) - f_n(x) - f(y) + f_n(y)\right|}{|x-y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{или} \quad \frac{\left|[f(x) - f(y)] - [f_n(x) - f_n(y)]\right|}{|x-y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{4} \, .$$

Последнее неравенство перепишем в виде:

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad \forall x, y \in D, x \ne y, \quad \forall n \ge n_0 \, ,$$

следовательно:

$$\sup_{x,y\in D, x\ne y}\left|\frac{f_n(x) - f_n(y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^\alpha}\right| \le \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \ge n_0) \qquad (30)$$

и, значит:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x,y\in D,x\neq y}\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}\right|=0.$$

Осталось сослаться на теорему 4.6, согласно которой последовательность функций $\{\varphi_n(x,y)\}=\left\{\frac{f_n(x)-f_n(y)}{|x-y|^{\alpha}}\right\}$, определенных на множестве G пар x,y $(x,y\in D,x\neq y)$, равномерно сходится на этом множестве к функции $\varphi(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}$.

Но и $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$ для всех $n\geq n_0$ и всех $x\in X$. Значит:

$$\sup_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|\leq\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{3} \tag{31}$$

при всех $n\geq n_0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|=0$.

Из (30) и (31) находим:

$$\sup_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|+\sup_{x,y\in D,x\neq y}\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}\right|<\frac{2\varepsilon}{3}\quad (n\geq n_0),$$ отсюда:

все верхние грани конечны и:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|+\lim_{n\to\infty}\sup_{x,y\in D,x\neq y}\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}\right|=0.$$

В силу теоремы 4.6, последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на D к функции $f(x)$, а последовательность $\{f_n(x)+\varphi_n(x,y)\}$ равномерно сходится к сумме $f(x)+\varphi(x,y)$.

Кроме того, в ходе доказательства было доказано: последовательность функций $\{\varphi_n(x,y)\}=\left\{\frac{f_n(x)-f_n(y)}{|x-y|^{\alpha}}\right\}$, определенных на множестве G пар x,y $(x,y\in D,x\neq y)$ равномерно сходится на этом множестве к функции $\varphi(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}$, т. е.:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^{\alpha}}. \tag{32}$$

Так как $\{f_n\}$ фундаментальна в пространстве $C_\alpha(D)$, то существует такая константа M, что $\|f_n\|_\alpha^D \le M$ $(C_\alpha(D) \subset C_0(D))$. Тогда из (32) следует, что $f \in C_\alpha(D)$ (теоремы 4.3, 4.5, лемма 4.13, следствие 4.1). ◀

В пространстве C расстояние между точками x, y определялось так: $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)|$. Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 означала ***равномерную сходимость*** последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x_0(t)$.

Рассмотрим теперь множество $Ш_{m+\alpha}$ m раз дифференцируемых на D функций, m-е частные производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha<1$. Положим для $f \in Ш_{m+\alpha}$:

$$\|f\|_{m+\alpha}^D = \|f\|_m^D + \sum_{k_1+k_2=m} \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_\alpha^D .$$

Из предыдущего следует, что аксиомы нормы удовлетворяются и множество $Ш_{m+\alpha}$ с этой нормой есть линейное нормированное пространство. Это пространство будем обозначать $C_{m+\alpha}(D)$. Из полноты $C_m(D)$ и $C_\alpha(D)$ вытекает, что пространство $C_{m+\alpha}(D)$ также является полным.

Лемма 4.14. *Пусть $Ш$ есть семейство функций $f \in C_\alpha(D)$, равномерно ограниченных по норме $\| \ \|_\alpha^D$. Тогда семейство $Ш$ компактно по норме $\| \ \|_{\alpha'}^D$ при любом $0<\alpha'<\alpha$.*

▷ Из ограниченности $f \in Ш$ по норме $\| \ \|_\alpha^D$, $\|f\|_\alpha^D \le M$ для любой функции $f \in Ш$, и того, что функции этого множества обладают свойством равностепенной непрерывности, следует правомочность применения теоремы Арцеля – Асколи. Равностепенная непрерывность такого множества функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, была показана выше (её обеспечивает число $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$). В силу теоремы Арцеля – Асколи, семейство $Ш$ компактно в $C(D)$.

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность, сходящаяся в $C(D)$ к некоторой функции f равномерно: $f_n \rightrightarrows_D f$. Тогда:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad x\neq y, \quad \text{а потому:} \quad \|f\|_{\alpha}^{D}\le M .$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и найдем такое $\delta>0$, что:

$$M|x-y|^{\alpha-\alpha'}<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x-y|<\delta . \tag{33}$$

Тогда:

$$\frac{|f_n(x)-f(x)-f_n(y)+f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}}\le\frac{|f_n(x)-f(x)|}{|x-y|^{\alpha'}}+ \\ +\frac{|f_n(y)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} \tag{34}$$

и

$$\frac{|f_n(x)-f(x)-f_n(y)+f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}}\le\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^{\alpha}}|x-y|^{\alpha-\alpha'}+\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}|x-y|^{\alpha-\alpha'}\le \\ \le 2M|x-y|^{\alpha-\alpha'} . \tag{35}$$

Пусть n_0 настолько велико, что при $n\ge n_0$ справедливо

$$|f_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\delta^{\alpha'} \quad \text{при всех} \quad x\in D . \tag{36}$$

Тогда из (33) – (36) следует, что при выполнении неравенства $n\ge n_0$, независимо от того, выполнено ли неравенство $|x-y|<\delta$ или неравенство $|x-y|\ge\delta$ имеет место:

$$\frac{|[f_n(x)-f(x)]-[f_n(y)-f(y)]|}{|x-y|^{\alpha'}}<\varepsilon ,$$

но это (вместе со сходимостью f_n в C) и означает, что

$$f_n \underset{C_{\alpha'}(D)}{\rightarrow} f \qquad ◀ \text{[18, гл. II, § 4].}$$

Из определения нормы $\|\ \|_{m+\alpha}^{D}$ получаем следствие.

Следствие 4.3. *Пусть семейство функций* $Ш$ *равномерно ограничено по норме* $\|\ \|_{m+\alpha}^{D}$ *константой* M. *Тогда* $Ш$ *компактно по норме* $\|\ \|_{m+\alpha'}^{D}$ *при любом* α', $0<\alpha'<\alpha$.

§ 3. Априорная оценка для функций класса $C^0_{2+\alpha}(D)$

1. Операция усреднения. Сходимость усреднённой функции к функции усредняемой

Лемма 4.15. *Пусть есть последовательность* $\{f_n\}$, $f_n \in C_{k+\alpha}(D)$, и константа $M>0$ такие, что $\|f_n\|^D_{k+\alpha} \le M$. Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_l}\}$, которая по норме $\|\ \|^D_k$ сходится к функции $f \in C_{k+\alpha}(D)$, и $\|f\|^D_{k+\alpha} \le M$ [18, доп., IV, 4].

▷ Так как последовательность $\{f_n\}$ компактна в $C_k(D)$ (следствие 4.3), то существует подпоследовательность $\{f_{n_l}\}$, сходящаяся к некоторой функции $f \in C_k(D)$ в пространстве $C_k(D)$. Для любой пары точек $x', x'' \in D$, $x' \ne x''$, будет выполняться неравенство:

$$\sum_{k_1+k_2=k} \frac{\left|\dfrac{\partial^k f_n(x')}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}} - \dfrac{\partial^k f_n(x'')}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|}{|x'-x''|^\alpha} \le M.$$ В пределе $(n\to\infty)$ $$\sum_{k_1+k_2=k} \frac{\left|\dfrac{\partial^k f(x')}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}} - \dfrac{\partial^k f(x'')}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|}{|x'-x''|^\alpha} \le M. \blacktriangleleft$$

Теперь определим операцию усреднения. Пусть $\omega(x)$ – функция, заданная в пространстве R_2, обладающая свойствами:

$\omega(x) \in C_\infty$,

$\omega(x) = 0$ при $|x| \ge 1$,

$\omega(x) \ge 0$,

$\int\limits_{R_2} \omega(x)dx = 1$.

Положим: $\omega_h(x) = \dfrac{1}{h^2}\omega\left(\dfrac{x}{h}\right)$, $x=(x_1,x_2)$. Тогда: $\int\limits_{R_2}\omega_h(x)dx =$

$$= \frac{1}{h^2}\int\limits_{R_2}\omega\left(\frac{x}{h}\right)dx = \frac{1}{h^2}\int\limits_{R_2}\omega\left(\frac{x_1}{h},\frac{x_2}{h}\right)dx_1dx_2 = \left[x_1 = hy_1, x_2 = hy_2; dx = h^2dy\right] = \int\limits_{R_2}\omega(y)dy = 1.$$

В дальнейшем будем применять обозначение $\int\limits_{R_2} g(x)dx = \int g(x)dx$, т. е. интеграл $\int$–"–dx понимается как $\int\limits_{R_2}$–"–dx.

Плотностью множества *E, измеримого в пространстве R_2,* ***в точке*** *x называется* ***предел*** *(если он существует) отношения $\frac{m(E\bigcap\Pi)}{m\Pi}$ при $|d\Pi|\to 0$, т. е.*

$$\lim_{|d\Pi|\to 0}\frac{m(E\bigcap\Pi)}{m\Pi},$$

где Π – произвольный прямоугольник, содержащий точку x, со сторонами, параллельными координатным осям, $d\Pi$ – его диагональ, $|d\Pi|$ – её длина, $m\Omega$ – мера множества Ω. ***Точкой плотности*** *множества E называется* ***точка*** *x, в которой плотность множества E равна единице.*

Теорема 4.8. *Почти все точки измеримого множества есть его точки плотности* [29, гл. IV, § 10].

Пусть $f(x)$ – измеримая функция, определенная в области D, и справедливо неравенство $|f(x)|<M$. Продолжим f нулем вне области D и положим $f^h(x)=\int\omega_h(x-y)f(y)dy$. Непосредственно видно, что функция $f^h(x)$ бесконечно дифференцируема.

Функцию *$f^h(x)$, определённую выше, назовём* ***усреднённой,*** *а исходную функцию $f(x)$ –* ***усредняемой.***

Лемма 4.16. *Усреднённая функция стремится к функции усредняемой $f^h(x)\to f(x)$ почти всюду в области D при стремлении $h\to 0$.*

$\triangleright$ Рассмотрим множества:

$$E_{m,k}=\left\{x\in D\middle|\frac{kM}{m}\le f(x)<\frac{(k+1)M}{m}\right\},\quad k=-m,-(m-1),\dots,-1,0,1,\dots,m-1$$

(число m будет определено ниже). Так как $f(x)$ – измеримая функция, определенная в области D, то множество D измеримо и при любом действительном числе a измеримо множество $E(f\ge a)$. Но тогда при любом $b>a$ измеримо множество $E(a\le f<b)$, т. е. каждое $E_{m,k}$ является измеримым, а потому, по теореме 4.8, почти все его точки являются точками плотности. Пусть $E^*_{m,k}$ – множество точек плотности множества $E_{m,k}$, так что, если $N=\bigcup\limits_{m,k}\left(E_{m,k}-E^*_{m,k}\right)=\sum\limits_{m,k}\left(E_{m,k}-E^*_{m,k}\right)$, то $mN=0$.

Пусть $E=D-N$. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и возьмем m такое, что $\frac{M}{m}<\varepsilon$. Рассмотрим произвольную точку $x\in E$. Тогда при выбранном значении m и некотором k $x \in E^*_{m,k}$. Так как x – точка плотности множества $E_{m,k}$, то:

$$\frac{m\left(E^*_{m,k} \cap Q^x_h\right)}{mQ^x_h} \to 1 \qquad \text{при} \quad h \to 0,$$

где Q^x_h – открытый круг радиуса h с центром в точке x.

Получаем:

$$f^h(x) - f(x) = \int \omega_h(x-\xi) f(\xi) d\xi - f(x) =$$

$$= \int\limits_{E_{m,k} \cap Q^x_h} \omega_h(x-\xi)[f(\xi) - f(x)] d\xi + \int\limits_{Q^x_h - E_{m,k}} \omega_h(x-\xi)[f(\xi) - f(x)] d\xi$$

или

$$\left| f^h(x) - f(x) \right| \le \frac{M}{m} \int\limits_{E_{m,k} \cap Q^x_h} \omega_h(x-\xi) d\xi + 2M \int\limits_{Q^x_h - E_{m,k}} \omega_h(x-\xi) d\xi, \quad \text{т. к. если}$$

$x, \xi \in E_{m,k}$, то $\left\{ \frac{kM}{m} \le f(x), f(\xi) < \frac{(k+1)M}{m} \right\}$ и $\left| f(\xi) - f(x) \right| \le \frac{(k+1)M}{m} - \frac{kM}{m} = \frac{M}{m}$.

Преобразуем круг $Q^x_h = \left\{ \xi \middle| (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 < h^2 \right\}$ сначала в круг $Q^{\tilde{x}}_1 = \left\{ \eta \middle| (\eta_1 - \tilde{x}_1)^2 + (\eta_2 - \tilde{x}_2)^2 < 1 \right\}$ при помощи преобразования $\xi_i = h\eta_i, x_i = h\tilde{x}_i$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2), \quad i = 1{,}2)$. Затем полученный круг преобразуем в круг $Q^0_1 = \left\{ \theta \middle| \theta_1^2 + \theta_2^2 < 1 \right\}$ при помощи преобразования $\eta = \tilde{x} - \theta$. В результате первого преобразования подынтегральное выражение принимает вид: $\omega_h(x-\xi)d\xi = \quad = \frac{1}{h^2} \omega\left(\frac{x_1 - \xi_1}{h}, \frac{x_2 - \xi_2}{h} \right) d\xi_1 d\xi_2 = \omega(\tilde{x}_1 - \eta_1, \tilde{x}_2 - \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 =$ $\omega(\tilde{x} - \eta) d\eta$, а в результате второго оно принимает вид: $\omega(\tilde{x} - \eta) d\eta =$ $\omega(\theta_1, \theta_2)(-d\theta_1)(-d\theta_2) = \omega(\theta) d\theta$.

Пусть в результате двух указанных преобразований образом множества $E^*_{m,k} \cap Q^x_h$ оказалось множество $F^{x,h}_{m,k}$. Тогда:

$$\frac{mF^{x,h}_{m,k}}{mQ^0_1} \to 1 \quad \text{при} \quad h \to 0, \qquad \left| f^h(x) - f(x) \right| \le \frac{M}{m} \int\limits_{E_{m,k} \cap Q^x_h} \omega_h(x-\xi) d\xi + 2M \int\limits_{Q^x_h - E_{m,k}} \omega_h(x-\xi) d\xi =$$

$$= \frac{M}{m} \int\limits_{F^{x,h}_{m,k}} \omega(\theta) d\theta + 2M \int\limits_{Q^0_1 - F^{x,h}_{m,k}} \omega(\theta) d\theta \to \frac{M}{m} \qquad \text{при} \quad h \to 0.$$

Таким образом, для любой точки $x \in D - N$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое h_0, что $\left| f^h(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ при условии $h < h_0$, но это и значит, что $f^h(x) \to f(x)$ почти всюду. ◀

2. Свойства усреднённой функции

Наименьшее замкнутое множество $S \subset X$ *такое, что* ***значения*** *числовой функции* f*, определённой на топологическом пространстве* X***, равны нулю*** *всюду на дополнении* $CS = X - S$*, называется* ***носителем функции*** f***.*** *Иначе,* S *есть замыкание множества всех точек* $x \in X$*, в которых* $f(x) \neq 0$*.*

Функция*, определённая в некоторой области* n*-мерного пространства* E^n *и имеющая принадлежащий к этой области компактный носитель, называется* ***финитной функцией. Точнее,*** *пусть функция* $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ *определена в области* $\Omega \subset E^n$*.* ***Финитная функция*** *в области* Ω *есть такая определённая в области* Ω *функция, что* ***её носитель*** *есть замкнутое ограниченное множество, отстоящее от границы области* Ω *на расстоянии большем, чем* $\delta > 0$*, где* δ *достаточно мало.*

Через $C_k^0(D)$ обозначим подпространство пространства $C_k(D)$ тех функций, которые равны нулю на границе ∂D; через $\overset{0}{C}_\infty(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых финитных в области D функций. Функцию $f(x) \in \overset{0}{C}_\infty(D)$ всегда можно считать продолженной нулём вне D и, значит, определённой на всей плоскости R_2. С учётом этого для указанного множества функций будем применять и обозначение $\overset{0}{C}_\infty(D)$, и обозначение $\overset{0}{C}_\infty$. Пусть $f \in C_k^0(D)$. Рассмотрим усреднение этой функции:

$$f^h(x) = \int \omega_h(x-y) f(y) dy \, .$$

Лемма 4.17. *Если* h *достаточно мало, то* $f^h \in \overset{0}{C}_\infty$*. В этом случае*:

$$\frac{\partial^k f^h}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right)^h .$$

▷ Справедлива цепочка равенств, в которой применяется обозначение (см. выше): $\int \omega_h(x-y) f(y) dy = \int\limits_{R_2} \omega_h(x-y) f(y) dy$,

$$\frac{\partial^k f^h}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \int \omega_h(x-y) f(y) dy = \int \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \omega_h(x-y) f(y) dy =$$

$$= \int \omega_h(x-y) \frac{\partial^k}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2}} f(y) dy = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right)^h . \quad ◀$$

Лемма 4.18. *Пусть* $f \in C_\alpha(D)$. *Тогда*: $\|f^h\|_\alpha^D \le \|f\|_\alpha^D$.

$$\triangleright \; f^h(x) = \int \omega_h(x-y) f(y)dy = [z = x-y; y = x-z; dy = -dz] =$$

$$= -\int \omega_h(z) f(x-z)dz = \int \omega_h(y)\left(-f(x-y)\right)dy.$$

Значит:

$$f^h(x') = \int \omega_h(y)\left(-f(x'-y)\right)dy, \quad f^h(x') - f^h(x'') = \int \omega_h(y)\left(-f(x'-y) + f(x''-y)\right)dy,$$

$\left|f^h(x') - f^h(x'')\right| \le \int \omega_h(y)\left|f(x'-y) - f(x''-y)\right|dy$. Отсюда следует:

$$\frac{\left|f^h(x') - f^h(x'')\right|}{|x'-x''|^\alpha} \le \int \omega_h(y)\frac{|f(x'-y) - f(x''-y)|}{|x'-x''|^\alpha}dy \le \|f\|_\alpha^D \int \omega_h(y)dy = \|f\|_\alpha^D. \blacktriangleleft$$

3. Оценка для функций класса $C^0_{2+\alpha}(D)$

Введём следующие обозначения:

$$]f[_0^D = \|f\|_0^D = \sup_{x\in D}|f(x)|, \qquad]f[_\alpha^D = \sup_{x,y\in D, x\ne y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$]f[_{2+\alpha}^D = \sum_{i,k}\left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right[_\alpha^D = \left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right[_\alpha^D + 2\left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right[_\alpha^D + \left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right[_\alpha^D.$$

Обозначим ещё:

$$\left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right[_\alpha^D = \sup_{x,y\in D, x\ne y}\frac{\left|\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} - \dfrac{\partial^2 f(y)}{\partial x_i \partial x_k}\right|}{|x-y|^\alpha}, \qquad |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}.$$

Лемма 4.19. *Для любой функции* $f \in C^0_{2+\alpha}(D)$ *имеет место неравенство*:

$$]f[_{2+\alpha}^D \le C\left(]\Delta f[_\alpha^D +]f[_0^D\right), \tag{37}$$

где C *зависит от значения* α, $C^0_{2+\alpha}(D)$ *– подпространство функций, обращающихся в нуль на границе области* D, $C^0_{2+\alpha}(D) \subset C_{2+\alpha}(D)$ [18, дополнения, IV, 4].

$\triangleright$ Из лемм 4.15 – 4.18 вытекает, что неравенство (37) достаточно доказать для функции $f \in \overset{0}{C}_\infty(D)$, где $\overset{0}{C}_\infty(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых финитных в области D функций.

Пусть:

$$\Delta f = -2\pi\varphi ,$$

где функция φ также финитна и бесконечно дифференцируема. Известно, что:

$$f(x) = \int_D \varphi(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy$$

(27_2, гл. III, § 35). Поскольку функция φ финитна, то, положив её равной нулю вне области D, можем записать:

$$f(x) = \int_D \varphi(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy = \int_{R_2} \varphi(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy = \int \varphi(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy$$

(последнее равенство является обозначением для краткости дальнейших записей).

Далее, имеем:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \int \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{1}{|x-y|} dy = -\int \varphi(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \ln \frac{1}{|x-y|} dy = \int \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \cdot \ln \frac{1}{|x-y|} dy ,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} = \int \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \frac{1}{|x-y|} dy = \int \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}} dy =$$

$$= -\int \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \cdot \frac{x_k - y_k}{|x-y|^2} dy .$$

Пусть C – константа Гёльдера функции φ. Пусть также фиксированы две точки: $x', x'' \in D$ и $|x' - x''| = \rho$, $\frac{x' + x''}{2} = x^0$.

Вспомним, что:

$$]f[^D_{2+\alpha} = \sum_{i,k} \left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right[^D_\alpha = \left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right[^D_\alpha + 2\left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right[^D_\alpha + \left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right[^D_\alpha ,$$

$$\left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right[^D_\alpha = \sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_i \partial x_k}\right|}{|x-y|^\alpha}, \qquad |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

и мы доказываем неравенство $]f[^D_{2+\alpha} \le C\left(]\Delta f[^D_\alpha +]f[^D_0\right)$. Поэтому требуется оценить разность:

$$\frac{\partial^2 f(x'')}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x_i \partial x_k} = \int \left(\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^2} - \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^2} \right) dy . \qquad (38)$$

Пусть $\psi(x)$ – некоторая фиксированная функция такая, что $\psi(x) = 1$, если $|x - x^0| \le R$; $0 < \psi(x) < 1$, если $R < |x - x^0| < 2R$; $\psi(x) = 0$, если $|x - x^0| \ge 2R$, где R такое, что $D \subset Q_R^{x^0}$, $Q_R^{x^0}$ – открытый круг в R_2 радиуса

R с центром в точке x^0, $\partial Q_R^{x^0} = C_R^{x^0}$ – окружность радиуса R с центром в точке x^o. Расстоянием от области D до окружности $C_R^{x^0}$ назовем величину $\rho\left(D, C_R^{x^o}\right) = \inf\limits_{x\in D, \zeta\in C_R^{x^o}} \rho(x,\zeta) = \rho_D^C > 0$.

Вместо правой части (38) будем оценивать выражение:

$$I = \int\left(\frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y) - \varphi(x')\psi(y)]\frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^2} - \frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]\frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^2}\right)dy\,. \qquad (39)$$

так как $\left|\int\left(\varphi(x')\frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i}\frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^2} - \varphi(x'')\frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i}\frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^2}\right)dy\right| = \left|\int\limits_{Q_{2R}^{x^0} - Q_R^{x^0}}(-\text{"}-)dy\right| \le K'C\rho^\alpha$, (40)

где $\int\limits_{Q_{2R}^{x^0} - Q_R^{x^0}}(-\text{"}-)dy = \int\limits_{R_2}(-\text{"}-)dy$, выражение в скобках $(-\text{"}-)$ совпадает с выражением, стоящим в больших скобках в левом интеграле из (40), K' – константа, зависящая от R (C – константа Гёльдера функции φ), то достаточно получить для интеграла I оценку: $|I| \le K''C\rho^\alpha$, где K'' зависит от α и R.

В правой части (39) можно выполнить интегрирование по частям, т. к. выражения в квадратных скобках – гладкие функции, обращающиеся в нуль соответственно в точках x' и x''. Выполним, например, интегрирование второго слагаемого из больших скобок (39) в случае: $i = k$

$$-\int\frac{(x''_k - y_k)}{\sqrt{(x''_1 - y_1)^2 + (x''_2 - y_2)^2}^{\,2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y_k}[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]dy =$$

$$= \int\limits_{R_2}[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]\cdot\frac{-\sqrt{(x''_1 - y_1)^2 + (x''_2 - y_2)^2}^{\,2} - 2(x''_k - y_k)\sqrt{-\text{"}-}\cdot\dfrac{-(x''_k - y_k)}{\sqrt{-\text{"}-}}}{|x''-y|^4}dy =$$

$$= \int\limits_{R_2}[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]\cdot\frac{-\sqrt{-\text{"}-}^{\,2} + 2(x''_k - y_k)^2}{|x''-y|^4}dy = \int\limits_{R_2}[-\text{"}-]\cdot\left[2\frac{(x''_k - y_k)^2}{|x''-y|^2} - 1\right]\frac{1}{|x''-y|^2}dy\,,$$

где $[-\text{"}-] = [\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]$.

В случае же $i \ne k$ получим:

$$-\int\frac{(x''_k - y_k)}{\sqrt{(x''_1 - y_1)^2 + (x''_2 - y_2)^2}^{\,2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]dy =$$

$$= \int\limits_{R_2}[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]\cdot\frac{2(x''_i - y_i)(x''_k - y_k)}{|x''-y|^4}dy =$$

$$= \int_{R_2} [-"-] \cdot \left[2\frac{(x_i''-y_i)(x_k''-y_k)}{|x''-y|^2} - 0 \right] \frac{1}{|x''-y|^2} dy$$

Объединяя равенства, полученные в случаях $i=k$ и $i \neq k$, в одно, получим:

$$-\int \frac{(x_k''-y_k)}{\sqrt{(x_1''-y_1)^2+(x_2''-y_2)^2}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)]dy =$$

$$= \int_{R_2} [-"-] \cdot \left[2\frac{(x_i''-y_i)(x_k''-y_k)}{|x''-y| \cdot |x''-y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x''-y|^2} dy,$$

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, i=k, \\ 0, i \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера.

Поэтому:

$$I = \int \left(\frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y)-\varphi(x')\psi(y)] \frac{(x_k'-y_k)}{|x'-y|^2} - \frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)] \frac{(x_k''-y_k)}{|x''-y|^2} \right) dy =$$

$$= \int_{R_2} [\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)] \cdot \left[2\frac{(x_i''-y_i)(x_k''-y_k)}{|x''-y| \cdot |x''-y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x''-y|^2} dy -$$

$$- \int_{R_2} [\varphi(y)-\varphi(x')\psi(y)] \cdot \left[2\frac{(x_i'-y_i)(x_k'-y_k)}{|x'-y| \cdot |x'-y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'-y|^2} dy.$$

Представим полученное равенство в виде:

$$I = \int_{Q_{2\rho}^{x^0}} [\varphi(y)-\varphi(x'') \cdot 1] \cdot \left[2\frac{(x_i''-y_i)(x_k''-y_k)}{|x''-y| \cdot |x''-y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x''-y|^2} dy -$$

$$- \int_{Q_{2\rho}^{x^0}} [\varphi(y)-\varphi(x')] \cdot \left[2\frac{(x_i'-y_i)(x_k'-y_k)}{|x'-y| \cdot |x'-y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'-y|^2} dy +$$

$$+ \int_{R_2 - Q_{2\rho}^{x^0}} \{[\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)] \cdot F_{x''}(y) - [\varphi(y)-\varphi(x')\psi(y)] \cdot F_{x'}(y)\} dy = I_1 - I_2 + I_3,$$

где $F_{x'}(y) = \left[2\frac{(x_i'-y_i)(x_k'-y_k)}{|x'-y| \cdot |x'-y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'-y|^2}$, $F_{x''}(y)$ имеет аналогичный вид:

$$|I_1| \leq 2 \int_{Q_{2\rho}^{x^0}} |\varphi(y)-\varphi(x'')| \cdot \frac{1}{|x''-y|^2} dy \leq 2C \int_{Q_{2\rho}^{x^0}} |y-x''|^\alpha \cdot \frac{1}{|x''-y|^2} dy = 2C \int_{Q_{2\rho}^{x^0}} \frac{1}{|x''-y|^{2-\alpha}} dy =$$

$$= 2C \cdot 2\pi \int_0^{2\rho} \frac{1}{r^{2-\alpha}} r dr = 4\pi C \int_0^{2\rho} \frac{1}{r^{1-\alpha}} dr = 4 \cdot 2^\alpha \cdot \frac{\pi}{\alpha} \cdot C\rho^\alpha = K^{(1)} C\rho^\alpha \quad \text{и} \quad |I_2| \leq K^{(2)} C\rho^\alpha.$$

Для оценки I_3 представим его в виде:

$$I_3 = \int_{R_2 - Q_{2\rho}^{x^0}} \{[\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)] \cdot F_{x''}(y) - [\varphi(y) \mp \varphi(x'')\psi(y) - \varphi(x')\psi(y)] \cdot F_{x'}(y)\} dy =$$

$$= \int_{R_2 - Q_{2\rho}^{x^0}} \{[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)] \cdot [F_{x''}(y) - F_{x'}(y)] - [\varphi(x'') - \varphi(x')] \cdot \psi(y) \cdot F_{x'}(y)\} dy =$$

$$= \int_{R_2 - Q_{2\rho}^{x^0}} \{[\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)] \cdot F(y) - [\varphi(x'') - \varphi(x')] \cdot \psi(y) \cdot F_{x'}(y)\} dy ,$$

где $F(y) = F_{x''}(y) - F_{x'}(y)$. $F(y)$ же представим в виде:

$$F(y) = \left[2\frac{(x_i'' - y_i)(x_k'' - y_k)}{|x'' - y| \cdot |x'' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'' - y|^2} \mp \left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k'' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x'' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'' - y|^2} -$$

$$- \left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x' - y|^2} = 2\left[\frac{(x_i'' - y_i)}{|x'' - y|} - \frac{(x_i' - y_i)}{|x' - y|} \right] \frac{(x_k'' - y_k)}{|x'' - y|} \frac{1}{|x'' - y|^2} +$$

$$+ \left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k'' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x'' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'' - y|^2} \mp \left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'' - y|^2} -$$

$$- \left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x' - y|^2} = 2\left[\frac{(x_i'' - y_i)}{|x'' - y|} - \frac{(x_i' - y_i)}{|x' - y|} \right] \frac{(x_k'' - y_k)}{|x'' - y|} \frac{1}{|x'' - y|^2} +$$

$$+ 2\left[\frac{(x_k'' - y_k)}{|x'' - y|} - \frac{(x_k' - y_k)}{|x' - y|} \right] \frac{(x_i' - y_i)}{|x' - y|} \frac{1}{|x'' - y|^2} + \left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x'' - y|^2} -$$

$- \left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x' - y|} - \delta_{ik} \right] \frac{1}{|x' - y|^2}$, причем два последних слагаемых можно объединить в одно $\left[2\frac{(x_i' - y_i)(x_k' - y_k)}{|x' - y| \cdot |x' - y|} - \delta_{ik} \right] \cdot \left[\frac{1}{|x'' - y|^2} - \frac{1}{|x' - y|^2} \right]$ и тогда самая последняя сумма в представлении $F(y)$ будет суммой трех слагаемых F_1, F_2, F_3. Для оценки I_3 осталось оценить $[\varphi(x'') - \varphi(x')]\psi(y)$, разность, стоящую в квадратных скобках в слагаемом F_1 или в F_2 (эти разности оцениваются одинаково), и разность, стоящую в правой квадратной скобке в слагаемом F_3.

Фиксируем две точки $A \in D$ и $B \in D$. Пусть $|A - B| = \rho$ и точка $H \in D$ есть середина отрезка $[A, B]$. Пусть R таково, что имеют место включения $D \subset Q_R^H \subset Q_{2R}^H$. Рассматривая указанную систему фигур $\Theta = \{D, Q_R^H, Q_{2R}^H\}$ как одно твердое целое, сделаем параллельный перенос (в плоскости $Ox_i x_k$) этой системы, который переводит точку H в некоторую точку $\tilde{H} = (0, \tilde{H}_k)$ оси Ox_k с положительным значением координаты по этой оси, т. е. $\tilde{H}_k > 0$. Будем считать, что точки $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (образы точек A и B при параллельном переносе) не лежат на осях Ox_i, Ox_k, $i \neq k$. В противном случае нам просто не пришлось бы делать вращения, описанного ниже (поменяв, быть может, эти оси ролями). Пусть, для определенности, $\tilde{A}_i < 0$, $\tilde{A}_k > \tilde{H}_k$, $\tilde{B}_i > 0$, $\tilde{B}_k < \tilde{H}_k$.

Выполним теперь вращение твердой системы фигур $\Theta = \{D, Q_R^H, Q_{2R}^H\}$ (уже смещенной параллельным переносом) в плоскости Ox_ix_k вокруг точки $\tilde{H}$ в направлении против направления вращения часовой стрелки (на угол $\theta < \frac{\pi}{2}$) таким образом, чтобы отрезок $\left[\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{B}}\right]$ стал параллелен оси Ox_i. Здесь $\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{B}}$ – образы точек $\tilde{A}, \tilde{B}$ при вращении. Тогда $\tilde{\tilde{A}}_i < 0$, $\tilde{\tilde{B}}_i > 0$, $\tilde{\tilde{A}}_k = \tilde{\tilde{B}}_k = \tilde{H}_k$. Выполним, наконец, еще один параллельный перенос системы фигур $\Theta = \{D, Q_R^H, Q_{2R}^H\}$, которая уже успела один раз сместиться и затем повращаться, в направлении оси Ox_i, добившись выполнения неравенств $0 < x_i' < x_i^o < x_i''$. В последней цепочке неравенств использованы обозначения: x_i', x_i^o, x_i'' – образы точек $\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{H}_i, \tilde{\tilde{B}}_i$ соответственно при этом переносе. Очевидно, $x_k' = x_k^o = x_k'' > 0.$ Значения функций φ, ψ в каждой точке, принадлежащей кругу Q_{2R}^H после его очередного преобразования, являются такими, какими они были в прообразе этой точки. Понятно, что: $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ при $\left|x - x^o\right| \geq 2R$.

Будем рассматривать тот случай, когда точка y находится в той четверти плоскости, для которой справедливы неравенства $y_i \leq x_i^0$, $y_k \geq x_k^0$ (остальные три четверти плоскости рассматриваются аналогично). Справедливы соотношения (см. рисунок 6).

$$\left|\frac{(x_i''-y_i)(x_k''-y_k)}{|x''-y|^2} - \frac{(x_i'-y_i)(x_k'-y_k)}{|x'-y|^2}\right| = \left|\frac{(x_i''-y_i)}{|x''-y|^2} - \frac{(x_i'-y_i)}{|x'-y|^2}\right| \cdot |x_k' - y_k| <$$

$$< \left|\frac{(x_i''-y_i)}{|x'-y|^2} - \frac{(x_i'-y_i)}{|x'-y|^2}\right| \cdot |x_k' - y_k| = \left|\frac{(x_i''-y_i)}{|x'-y|} - \frac{(x_i'-y_i)}{|x'-y|}\right| \cdot \left|\frac{x_k'-y_k}{|x'-y|}\right| \qquad (x_k''-y_k = x_k'-y_k).$$

$$\left|\frac{x_i''-y_i}{|x'-y|} - \frac{x_i'-y_i}{|x'-y|}\right| = \frac{|x_i''-x_i'|}{|x'-y|} = \frac{\rho}{|x'-y|} < \frac{2\rho}{|x^0-y|},$$

т. к. $\quad |x'-y| > |x^0-y| - |x^0-x'| =$

$$= |x^0-y| - \frac{\rho}{2} > |x^0-y| - \frac{1}{4}|x^0-y| = \frac{3}{4}|x^0-y|$$

(при $|x^0-y| > 2\rho$).

$$\left|\frac{1}{|x'-y|^2}-\frac{1}{|x''-y|^2}\right| = \frac{\big||x''-y|-|x'-y|\big|\cdot\big(|x''-y|+|x'-y|\big)}{|x'-y|^2\cdot|x''-y|^2} \le \frac{|x''-x'|\cdot\big(|x''-y|+|x'-y|\big)}{|x'-y|^2\cdot|x''-y|^2} \le$$

$$\le \frac{\rho}{|x^0-y|^2}\cdot\frac{\big(|x''-y|+|x'-y|\big)}{|x'-y|^2} \le \frac{\rho}{|x^0-y|^2}\cdot\frac{2|x''-y|\cdot 4\cdot 2}{3\cdot|x^0-y|\cdot|x''-y|} < 6\cdot\frac{\rho}{|x^0-y|}\cdot\frac{1}{|x^0-y|^2},$$

т. к. при условии $|x^0-y|>2\rho$ справедливы две цепочки неравенств и равенств:

$$|x'-y| > |x^0-y|-|x^0-x'| = |x^0-y|-\frac{\rho}{2} > \frac{3}{4}|x^0-y| \quad \text{и}$$

$$|x'-y| > |x''-y|-\rho > |x''-y|-\frac{1}{2}|x''-y| = \frac{1}{2}|x''-y|.$$

Поэтому существует такая константа C_1, что $|F(y)| < C_1\cdot\frac{\rho}{|x^0-y|}\cdot\frac{1}{|x^0-y|^2}$.

Кроме того, при условии $|x^0-y|>2\rho$ имеет место (на рисунке 6) $|x^0-y|=2\rho$) $|\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)| \le C|y-x''|^{\alpha}$ ($\varphi\in C^{o}_{\infty}(D)$, $D\subset Q_R^{x^0}$, $\psi(x)=1$ при выполнении условия $x\in Q_R^{x^0}$) . Действительно, если $2\rho<|x^0-y|<R$, то $|\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)| = |\varphi(y)-\varphi(x'')| \le C|y-x''|^{\alpha}$.

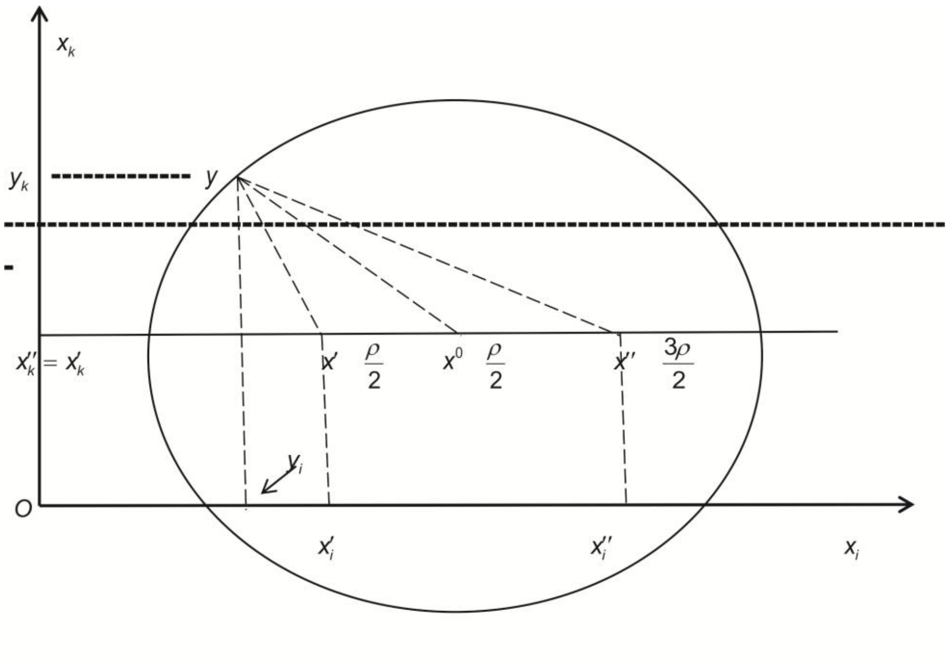


Рис. 6

Если же: $R \le |x^0 - y| < 2R$, то $|\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)| = |[\varphi(y) - \varphi(x'')] \cdot \psi(y)| \le$ $\le C|y - x''|^\alpha$ (функция φ финитна в области $D \subset Q_R^{x^0}$, $\varphi(y) = \varphi(y)\psi(y) = 0$). Далее замечаем, что $|(\varphi(x'') - \varphi(x'))\psi(y)| \le C\rho^\alpha < \frac{1}{2^\alpha} C|x^0 - y|^\alpha$, C – константа Гёльдера функции φ.

На самом деле требуется более тонкое неравенство $(|\psi(y)| \le 1)$ $|\varphi(x'') - \varphi(x')| \le \sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial x_j}\right| \cdot |x_j'' - x_j'| \le 2\tilde{C}|x'' - x'| = 2\tilde{C}\rho$, где ξ – точка отрезка с концами в точках x' и x'', $\tilde{C} = \max\limits_{x\in\bar{D};\, j=1,2} \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\right|$, область D предполагается выпуклой (13_2, т. 2, гл. V, § 39, п. 39.2).

При этом $|y - x''| < |x^0 - y| + |x'' - x^0| < \frac{5}{4}|x^0 - y|$, т. е. $|\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)| < \left(\frac{5}{4}\right)^\alpha C|x^0 - y|^\alpha$

Из полученных оценок следует, что:

$$|I_3| < C_2 C \int_{2\rho}^{2R} \frac{\rho \cdot r^\alpha}{r \cdot r^2} \cdot r dr = C_2 C \int_{2\rho}^{2R} \rho \cdot r^{\alpha-2} dr = K_3 C\rho^\alpha . \quad ◀$$

§ 4. Оценки Шаудера

1. Предварительные неравенства

В § 3 доказано: для любой функции $f \in C^0_{2+\alpha}(D)$ имеет место неравенство:

$$]f[^D_{2+\alpha} \le C\left(]\Delta f[^D_\alpha +]f[^D_0\right). \tag{37}$$

Далее, обозначив для краткости $\|f\|^D_{2+\alpha} = \|f\|_{2+\alpha}$, имеем следующее:

$$\|f\|_{2+\alpha} = \|f\|_2 + \sum_{k_1+k_2=2} \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right\|_0 + \sum_{k_1+k_2=2} \sup_{x,y\in D, x\ne y} \frac{\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}} - \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|}{|x-y|^\alpha} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=0}^{2} \sup_{x\in D} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| + \sum_{k_1+k_2=2} \sup_{x\in D} \left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| + \sum_{k_1+k_2=2} \sup_{x,y\in D, x\ne y} \frac{\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}} - \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|}{|x-y|^\alpha} ,$$

$$]f[_{2+\alpha} = \sum_{i,k} \left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right[_\alpha = \sum_{k_1+k_2=2} \sup_{x,y\in D, x\ne y} \frac{\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}} - \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\sum_{i,k}\sup_D\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| =]f[_2\ , \quad \sum_i \sup_D \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| =]f[_1, \quad \sup_D |f| = \|f\|_0 =]f[_0$$

[18, дополнения, IV].

Обозначим:

$$]f[_\alpha^D = \sup_{x,y\in D, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\ , \qquad]f[_1^D = \sum_i \sup_D \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\ ,$$

$$]f[_{1+\alpha}^D = \sum_i \left]\frac{\partial f}{\partial x_i}\right[_\alpha^D\ , \qquad]f[_2^D = \sum_{i,k}\sup_D\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right|\ , \qquad]f[_{2+\alpha}^D = \sum_{i,k}\left]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right[_\alpha^D\ .$$

Положим для симметрии $]f[_0^D = \|f\|_0^D$. В дальнейших рассуждениях будет использоваться также обозначение $]f[_p^D$, в котором индекс p будет пробегать значения $0, \alpha, 1, 1+\alpha, 2, 2+\alpha$. Однако $]f[_p^D$ не являются нормами (кроме выражения $]f[_0^D$). Назовем $]f[_p^D$ $(p=\alpha, 1, 1+\alpha, 2, 2+\alpha)$ ***псевдо-нормой.*** Через K_r обозначим квадрат: $|x_i|<r$, $i=1,2$.

Лемма 4.20. *Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $M>0$, что, какова бы ни была функция f, определенная в квадрате K_r и принадлежащая классу $C_{2+\alpha}(K_r)$, имеет место неравенство*:

$$r^p]f[_p^{K_r} \le \varepsilon r^{2+\alpha}]f[_{2+\alpha}^{K_r} + M]f[_0^{K_r} \tag{41}$$

при значениях p, удовлетворяющих неравенствам $p\neq 0$ и $p\neq 2+\alpha$ (доказательство опускаем: оно достаточно объёмно и содержится в [18, дополнения, IV, 1]).

Пусть задана область $D\subset R_2$. Назовём ***опорным*** для области D всякий открытый квадрат $K\subset D$, имеющий стороны, параллельные координатным осям, граница которого имеет общие точки с границей области D. Назовём ***большим внутренним*** всякий квадрат, концентрический с некоторым опорным, сторона которого вдвое меньше стороны соответствующего опорного. Назовём ***малым внутренним*** квадрат, концентрический с большим внутренним и имеющий сторону еще в два раза меньшую. Будем обозначать $K_r^{x^0}$ квадрат: $|x_i - x_i^0| < r$, $i=1,2$.

Пусть: $f\in C_{2+\alpha}(D)$. Положим:

$$[f]_p^D = \sup_{K_r^{x^0}}\left(r^p]f[_p^{K_r^{x^0}}\right), \tag{42}$$

где верхняя грань берется по всевозможным большим внутренним квадратам $K_r^{x^0} \subset D$, и

$$[\![f]\!]_p^D = \sup_{K_r^{x^0}} \left(r^p]f[_p^{K_r^{x^0}} \right),$$

где верхняя грань берется по всевозможным малым внутренним квадратам $K_r^{x^0} \subset D$.

Так как всякий большой внутренний квадрат $K_r^{x^0}$ можно покрыть четырьмя малыми внутренними квадратами, длины сторон которых заключены между значениями $r/2$ и r, то имеет место неравенство

$$C_1[f]_p^D \le [\![f]\!]_p^D \le C_2[f]_p^D, \tag{43}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – константы.

Лемма 4.21. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* M*, зависящее от значений* ε, α*, что, какова бы ни была функция* $f \in C_{2+\alpha}(D)$*, для нее выполнено неравенство*:

$$[f]_p^D \le \varepsilon [\![f]\!]_{2+\alpha}^D + M[f]_0^D, \qquad p \ne 2+\alpha \tag{44}$$

(очевидно, что $[f]_0^D = [\![f]\!]_0^D =]f[_0^D = \|f\|_0^D$).

$\triangleright$ Из леммы 4.20 (неравенство (41)) и равенства (42) вытекает

неравенство

$$[f]_p^D \le \varepsilon [f]_{2+\alpha}^D + M[f]_0^D \tag{45}$$

Затем применяется (43) (с заменой в (41) ε дробью ε / C_1). ◀.

2. Внутренняя оценка Шаудера

Лемма 4.22. *Пусть* $\varphi, \psi \in C_\alpha(D)$. *Тогда* $\varphi\psi \in C_\alpha(D)$ *и*

$$\|\varphi\psi\|_\alpha^D \le \|\varphi\|_0^D \, \|\psi\|_\alpha^D + \|\psi\|_0^D \, \|\varphi\|_\alpha^D, \quad \|\varphi\psi\|_\alpha^D \le \|\varphi\|_\alpha^D \, \|\psi\|_\alpha^D. \tag{46}$$

$\triangleright$ По определению

$$\|\varphi\|_\alpha^D = \|\varphi\|_0^D + \sup_{x,y \in D, x \ne y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad \|\varphi\psi\|_\alpha^D = \|\varphi\psi\|_0^D + \sup_{x,y \in D, x \ne y} \frac{|\varphi(x)\psi(x) - \varphi(y)\psi(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$ Но:

$$\sup_{x,y \in D, x \ne y} \frac{|\varphi(x)\psi(x) - \varphi(y)\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} = \sup_{x,y \in D, x \ne y} \frac{|\varphi(x)\psi(x) \mp \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} \le$$

$$\le \sup_{x,y\in D, x\ne y} |\varphi(x)| \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^{\alpha}} + \sup_{x,y\in D, x\ne y} |\psi(x)| \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \le$$

$$\le \|\varphi\|_0^D \sup_{x,y\in D, x\ne y} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^{\alpha}} + \|\psi\|_0^D \sup_{x,y\in D, x\ne y} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha}},$$

откуда и вытекают неравенства (46). ◀

Опираясь на неравенство (37) из §3 (см. начало §4), докажем лемму 4.23. Эта лемма представляет собой ослабленный вариант внутренней оценки Шаудера (леммы 4.23*). В лемме 4.23 равномерно эллиптический в области D оператор $L = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ с коэффициентами из $C_\alpha(D)$ заменён оператором Лапласа: $\Delta = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

Лемма 4.23. *Пусть D – произвольная ограниченная область в R_2, и $\rho > 0$ – произвольное число. Тогда для любой функции $u \in C_{2+\alpha}(D)$ имеет место оценка*:

$$\|u\|_{2+\alpha}^{D_\rho} \le C\left(\|\Delta u\|_\alpha^D + \|u\|_0^D\right), \tag{47}$$

где C – константа, зависящая от числа ρ; D_ρ – совокупность точек $x \in D$, для которых расстояние от границы области D больше ρ [18, гл. I, § 8 и дополнения, IV, п. 2].

▷ Пусть $x^0 \in D$ – произвольная точка области D. Если использовать неравенство (41), связанное с «псевдо-нормами», то для доказательства неравенства (47) достаточно доказать, что:

$$]f[_{2+\alpha}^{D_\rho} \le C'\left(]\Delta f[_\alpha^D +]f[_0^D\right), \tag{48}$$

где $\rho > 0$ – произвольное число. Очевидно, можно считать, что $D \subset K_1$. Для доказательства (48), в свою очередь, достаточно доказать, что:

$$[[f]]_{2+\alpha}^D \le C'\left([\Delta f]_\alpha^D + [f]_0^D\right).$$

Действительно:

$$[\Delta f]_\alpha^D \le]\Delta f[_\alpha^D, \qquad [f]_0^D \le]f[_0^D, \qquad [[f]]_{2+\alpha}^D \ge C''']f[_{2+\alpha}^{D_\rho},$$

где $C''' > 0$ зависит от значения ρ и от диаметра области D.

Зафиксируем некоторую функцию $\varphi(x) \in C_{2+\alpha}^0(K_1)$ такую, что:

$$\varphi(x) \equiv 1 \quad \text{при} \quad x \in K_{1/2}.$$

Пусть M_1 такое число, что: $]\varphi[_p^{K_1} < M_1$, $p = 0, \alpha, 1, 1+\alpha, 2, 2+\alpha$. Рассмотрим какой-либо большой внутренний квадрат $K_r^{x^0}$. Функция

$\varphi_r^{x^0}(x)=\varphi\left(\dfrac{x-x^0}{r}\right)$ финитна в большом квадрате $K_r^{x^0}$, обращается в единицу в соответствующем ему малом квадрате $K_{r/2}^{x^0}$ и удовлетворяет неравенствам:

$$]\varphi[_p^{K_r^{x^0}}<\frac{M_1}{r^p}. \tag{49}$$

Применяя (37) к функции $f(x)\varphi_r^{x^0}(x)$, получаем:

$$]f\varphi_r^{x^0}[_{2+\alpha}^{K_{r/2}^{x^0}}\le C\left(]\Delta\left(f\varphi_r^{x^0}\right)[_\alpha^{K_r^{x^0}}+]f\varphi_r^{x^0}[_0^{K_r^{x^0}}\right). \tag{50}$$

Заметим, что: $]\tilde{\varphi}\tilde{\psi}[_\alpha\le]\tilde{\varphi}[_0\,]\tilde{\psi}[_\alpha+]\tilde{\psi}[_0\,]\tilde{\varphi}[_\alpha$ (ср. с (46)).
Умножая обе части (50) на множитель $r^{2+\alpha}$ и применяя (49), получаем:

$$r^{2+\alpha}]f[_{2+\alpha}^{K_{r/2}^{x^0}}\le C''\left(r^{2+\alpha}]\Delta f[_\alpha^{K_r^{x^0}}+r^2]f[_2^{K_r^{x^0}}+r^{1+\alpha}]f[_{1+\alpha}^{K_r^{x^0}}\right)+$$
$$+C''\left(r]f[_1^{K_r^{x^0}}+r^\alpha]f[_\alpha^{K_r^{x^0}}+]f[_0^{K_r^{x^0}}\right),$$

где $C''>0$ зависит от констант M_1,C. Учитывая, что $r^{2+\alpha}]\Delta f[_\alpha^{K_r^{x^0}}<r^\alpha]\Delta f[_\alpha^{K_r^{x^0}}$, находим:

$$[\![f]\!]_{2+\alpha}^p\le C''\left([\Delta f]_\alpha^p+[f]_2^p+[f]_{1+\alpha}^p\right)+C''\left([f]_1^p+[f]_\alpha^p+[f]_0^p\right). \tag{51}$$

Выбирая в неравенстве (45) число $\varepsilon=\dfrac{1}{8C''}$, найдем соответствующее ему M. Применяя к неравенству (51) неравенства (43) и (44), получаем:

$$[\![f]\!]_{2+\alpha}^p\le C''[\Delta f]_\alpha^p+\left(C''+4M\right)[f]_0^p+\frac{1}{2}[\![f]\!]_{2+\alpha}^p$$

или

$$[\![f]\!]_{2+\alpha}^{p_\rho}\le C'\left([\Delta f]_\alpha^p+[f]_0^p\right)\qquad\left(C'=2\left(C''+4M\right)\right).\ \blacktriangleleft$$

Лемма 4.23* (внутренняя оценка Шаудера). *Пусть* D *– произвольная область в* R_2, $L=\sum\limits_{i,k=1}^{2}a_{ik}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}$ *равномерно эллиптический в области* D *оператор с коэффициентами из* $C_\alpha(D)$ *и* $\rho>0$ *– произвольное число. Тогда для любой функции* $u\in C_{2+\alpha}(D)$ *имеет место оценка*:

$$\|u\|_{2+\alpha}^{D_\rho}\le C\left(\|Lu\|_\alpha^D+\|u\|_0^D\right) \tag{47*}$$

[18, дополнения, IV].

3. Оценка Шаудера вплоть до границы

Обозначим Q_1^{0-} часть круга Q_1^0, лежащую по одну сторону от прямой $x_2 = 0$. Пусть для определенности Q_1^{0-} состоит из тех точек $x \in Q_1^0$, для которых $x_2 < 0$. Обозначим C_1^{0-} часть границы Q_1^{0-}, принадлежащую окружности C_1^0, и Δ_1^- ту часть этой границы, которая лежит на прямой линии $x_2 = 0$ (напомним: $D \subset Q_R^{x^0}$, $Q_R^{x^0}$ – открытый круг в R_2 радиуса R с центром в точке x^0, $C_R^{x^0}$ – граница круга $Q_R^{x^0}$, т. е. окружность $|x - x^0| = R$) [18, дополнения, IV, 3].

Лемма 4.24. *Пусть в области* Q_1^{0-} *определена функция* f, *которая обладает следующими свойствами: функция* $f \equiv 0$ *в некоторой окрестности* C_1^{0-}, $f = 0$ *на участке* Δ_1^- *границы области* Q_1^{0-}, $f \in C_{2+\alpha}(Q_1^{0-})$. *Тогда*:

$$]f[^{Q_1^{0-}}_{2+\alpha} \le C\left( ]\Delta f[^{Q_1^{0-}}_{\alpha} +]f[^{Q_1^{0-}}_{0} \right), \tag{52}$$

где C – *константа* (ср. с (37)).

▷ Снова положим $\Delta f = -2\pi\varphi$. Рассмотрим равенство (см. § 3):

$$f(x) = \int_D \varphi(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy = \int_{R_2} \varphi(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy . \tag{53}$$

Обозначим: R_2^- полуплоскость $x_2 < 0$, $R_2^{-,0}$ полуплоскость $x_2 \le 0$, $R_2^{+,0}$ полуплоскость $x_2 \ge 0$. Пусть x^* – точка, симметричная точке $x \in R_2^{-,0}$ относительно прямой $x_2 = 0$. Тогда $x = (x_1, x_2)$, $x^* = (x_1, -x_2)$, $x^* = x$ при условии $x_2 = 0$ и, значит, при условии $x_2 = 0$ будет:

$$\ln \frac{1}{|x-y|} - \ln \frac{1}{|x^*-y|} = \ln \frac{1}{|x-y|} - \ln \frac{1}{|x-y|} = 0 .$$

Покажем, что при выполнении условия $\varphi(y_1, -y_2) = \varphi(y_1, y_2)$ функцию f можно представить в виде

$$f(x) = \int_{R_2^-} \varphi(y) \left[\ln \frac{1}{|x-y|} - \ln \frac{1}{|x^*-y|} \right] dy . \tag{54}$$

Действительно:

$$\int_{R_2^-} \varphi(y) \left[\ln \frac{1}{|x-y|} - \ln \frac{1}{|x^*-y|} \right] dy = \int_{R_2^{-,0}} \varphi(y) \left[\ln \frac{1}{|x-y|} - \ln \frac{1}{|x^*-y|} \right] dy .$$

Далее, выполним линейную замену переменных [10_2, гл.10, § 10.2] .

$$\int_{R_2^{+,0}} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy = \int_{R_2^{+,0}} \varphi(y_1,y_2)\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}dy_1dy_2 =$$

$$=[z_1=y_1, z_2=-y_2] = -\int_{R_2^{-,0}} \varphi(z_1,-z_2)\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-z_1)^2+\left(x_2+z_2\right)^2}}dz_1dz_2 =$$

$$=-\int_{R_2^{-,0}} \varphi(z_1,z_2)\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-z_1)^2+(-x_2-z_2)^2}}dz_1dz_2 = -\int_{R_2^{-,0}} \varphi(z)\ln\frac{1}{|x^*-z|}dz\,.$$

Таким образом: $\int_{R_2^{+,0}} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy = -\int_{R_2^{-,0}} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x^*-y|}dy\,.$

Но (см. (53)):

$$\int_{R_2} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy = \int_{D} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy\,.$$

И, кроме того, имеют место следующие два утверждения.

Утверждение первое. Непрерывная (плоская) кривая Γ на плоскости x_1, x_2, проектируемая взаимно однозначно на отрезок $[a,b]$ некоторой прямой L, есть множество точек, имеющее двумерную меру нуль (речь идёт о жордановой мере).

Утверждение второе. Если множество Ω имеет жорданову меру нуль $(m\Omega=0)$, то:

$$\int_{\Omega} f d\Omega = 0$$

для любой (ограниченной на Ω) функции f [26_2, т. II, гл. 12, § 12.3 и § 12.6].

Следовательно,

$$f(x) = \int_{R_2} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy = \int_{R_2^-} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy + \int_{R_2^{+,0}} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy =$$

$$=\int_{R_2^-} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy - \int_{R_2^{-,0}} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x^*-y|}dy = \int_{R_2^-} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy -$$

$$-\int_{R_2^-} \varphi(y)\ln\frac{1}{|x^*-y|}dy = \int_{R_2^-} \varphi(y)\left(\ln\frac{1}{|x-y|} - \ln\frac{1}{|x^*-y|}\right)dy\,.$$

Равенство (54) доказано. Для завершения доказательства леммы остаётся лишь добавить, что оценка модуля разности $\dfrac{\partial^2 f(x'')}{\partial x_i \partial x_k} - \dfrac{\partial^2 f(x')}{\partial x_i \partial x_k}$ производных проводится с помощью рассуждений, сходных с теми, которые проводились в § 3 при оценке разности (38). Вводится ***под-***

резающая функция $\psi(x)$: $\psi(x)=1$ при $|x|\le 1$ и $\psi(x)=0$ при $|x|\ge 2$. Показывается, что достаточно оценить интеграл:

$$I=\int\limits_{R_2^-}\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y)-\varphi(x')\psi(y)]\frac{(x'_k-y_k)}{|x'-y|^2}-\frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y)-\varphi(x'')\psi(y)]\frac{(x''_k-y_k)}{|x''-y|^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y)-\varphi(x'^*)\psi(y)]\frac{(x'^*_k-y_k)}{|x'^*-y|^2}-\frac{\partial}{\partial y_i}[\varphi(y)-\varphi(x''^*)\psi(y)]\frac{(x''^*_k-y_k)}{|x''^*-y|^2}\right\}dy\,.$$

В этом интеграле можно выполнить интегрирование по частям. При этом к слагаемым рассмотренного ранее вида добавится интеграл по прямой $x_2=0$. Аккуратное проведение указанных рассуждений и доказывает лемму 4.24. ◀

Для продолжения рассуждений нам придётся вспомнить теоремы 3.46 – 3.48 и гл. II, § 3, п. 2, где было введено понятие двух кривых, гомотопических в области D, содержащее условия 1 и 2. Запишем теперь более строго условие 2. из соответствующего определения, раскрыв смысл слов «непрерывная деформация». Пусть кривые Γ и Γ^* имеют параметрические уравнения Γ: $z=\chi(t)$, Γ^*: $z=\chi^*(t)$, $0\le t\le 1$. Формулируем (строго) условие 2., обозначая его 2^*.

2^*. *Существует непрерывная функция* $\Phi(t,s)$ *параметров* t,s, *где* $0\le t\le 1$ *и* $0\le s\le 1$, *обладающая свойствами:*

а) *значения* $\Phi(0,s)$ *и* $\Phi(1,s)$ *не зависят от параметра* s;

б) $\Phi(t,0)=\chi(t)$, $\Phi(t,1)=\chi^*(t)$ $(0\le t\le 1)$;

в) *значения функции* $\Phi(t,s)$ *при любых допустимых значениях параметров* t *и* s *лежат в области* D.

Фиксируем параметр s из промежутка $0\le s\le 1$ и обозначим символом Γ_s кривую с параметрическим уравнением $z=\Phi(t,s)$, $0\le t\le 1$. Давая теперь возможность переменной s принимать все значения из указанного промежутка $0\le s\le 1$, вводим в рассмотрение семейство кривых Γ_s. Легко заметить, что требования: не двигая крайние точки кривых; деформация, переводящая кривые Γ и Γ^* друг в друга, должна быть непрерывной; не выходя за пределы области D, которые содержались в условии 2, получили формальную (более строгую) запись в условии 2^*. В самом деле: пункт а) условия 2^* означает, что все кривые Γ_s имеют одну и ту же начальную и одну и ту же конечную точки. Пункт б) означает, что при непрерывном изменении параметра s от нуля до единицы кривая Γ_s непрерывно изменяется от кривой Γ до кривой Γ^*. Пункт в) означает, что все кривые семейства Γ_s лежат в области D.

Давая определение гомотопических кривых с условием 2^*, мы имели возможность ввести в рассмотрение семейство кривых Γ_s, для которого справедлив следующий важный факт, формулируемый в виде леммы 4.25.

Лемма 4.25. *Пусть* Γ *и* Γ^* *– две кусочно-гладкие кривые, гомотопические в области* D. *Тогда семейство кривых* Γ_s, *указанное выше, можно считать состоящим из кусочно-гладких кривых* (*с ограниченным числом угловых точек*) [9, гл. I, § 7].

Обозначим символом $\Gamma_1\Gamma_2$ кривую, полученную последовательным прохождением сначала кривой Γ_1, а затем кривой Γ_2 (при этом конечная точка кривой Γ_1 считается совпадающей с начальной точкой кривой Γ_2). Кривую Γ, проходимую в обратном направлении, обозначим символом Γ^-. Строение любого гомотопического класса описывается с помощью следующего очевидного утверждения.

Лемма 4.26. *Кривые* Γ *и* Γ^* *принадлежат одному гомотопическому классу в том и только в том случае, когда замкнутая кривая* $\Gamma^-\Gamma^*$ *является кривой, гомотопической нулю.* [Там же].

Напомним одно из определений, данное выше.

Всякое множество n *раз* (*непрерывно*) *дифференцируемых и* n *раз* (*непрерывно*) *дифференцируемо эквивалентных между собой путей называется* n ***раз (непрерывно) дифференцируемой кривой***, *заданной параметрическими уравнениями* [13_1 , т. 1, гл. I, § 16, 16.2].

Лемма 4.27. *Пусть* $f \in C_{2+\alpha}(D)$, $f|_{\partial D} = 0$, ∂D *есть трижды непрерывно дифференцируемая кривая, заданная параметрическими уравнениями. Тогда*:

$$\|f\|_{2+\alpha}^{D} \le C\left(\|\Delta f\|_{\alpha}^{D} + \|f\|_{0}^{D}\right). \qquad (55)$$

▷ Для доказательства (55) достаточно доказать (см. доказательство леммы 4.23):

$$]f[_{2+\alpha}^{D} \le C''\left(]\Delta f[_{\alpha}^{D} +]f[_{0}^{D}\right). \qquad (56)$$

Покроем D конечным числом областей, часть из которых лежит строго внутри D, а другая часть примыкает к границе. Пусть первые области есть $G_1^1,...,G_{n_1}^1$, а вторые есть $G_1^2,...,G_{n_2}^2$. В качестве областей $G_1^2,...,G_{n_2}^2$, примыкающих к границе, мы можем брать области, все точки которых располагаются достаточно близко от неё. Для каждой из областей G_i^1 по предыдущему справедливо неравенство:

$$]f[_{2+\alpha}^{G_i^1} \le C'\left(]\Delta f[_{\alpha}^{D} +]f[_{0}^{D}\right)$$

и, кроме того, неравенства: $[Lf]_{\alpha}^{D} \le]Lf[_{\alpha}^{D}$, $[f]_0^D \le]f[_0^D$, $[[f]]_{2+\alpha}^{D} \ge C''']f[_{2+\alpha}^{D_\rho}$,

$$]f[_{2+\alpha}^{D_\rho^{x^0}} \le C'\left(]Lf[_{\alpha}^{D^{x^0}} +]f[_{0}^{D^{x^0}}\right), \quad [[f]]_{2+\alpha}^{D_\rho} \le C'\left([Lf]_{\alpha}^{D} + [f]_{0}^{D}\right).$$

Если для каждой G_i^2 мы докажем $]f[_{2+\alpha}^{G_i^2} \le C'\left(]\Delta f[_{\alpha}^{D} +]f[_{0}^{D}\right)$, то это и будет означать, что выполняется неравенство:

$$]f[_{2+\alpha}^{D} \le C''\left(]\Delta f[_{\alpha}^{D} +]f[_{0}^{D}\right), \qquad (56)$$

значит, выполняется и неравенство:

$$\|f\|_{2+\alpha}^{D} \le C\left(\|\Delta f\|_{\alpha}^{D} + \|f\|_{0}^{D}\right), \qquad (55)$$

где C'' зависит от C' и от области D.

В качестве некоторой области G_i^2 возьмём пересечение D с кругом $Q_{r_0}^{x^0}$, где $x^0 \in \partial D$ и r_0 достаточно мало. Обозначим $\tilde{G}_i^2 = Q_{2r_0}^{x^0} \cap D$ и рассмотрим геометрически простую область (канал со сглаженными четвертями окружности углами, рисунок 7). Более сильное утверждение (лемма 4.27*) будет сформулировано ниже (без доказательства).

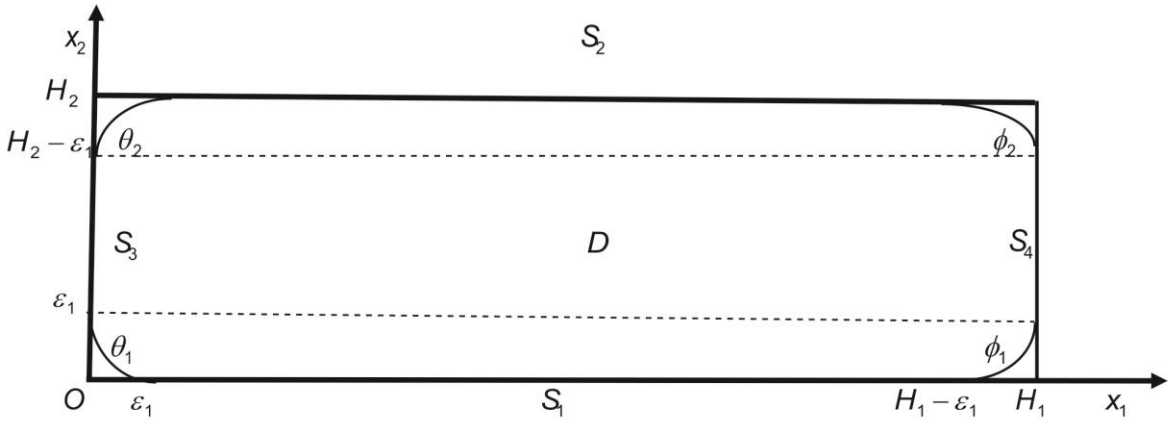


Рис. 7

Итак, пусть D – прямоугольный канал с закруглёнными четвертями окружности углами. Нужно отобразить ту часть границы $\tilde{G}_i^2$, которая является пересечением ∂D с $Q_{2r_0}^{x^0}$, в отрезок прямой $x_2 = 0$ так, чтобы при этом образ $\tilde{G}_i^2$ лежал в Q_1^0. Точка $x^0 \in \partial D$ может лежать либо на прямолинейном участке границы, либо на четверти окружности. Если точка x^0 лежит на прямолинейном участке, то $\tilde{G}_i^2$ имеет вид нижнего полукруга (но значительно меньшего размера) того круга, который изображён на рисунке 9. При таком положении точки x^0 требуемое отображение может быть выполнено с помощью трёх простейших отображений: параллельного переноса, вращения и преобразования подобия (28_2, гл. III, § 1, п. 1).

Пусть теперь x^0 лежит на окружности (криволинейный треугольник, расположенный в одном из углов области D, изображён на рисунок 8). Граница $\partial\tilde{G}_i^2$ пересечения $\tilde{G}_i^2 = Q_{2r_0}^{x^0} \cap D$ представляет собой кусочно-гладкую кривую $a_0abcc_0c'qa'a_0$ с двумя угловыми точками a_0 и c_0.

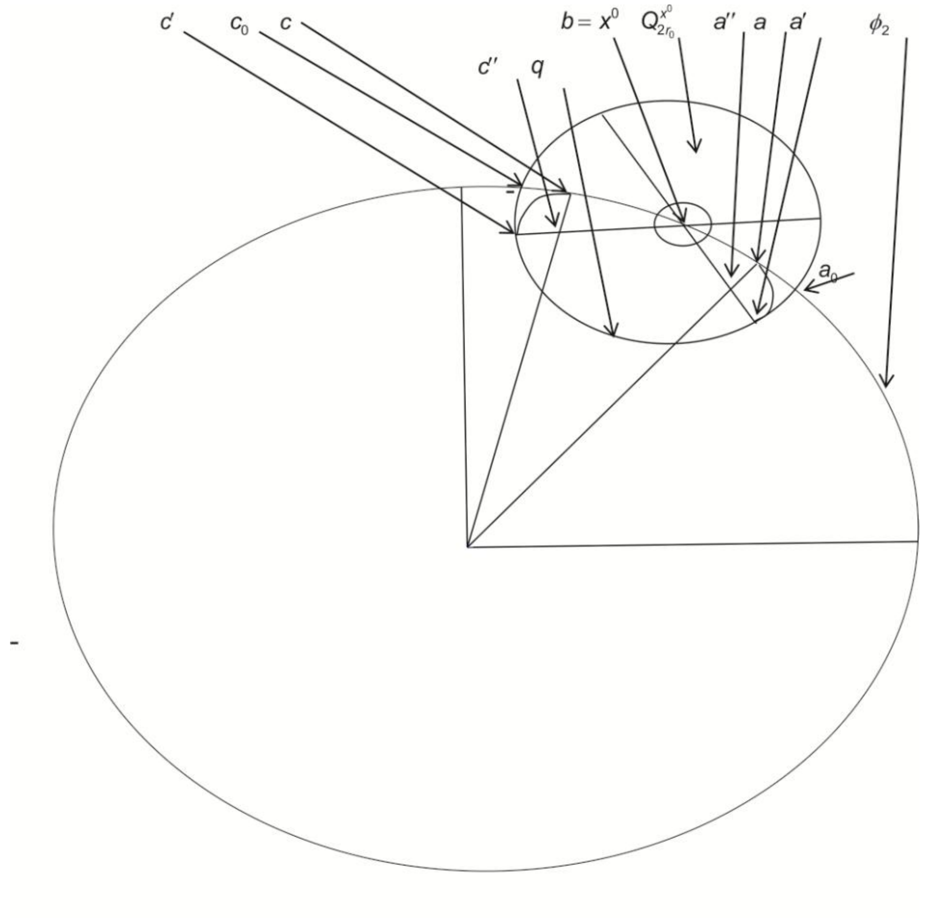


Рис. 8

Мы сгладили угол $a'a_0a$, соединив дугой окружности с центром в точке a'' и радиуса $r = a''a' = a''a$ точки a' и a (аналогично сгладили угол cc_0c', соединив … и т. д. с заменой буквы "a" буквой "c"). Замкнутая кривая $abcc'qa'a$ – гладкая (точка a'' лежит на пересечении двух радиусов: радиуса окружности ϕ_2 и радиуса окружности $\partial Q_{2r_0}^{x^0}$; точка c'' – аналогично). Гладкая кривая $ABCC'QA'A$, изображенная на рисунке 9, (и гладкая кривая $abcc'qa'a$) являются кривыми, гомотопическими нулю (теоремы 2.28, 2.29 и леммы 4.25, 4.26).

Рассмотрим конформное (однолистное) отображение области, ограниченной кривой $abcc'qa'a$, на область, ограниченную кривой $ABCC'QA'A$ (рисунок 9), которое существует в силу вышесказанного.

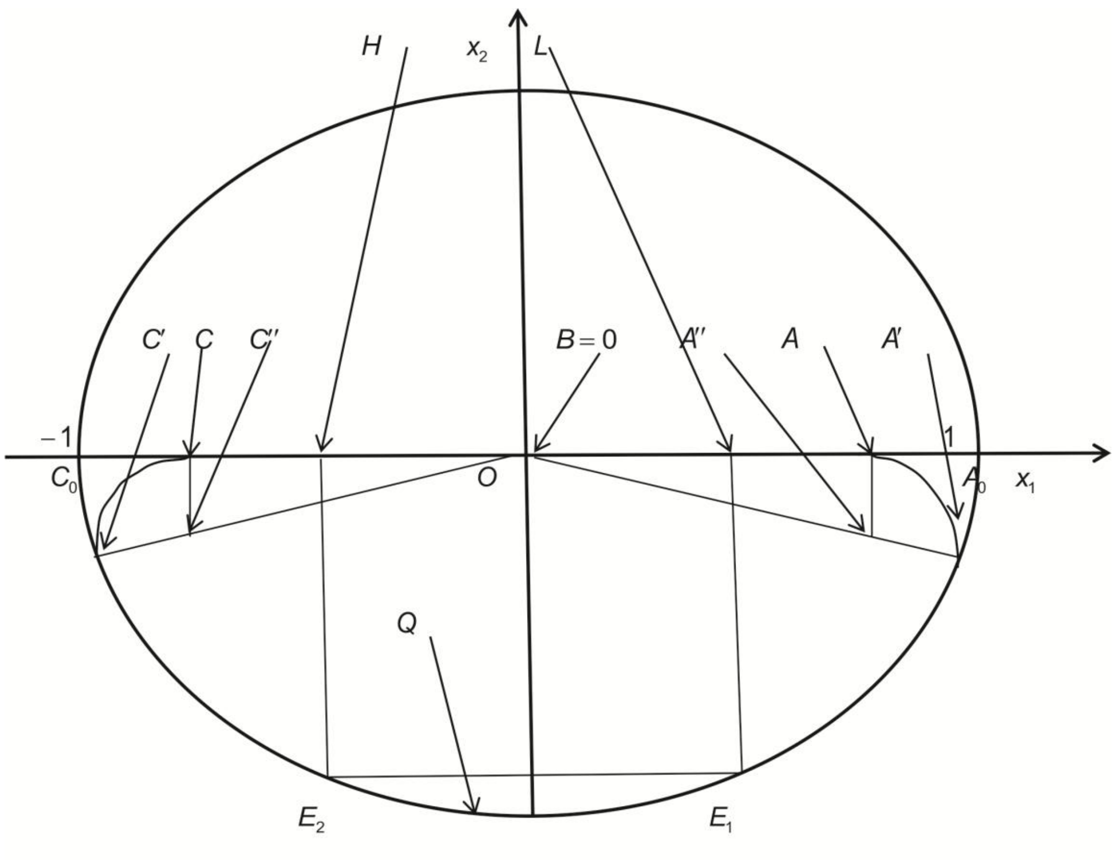


Рис. 9

Далее заметим, что отношение длины полуокружности $A_0A'QC'C_0$ к длине отрезка C_0A_0 (длине диаметра) равно $\frac{\pi}{2} < 2$. Отношение же длины ломаной HE_2E_1L из трёх звеньев HE_2, E_2E_1, E_1L к длине HL, равное $(\sqrt{3}+1)$, больше двух (точки H, L имеют координаты $H(-0.5;0)$, $L(0.5;0)$). Поэтому можно найти такое положение точек A и C на оси x_1, причём $CO=OA$, что отношение длины кривой $CC'QA'A$ к длине отрезка CA будет равно двум. То же самое можно сказать о точках a и c (рисунок 8). Но тогда можем задать отображение гладкой кривой $abcc'qa'a$ на гладкую кривую $ABCC'QA'A$, которое будет являться гомеоморфизмом (см. гл. III, § 5, п. 4) и при котором часть пересечения ∂D с $Q_{2r_0}^{x^0}$ отобразится в отрезок прямой $x_2=0$ так, что при этом образ $\tilde{G}_i^2$ будет лежать в Q_1^0.

Поэтому надо доказать следующее ниже утверждение. Пусть $D\subset Q_1^{0-}$, Γ_0 – часть границы D, не принадлежащая прямой $x_2=0$, а Γ_1 – часть границы D, лежащая на прямой $x_2=0$. Пусть D_ρ^- – совокупность точек $x\in D$, расстояние которых от Γ_0 больше ρ.

Утверждение. *Пусть в области D определен оператор Δ. Тогда для любой функции $f\in C_{2+\alpha}(D)$, $f\big|_{\Gamma_1}=0$ справедливо неравенство*:

$$]f[_{2+\alpha}^{D_\rho^-}\le C\left(]\Delta f[_\alpha^D+]f[_0^D\right), \qquad (57)$$

$\triangleright$ Определим опорный квадрат следующим образом. Это будет квадрат со сторонами, параллельными координатным прямым, внутри которого нет точек из Γ_0, граница которого имеет общие точки с Γ_0, и такой, что концентрический с ним открытый квадрат с вчетверо меньшей стороной принадлежит D. Большой внутренний и малый внутренний квадраты определяем, как и раньше. С их помощью определяем величины $[\ ]_p^D$, $[\![\ ]\!]_p^D$. После этого все наши предыдущие рассуждения проходят без особых изменений (неравенство (37) заменяем на (52)) и мы получаем неравенство:

$$[\![f]\!]_{2+\alpha}^D\le\hat{C}\left([\Delta f]_\alpha^D+[f]_0^D\right),$$

а с ним и доказательство (57) и, значит, (56) и (55). ◀

Лемма 4.27*. *Пусть в ограниченной области D определён равномерно эллиптический оператор $L=\sum\limits_{i,k=1}^{2}a_{ik}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}$, коэффициенты которого удовлетворяют условию Гельдера с показателем α. Пусть*

$f \in C_{2+\alpha}(D)$, $f\big|_{\partial D} = 0$ *и* ∂D *есть трижды непрерывно дифференцируемая кривая, заданная параметрическими уравнениями. Тогда имеет место неравенство*:

$$\| f \|_{2+\alpha}^{D} \le C\left(\| Lf \|_{\alpha}^{D} + \| f \|_{0}^{D}\right) \qquad (55^*)$$

[18, дополнения, IV, п. 3)] .

Отметим, что лемма 4.27 представляет собой ослабленный вариант леммы 4.27*, причём она доказана в области простой геометрии. Но мы ограничиваемся леммой 4.27, поскольку её будет достаточно для доказательства самых важных теорем (о разрешимости уравнений Навье – Стокса) данной монографии.

При доказательстве теоремы 4.9 (доказывается ниже) будут применяться хорошо известные утверждения: леммы 4.28–4.31 [10_1, гл. 3, § 3.12 и § 3.14].

Лемма 4.28. *У каждой симметричной матрицы в* n*-мерном евклидовом пространстве существует* n *попарно ортогональных собственных векторов. Соответствующие им собственные значения являются действительными числами.*

Лемма 4.29. *Квадратичная форма в ортонормированном базисе, состоящем из собственных векторов матрицы* A *этой квадратичной формы, имеет канонический вид* $Q(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$, *где* λ_k *– собственные значения матрицы* A, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Лемма 4.30. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ее матрицы были положительными.*

Лемма 4.31 (критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительными.*

Линейный дифференциальный оператор *2-го порядка*

$$L = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{2} b_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + c(x), \qquad x = (x_1, x_2)$$

называется ***эллиптическим****, если квадратичная форма* $\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} \xi_i \xi_k$ ***положительно определена.***

Всегда будем предполагать, что: $a_{ik} = a_{ki}$.

Эллиптический оператор *L называется* ***равномерно эллиптическим*** *в некоторой области D, если выполняется условие*:

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \geq a|\xi|^2, \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ii}(x) \leq M$$

($x \in D$, ξ – произвольно), где $a > 0$ и $M > 0$ – некоторые константы.

Условие равномерной эллиптичности, данное в этом определении, эквивалентно условию:

$$C_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\xi_i\xi_k \leq C_2|\xi|^2,$$

где C_1, C_2 – положительные константы [18].

Говоря далее об эллиптическом операторе, всегда будем понимать, что речь идёт о равномерно эллиптическом операторе.

Решением *уравнения*

$$Lu = 0$$

называем ***классическое*** *решение – функцию, обладающую непрерывными частными производными до второго порядка включительно и обращающую его в тождество. Аналогично* ***решением*** *неравенства*

$$Lu \geq 0$$

будем называть дважды непрерывно дифференцируемую ***функцию*** *u, удовлетворяющую этому неравенству.*

Линейное преобразование *евклидова пространства, сохраняющее скалярное произведение векторов, называется* ***ортогональным.***

Теорема 4.9 (принцип максимума). *Пусть $D \subset R_2$ – ограниченная область, L – эллиптический оператор*

$$L = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \tag{58}$$

в этой области. Пусть u – решение неравенства $Lu \geq 0$ в области D и функция u непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда:

$$u(x) \leq \max_{\partial D} u, \qquad x \in D.$$

▷ Предварительно заметим, что, при выполнении условия

$$Lu > 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{59}$$

функция u не может иметь максимум во внутренней точке области D. В самом деле, допустим, что максимум достигается во внутренней точке x^0. Так как L есть эллиптический оператор, то соответствующая квадратичная форма

$$Q\big|_{x=x^0} = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x^0)\xi_i\xi_k$$

является положительно определенной. В силу леммы 4.30, собственные значения ее матрицы положительны. С помощью ортогонального преобразования (при котором точка x^0 переходит в точку y^0) можно $Q\big|_{x=x^0} = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x^0)\xi_i\xi_k$ привести к каноническому виду $\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x^0)\xi_i\xi_k = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \eta_k^2$, где коэффициенты λ_k положительны. Понятно, что указанным преобразованием оператор L приведётся к виду $\sum_{k=1}^{2} \lambda_k \dfrac{\partial^2}{\partial y_k^2}$, и мы получим:

$$Lu\big|_{x=x^0} = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x^0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\bigg|_{x=x^0} = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\bigg|_{y=y^0}. \qquad (60)$$

Так как в точке y^0 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} \le 0$, $\lambda_k > 0$, то из (60) следует, что $Lu\big|_{x=x^0} \le 0$, а это неравенство противоречит (59).

Итак, доказано, что, при выполнении условия: (59)

$$Lu > 0 \quad \text{в} \quad D,$$

функция u не может иметь максимум во внутренней точке области D. В силу критерия Сильвестра, главные миноры матрицы квадратичной формы $Q = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k$ $(x \in D)$ должны быть положительны, т. е. должны выполняться неравенства:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

что значит,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad (a_{12} = a_{21}).$$

Из последнего неравенства следует: $a_{22} > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$v_\varepsilon = u + \varepsilon x_1^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Так как $Lv_\varepsilon = Lu + 2\varepsilon a_{11} > 0$ (поскольку $Lu \ge 0$), то функция v_ε не может иметь максимум во внутренней точке области D (это доказано выше). Значит, $v_\varepsilon(x) \le \max_{\partial D} v_\varepsilon(x)$ и, т.к. $u(x) \le v_\varepsilon(x)$ и $v_\varepsilon(x) \to u(x)$ при стремлении $\varepsilon \to 0$, то $u(x) \le \max_{\partial D} u(x)$. ◀

Следствие 4.4. *Для функции* $f \in C_{2+\alpha}(D)$ *выполняется неравенство*:

$$]f[_0^D \le M]Lf[_\alpha^D,$$

где L *– эллиптический оператор* (58)*;* M *– константа, зависящая от оператора и от области.*

▷ Пусть x^0 – какая-либо точка, принадлежащая D. Положим $v = f + A|x - x^0|^2$, где A – неотрицательная константа, так что:

$$Lv = Lf + 2A\sum_{i=1}^{2} a_{ii} \geq Lf + Aa,$$

где $a > 0$ – константа.

Следовательно, при $A = \frac{\|Lf\|_0^D}{a} \leq \frac{\|Lf\|_\alpha^D}{a}$ справедливо $Lv \geq 0$, т. е. для v выполнен принцип максимума и, значит:

$$v \leq v|_{\partial D} = A|x - x^0|^2\Big|_{\partial D} < Ad^2,$$

где d – диаметр области D. Так как $f \leq v$, то $f \leq \frac{d^2}{a}\|Lf\|_\alpha^D$.

Аналогично получается оценка с другой стороны. ◀
[18, дополнения, IV, п. 3)] .

Следствие 4.4 даёт возможность записать неравенство

$$\|f\|_{2+\alpha}^D \leq C\left(\|Lf\|_\alpha^D + \|f\|_0^D\right) \qquad (55^*)$$

в виде:

$$\|f\|_{2+\alpha}^D \leq C\|Lf\|_\alpha^D, \qquad (61)$$

где появившаяся новая константа обозначена прежним символом C (C зависит от оператора L и от области D).

Аналогично неравенство (55) можно записать в виде:

$$\|f\|_{2+\alpha}^D \leq C\|\Delta f\|_\alpha^D. \qquad (62)$$

Неравенство (61) (*и* (62)) *называют* ***оценкой Шаудера вплоть до границы.***

Оценки (61) и (62) имеют место при выполнении условий:

$$f \in C_{2+\alpha}(D), \quad f|_{\partial D} = 0, \qquad (63)$$

где ∂D – трижды непрерывно дифференцируемая (трижды гладкая) кривая.

§ 5. Неравенство Шаудера для полного эллиптического оператора

1. Переход к полному эллиптическому оператору

Введём обозначение: $\overline{D}=T$ и дальнейшее рассмотрение будем проводить в замкнутой области T. Замечаем, что норма $\|f\|_{2+\alpha}$ представляет собой сумму супремумов модулей.

Эта сумма имеет вид:

$$\|f\|_{2+\alpha} = \sum_{k_1+k_2=0}^{2} \sup_{x\in T}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| + \sum_{k_1+k_2=2} \sup_{x\in T}\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| + \sum_{k_1+k_2=2} \sup_{x,y\in T, x\neq y}\frac{\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}} - \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad (64)$$

где $\|f\|_{2+\alpha}=\|f\|_{2+\alpha}^{T}$, $\sum\limits_{k_1+k_2=0}^{2} \sup\limits_{x\in T}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| = \sup\limits_{x\in T}|f(x)| + \sum\limits_{i=1}^{2}\sup\limits_{x\in T}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| + \sum\limits_{k_1+k_2=2}\sup\limits_{x\in T}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|$.

В обозначениях §1 получаем:

$\|f\|_{2+\alpha} = F_0(T)+F_1(T)+F_2(T)+F_2(T)+F_{2,\alpha}(T) = F_0+F_1+2F_2+F_{2,\alpha}$.

Первую сумму правой части равенства (64) запишем в виде:

$$\sum_{k_1+k_2=0}^{2} \sup_{x\in D}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| = \sup_{x\in D}|f(x)| + \sum_{i=1}^{2}\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| + \sum_{k_1+k_2=2}\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|$$

и будем рассматривать это и предыдущее равенства в замкнутой области $\overline{D}=T$ (теперь $f\in C_{2+\alpha}(\overline{D})$). Тогда $F_1(\overline{D})=\sum\limits_{i=1}^{2}\sup\limits_{x\in D}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|$ (обозначения $F_k(\overline{D})$, $k=0,1,2$, см. в § 1).

Рассматривая неравенство $F_k \le L_k^{(n)}\left(F_0^{\frac{n-k}{n}}F_n^{\frac{k}{n}}+F_0R^{-k}\right)$ при значениях $k=1$, $n=2$ (§ 1, лемма 4.10, неравенство (17)) и применяя к произведению $F_2^{0.5}F_0^{0.5}$ неравенство $ab\le \varepsilon^{p_1}a^{p_1}+\varepsilon^{-p_2}b^{p_2}$ (§ 1, лемма 4.8, неравенство (12)), получаем:

$$F_1 \le L_1^{(2)}\left(F_2^{\frac{1}{2}}F_0^{\frac{1}{2}}+F_0R^{-1}\right) \le L_1^{(2)}\left(\varepsilon^2F_2+\varepsilon^{-2}F_0+F_0R^{-1}\right).$$

Замечая, что:

$$\sum_{k_1+k_2=0}^{2} \sup_{x\in D}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| = \sup_{x\in D}|f(x)| + \sum_{i=1}^{2}\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| + \sum_{k_1+k_2=2}\sup_{x\in D}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right| = F_0+F_1+F_2 ,$$

рассматриваем полный равномерно эллиптический оператор, содержащий и младшие слагаемые:

$$L^* = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) = L + \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x). \qquad (65)$$

Тогда:

$$L = L^* - \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - c(x), \qquad \|Lf\|_\alpha^T \le \|L^* f\|_\alpha^T + \left\|\sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\alpha^T + \|cf\|_\alpha^T$$

(§ 2, п. 2). Оценим второе и третье слагаемые в правой части последнего равенства. С учётом (46) (§ 4, п. 2) получаем:

$$\left\|\sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\alpha^T \le 2B_0F_1 + B_0F_{1,\alpha} + B_{0,\alpha}F_1; \qquad \|cf\|_\alpha^T \le 2C_0F_0 + C_0F_{0,\alpha} + C_{0,\alpha}F_0. \quad (66)$$

Далее, применяя неравенства (2), (12), (17), (24) из § 1, находим:

$$C_0F_{0,\alpha} \le C_0K_{0,\alpha}F_1^\alpha F_0^{1-\alpha} \le C_0K_{0,\alpha}\left(\varepsilon_0^{\frac{1}{\alpha}}F_1 + \varepsilon_0^{-\frac{1}{1-\alpha}}F_0\right), \qquad (67)$$

$$(2B_0 + B_{0,\alpha})F_1 \le (2B_0 + B_{0,\alpha})L_1^{(2)}\left(\varepsilon_1^2F_2 + \varepsilon_1^{-2}F_0 + R^{-1}F_0\right), \qquad (68)$$

$$B_0F_{1,\alpha} \le B_0M_{1,\alpha}^{(2)}\left(F_{2,\alpha}^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \cdot F_0^{\frac{1}{2+\alpha}} + R^{-(1+\alpha)}F_0\right) \le$$

$$\le B_0M_{1,\alpha}^{(2)}\left(\varepsilon_2^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}F_{2,\alpha} + \varepsilon_2^{-\frac{2+\alpha}{1}}F_0 + R^{-(1+\alpha)}F_0\right), \qquad (69)$$

где R – диаметр области T.

Итак:

$$\|f\|_{2+\alpha} = F_0 + F_1 + 2F_2 + F_{2,\alpha}. \qquad \|f\|_{2+\alpha}^T \le C\|Lf\|_\alpha^T + C\|f\|_0^T = C\|Lf\|_\alpha^T + CF_0.$$

$$\|Lf\|_\alpha^T \le \|L^* f\|_\alpha^T + \left\|\sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\alpha^T + \|cf\|_\alpha^T \qquad \Rightarrow$$

$$\|Lf\|_\alpha^T \le \|L^* f\|_\alpha^T + 2B_0F_1 + B_0F_{1,\alpha} + B_{0,\alpha}F_1 + 2C_0F_0 + C_0F_{0,\alpha} + C_{0,\alpha}F_0;$$

$$F_0 + F_1 + 2F_2 + F_{2,\alpha} - C\left(A_0\varepsilon_0^{\frac{1}{\alpha}}F_1 + A_1\varepsilon_1^2F_2 + A_2\varepsilon_2^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}F_{2,\alpha}\right) \le$$

$$\le C\|L^* f\|_\alpha^T + A_3F_0 + CF_0,$$

где $A_0 = C_0K_{0,\alpha}$, $A_1 = L_1^{(2)}(2B_0 + B_{0,\alpha})$, $A_2 = B_0M_{1,\alpha}^{(2)}$, A_3F_0 – сумма всех слагаемых из (66) – (69), содержащих множитель F_0. Возьмём положительные числа ε_0, ε_1, ε_2 настолько малыми, чтобы были справедливы неравенства $CA_0\varepsilon_0^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{1}{2}$, $CA_1\varepsilon_1^2 < \frac{1}{2}$, $CA_2\varepsilon_2^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} < \frac{1}{2}$. Тогда получим:

$$\|f\|_{2+\alpha}^T \le 2C\|L^* f\|_\alpha^T + 2(A_3 + C)F_0 \quad \text{или} \quad \|f\|_{2+\alpha}^T \le \tilde{C}\|L^* f\|_\alpha^T + \tilde{\tilde{C}}F_0, \quad T = \overline{D}, \tag{70}$$

где обозначено: $2C = \tilde{C}$, $2(A_3 + C) = \tilde{\tilde{C}}$ и

$$L^* = \sum_{i,k=1}^2 a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^2 b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) = L + \sum_{i=1}^2 b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x).$$

Начав рассматривать полный эллиптический (линейный) оператор, мы ввели обозначение L^* равенством $L = L^* - \sum_{i=1}^2 b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - c(x)$. Поскольку далее рассматривается полный оператор, удобно поменять L^* и L ролями: $L^* \leftrightarrow L$, так что всюду ниже применяется обозначение:

$$L = L^* + \sum_{i=1}^2 b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \quad L^* = \sum_{i,k=1}^2 a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{71}$$

2. Об относительных экстремумах супер-эллиптических и суб-эллиптических функций

Решением неравенства *$Lu \le 0$ или $Lu \ge 0$, где L – эллиптический оператор* (71)*, назовём* ***дважды непрерывно дифференцируемую функцию****, удовлетворяющую соответствующему неравенству.* ***Функцию*** *u, являющуюся решением неравенства $Lu \le 0$, будем называть* ***супер-эллиптической функцией*** *, а* ***функцию*** *u, являющуюся решением неравенства $Lu \ge 0$, будем называть* ***суб-эллиптической.***

Ниже применяем уже известные обозначения: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = p_{ik}$.

Лемма 4.32. *Пусть $D \subset R_2$ – ограниченная область, L – эллиптический оператор* (71) *в ней, $c \le 0$ в области D и $u(x)$ – супер-эллиптическая в D функция . Если $Lu < 0$* ***в*** *D, то $u(x)$ не может иметь отрицательного относительного минимума во внутренней точке области D.*

▷ Пусть x^0 – точка отрицательного относительного минимума. В §4 было получено равенство (точка y^0 – образ x^0 при выполненном там преобразовании):

$$Lu\Big|_{x=x^0} = \sum_{i,k=1}^2 a_{ik}(x^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\Big|_{x=x^0} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\Big|_{y=y^0},$$

в котором $\lambda_i > 0$, $i = 1,2$. Т. к. $Lu - cu = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} p_{ik} + \sum_{i=1}^{2} b_i p_i$ (см. (71)) и в точке x^0 должно быть $p_i = 0$, то в точке x^0 будет $Lu - cu \geq 0$.

С другой стороны, в точке x^0 произведение $cu \geq 0$. Значит, в этой точке $Lu - cu < 0$, т. к. в области D $Lu < 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. ◀

Рассматривая полный оператор:

$$L = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x),$$

считаем, что функции $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ определены в области D, $a_{ik} = a_{ki}$ (т. е. $a_{12} = a_{21}$), квадратичная форма $Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k$ является положительно определённой. Тогда, если $A(x)$ – её дискриминант, то $A(x) > 0$ для всех $x \in D$.

Дискриминантом квадратичной формы $Q(\xi_1, \xi_2)$ *называется* ***определитель её матрицы****, т.е. определитель* $A(x)$ *матрицы* $\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$.

Теорема 4.10. *Пусть в области* D *выполнены условия* $c \leq 0$, $Lu < 0$ $(Lu > 0)$ *или* $c < 0$, $Lu \leq 0$ $(Lu \geq 0)$. *Тогда, если* $u(x)$ *есть суперэллиптическая в области* D *функция* (*если* $u(x)$ *есть субэллиптическая в области* D *функция*), *то* $u(x)$ *не может иметь отрицательного относительного минимума* (*положительного относительного максимума*) *во внутренней точке области* D.

▷ Рассмотрим, например, точку x^0 относительного максимума. В § 4 было получено равенство (точка y^0 – образ x^0 при выполненном там преобразовании):

$$Lu\Big|_{x=x^0} = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x^0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\Bigg|_{x=x^0} = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\Bigg|_{y=y^0},$$

в котором $\lambda_i > 0$, $i = 1,2$. Так как $Lu - cu = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} p_{ik} + \sum_{i=1}^{2} b_i p_i$ (см. (71)) и в точке x^0 должно быть $p_i = 0$, то в точке x^0 будет $Lu - cu \leq 0$.

Однако в силу условий теоремы, в точке x^0 (это точка положительного максимума) будет $Lu-cu>0$. Из полученного противоречия следует теорема. ◀ (См. лемму 4.32).

Хопф доказал более общее утверждение.

Теорема 4.11 (Хопф). *Пусть коэффициенты оператора* L *ограничены в области* D, *и дискриминант* $A(x)$ *имеет в этой области положительную точную нижнюю грань. Пусть в* D *выполнены условия* $c\le 0$, $Lu\le 0$, $(Lu\ge 0)$. *Тогда, если* $u(x)$ *есть супер-эллиптическая в области* D *функция* (*если* $u(x)$ *есть суб-эллиптическая в области* D *функция*), *то* $u(x)$ *не может иметь отрицательного относительного минимума* (*положительного относительного максимума*) *во внутренней точке* x^0 *области* D $(x^0\in D)$, *если функция* $u(x)$ *не обращается в константу в любой, содержащей точку* x^0, *области* C_0, *в которой* $u(x)\ge u(x^0)$, $(u(x)\le u(x^0))$ [22, гл. I, п. 3].

▷ Для определённости и в отличие от доказательства теоремы 4.10 допустим, что x^0 есть точка относительного отрицательного минимума. Обозначим символом E множество точек, содержащихся в области C_0, для которых $u(x)=u(x^0)$ (в C_0 $u(x)\ge u(x^0)$). Множество E замкнуто в C_0. И если мы докажем, что множество $\partial E\cdot C_0$ пусто, то будет доказано, что $E\equiv C_0$.

Предположим: $\partial E\cdot C_0$ не пусто. Тогда существует точка $x\in\partial E$ $(x\in C_0)$, расстояние δ от которой до границы ∂C_0 положительно. Если x' – такая точка: $x'\in(C_0-E)$, $\overline{xx'}<\dfrac{\delta}{2}$ ($\overline{xx'}$ – расстояние между точками x и x'), то все круги $\Gamma(x',\rho)$ при условии $\rho<\dfrac{\delta}{2}$ содержатся в области C_0, ($\Gamma(x,\rho)$ – замкнутый круг с центром x и радиусом ρ, т. е. множество точек y, для которых $\overline{xy}\le\rho$). Пусть r' есть точная верхняя грань значений ρ, для которых $\Gamma(x',\rho)\subset(C_0-E)$. На границе $\partial\Gamma(x',r')$ найдётся, по крайней мере, одна точка $x^{(2)}\in E$ (множество E замкнуто). Если обозначить $x^{(1)}$ произвольную точку на радиусе $x'x^{(2)}$, отличную от точки x', и положить $\overline{x^{(1)}x^{(2)}}=\rho''>0$, то $u(x)>u(x^0)$ для $x\in\Gamma(x^{(1)},\rho'')-x^{(2)}$, $u(x^{(2)})=u(x^0)$, $\Gamma(x^{(1)},\rho'')\subset C_0$.

Выберем такое $\rho_1<\rho''$, что $\Gamma(x^{(2)},\rho_1)\subset C_0$, и положим:

$$r=\overline{xx^{(1)}}, \quad v(x)=e^{-k\rho''^2}-e^{-kr^2}.$$

При достаточно больших значениях k для точек $x\in\Gamma(x^{(2)},\rho_1)$ будет выполняться неравенство $Lv<0$. Это следует из рассмотрения выражения $e^{kr^2}Lv$ как квадратного трёхчлена относительно k. Найдя производные, входящие в оператор L, и записав выражение $e^{kr^2}\cdot Lv$ в развёрнутом виде, легко заметим: коэффициент при k^2 имеет для точек $x\in\Gamma(x^{(2)},\rho_1)$ отрицательную точную верхнюю грань, коэффициент при k ограничен и свободное слагаемое (зависящее от k) ограничено сверху. Отсюда и вытекает высказанное выше утверждение.

Так как оператор L является линейным и по условию $Lu\le 0$, то при $\lambda>0$ будет $L(u+\lambda v)<0$ в $\Gamma(x^{(2)},\rho_1)$. При этом $u+\lambda v$ – суперэллиптическая в $\Gamma(x^{(2)},\rho_1)$ функция. Замечаем, что при достаточно малых λ на пересечении $\partial\Gamma(x^{(2)},\rho_1)\cdot\Gamma(x^{(1)},\rho'')$ будет $u+\lambda v>u(x^0)$ (это пересечение не пусто). Кроме того, если $x=x^{(2)}$, то $r=\overline{xx^{(1)}}=\overline{x^{(2)}x^{(1)}}=\rho''$, $v(x^{(2)})=e^{-k\rho''^2}-e^{-k\rho''^2}=0$. Тогда в точке $x^{(2)}$ $u(x^{(2)})+\lambda v(x^{(2)})=u(x^{(2)})=u(x^0)$. Таким образом, функция $u+\lambda v$ имеет в круге $\Gamma(x^{(2)},\rho_1)$ отрицательный относительный минимум, что противоречит лемме 4.32. Полученное противоречие доказывает теорему. ◀

3. Априорная оценка величины U_0

Пусть $f(x)$ есть функция, заданная в области D. Будем рассматривать уравнение:

$$Lu=f, \tag{72}$$

записав это уравнение в виде:

$$\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}(x)p_{ik}+\sum_{i=1}^{2}b_i(x)p_i+c(x)u=f(x).$$

Функцию $u(x)$ *назовём* ***регулярным решением*** *уравнения* (72) *в области* D*, если она принадлежит классу* $C_2(D)$ *и удовлетворяет уравнению* (72) *во всех точках* D.

Для уравнения (72) рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = f \quad \text{для} \quad x \in (T - \partial T), \qquad u = \varphi \quad \text{для} \quad x \in \partial T, \tag{73}$$

где L – полный эллиптический оператор:

$$L = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \quad \overline{D} = T\ .$$

Будем предполагать, что коэффициенты и свободное слагаемое уравнения принадлежат классу $C_\alpha(T)$, функция φ принадлежит классу $C_{2+\alpha}(\partial T)$, замкнутая область T – классу $C_{2+\alpha}$. В лемме 4.33 (см. ниже) решение $u(x)$ задачи (73) считаем непрерывным в области T и принадлежащим классу $C_2(T - \partial T)$. Далее же будем рассматривать такие её решения, которые принадлежат классу $C_{2+\alpha}(T)$.

Начав рассмотрение задачи (73), запишем неравенство (70) уже не для произвольной функции f из некоторого класса, а для решения $u(x)$ указанной задачи:

$$\|u\|_{2+\alpha}^{T} \le \tilde{C}\|Lu\|_{\alpha}^{T} + \tilde{\tilde{C}}U_0 = \tilde{C}\|f\|_{\alpha}^{T} + \tilde{\tilde{C}}U_0 \tag{74}$$

(по поводу смены обозначения $L^* \leftrightarrow L$ сказано выше). В связи же с возможностью перехода от (55^*) к (61) (выполненного в § 4 для «укороченного» оператора L), т. е. перехода

$$\text{от} \quad \|f\|_{2+\alpha}^{D} \le C\left(\|Lf\|_{\alpha}^{D} + \|f\|_{0}^{D}\right) \quad \text{к} \quad \|f\|_{2+\alpha}^{D} \le C\|Lf\|_{\alpha}^{D},$$

встаёт вопрос об априорной оценке величины U_0. В отношении этой априорной оценки можно заметить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 4.33. *Если существует положительная функция* $\omega(x)$ *класса* $C_2(T)$ *такая, что* $L\omega < 0$, *то для любого решения* $u(x)$ *задачи* (73), *непрерывного в области* T *и принадлежащего классу* $C_2(T - \partial T)$, *имеет место оценка*:

$$U_0 = O(F_0 + \Phi_0),$$

где Φ_0 *– максимум модуля функции* φ *на* ∂T, F_0 *– максимум модуля функции* f *в области* T. *В частности, эта оценка справедлива при условии* $c \le 0$. *В этом случае она равномерна относительно оператора* L *в пределах любого семейства эллиптических операторов, для которого величины* A_0, B_0, C_0 *и* $\frac{1}{A}$ *ограничены.*

В лемме 4.33 $\overline{A}$ – минимум (положительный) определителя (дискриминанта) A квадратичной формы $Q(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i,k=1}^{2}a_{ik}(x)\xi_i\xi_k$ (см. лемму 4.31).

$\triangleright$ При $c<0$ утверждение теоремы очевидно, т. к. в этом случае в любой точке из $T-\partial T=D$, в которой функция u принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение, выполняется неравенство $cu\ge f$ $(cu\le f)$, откуда $|u|\le\dfrac{F_0}{\min|c|}$.

В общем случае полагаем $u=v\omega$ и получаем уравнение для функции v, в котором можно применить прежние рассуждения, т. к. в этом уравнении коэффициент, аналогичный c, равен $L\omega$ и, следовательно, отрицателен.

В случае $c\le 0$ результат остаётся справедливым. В самом деле, если $\Gamma(x^0,\rho)$ – круг, содержащий внутри себя область T, причём его центр x^0 находится вне области T, то можно положить $\omega=e^{k\rho^2}-e^{kr^2}$, где $r=\overline{xx^0}$. Тогда, с одной стороны, функция ω положительна в T, а с другой стороны, если величины A_0, B_0, C_0 и $\dfrac{1}{\overline{A}}$ ограничены, то можно найти такое k_0, что при $k>k_0$ $L\omega<-1$ (см. п.2). ◀
[22, гл.V, 35].

Из (74), при выполнении условий леммы 4.33, получаем:

$$\|u\|_{2+\alpha}^{T}\le\tilde{C}\|Lu\|_{\alpha}^{T}+\tilde{C}'(F_0+\Phi_0)\le\tilde{C}''\|Lu\|_{\alpha}^{T}+\tilde{C}'\Phi_0,\qquad Lu=f,$$

второе неравенство в записанной цепочке следует из неравенства $F_0=\|f\|_0^T\le\|f\|_\alpha^T=\|Lu\|_\alpha^T$ (см. определение нормы $\|f\|_\alpha^T$). Если же рассматривается задача:

$$Lu=f\quad\text{для}\quad x\in(T-\partial T),\qquad u=0\quad\text{для}\quad x\in\partial T,$$

то оценка для нормы $\|u\|_{2+\alpha}^T$ приобретает вид:

$$\|u\|_{2+\alpha}^{T}\le C\|Lu\|_{\alpha}^{T}\quad\text{или}\quad\|u\|_{2+\alpha}^{T}\le C\|f\|_{\alpha}^{T}. \tag{74*}$$

З а м е ч а н и е 4.4. При получении оценок Шаудера (47), (55) предполагалось, что функция принадлежит классу $C_{2+\alpha}(D)$. Считая функцию и её первые и вторые производные непрерывными вплоть до границы ∂D, продожим их на замкнутую область $\overline{D}$ и в дальнейшем будем их рассматривать как непрерывные в $\overline{D}$ (гл. II, § 3, п. 5, замечание 2.7; гл. III, § 4, п. 2, теорема 3.18).

З а м е ч а н и е 4.5. Пусть для уравнения (72) рассматривается задача Дирихле:

$$Lu = f \quad \text{для} \quad x \in (T - \partial T), \qquad u = 0 \quad \text{для} \quad x \in \partial T,$$

где L – полный эллиптический оператор. Будем предполагать, что коэффициенты и свободное слагаемое уравнения принадлежат классу $C_{l-2+\alpha}(T)$, граница $\partial T \in C_{l+1+\alpha}$ и будем рассматривать такие возможные её решения, которые принадлежат классу $C_{l+\alpha}(T)$; здесь $T = \overline{D}$, $l \geq 2$. Тогда, применяя теорему 3.65, гл. III, § 7, п. 2, можно получить:

$$\|u\|_{l+\alpha}^{T} \leq C\|Lu\|_{l-2+\alpha}^{T} \qquad \text{или} \qquad \|u\|_{l+\alpha}^{T} \leq C\|f\|_{l-2+\alpha}^{T}. \qquad (74^{**})$$

4. О неподвижной точке при преобразовании компакта

Пусть *имеется* ***полное метрическое пространство*** *и в нём* ***замкнутое множество*** Ω. *Предположим, что на* Ω *задан оператор* P, *переводящая* Ω *в себя. Оператор* P *называется* ***сжимающим***, *если выполняется условие*:

$$\rho\big(P(x), P(x')\big) \leq \alpha\rho(x, x') \qquad (x, x' \in \Omega),$$

причём $\alpha < 1$ *и* α *не зависит от* x *и* x'.

Точка $x^* \in \Omega$ *называется* ***неподвижной точкой*** *оператора* P, *если*

$$x^* = P(x^*).$$

Таким образом, неподвижные точки оператора P *есть решения уравнения* $x = P(x)$.

Теорема (принцип сжимающих отображений, или принцип неподвижной точки). *Для каждого сжимающего отображения непустого полного метрического пространства в себя существует (и притом единственная)* ***неподвижная точка.***

Доказательство этой теоремы есть, например, в книге [13_3, том 3, гл. VIII, § 57, 57.4].

Ниже мы докажем теорему о неподвижной точке в другой формулировке, которой и воспользуемся в пункте 5. Предварительно дадим необходимые определения.

Выпуклой оболочкой множества M *называется минимальное выпуклое множество, содержащее* M, *т. е. пересечение всех содержащих* M *выпуклых множеств.* ***Симплексом*** *называют* n***-мерный многогранник***, *являющийся вы-*

*пуклой оболочкой $n+1$ точек (**вершин** симплекса), которые не лежат в $(n-1)$-мерной плоскости.*

Теорема (Брауэра). *Пусть K – множество в R^n, гомеоморфное замкнутому n-мерному симплексу, и f – непрерывное отображение K в себя. Тогда существует точка $x \in K$ такая, что $f(x)=x$.*

З а м е ч а н и е 4.6. Всякое выпуклое ограниченное замкнутое множество в R^n гомеоморфно некоторому k-мерному симплексу. Поэтому для него верна теорема Брауэра.

Теорема (Шаудера о неподвижной точке). *Пусть Φ – выпуклый компакт в банаховом пространстве. Тогда при непрерывном преобразовании f компакта Φ в себя существует неподвижная точка.*

$\triangleright$ Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Пусть $x_1, \ldots, x_N$ – множество элементов компакта Φ, образующих ε-сеть. Пусть Φ_0 – выпуклая оболочка точек $x_1, \ldots, x_N$. Очевидно, что $\Phi_0 \subset \Phi$. Φ можно непрерывно отобразить в Φ_0 так, что образ каждой точки будет отстоять от прообраза не далее, чем на 2ε. Действительно, положим:

$$\mu_i(x)=\begin{cases} 2\varepsilon-\|x-x_i\| & при \quad \|x-x_i\|\le 2\varepsilon, \\ 0 & при \quad \|x-x_i\|>2\varepsilon, \end{cases} \qquad \lambda_i(x)=\frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{k=1}^{N}\mu_k(x)}.$$

Так как каждая точка компакта Φ находится от некоторой x_i на расстоянии, меньшем ε, то $\sum\limits_{k=1}^{N}\mu_k(x)\neq 0$ в Φ. Поэтому $\lambda_i(x)$ непрерывны. Далее $\lambda_i(x)\ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{N}\lambda_k(x)=1$, $\lambda_i(x)=0$ при $\|x-x_i\|\ge 2\varepsilon$. Поэтому:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(x)x_k$$

осуществляет непрерывное отображение Φ в Φ_0 и $\|x-\varphi(x)\|<2\varepsilon$. Тогда преобразование $f_0=\varphi\cdot f$ переводит Φ_0 в себя и переводит непрерывно. Следовательно, по теореме Брауэра, существует такая точка $x\in\Phi_0$, что $f_0(x)=x$ или $\varphi(f(x))=x$. Но тогда: $\|f(x)-x\|<2\varepsilon$.

Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}$ такую, что $\varepsilon_m \to 0$. Найдём соответствующую последовательность $\{x_m\}$: $\|f(x_m)-x_m\|<2\varepsilon_m$. Тогда предельная для последовательности $\{x_m\}$ точка (существующая в силу компактности Φ) есть неподвижная точка преобразования f [18, дополнения, II] . ◀

5. Решение задачи Дирихле

Пусть D – ограниченная область на плоскости; в этой области рассматривается задача Дирихле

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad u\big|_{\partial D} = 0, \qquad (75)$$

где L – равномерно эллиптический оператор, определенный в области D, для этого оператора потребуем выполнения в области $\overline{D}$ условия $\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \ge a\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2$, где $a > 0$ является константой эллиптичности, $a_{ik}, b_i, c \in C_{l-2+\alpha}(\overline{D})$, $f \in C_{l-2+\alpha}(\overline{D})$, граница ∂D области D является $(l+1)$ раз непрерывно дифференцируемой. Эта задача разрешима при всякой функции $f \in C_{l-2+\alpha}(\overline{D})$ и её решение $u \in C_{l+\alpha}(\overline{D})$, $l \ge 2$. Мы докажем разрешимость этой задачи при всякой $f \in C_{\alpha}(\overline{D})$ и принадлежность её решения $u \in C_{2+\alpha}(\overline{D})$, т. е. при $l = 2$.

Теорема 4.12. *Решение задачи* (75) *при названных выше в этом пункте условиях* $(l = 2)$ *существует и принадлежит классу* $C_{2+\alpha}(\overline{D})$.

▷ Итак, для уравнения (72) рассмотрим задачу Дирихле:

$$Lu = f \quad \text{для} \quad x \in (T - \partial T), \qquad u = 0 \quad \text{для} \quad x \in \partial T,$$

где L – полный эллиптический оператор:

$$L = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \quad \overline{D} = T .$$

Будем предполагать, что коэффициенты и свободное слагаемое уравнения принадлежат классу $C_{\alpha}(T)$, замкнутая область T – классу $C_{2+\alpha}$. Проведем доказательство методом продолжения по параметру, рассмотрев семейство операторов, зависящих от параметра t:

$$L(t) = (1-t)\Delta + tL, \quad 0 \le t \le 1,$$

где Δ – оператор Лапласа и L – данный оператор. Докажем, что множество E точек t отрезка $[0,1]$, при которых задача:

$$L(t)u = f, \quad u\big|_{\partial D} = 0 \qquad (76)$$

разрешима при всякой $f \in C_\alpha(D)$ (и $u \in C_{2+\alpha}(D)$), не пусто и является одновременно открытым и замкнутым на $[0,1]$.

Если рассматривать отрезок $[0,1]$ как топологическое пространство, то из доказательства последних трёх утверждений будет следовать, что E совпадает с отрезком $[0,1]$, т.е. наша задача разрешима при значении $t=1$, когда $L(t)=L$ (см. гл. III, § 5, п. 2). Для того чтобы рассматривать отрезок $[0,1]$ как топологическое пространство, выделим семейство G подмножеств, называемых открытыми, взяв в качестве такого семейства множество всех интервалов, лежащих на отрезке $[0,1]$, и добавив к ним два крайних полуинтервала $[0,\alpha),(\beta,1]$, которые назовём ***«интервалами»*** (см. гл. I, § 1, п. 2). При этом в качестве значений для чисел α и β мы можем брать любые числа из интервала $(0,1)$.

Пусть X – топологическое пространство. *Точка $x \in X$ называется **внутренней** точкой множества $H \subset X$, если существует открытое множество G в X такое, что $x \in G \subset H$. **Окрестностью** точки $x \in X$ называется любое множество $V \subset X$, для которого точка x является внутренней. Множество F в топологическом пространстве X называется **замкнутым**, если множество $G = X - F$ является открытым.*
[11, гл. I, § 2, п. 2.2 и п. 2.3].

В силу данных определений, точка $\xi_1 = 0$ будет внутренней точкой *«интервала* $[0,\alpha)$», а точка $\xi_2 = 1$ – внутренней точкой *«интервала* $(\beta,1]$». Сами же эти «*интервалы*» будут *окрестностями* этих точек соответственно. При этом сегменты $[0,\alpha]$ и $[\beta,1]$ будут замкнутыми множествами, т. к. $(\alpha,1]=[0,1]-[0,\alpha]$, $[0,\beta)=[0,1]-[\beta,1]$.

Пусть $[0,1]=X$. Пустое множество Λ и сегмент $[0,1]$ – открытые множества (аксиома 1 топологического пространства X). Отсюда следует: т. к. $\Lambda = X-[0,1]$, то $[0,1]$ есть замкнутое множество; поскольку $[0,1]=X-\Lambda$, то Λ есть замкнутое множество. Таким образом, Λ и $[0,1]$, и только они, являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами (в топологическом пространстве $[0,1]=X$).

1. *Множество E не пусто.* При значении $t=0$ имеем задачу

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Выше доказано, что эта задача разрешима при всякой $f \in C_\alpha(T)$ и $u \in C_{2+\alpha}(T)$.

2. *Множество* E *открыто.* Предположим, что при значении $t = t_0$ задача (76) разрешима при всякой $f \in C_\alpha(T)$. Пусть $\delta > 0$ – число, которое будет подобрано позднее, и $|t - t_0| < \delta$. Представим уравнение:

$$L(t)u = f$$

в виде:

$$L(t_0)u = f - [L(t) - L(t_0)]\, u$$

и будем решать задачу:

$$L(t_0)u = f - [L(t) - L(t_0)]\, u\,, \qquad u\big|_{\partial D} = 0$$

методом последовательных приближений.

Рассмотрим в пространстве $C_{2+\alpha}(T)$ подпространство $C^0_{2+\alpha}(T)$ функций, обращающихся в нуль на границе. $C^0_{2+\alpha}(T)$ замкнуто в $C_{2+\alpha}(T)$, а потому является полным пространством вместе с $C_{2+\alpha}(T)$. Всякой функции $z \in C^0_{2+\alpha}(T)$ сопоставим функцию $u \in C^0_{2+\alpha}(T)$, являющуюся решением задачи:

$$L(t_0)u = f - [L(t) - L(t_0)]\, z\,, \qquad u\big|_{\partial D} = 0\,. \tag{77}$$

По предположению относительно t_0 такая функция u существует и принадлежит $C_{2+\alpha}(T)$. Следовательно, она принадлежит $C^0_{2+\alpha}(T)$. Оператор, переводящий функцию z в функцию u обозначим через A. Тогда (77) в краткой записи примет вид $u = Az$.

Имеем:

$$L(t) - L(t_0) = tL - t\Delta + t_0\Delta - t_0 L = (t - t_0)(L - \Delta)\,.$$

Учитывая (46) (лемма 4.22) и очевидное неравенство $\left\| \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \right\|^D_\alpha \le \|z\|^D_{2+\alpha}$, получаем:

$$\big\| [L(t) - L(t_0)]z \big\|^T_\alpha \le K|t - t_0| \cdot \|z\|^T_{2+\alpha}\,;$$

K – некоторая константа.

Выберем теперь δ столь малым, чтобы выполнялось $CK\delta < \dfrac{1}{2}$, где C – константа из (74*) (неравенство Шаудера). Покажем, что при таком выборе δ оператор A *сжимающий.*

Пусть:

$$u_1 = Az_1\,, \qquad u_2 = Az_2\,, \qquad z_1, z_2 \in C^0_{2+\alpha}(T)\,.$$

Разность $u_1 - u_2$ является решением задачи (см. (77)):

$$L(t_0)(u_1 - u_2) = [L(t) - L(t_0)](z_2 - z_1)\,, \quad (u_1 - u_2)\big|_{\partial D} = 0\,.$$

Но тогда, согласно (74*):

$$\|u_1 - u_2\|_{2+\alpha}^T \le C\|[L(t) - L(t_0)](z_1 - z_2)\|_\alpha^T .$$

С учетом предыдущих неравенств, начиная с неравенства $|t - t_0| < \delta$, находим:

$$\|u_1 - u_2\|_{2+\alpha}^T \le CK\delta\|z_1 - z_2\|_{2+\alpha}^T \quad \text{или} \quad \|u_1 - u_2\|_{2+\alpha}^T \le \frac{1}{2}\|z_1 - z_2\|_{2+\alpha}^T .$$

Остаётся воспользоваться принципом сжимающих отображений.

3. *Множество E замкнуто.* Пусть $t_n \to t$ и $t_n \in E$. Рассмотрим задачу (76) $(f \in C_\alpha(D))$. Пусть u_n $(n = 1,2,...)$ – решение задачи:

$$L(t_n)u_n = f , \quad u_n\big|_{\partial D} = 0 .$$

Заметим, что для всех t, $0 \le t \le 1$ для операторов $L(t)$ можно взять общие константы эллиптичности и общие оценки нормы Гельдера в $C_\alpha(D)$ коэффициентов. Поэтому в оценке Шаудера (74*) можно взять общую константу C. Следовательно, для всех n:

$$\|u_n\|_{2+\alpha}^T \le C\|f\|_\alpha^T = M .$$

Поэтому из последовательности $\{u_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся с производными до второго порядка к некоторой функции u. Очевидно, тогда функция u является решением задачи

$$L(t)u = f , \quad u\big|_{\partial D} = 0 .$$

Кроме того, из того, что нормы u_n в $C_{2+\alpha}(T)$ ограничены в совокупности, следует, что $u \in C_{2+\alpha}(T)$. Тем самым доказана замкнутость E и завершено доказательство существования решения задачи (75). ◀ [18, гл. I, § 8].

Применяя только те утверждения, которые были доказаны выше (или их доказательства есть в учебной литературе) можно доказать ослабленный вариант теоремы Шаудера (теорема 4.12* , ниже; см. замечания 4.4 и 4.5; только в этом варианте она будет применяться).

Пусть D – ограниченная область на плоскости; $T = \overline{D} = D + \partial D$ – замкнутая область. Рассмотрим в области D задачу Дирихле:

$$Lu \equiv \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = f(x) , \quad u\big|_{\partial D} = 0 , \qquad (75^*)$$

где L – равномерно эллиптический оператор, определенный в области D, $b_k, c \in C_{l-2+\alpha}(T)$, граница ∂D области D принадлежит $\partial D \in C_{l+1+\alpha}$.

Теорема 4.12*. *Если выполнены условия, сформулированные в предыдущем абзаце, и функция* $f \in C_{l-2+\alpha}(T)$*, то задача* (75*) разрешима в классе $C_{l+\alpha}(T)$.

Пусть D – ограниченная область на плоскости; $T=\overline{D}=D+\partial D$ – замкнутая область. Рассмотрим в области D задачу Дирихле:

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad u\big|_{\partial D} = \varphi(s), \; s \in \partial D. \qquad (75)$$

Пусть коэффициенты и свободное слагаемое f уравнения (75) определены в ограниченной области T и принадлежат пространству $a_{ik}, b_i, c \in C_{l-2+\alpha}(\overline{D})$, $f \in C_{l-2+\alpha}(\overline{D})$, $l \ge 2$, $\alpha \in (0,1)$. Предполагается, что $a_{ik} = a_{ki}$ и

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \ge a\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2, \quad a = const > 0,$$

т. е. уравнение строго эллиптично в замкнутой области T.

Теорема 4.12** (теорема Шаудера). *Если коэффициенты оператора* L *принадлежат* $C_{l-2+\alpha}(\overline{D})$*, в замкнутой области* $\overline{D}$ *выполняется условие* $\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \ge a\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2$, ∂D *принадлежит* $C_{l+\alpha}$ *и задача Дирихле* (75) *может иметь не более одного решения в* $C_{l+\alpha}(\overline{D})$*, то при любых* $f \in C_{l-2+\alpha}(\overline{D})$ *и* $\varphi \in C_{l+\alpha}(\partial D)$ *задача* (75) *действительно имеет решение из класса* $C_{l+\alpha}(\overline{D})$, $l \ge 2$.

§ 6. Разрешимость уравнений Навье – Стокса на временных сечениях

1. Нахождение функций в начальный момент времени

Пусть область Ω и её граница S определяются следующим образом (рисунок 10): $S_1 = [0 \le x_1 \le L,\ x_2 = 0]$, $S_2 = [0 \le x_1 \le L,\ x_2 = H]$, $S_3 = [x_1 = 0,\ 0 \le x_2 \le H]$, $S_4 = [x_1 = L,\ 0 \le x_2 \le H]$; $\Omega = (0,L)\times(0,H)$, $S = \sum_{k=1}^{4} S_k$ – граница области Ω, $\overline{\Omega} = \Omega + S$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, $S_T = S \times [0,T]$, $\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega}\times[0,T]$.

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k\frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t)\in\Omega_T,\ x = (x_1, x_2); \qquad (78)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \qquad (x,t) \in [0,L] \times (0,H) \times [0,T]; \tag{79}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T]; \tag{80}$$

$$u_1\big|_{t=0} = \overline{b}(x), \quad x \in \overline{\Omega}; \quad \overline{b}\big|_{S_1+S_2} = 0; \quad u_2\big|_{S_1+S_2} = 0; \tag{81}$$

$$\int_0^H \frac{\partial \overline{b}(x_1, z)}{\partial x_1} dz = 0, \quad 0 \le x_1 \le L; \tag{82}$$

краевые условия для (78), (80) определяются ниже, плотность $\rho = 1$.

Ранее такая область, представляющая собой канал с твёрдыми стенками S_1, S_2, встречалась в § 4, на рисунке 7 (только теперь длина канала обозначена символом L вместо H_1, ширина – H вместо H_2).

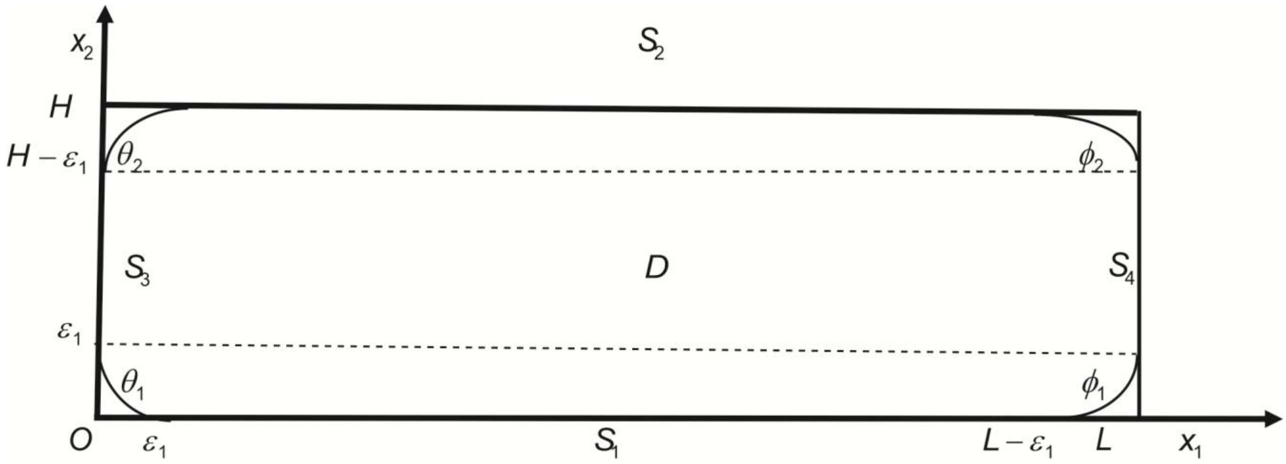


Рис. 10

При $t = 0$ функция $u_1(x,0) = \overline{b}(x)$ задана . Найдём при значении $t = 0$ функцию u_2, решая (79) с граничным условием $u_2\big|_{S_1} = 0$, $0 \le x_1 \le L$, $0 < x_2 \le H$,

$$u_2(x_1, x_2) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Отметим, что условие $u_2\big|_{S_2} = 0$ выполняется автоматически, т. к.:

$$u_2(x_1, H) = -\int_0^H \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = -\int_0^H \frac{\partial \overline{b}(x_1, z)}{\partial x_1} dz = 0$$

в силу (82).

Для нахождения функций $p(x,t)$, $0 \le t \le T$ и $u_1(x,t)$, $0 < t \le T$ потребуются дополнительные обозначения и некоторые определения.

Пусть D – область, ограниченную кривой Γ, $\overline{D} = D + \Gamma$,

где $\Gamma = \sum_{k=1}^{4} \Gamma_k$,

$$\Gamma_1 = [0 \le x_1 \le \varepsilon_1, x_2 = \theta_1(x_1)] + [\varepsilon_1 \le x_1 \le L - \varepsilon_1, x_2 = 0] + [L - \varepsilon_1 \le x_1 \le L, x_2 = \phi_1(x_1)];$$

$$\Gamma_2 = [0 \le x_1 \le \varepsilon_1, x_2 = \theta_2(x_1)] + [\varepsilon_1 \le x_1 \le L - \varepsilon_1, x_2 = H] + [L - \varepsilon_1 \le x_1 \le L, x_2 = \phi_2(x_1)];$$

$$\Gamma_3 = [x_1 = 0, \theta_1(0) \le x_2 \le \theta_2(0)], \quad \Gamma_4 = [x_1 = L, \phi_1(L) \le x_2 \le \phi_2(L)];$$

$$D_1 = [0 \le x_1 \le L, 0 < x_2 \le \varepsilon], \quad D_2 = [0 \le x_1 \le L, H - \varepsilon \le x_2 < H];$$

$$\Gamma_1' = [0 \le x_1 \le L, x_2 = \varepsilon_1], \; \Gamma_2' = [0 \le x_1 \le L, x_2 = H - \varepsilon_1], \; D' = [0 \le x_1 \le L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1],$$

$\Pi_T = \Pi \times [0,T]$, где Π – либо одна из областей D, $\overline{D}$, D_1, D_2, D', либо одна из кривых Γ, Γ_1', Γ_2'; $\theta_i(x_1)$, $\phi_i(x_1)$, $i = 1,2$ – строго монотонные функции. Пусть ещё, кроме того, $\theta_1(0) = \phi_1(L) = \varepsilon_1$, $\theta_2(0) = \phi_2(L) = H - \varepsilon_1$, $\theta_1(\varepsilon_1) = \phi_1(L - \varepsilon_1) = 0$ и $\theta_2(\varepsilon_1) = \phi_2(L - \varepsilon_1) = H$; кривая θ_2 симметрична кривой θ_1, а ϕ_2 – ϕ_1 относительно прямой $x_2 = \frac{H}{2}$. Тогда и области D, $\overline{D}$ симметричны относительно указанной прямой. Здесь ε – малое положительное число, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ (рисунок 10).

***Будем** говорить, что функция $g(x,t)$, определённая на $\overline{D}_T$, является **чётной (нечётной) по переменной** x_2, если при любых значениях $0 \le x_1 \le L$, $0 \le t \le T$ имеет место равенство*:

$$g(x_1, \Gamma_2(x_1) - x_2, t) = g(x_1, \Gamma_1(x_1) + x_2, t), \; (g(x_1, \Gamma_2(x_1) - x_2, t) = -g(x_1, \Gamma_1(x_1) + x_2, t)), \qquad (83)$$

где $0 \le x_2 \le \dfrac{\Gamma_2(x_1) - 2\Gamma_1(x_1)}{2}$.

Аналогично определяется чётность функции по x_2 на $\overline{\Omega}_T$.

***Будем** называть функцию $g(s,t)$, определённую на Γ_T, **чётной (нечётной) по переменной** x_2, если при любых значениях $0 \le x_1 \le L$, $0 \le t \le T$ имеет место равенство* (83)*, в котором* $x_2 = 0$.

*Для дальнейших рассуждений потребуется **срезающая функция,** которую определим так*:

$$\zeta(x) = 1, \text{ если } \varepsilon \le x_1 \le L - \varepsilon, \; 0 \le x_2 \le H;$$

$$0 \le \zeta(x) \le 1, \text{ если } [\varepsilon_1 \le x_1 \le \varepsilon] + [L - \varepsilon \le x_1 \le L - \varepsilon_1], \; 0 \le x_2 \le H;$$

$$\zeta(x) = 0, \qquad (84)$$

если $[0 \le x_1 \le \varepsilon_1] + [L - \varepsilon_1 \le x_1 \le L]$, $[\theta_1(x_1) \le x_2 \le \theta_2(x_1)] + [\phi_1(x_1) \le x_2 \le \phi_2(x_1)]$,

Будем предполагать, что $\zeta(x), \overline{b}(x) \in C_{l+\alpha}(\overline{D})$, $\Gamma \in C_{l+\alpha}$, $\zeta(x), \overline{b}(x)$ – функции, чётные по x_2, $l \ge 3$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда функция u_2, найденная выше при $t=0$, будет удовлетворять условию $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\in C_{l-1+\alpha}(\overline{D})$ и будет нечётной по x_2. Зная u_1, u_2, рассмотрим (80) с условием $(t=0)$:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \overline{n}}\right|_{\Gamma}=\zeta(s)\cdot\sum_{j=1}^{2}\omega_j(s)\cos\alpha_j\,,\quad s\in\Gamma\,,$$

где $\left.\dfrac{\partial p}{\partial \overline{n}}\right|_{\Gamma}$ – производная по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к границе Γ, α_i – угол между вектором $\overline{n}$ и осью Ox_i:

$$\omega_i=\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,.$$

Условие разрешимости:

$$\int_{\Gamma}\zeta(s)\cdot\sum_{j=1}^{2}\omega_j(s)\cos\alpha_j ds=0$$

для этой задачи выполняется в силу (84) и нечётности функции u_2 по x_2. При этом её решение определено с точностью до произвольной постоянной [31, гл. IV, § 2, п. 8] и принадлежит классу $C_{l-1+\alpha}(\overline{D})$.

Итак, при $t=0$ найдены все три функции u_1, u_2, p. Для их нахождения при $t>0$ используем метод Роте [15_2, гл. III, § 5].

2. Метод Роте

Разобьём пространство (x,t) плоскостями $t_m=m\tau$, $m=0,1,2,...,M$, на слои и предположим, для сокращения записи, что $M\tau=T$. Пусть D_m – сечение D_T плоскостью t_m, Γ_m – его граница, $\overline{D}_m=D_m+\Gamma_m$. На каждом сечении D_m определим функции, которые будем обозначать: $u_{1,m}$, $u_{2,m}$, p_m, $m=\overline{0,M}$. Выше было найдено решение при $t=0$, т. е. решение $u_{1,0}$, $u_{2,0}$, p_0. Для нахождения функции u_1 на сечениях D_m полагаем:

$$\left.u_1\right|_{\Gamma_T}=\psi_1(s,t)\,,\quad (s,t)\in\Gamma_T\,,$$

где $\psi_1(s,t)\in C_{l+\alpha}(\Gamma_T)$, $\left.\psi_1\right|_{t=0}=\overline{b}(s)$, $x=s\in\Gamma$; $\psi_1=0$ при $\varepsilon_1\le x_1\le L-\varepsilon_1$, $[x_2=0]+$ $+[x_2=H]$, $t\in[0,T]$, и преобразуем задачу для u_1 в задачу с нулевым граничным условием.

Вводя в рассмотрение функцию $f(x,t)$, удовлетворяющую при любом $t\in[0,T]$ условиям: $f\in C_{l+1+\alpha}(\overline{D})$, $\left.f\right|_{\Gamma_T}=\left.\psi_1\right|_{\Gamma_T}$, и новую искомую функцию $w(x,t)$, для которой $u_1(x,t)=w(x,t)+f(x,t)$, получаем задачу для функции $w(x,t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}+(w+f)\frac{\partial w}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_1}w+u_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+F(x,t)+\frac{\partial p}{\partial x_1}=0\,; \qquad (85)$$

$$w\big|_{\Gamma_T}=0\,,\ w\big|_{t=0}=\bar{b}(x)-f\big|_{t=0}\,,\quad x\in\overline{D}\,,\quad \bar{b}(x)-f\big|_{t=0}=0\,,\ x=s\in\Gamma\,,$$

где $F(x,t)=\dfrac{\partial f}{\partial t}-\nu\sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}+f\,\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $F\in C_{l-1+\alpha}(\overline{D})$.

Вводя обозначения $g_{\bar t}(x,t_m)=\dfrac{1}{\tau}(g_m-\check{g}_m)$, $g_m=g(x,t_m)$, $\check{g}_m=g(x,t_{m-1})$, полагая $w_m=u_{1,m}-f_m$ и заменяя $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ разностной производной $w_{\bar t}(x,t_m)$, от (85) перейдём к уравнению:

$$\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2}-(\check{w}_m+f_m)\frac{\partial w_m}{\partial x_1}-\check{u}_{2,m}\frac{\partial w_m}{\partial x_2}-\frac{\partial f_m}{\partial x_1}w_m-\check{u}_{2,m}\frac{\partial f_m}{\partial x_2}-\frac{1}{\tau}w_m+\frac{1}{\tau}\check{w}_m-F_m-\frac{\partial \check{p}_m}{\partial x_1}=0 \qquad (86)$$

с граничным условием:

$$w_m\big|_{\Gamma_m}=0\,, \qquad (87)$$

где $F_m=f_{\bar t}(x,t_m)-\nu\sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{\partial^2 f_m}{\partial x_k^2}+f_m\,\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}$.

Уравнение (86) перепишем в виде:

$$\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2}-(\check{w}_m+f_m)\frac{\partial w_m}{\partial x_1}-\check{u}_{2,m}\frac{\partial w_m}{\partial x_2}-\Big(\frac{\partial f_m}{\partial x_1}+\frac{1}{\tau}\Big)\cdot w_m=\check{u}_{2,m}\frac{\partial f_m}{\partial x_2}-\frac{1}{\tau}\check{w}_m+F_m+\frac{\partial \check{p}_m}{\partial x_1} \qquad (88)$$

и ниже, для доказательства разрешимости (88), (87), воспользуемся теоремой Шаудера (теорема 4.12*). При этом, кроме сказанного выше, будем предполагать, что в $\overline{D}_T$ производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ ограничена снизу, т. е. справедливо неравенство $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\ge\beta=const$.

Тогда при выполнении неравенства $\dfrac{1}{\tau}+\beta>0$ и всех вышеназванных условий задача (88), (87) при $m=1$ имеет единственное решение $w_1\in C_{l+\alpha}(\overline{D}_1)$ (теорема Шаудера). Следовательно, существует единственная функция $u_{1,1}=w_1+f_1$, принадлежащая $C_{l+\alpha}(\overline{D}_1)$. Продолжим функцию $u_{1,1}$, найденную в области $\overline{D}_1$, на область $\overline{\Omega}_1$, доопределив её в четырёх криволинейных треугольниках, находящихся по углам $\overline{\Omega}_1$.

Возьмём, например, треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(\varepsilon_1,0)$, $B(0,\varepsilon_1)$. Его криволинейная сторона задаётся уравнением: $x_2=\theta_1(x_1)$ $(x_1=\theta_1^{-1}(x_2))$. Пусть $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ есть произвольная точка, лежащая на криволинейной стороне AB треугольника OAB, т. е. $x_1^0=\theta_1^{-1}(x_2^0)$. Для любой точки (x_1, x_2^0) такой, что $x_1^0 \le x_1 \le 2x_1^0$ $\left(0 \le x_1^0 \le \varepsilon_1\right)$, введём обозначение $y_1 = 2x_1^0 - x_1$ $\left(0 \le y_1 \le x_1^0\right)$ и положим $u_{1,1}(y_1, x_2^0) = -u_{1,1}(x_1, x_2^0) + 2u_{1,1}(x_1^0, x_2^0)$.

Поскольку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ есть произвольная точка, лежащая на криволинейной стороне AB треугольника OAB, и, когда переменная x_2^0 пробегает значения от ε_1 до нуля, переменная $x_1^0 = \theta_1^{-1}(x_2^0)$ пробегает значения от нуля до ε_1, то функция $u_{1,1}$ оказывается доопределённой во всём треугольнике OAB. При этом справедлива цепочка равенств:

$$\frac{u_{1,1}(y_1, x_2^0) - u_{1,1}(x_1^0, x_2^0)}{y_1 - x_1^0} = \frac{-u_{1,1}(x_1, x_2^0) + u_{1,1}(x_1^0, x_2^0)}{x_1^0 - x_1} = \frac{u_{1,1}(x_1, x_2^0) - u_{1,1}(x_1^0, x_2^0)}{x_1 - x_1^0}.$$

Эта цепочка показывает (после перехода к пределу при $y_1 \to x_1^0$), что во всём треугольнике OAB, включая криволинейную сторону AB, существует частная производная $\dfrac{\partial u_{1,1}}{\partial x_1}$. На остальные криволинейные треугольники продолжение осуществляется аналогично.

Функцию $u_{1,1}$, определённую указанным образом на всей $\overline{\Omega}_1$, обозначаем $u_1(x)$ и находим $u_2(x)$, решая (79). Отметим, что условие вида (82) для функции $u_1(x)$ в общем случае может не выполняться (при значении $t = 0$ оно было задано). И тогда условие $u_2\big|_{S_2} = 0$ уже не выполняется автоматически, и его выполнение должно быть обеспечено в процессе решения, чего не удаётся сделать, решая только уравнение (79).

Поэтому решаем (79) с граничными условиями $u_2\big|_{S_1} = 0$, $u_2\big|_{S_2} = 0$ в областях $\Omega_1 = [0 \le x_1 \le L,\ 0 < x_2 \le \varepsilon]$, $\Omega_2 = [0 \le x_1 \le L,\ H - \varepsilon \le x_2 < H]$ соответственно. Для любого x_2: $0 < x_2 \le \varepsilon$ получаем:

$$u_2(x_1, x_2) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, \quad u_2(x_1, H - x_2) = -\int_H^{H - x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \tag{89}$$

Затем интегрируем уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

в области $\Omega' = [0 \le x_1 \le L,\ \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1]$ с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{x_2 = \varepsilon_1} = -\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{x_2 = \varepsilon_1}, \quad u_2\big|_{x_2 = H - \varepsilon_1} = -\int_H^{H - \varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \tag{90}$$

Находим:

$$\left.\frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z}\right|_{z = x_2} - \left.\frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z}\right|_{z = \varepsilon_1} = -\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, \varepsilon_1)}{\partial x_1}$$

и, в силу первого равенства (90), получаем:

$$\left.\frac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z}\right|_{z=x_2} = -\frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}.$$

Интегрируем последнее равенство от значения $H-\varepsilon_1$ до $H-x_2$, где $\varepsilon_1 < x_2 < H-\varepsilon_1$

$$u_2(x_1, H-x_2) - u_2(x_1, H-\varepsilon_1) = -\int_{H-\varepsilon_1}^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz.$$

Отсюда находим:

$$u_2(x_1, H-x_2) - u_2(x_1, H-\varepsilon_1) = -\int_{H}^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz + \int_{H}^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz$$

и, согласно второму равенству (90), получаем:

$$u_2(x_1, H-x_2) = -\int_{H}^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz. \tag{91}$$

Заметим, что решая уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega',$$

и используя вместо условий (90) условия

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=H-\varepsilon_1} = -\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{x_2=H-\varepsilon_1}, \quad u_2\big|_{x_2=\varepsilon_1} = -\int_0^{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz,$$

мы получили бы:

$$u_2(x_1,x_2) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz. \tag{92}$$

Необходимо показать, что интегралы (91) и (92) определяют одну и ту же функцию u_2 при значениях $\varepsilon_1 < x_2 < H-\varepsilon_1$ (при указанных значениях x_2 функция u_2 может быть найдена и по (91), и (92)).

Полагая $x_2 = H - x_2'$ $(\varepsilon_1 < x_2' < H-\varepsilon_1)$ в (91), получаем:

$$u_2(x_1,x_2') = -\int_H^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz,$$

а при $x_2 = x_2'$ из (92) получаем:

$$u_2(x_1,x_2') = -\int_0^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz. \text{ 1}$$

Для доказательства равенства последних двух интегралов покажем, что их разность равна нулю:

$$\int_0^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz - \int_H^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz = \int_0^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz +$$

$$+\int_{x_2'}^{H} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz = \int_0^{H} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz.$$

Так как в любой точке области $0 \le x_1 \le L$, $0 < x_2 < H$ выполняется (79) и справедливы граничные условия $u_2|_{S_1} = 0$, $u_2|_{S_2} = 0$, то:

$$\int_0^H \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = -\int_0^H \frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z} dz = -u_2(x_1, H) + u_2(x_1, 0) = 0 .$$

Найденная функция u_2 $(t = \tau)$, будучи рассмотренной в области $\overline{D}_1$, имеет производную $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \in C_{l-1+\alpha}(\overline{D}_1)$ и является нечётной по x_2. Зная функции $u_{1,1}$ и $u_{2,1}$, решаем (80) с условием $(t = \tau)$:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \overline{n}}\right|_{\Gamma} = \zeta(s) \cdot \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos \alpha_j , \quad s \in \Gamma_1, \tag{93}$$

где $\left.\frac{\partial p}{\partial \overline{n}}\right|_{\Gamma}$ – производная по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к границе Γ, α_i – угол между вектором $\overline{n}$ и осью Ox_i:

$$\omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

(в выражении для ω_i в качестве производной $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ берётся разностная производная). Условие разрешимости:

$$\int_{\Gamma} \zeta(s) \cdot \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos \alpha_j ds = 0$$

в случае задачи (80), (93) выполняется (об этом было сказано выше).

Итак, при значении $t = t_1 = \tau$ на сечении D_1 найдены функции w_1, u_1, u_2, p, т. е. найдены w_1, $u_{1,1}$, $u_{2,1}$, p_1. Переходя на сечение D_2, находим w_2, $u_{1,2}$, $u_{2,2}$, p_2 и так далее до сечения D_M [43$_4$].

3. О решении уравнений Навье – Стокса на временных сечениях

Теорема 4.13. *Пусть* $f \in C_{l+1+\alpha}(\overline{D}_T)$, $\psi_1 \in C_{l+\alpha}(\Gamma_T)$, $\zeta, \overline{b} \in C_{l+\alpha}(\overline{D})$, $\zeta, \overline{b}$ – *функции, чётные по* x_2, $\Gamma \in C_{l+\alpha}$, $l \ge 3$, $\alpha \in (0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} \ge \beta = const$, $\frac{1}{\tau} + \beta > 0$. *Тогда задача* (78) – (82), *в которой производная* $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ *заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом* $t = t_m = m\tau$, $m = \overline{0, M}$, *причём* $u_1 \in C_{l+\alpha}(\overline{D}_m)$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \in C_{l-1+\alpha}(\overline{D}_m)$, $p \in C_{l-1+\alpha}(\overline{D}_m)$ [43$_6$].

З а м е ч а н и е 4.7. В результате того, что из области Ω были удалены четыре криволинейных треугольника, расположенных по углам этой области, и была введена срезающая функция, разрешимость задачи оказалась доказанной в области:

$$\Omega_{\varepsilon,T} = \Omega_{\varepsilon} \times [0,T], \quad \text{где} \quad \Omega_{\varepsilon} = [\varepsilon < x_1 < L-\varepsilon,\ 0 < x_2 < H],$$

которая является подобластью области Ω_T. Тем не менее, при реализации численного метода для решения рассмотренной задачи трудностей не возникает, т. к. шаг h_1 разностной сетки в направлении Ox_1 всегда можно считать большим, чем ε (положительное число ε может быть выбрано сколь необходимо малым).

Обратимся теперь к уравнениям Навье – Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (x,t) \in \Omega_T, \quad i = 1, 2; \tag{94}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \qquad (x,t) \in [0,L] \times (0,H) \times [0,T]. \tag{95}$$

Если обозначить $A = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_2}$ и рассмотреть уравнения:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \tag{78*}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \tag{80*}$$

то из (78*) и (80*) с учётом (79) можно получить равенство:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 - \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0. \tag{96}$$

Вычитая из (96) уравнение (78*), продифференцированное по x_1, получим $\frac{\partial A}{\partial x_2} = 0$. Интегрируя последнее равенство от нуля до значения x_2 по второй пространственной переменной, получаем:

$$\int_0^{x_2} \frac{\partial A(x_1,z)}{\partial z} dz = A\Big|_0^{x_2} = A(x_1,x_2) - A(x_1,0) = A(x) - A\Big|_{x_2=0} = 0, \tag{97}$$

где, с учётом замечания 4.6, $x \in \Omega_{\varepsilon}$, $t = m\tau$, $m = \overline{0,M}$.

В области $\Omega_{\varepsilon,T}$ на любом временном сечении получаем:

$$A\Big|_{x_2=0} = \left(-\nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial p}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{x_2=0}; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2}\Bigg|_{x_2=0} = \frac{\partial p}{\partial \overline{n}} = \sum_{j=1}^{2} \omega_j \cos\alpha_j = \omega_2 \cos\alpha_2 = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}.$$

Видим, что $A\big|_{x_2=0} = 0$. Из (97) следует $A(x) = 0$. А поскольку:

$$A=\frac{\partial u_2}{\partial t}-\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_2}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_2},$$

То:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_2}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_2}.$$

Выше рассматривался интеграл $\int_0^{x_2}\frac{\partial A(x_1,z)}{\partial z}dz$ (см. (97)). Рассматривая интеграл $\int_H^{x_2}\frac{\partial A(x_1,z)}{\partial z}dz$, мы бы пришли к тому же результату. Таким образом, имеет место следующая теорема [43_7].

Теорема 4.14. *Решение задачи, о котором говорится в теореме* 4.13, *удовлетворяет всем уравнениям системы Навье – Стокса* (уравнения (94), (95)) *при больших числах Рейнольдса в области* $\Omega_{\varepsilon,T}$ (на сечениях $t=m\tau$, $m=\overline{0,M}$).

Итак, при достаточно малых значениях τ $(\tau>0)$ доказана разрешимость дифференциально-разностной задачи для уравнений (78–80) и уравнений (94–95). В следующем параграфе будет обоснована возможность предельного перехода при $\tau\to 0$ и тем самым доказана разрешимость дифференциальной задачи для указанных уравнений.

§ 7. Разрешимость уравнений Навье – Стокса в канале

Для обоснования возможности предельного перехода, о котором сказано в § 6, ниже устанавливаются априорные оценки решения w_m и его производных. В связи с получением таких оценок в этом параграфе произошли некоторые изменения по отношению к предыдущему параграфу. Если в § 6 полагалось $l\ge 3$, то теперь $l\ge 5$, константа β теперь обозначается β_1, а срезающая функция ζ определяется так:

$$\zeta(x)=\zeta'(x)\zeta''(x),$$

где

$$\zeta'(x)=1,\quad \text{если}\quad \delta\le x_1\le L-\delta,\quad 0\le x_2\le H;$$

$$0\le\zeta'(x)\le 1,\quad \text{если}\quad [\frac{\delta}{2}\le x_1\le\delta]\cup[L-\delta\le x_1\le L-\frac{\delta}{2}],\quad 0\le x_2\le H;$$

$$\zeta'(x)=0,$$

если $[0 \le x_1 \le \frac{\delta}{2}] \cup [L - \frac{\delta}{2} \le x_1 \le L],\ [\theta_1(x_1) \le x_2 \le \theta_2(x_1)] \cup [\phi_1(x_1) \le x_2 \le \phi_2(x_1)]$;

$\zeta''(x) = 1,$ если $0 \le x_1 \le L, \quad \varepsilon \le x_2 \le H - \varepsilon$;

$0 \le \zeta''(x) \le 1,$ если $[\varepsilon_1 \le x_2 \le \varepsilon] \cup [H - \varepsilon \le x_2 \le H - \varepsilon_1],\ 0 \le x_1 \le L$;

$\zeta''(x) = 0,$ если

$[0 \le x_2 \le \varepsilon_1] \cup [H - \varepsilon_1 \le x_2 \le H], [\theta_1^{-1}(x_2) \le x_1 \le \phi_1^{-1}(x_2)] \cup [\theta_2^{-1}(x_2) \le x_1 \le \phi_2^{-1}(x_2)]$.

Будем предполагать, что $\zeta(x) \in C_{l+\alpha}(\overline{D}),\ \Gamma \in C_{l+\alpha}$, где $l \ge 5, \alpha \in (0,1)$.

1. Оценка модуля решения w_m.

Рассматривая уравнение (86) с граничным условием (87), опуская нижний индекс m и вводя обозначения $\frac{\partial z}{\partial x_i} = z_{x_i}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = z_{x_i x_i}$, $\check{w} + f = \overline{f}$, $\check{u}_2 f_{x_2} + F + \check{p}_{x_1} = d$, получаем:

$$w_{\bar{t}} - \nu \sum_{k=1}^{2} w_{x_k x_k} + \overline{f} w_{x_1} + \check{u}_2 w_{x_2} + f_{x_1} w + d = 0. \qquad (98)$$

В уравнении (98) делаем замену $w = g e^{\beta t} (t = t_m)$ и замечаем, что:

$$w_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(g e^{\beta t} - \check{g} e^{\beta(t-\tau)} \pm g e^{\beta(t-\tau)}) = \frac{1}{\tau} e^{\beta(t-\tau)}(g - \check{g}) + \frac{1}{\tau} g e^{\beta t}(1 - e^{-\beta\tau}) .$$

Получаем:

$$g_{\bar{t}} e^{-\beta\tau} - \nu \sum_{k=1}^{2} g_{x_k x_k} + \overline{f} g_{x_1} + \check{u}_2 g_{x_2} + g\left(\frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} + f_{x_1}\right) + \frac{d}{e^{\beta t}} = 0. \qquad (99)$$

Напомним, что у нас $\frac{\partial f}{\partial x_1} \ge \beta_1 = const$, $\frac{1}{\tau} + \beta_1 > 0$. В этом случае при условии $\beta = const > 0$ будет $\frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} > \beta e^{-\beta\tau}$ и, если $\tau_1 = const > 0$ такая, что верно неравенство $\frac{1}{\tau_1} + \frac{e^2}{2}\beta_1 > 0$, то существует $\beta > 0$, например, $\beta = \frac{2}{\tau_1}$, что при $0 < \tau < \tau_1$ верна цепочка неравенств:

$$\beta e^{-\beta\tau} + f_{x_1} \ge \beta e^{-\beta\tau} + \beta_1 > \beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1 > 0. \qquad (100)$$

Для функции g, удовлетворяющей (99), возможны три случая:

а) ее максимум в области D_T достигается при $t = 0$ и тогда $g \le \max\left|\bar{b}(x) - f\big|_{t=0}\right|$;

б) $g \le 0$;

в) положительный максимум достигается в некоторой внутренней точке $(x^0, t_{m_0}) \in D_T, m_0 \geq 1$. В этом последнем случае в точке (x^0, t_{m_0}) выполняются условия:

$g_{\bar{t}} \geq 0, \quad \nu g_{x_i x_i} \leq 0, i = 1{,}2, \quad g_{x_i} = 0, i = 1{,}2$ и из (99) следует

$g\left(\dfrac{1-e^{-\beta\tau}}{\tau} + f_{x_1}\right) + \dfrac{d}{e^{\beta t}} \leq 0$, а с учетом (100) получаем $g \leq \dfrac{-de^{-\beta t}}{\beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1}$.

Аналогично устанавливается оценка для g снизу. В результате получаем:

$$|w_m| \leq C_1, \text{ где } \quad C_1 = e^{\beta T}\left[\max_{x\in\tilde{\Omega}}\left|\bar{b}(x) - f\big|_{t=0}\right| + \max_{\tilde{\Omega}_T}\left|\frac{de^{-\beta t}}{\beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1}\right|\right].$$

2. Оценка первых производных

Сначала оценим указанные производные на границе Γ_T, оценивая их на левой, правой, нижней и верхней частях этой границы. Рассмотрим левую часть границы $S_3' \times [0,T]$,

$$S_3' = [0 \leq x_2 < \varepsilon_1, x_1 = \theta_1^{-1}(x_2)] \bigcup [\varepsilon_1 \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1, x_1 = 0] \bigcup [H - \varepsilon_1 < x_2 \leq H, x_1 = \theta_2^{-1}(x_2)],$$

функцию $x_1 = \psi(x_2) = \left\{\begin{array}{c} \theta_1^{-1}(x_2), 0 \leq x_2 < \varepsilon_1 \\ 0, \varepsilon_1 \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1 \\ \theta_2^{-1}(x_2), H - \varepsilon_1 < x_2 \leq H \end{array}\right\}$, которая задает S_3' и функцию

$$\chi(x) = \chi(x_1, x_2) = N_1 e^{-N_2(x_1 - \psi(x_2))} \qquad (N_1 > 0, N_2 > 0).$$

Вводя обозначения $D_1 = \nu\sum_{k=1}^{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \bar{f}\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \check{u}_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $\quad D_2 = \left(\int_0^t \dfrac{\partial}{\partial s}ds\right)_{\bar{t}} - D_1$,

получаем $D_1\chi = N_1\left[\nu N_2^2\left(1 + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right) + N_2\left(\nu\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \bar{f} - \check{u}_2\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)\right]e^{-N_2(x_1 - \psi(x_2))}$.

Наибольшее положительное значение $\chi(x)$ принимает на S_3', так как для любой точки $x \in \bar{D}$ $x_1 - \psi(x_2) \geq 0$, а для любой точки $x \in S_3'$ $x_1 - \psi(x_2) = 0$, и при достаточно больших величинах N_1, N_2

$$D_1\chi > \max_{\substack{(x,t)\in\tilde{\Omega}_T \\ |w| \leq C_1}}\left|f_{x_1}w + d\right|, \qquad \chi\big|_{S_3'} = N_1 \geq \chi(\underset{x\in\tilde{\Omega}}{x}) + \left|\bar{b}(x) - \underset{x\in\tilde{\Omega}}{f}\big|_{t=0}\right|. \qquad (101)$$

Рассмотрим функцию $w+\chi$ $(w=w_m, m=\overline{0,M})$. Для нее (см. (98), (101))
$D_2(w+\chi)=w_{\bar t}-D_1w-D_1\chi=-f_{x_1}w-d-D_1\chi<0$ в области D_T, тогда как в точке максимума функции $w+\chi$ должно быть $D_2(w+\chi)\ge 0$. Далее:

$$(w+\chi)\big|_{S_3'}=N_1\ge(w+\chi)\big|_{\tilde S},\ (w+\chi)\big|_{t=0}=\underset{x\in\tilde\Omega}{\chi(x)}+\left|\underset{x\in\tilde\Omega}{\bar b(x)-f}\big|_{t=0}\right|\le N_1.$$

Отсюда следует, что свое наибольшее значение $w+\chi$ принимает на

$$S_{3,T}'=S_3'\times[0,T] \text{ и } \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{S_{3,T}'}\ge-\left.\frac{\partial\chi}{\partial n}\right|_{S_{3,T}'}.$$

Рассмотрение функции $w-\chi$ позволяет установить неравенство $\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{S_{3,T}'}\le\left.\frac{\partial\chi}{\partial n}\right|_{S_{3,T}'}$, а рассмотрение остальных трех частей границы приводит к оценке:

$$\left|w_{x_i}\right|_{\Gamma_T}\le C_{2s}. \tag{102}$$

Могут быть установлены оценки (103) (докажем только вторую):

$$\underset{\tilde\Omega_T}{\left|w_{x_i}\right|}\le C_2,\qquad \underset{\tilde\Omega_T'}{\left|w_{x_ix_j}\right|}\le C_3,\qquad \overline{\tilde\Omega_T'}\subset\tilde\Omega_T. \tag{103}$$

3. Оценка вторых производных

Введем вспомогательные функции $g_i(i=1,2)$ следующим образом:

$$w_{x_i}=b(g_i),\quad b(g_i)=-2C_2+3aC_2e\int_0^{g_i}e^{-s^h}ds, \tag{104}$$

где C_2 – константа из (103), $a>1, h>1$ – константы, которые определяются ниже. Из (104) следует:

$$w_{x_ix_k}=b'(g_i)g_{ix_k}=3aeC_2e^{-g_i^h}g_{ix_k},\quad w_{x_ix_kx_k}=b'(g_i)g_{ix_kx_k}-b'(g_i)hg_i^{h-1}g_{ix_k}^2.$$

Дифференцируем (98) по x_i $(f_{x_1}=\tilde f,\ w_m=w)$:
$w_{\bar t x_i}-\nu\sum_{k=1}^{2}w_{x_kx_kx_i}+\bar f w_{x_1x_i}+\check u_2 w_{x_2x_i}=-\bar f_{x_i}w_{x_1}-\check u_{2x_i}w_{x_2}-(\tilde f w)_{x_i}-d_{x_i}$, обозначаем правую часть через I_1, подставляем в последнее уравнение найденные выражения для производных $w_{x_ix_k}$, $w_{x_ix_kx_k}$ и делим его на $b'(g_i)$:

$$\frac{e^{g_i^h}}{\tau}\left(\int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)}e^{-s^h}ds\right)-\nu\sum_{k=1}^{2}g_{ix_kx_k}+\nu hg_i^{h-1}\sum_{k=1}^{2}(g_{ix_k})^2+\bar f g_{ix_1}+\check u_2 g_{ix_2}=\frac{I_1}{b'(g_i)}\equiv I_2.$$

Полученное равенство дифференцируем по x_j:

$$\frac{1}{\tau}\left(e^{g_i^h}(m)\int\limits_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h}ds\right)_{x_j} - \nu\sum_{k=1}^{2} g_{ix_jx_kx_k} + \nu h(h-1)g_i^{h-2}g_{ix_j}\sum_{k=1}^{2}(g_{ix_k})^2 + 2\nu hg_i^{h-1}\sum_{k=1}^{2} g_{ix_k}g_{ix_jx_k} +$$

$$+\overline{f}g_{ix_jx_1} + \overset{\vee}{u}_2 g_{ix_jx_2} + \overline{f}_{x_j}g_{ix_1} + \overset{\vee}{u}_{2x_j}g_{ix_2} = I_{2x_j} \equiv I_3 . \qquad (105)$$

Введём в рассмотрение функции $r_{ij} = \zeta g_{ix_j}$.

Верны следующие равенства: $\zeta g_{ix_jx_k} = r_{ijx_k} - \frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ij}$,

$$\zeta g_{ix_jx_kx_k} = r_{ijx_kx_k} - 2\frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ijx_k} + \left(\frac{2\zeta_{x_k}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{x_kx_k}}{\zeta}\right) r_{ij} .$$

Умножая (105) на ζ и используя последние равенства, получаем:

$$\frac{\zeta}{\tau}\left(e^{g_i^h}(m)\int\limits_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h}ds\right)_{x_j} - \nu\sum_{k=1}^{2}\left[r_{ijx_kx_k} - 2\frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ijx_k} + \left(\frac{2\zeta_{x_k}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{x_kx_k}}{\zeta}\right) r_{ij}\right] +$$

$$+\nu h(h-1)g_i^{h-2} r_{ij}\sum_{k=1}^{2}(g_{ix_k})^2 + 2\nu hg_i^{h-1}\sum_{k=1}^{2} g_{ix_k}\left(r_{ijx_k} - \frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ij}\right) +$$

$$+\overline{f}\left(r_{ijx_1} - \frac{\zeta_{x_1}}{\zeta} r_{ij}\right) + \overset{\vee}{u}_2\left(r_{ijx_2} - \frac{\zeta_{x_2}}{\zeta} r_{ij}\right) + \overline{f}_{x_j} r_{i1} + \overset{\vee}{u}_{2x_j} r_{i2} = \zeta I_3 . \qquad (106)$$

Умножаем (106) на $\zeta^2 r_{ij}$ и полученные равенства $(j = 1,2)$ суммируем по j от 1 до 2 (при этом опустим первое самое громоздкое слагаемое, которое ниже оценим отдельно):

$$-\nu\zeta^2\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left[r_{ij}r_{ijx_kx_k} - 2\frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ij}r_{ijx_k} + \left(\frac{2\zeta_{x_k}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{x_kx_k}}{\zeta}\right) r_{ij}^2\right] + \nu h(h-1)g_i^{h-2}\sum_{j=1}^{2} r_{ij}^2\sum_{k=1}^{2} r_{ik}^2 +$$

$$+2\nu hg_i^{h-1}\sum_{j=1}^{2} r_{ij}\sum_{k=1}^{2} r_{ik}\left(\zeta r_{ijx_k} - \zeta_{x_k} r_{ij}\right) + \zeta^2\sum_{j=1}^{2} r_{ij}\left(\overline{f}_{x_j} r_{i1} + \overset{\vee}{u}_{2x_j} r_{i2}\right) +$$

$$+\zeta\overline{f}\sum_{j=1}^{2}\left(\zeta r_{ij}r_{ijx_1} - \zeta_{x_1} r_{ij}^2\right) +$$

$$+\zeta\overset{\vee}{u}_2\sum_{j=1}^{2}\left(\zeta r_{ij}r_{ijx_2} - \zeta_{x_2} r_{ij}^2\right) = \zeta^3\sum_{j=1}^{2} r_{ij} I_3 . \qquad (107)$$

Оценим слагаемое, которое было опущено при получении (107):

$$J_1 = \frac{\zeta^4}{\tau}\sum_{j=1}^{2}\left[g_{ix_j}(m)\left(e^{g_i^h(m)}\int\limits_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h}ds\right)_{x_j}\right] =$$

$$= \frac{\zeta^4}{\tau}\sum_{j=1}^{2}\left[g_{ix_j}(m)e^{g_i^h(m)}\left(hg_i^{h-1}(m)g_{ix_j}(m)\int\limits_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{-s^h}ds + e^{-g_i^h(m)}g_{ix_j}(m) - e^{-g_i^h(m-1)}g_{ix_j}(m-1)\right)\right] =$$

$$= \frac{\zeta^4}{\tau}\sum_{j=1}^{2}\left[g_{ix_j}(m)\left(hg_i^{h-1}(m)g_{ix_j}(m)\int\limits_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{g_i^h(m)-s^h}ds + g_{ix_j}(m) - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)}g_{ix_j}(m-1)\right)\right].$$

Пусть: $$J_2 = hg_i^{h-1}(m)\int\limits_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} e^{g_i^h(m)-s^h}ds\,.$$

Тогда при условии $g_i(m-1) \le g_i(m)$ верно следующее:

$$J_2 \ge h\int\limits_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} s^{h-1}e^{g_i^h(m)-s^h}ds = -\,e^{g_i^h(m)-s^h}\Big|_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} = e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1.$$

При выполнении неравенства $g_i(m-1) \ge g_i(m)$ справедлива цепочка:

$$|J_2| \le h\int\limits_{g_i(m)}^{g_i(m-1)} s^{h-1}e^{g_i^h(m)-s^h}ds = -\,e^{g_i^h(m)-s^h}\Big|_{g_i(m)}^{g_i(m-1)} = 1 - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)},$$

из которой следует $J_2 \ge e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1$. Значит, в обоих случаях

$$J_2 \ge e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1.$$

Поэтому:

$$J_1 \ge \frac{\zeta^4}{\tau}\sum_{j=1}^{2}\Big[g_{ix_j}(m)\Big(g_{ix_j}(m)\Big(e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1\Big) + g_{ix_j}(m) - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)}g_{ix_j}(m-1)\Big)\Big] =$$

$$= \frac{\zeta^4}{\tau}\sum_{j=1}^{2}\Big[g_{ix_j}(m)\Big(e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)}(g_{ix_j}(m) - g_{ix_j}(m-1)\Big)\Big]. \qquad (108)$$

Теперь вводим функцию $q = \sqrt{\sum_{j=1}^{2} r_{ij}^2}$ и рассматриваем (107) в точке (x^0, t_{m_0}) максимума функции $q^2 = \sum_{j=1}^{2} r_{ij}^2$, где $m_0 \ge 1$, а x^0 является внутренней точкой D (она находится в области, где $\zeta \ne 0$). Так как в точке (x^0, t_{m_0}):

$$\left(q^2\right)_{x_k} = 2\sum r_{ij}r_{ijx_k} = 0, \quad \left(q^2\right)_{x_kx_k} = 2\sum_{j=1}^{2} r_{ijx_k}^2 + 2\sum_{j=1}^{2} r_{ij}r_{ijx_kx_k} \le 0, \text{ т. е. } \sum_{j=1}^{2} r_{ijx_k}^2 \le -\sum_{j=1}^{2} r_{ij}r_{ijx_kx_k},$$

и из (108) следует $J_1 \ge 0$, то из (107) получаем:

$$\nu\zeta^2\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} r_{ijx_k}^2 + \nu h(h-1)g_i^{h-2}q^4 + 2\zeta\nu hg_i^{h-1}\sum_{j=1}^{2} r_{ij}\sum_{k=1}^{2} r_{ik}r_{ijx_k} \le \nu\sum\left(2\zeta_{x_k}^2 - \zeta\zeta_{x_kx_k}\right)q^2 +$$

$$+ 2\nu hg_i^{h-1}\sum_{j=1}^{2} r_{ij}^2\sum_{k=1}^{2}\zeta_{x_k}r_{ik} + \overline{f}\zeta\zeta_{x_1}q^2 + \check{u}_2\zeta\zeta_{x_2}q^2 - \zeta^2\sum_{j=1}^{2} r_{ij}\left(\overline{f}_{x_j}r_{i1} + \check{u}_{2x_j}r_{i2}\right) + \zeta^3\sum_{j=1}^{2} r_{ij}I_3. \qquad (109)$$

Из (104) следует:

если $\quad w_{x_i} = -C_2, \quad$ то $\displaystyle\int_0^{\gamma_{i1}} e^{-s^h}ds = \frac{1}{3ae}$,

если $\quad w_{x_i} = C_2, \quad$ то $\displaystyle\int_0^{\gamma_{i2}} e^{-s^h}ds = \frac{1}{ae}$. (110)

Так как при условиях $a > 1, h > 1$ $\quad \displaystyle\frac{1}{ae} < \int_0^{\frac{1}{a}} e^{-s^h}ds < \frac{1}{a}$,

то с учетом (110) получаем:

$$\frac{1}{3ae} < \gamma_{i1} \le g_i \le \gamma_{i2} < \frac{1}{a}. \qquad (111)$$

Третье слагаемое в левой части (109) можно оценить так:

$$\left|2\zeta\nu h g_i^{h-1}\sum\sum r_{ij}r_{ik}r_{ijx_k}\right| \le$$

$$\le \frac{\nu}{2}\zeta^2\sum\sum r_{ijx_k}^2 + 2\nu h^2 \max_{i=1,2} g_i^{2h-2}q^4. \qquad (112)$$

Обозначая правую часть (109) I_4 и учитывая (112), получаем:

$$\frac{1}{2}\nu\zeta^2\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} r_{ijx_k}^2 + \nu h q^4\left[(h-1)\min_{i=1,2} g_i^{h-2} - 2h\max_{i=1,2} g_i^{2h-2}\right] \le I_4. \qquad (113)$$

Выберем $a > 3e$, например, полагаем: $a = 4e$.

В силу (111):

$$\nu h^2 q^4\left[\frac{h-1}{h}\min_{i=1,2} g_i^{h-2} - 2\max_{i=1,2} g_i^{2h-2}\right] > \nu h^2 q^4\left(\frac{1}{12e^2}\right)^{h-2}\left[\frac{h-1}{h} - 2\left(\frac{1}{4e}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{h-2}\right].$$

Выберем $h = h_0$ настолько большим, чтобы:

$$\left[\frac{h_0-1}{h_0} - 2\left(\frac{1}{4e}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{h_0-2}\right] > \frac{1}{a}.$$

Тогда (113) приводит к неравенству:

$$\frac{1}{a}\nu h^2 q^4\left(\frac{1}{12e^2}\right)^{h_0-2} \le I_4. \qquad (114)$$

Из (114) после несложных оценок слагаемых из правой части (109), обозначенной символом I_4, следует оценка $\left|w_{x_i x_j}\right|_{D'_T} \le C_3$. Заметим, что:

$$q^4 = \left(\sum_{j=1}^{2} r_{ij}^2\right)^2 = \zeta^4\left(\sum_{j=1}^{2} g_{ix_j}^2\right)^2 = \zeta^4\left[\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{e^{g_i^h}}{3aC_2 e}w_{x_i x_j}\right)^2\right]^2.$$

Поэтому константа C_3 такова, что $C_3 < \infty$ для любой строго внутренней подобласти D' области D, но при приближении границы D' к границе D безгранично растет.

После получения:

$$\left|w_{x_i x_j}\right|_{D'_T} \le C_3$$

аналогичным способом могут быть получены оценки

$$\left|w_{x_i x_j x_k}\right|_{D_T''} \le C_4\,, \qquad \left|w_{x_i x_j x_k x_s}\right|_{D_T'''} \le C_5\,, \qquad \overline{D_T''} \subset D_T'\,, \qquad \overline{D_T'''} \subset D_T''$$

и затем выполнен предельный переход при стремлении $\tau \to 0$, доказывающий разрешимость задачи (краевые условия уже оговорены)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad ; \tag{115}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0\,; \tag{116}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \tag{117}$$

и справедливость следующей теоремы [43_5, 43_8].

Теорема 4.15. *Пусть выполнены все условия, указанные выше. Тогда задача* (115–117) *при больших числах Рейнольдса имеет единственное классическое решение в области* $\Omega_{\varepsilon,T}$. *Это решение удовлетворяет всем уравнениям соответствующей системы Навье – Стокса.*

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аффикс компл. числа 109, 327

Верхний предел 62
Ветвь многозн. функции 139, 296

Гомеоморфизм 270, 288
Граница области 120, 265, 290
Гранич. точка 120, 165, 265,290
– – достижимая 158, 290, 292
Граничные угловые значения 201

Длина кривой 117

Задача Дирихле 187, 312

Интеграл Коши 176, 253
– Лебега 53, 63, 68
– – неопределённый 95
– Пуассона 104, 177
– Пуассона – Стилтьеса 104
– Стилтьеса 101
– типа Коши 175, 253

Компакт 283, 286
Контур замкнутый 110
– – простой 110
Коши критерий 38, 131, 133, 358
– условие 38, 130, 286
Коши – Римана условия 120, 161
Кратная точка 110, 252
Кратность нуля 140, 206
Кривая 116
– гладкая 116, 252
– гомотопная нулю 137
– Жордана 158, 174, 252, 290
– спрямляемая 117

Кривые гомотопные 136

Мера множества 27, 30
– – внешняя 30
– – внутренняя 30
Множество всюду разрывное 269
– жорданово измеримое 22
– замкнутое 19, 20, 265, 285, 402
– измеримое 30
– канторово 269
– мощности континуума 269
– непрерывное 266
– несчётное 24
– открытое 24, 26
– плотное 33
– связное 119, 172, 290
– совершенное 33
– счётное 24, 269

Непр. вплоть до границы обл. 140
– равностеп. (абс.) 99, 125, 353
Неравенство Гёльдера 307
– Фату 64
– Юнга 339

Область выпуклая 137
– замкнутая 120
– односвязная 119, 290
Отобр. конформное 154, 156, 178

Плотность множества 364
Понятие «почти всюду» 42
Послед. фундам. 38, 130, 347, 358
Принцип аргумента 141
– компактности 134, 198
– максимума 165, 388

Принцип максимума модуля 193, 246, 297
– соответ. границ 152, 158, 291
Простран. компактное 286, 350
– метрическое 287, 347
– нормированное 346
– полное 347
– топологическое 284
– – хаусдорфово 285

Смирнова класс 275
Сходимость по мере 55

Теорема Арцеля 125
– – Асколи 353
– Банаха 262
– – Зарецкого 267
– Бореля – Лебега 26
– Вейерштрасса 169, 182
– Витали 72, 198
– Гарнака 239
– Егорова 42
– единственности 196
– – внутренняя 172
Теорема Кантора 59
– Келлога 307
– Коши 121, 122, 124, 175, 273
– – Адамара 177
– Лебега 55, 58, 70
– Лузина 44
– Мореры 124
– Неванлинна 249
– о монодромии 138
– Привалова 303
– Римана 158
– Рисса 56, 236, 272, 300
– Руше 141
Теорема Фату 201
– Фихтенгольца 258
– Хаусдорфа 351
– Хелли 89-90
– Хопфа 395
– Шаудера 400, 405
Точка внутренняя 25, 402
– изолированная 33, 149
– конденсации 33
– неподвижная 399
– особая 116, 149
– плотности 364
– предельная 19, 286
– прикосновения 265, 287

Формула Коши 123, 236
– Пуассона 177, 189
– Шварца 282
Функция абс. непрерывная 92
– аналитическая 138, 139, 274
– Бляшке 225
– гармоническая 104, 161
– голоморфная 274
– дифференцируемая 120
– измеримая 40, 44
– логарифмическая 297
– мероморфная 140
– многозначная 295-296
– однол. 151, 154, 296
– регулярная 126, 274

Функция с огранич. изменением 84
– срезанная 63
– срезающая 407
– субгармоническая 164, 242
– суммируемая 63, 69
– финитная 366

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ В ПРЕДМЕТНОМ УКАЗАТЕЛЕ

абс. – абсолютный

гранич. – граничный

компл. – комплексный

многозн. – многозначный

непр. – непрерывность

обл. – область

огранич. – ограниченный

однол. – однолистный

отобр. – отображение

послед. – последовательность

простран. – пространство

равностеп. – равностепенный

соответ. – соответствие

фундам. – фундаментальный

функ. – функция

ЛИТЕРАТУРА

А. Монографии, обзоры, учебники

1. Александров П.С.
Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 2008.
2. Александров П.С. и Колмогоров А.Н.
Введение в теорию функций действительного переменного. М. – Л., 1938.
3. Бицадзе А.В.
1) Основы теории аналитических функций комплексного переменного . М., 1969.
2) Уравнения математической физики. М., 1976.
4. Бугров Я.С. и Никольский С.М.
1) Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1988.
2) Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., 1989.
5. Векуа И.Н.
Обобщённые аналитические функции. М., 1959.
6. Герасимович А.И. и Рысюк Н.А.
Математический анализ. Ч. 1. Мн., 1989.
7. Герасимович А.И., Кеда Н.П. и Сугак М.Б.
Математический анализ. Ч. 2. Мн., 1990.
8. Голузин Г.М.
Геометрическая теория функций комплексного переменного . М., 1966.
9. Евграфов М.А.
Аналитические функции. М., 1968.
10. Жевняк Р.М. и Карпук А.А.
1) **Высшая математика.** Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Мн., 1992.
2) **Высшая математика.** Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ. Мн., 1993.
3) **Высшая математика.** Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной. Мн., 1997.
11. Канторович Л.В. и Акилов Г.П.
Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.

12. Корзюк В.И.
1) Уравнения математической физики. Мн., 2011.
12. Корзюк В.И.
2) Уравнения математической физики. Изд. 2-е, испр. и доп., М., 2021.
3) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.1. Мн., 2007.
4) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.2. Мн., 2008.
5) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.3. Мн., 2008.
6) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.4. Мн., 2008.
7) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.5. Мн., 2008.
8) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.6. Мн., 2008.
9) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.7. Мн., 2009.
10) Уравнения математической физики. Курс лекций. Ч.8. Мн., 2009.
11) Избранные научные труды. Т.1. Мн., 2010.
12) Избранные научные труды. Т.2. Мн., 2010.
13. Кудрявцев Л.Д.
1) Курс математического анализа. Т. 1. М., 1988.
2) Курс математического анализа. Т. 2. М., 1988.
3) Курс математического анализа. Т. 3. М., 1989.
14. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В.
Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958.
15. Ладыженская О.А.
1) Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
2) Краевые задачи математической физики. М., 1973.
16. Ладыженская О.А. и Уральцева Н.Н.
Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
17. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.
Гидродинамика. М., 1988.
18. Ландис Е.М.
Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М., 1971.
19. Лойцянский Л.Г.
Механика жидкости и газа. М., 1987.
20. Майсеня Л.І. **Курс вышэйшай матэматыкі.** Тэорыя функцый камплекснай зменнай. Аперацыйнае злічэнне. Мн., 2003.

21. Маркушевич А.И.
1) Теория аналитических функций. Т.1. М., 1967.
2) Теория аналитических функций. Т.2. М., 1967.

22. Миранда К.
Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
23. Мусхелишвили Н.И.
Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
24. Наймарк М.А.
Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.
25. Натансон И.П.
Теория функций вещественной переменной. М., 1974.
26. Никольский С.М.
1) Курс математического анализа. Т.I. М., 1990.
2) Курс математического анализа. Т.II. М., 1991.
27. Петровский И.Г.
1) Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970.
2) Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
28. Привалов И.И.
1) Граничные свойства аналитических функций. М. – Л., 1950.
2) Введение в теорию функций комплексного переменного . М., 1999.
29. Сакс С.
Теория интеграла. М., 1949.
30. Соболев С.Л.
1) Уравнения математической физики. М. – Л., 1947.
2) Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
31. Тихонов А.Н. и Самарский А.А.
Уравнения математической физики. М., 1972.
32. Харди Г., Литтлвуд Дж. и Пойа Г.
Неравенства. М., 1948.

Б. Статьи

33. $\boxed{\text{Абрашин В.Н.}}$, Жадаева Н.Г.

Об одном аддитивном методе для нестационарных уравнений Навье – Стокса. – Изв. высш. уч. завед., матем., № 1 (2005), с. 3–9.

34. Аристов С.Н., Князев Д.В. и Полянин А.Д.

Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных. – Теоретические основы химической технологии, т. 43, № 5 (2009), с. 547–566.

35. Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович У.И. и Розумнюк Н.В.

Метод численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных скорость–давление. – Прикладна гідромеханіка, т. 10, № 2 (2008), с. 13–23.

36. Бударин В.А.

Анализ некоторых допущений уравнения Навье – Стокса. – PROBLEMELE ENERGETICII REGIONALE 2(13) 2010, p. 59-65.

37. Выскребцов В.Г.

О возможности существования точного решения уравнений Навье – Стокса на примере расчёта начального участка в круглой трубе. – Известия МГТУ «МАМИ», т. 4, № 1(23) (2015), с. 26-41.

38. Голичев И.И.

Итеративная линеаризация эволюционных уравнений Навье – Стокса. – Уфимский математический журнал, т. 4, № 4 (2012), с. 69–78.

39. Жиркин А.В.

Аналитические решения уравнений Навье – Стокса в трехмерной геометрии. – *В электронном виде.*

40. Журавлева Е.Н.

Численное исследование точного решения уравнений Навье – Стокса, описывающего движение жидкости со свободной границей. – Прикладная механика и техническая физика, т. 57, № 3 (2016), с. 9–15.

41. Каянович С.С.

Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье – Стокса. – Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 2 (1981), с. 36–40.

42. Каянович С.С., Павлинов М.И., Смирнов Б.И. и Тетеркина И.М.

Статические характеристики сферических газовых подвесов с поверхностями скольжения равной кривизны. – Машиноведение, № 4 (1985), с. 89–94

43. Каянович С.С.

1) Исследование разрешимости уравнений гидродинамики в областях специального вида. – Труды БТИ, вып. I, сер. V (1993), с. 35–39.

2) Уравнения Навье – Стокса и парадоксы вязкой несжимаемой жидкости. – Труды БГТУ, вып. II, сер. V (1995), с. 49–55.

3) Стержневое течение вязкой жидкости. – Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3 (2013), с. 32–35.

4) Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения. – Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук, № 1 (2015), с. 52–59.

5) Краевая задача для стержневого теченія в канале. – Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук, № 4 (2016), с. 55–66.

43. Каянович С.С.

6) О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения. – Тезисы докладов на XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2017). Минск, 16 – 20 мая 2017 г. – Ч. II. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2017, с. 10-11.

7) Об уравнениях Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса. – Тезисы докладов на XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2018). Гродно, 15 – 18 мая 2018г. – Ч. 2. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2018, с. 13–15.

8) Существование и единственность классического решения уравнений стержневого течения. – Материалы XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям. Могилев, 14 – 17 мая 2019 г. – Ч. 2. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2019, с. 19–20.

9) Об аппроксимации одного краевого условия в стержневом течении. – Материалы XX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2022). Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022г. – Ч. 2. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2022, с. 14–16.

44. Ковалёв В.П., Просвиряков Е.Ю. и Сизых Г.Б.

Получение примеров точных решений уравнений Навье – Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей. – Труды МФТИ. Т. 9. № 1, 2017, с. 71–88.

45. Ковалёв В.П. и Сизых Г.Б.

Осесимметричные винтовые течения идеальной жидкости. – Труды МФТИ. Т. 8. №3, 2016, с. 171–179.

46. Коптев А.В.

1) Как разрешить 3D уравнения Навье – Стокса. – *В электронном виде.*

2) Решение начально-краевой задачи для 3D уравнений Навье – Стокса и его особенности. – *В электронном виде.*

3) Generator of Solutions for 2D Navier-Stokes Equations. – J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 7(3), 2014, 324–330.

47. Корзюк В.И.

1) Задачи о сопряжении уравнения эллиптического типа с уравнениями параболического и полугиперболического типов. I. – Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук. 3, 1971, с. 39–49.

2) Задачи о сопряжении уравнения эллиптического типа с уравнениями параболического и полугиперболического типов. II. – Вестник Бел. ун-та, сер. I. 2, 1971, с. 26-32.

3) Задачи о сопряжении уравнения эллиптического типа с уравнениями параболического и полугиперболического типов. III. – Вестн. Бел. ун-та, сер. I. 2, 1972, с. 10–17.

47. Корзюк В.И.

4) Об операторах осреднения с переменным шагом. I. – Вестник Бел. ун-та, сер. I. № 2, 1992, с. 49–52.

5) Об операторах осреднения с переменным шагом. II. – Вестник Бел. ун-та, сер. I. № 3, 1992, с. 63-65.

6) Лемма Фридрихса для операторов осреднения с переменным шагом. – Вестник Бел. ун-та, сер. I. № 2, 1996, с. 55–71.

7) Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. – Вестник Бел. ун-та, сер. I. №3, 1996, с. 55–71.

8) Операторы осреднения с переменным шагом в теории разрешимости эллиптических задач. – Доклады НАН Беларуси. 49. №6, 2005, с. 25–28.

9) Задачи сопряжения уравнений Пуассона. – Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук. № 1, 2016, с. 5–16.

48. Ладыженская О.А.

Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. – Труды московского математического общества. Т. 7, 1958, с. 149–177.

49. Петров А.Г,

Точное решение уравнений Навье – Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами. – Прикладная механика и техническая физика. Т. 53. № 5, 2012, с. 13–18.

50. Просвиряков Е.Ю.

Новый класс точных решений уравнений Навье – Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат. – Теоретические основы химической технологии. Т. 53. № 1, 2019, с. 112–120.

51. Фомин А.А. и Фомина Л.Н.

Численное решение уравнений Навье – Стокса при моделировании двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости. – Вестник Томского государственного университета. № 3(29), 2014, с. 94–108.

52. Хохлов А.А.

Уравнения Навье – Стокса и их модификации для решения задач газовой динамики. – Автореферат канд. дисс-ции. МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. *На правах рукописи.*

53. Acrivos A., Brady J.F.

Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Naviern – Stokes equations with reverse flow. – J. Fluid Mech. V. 112, 1981, p. 127–150.

54. Bogoyavlenskij O.I.

Exact solutions to the Naviern – Stokes equations. – Comptes Rendus Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada. V. 24. N. 4, 2002, p. 138–143.

55. Fefferman C.L.

Existence and smoothness of the Navier – Stokes equation. – The millennium prize problems, 2006, p. 57–67.

56. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.

High-Re solution for incompressible flow using the Navier – Stokes equations and a multigrid method. – J. Computational Physics. V. 48, 1982, p. 387–411/

57. Riesz F. Uber die Randwerte eines analytischen Funktion, Math. Zeit, 18, 1923.

58. Schauder J.

Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. – Math. Zeitschr. 38. 2, 1934, p. 257–283.

Научное издание

Каянович Сергей Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДВУХМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Ответственный за выпуск *С.Л. Бочкарева*
Редактор *В.П. Жукова*

Подписано в печать 11.06.24 г. Формат 60х84/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 14,2. Уч.-изд л. 25,11.
Тираж 70 экз. Заказ 87.

Издатель и полиграфическое исполнение
УП «БЕСТПРИНТ». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя и распространителя печатных изданий № 1/160 от 27.01.14.
Ул. Кальварийская, д. 25, каб. 116, 220073 г. Минск