МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОСТИ СТУДЕНЧЕСКИХ БРИГАД НА ОСНОВАНИИ ЗАКОНА БРУКСА

Киселевский О. С., Науменко Е. Ю.
Кафедра менеджмента, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Механико-математически факультет, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: kiselevski@bsuir.by

Согласно закону Ф. Брукса, численность рабочих групп сильно влияет на производительность их труда. Возрастающие с численностью группы потери времени на межличностное взаимодействие требуют контроля и оптимизации этих параметров. В статье излагаются и сравниваются два альтернативных способа математического решения задачи выбора оптимальной численности студенческих бригад, выполняющих учебную лабораторную работу.

Введение

Применение прикладных математических методов решения практических задач всегда ставило математику во главе всех методов научного познания. В свою очередь развитие математики обусловлено практической потребностью в строгой формализации естественно-научных законов и получении количественных результатов. В настоящее время основными драйверами развития математики являются прикладные задачи теории управления большими данными, машинного обучения, искусственного интеллекта, построения систем поддержки принятия управленческих решений (СППР). Современные СППР стали обязательным инструментом в управлении бизнесом крупных корпораций и даже государств. Исключением также не стала сфера образования на этапе её цифровой трансформации [1]. В свете внедрения гибких технологий управления учебным процессом [2] и оптимизации численности учебных групп встала задача нахождения оптимального соотношения состава и продуктивности студенческих бригад при коллективном выполнении лабораторных работ.

I. Постановка задачи

Методический эксперимент был проведён в условиях лабораторных занятий по дисциплине «Техника фотографии». В ходе эксперимента бригадам студентов с различной численностью N_i от 4 до 10 человек предоставлялось одинаковое по сложности и трудоёмкости задание. В каждой бригаде измерялся промежуток времени t_i от постановки задачи и выдачи методического описания лабораторной работы до предоставления требуемого фотоотчёта (табл. 1).

Предполагалось, что коллективное выполнение лабораторной работы позволит студентам распределить между собой трудоёмкость изучения теоретического материала. В действительности же измеренная в человеко-часах производительность бригады от её численности зависела нелинейно. Согласно закону Ф. Брукса [3] нелинейный характер этой зависимости объясняется временными издержками на межличностные взаимодействия, составляющими второе слагаемое в формуле производительности бригады:

$$P_i = N_i \cdot t_i = P_n + t_i \cdot k \cdot N_i \cdot (N_i - 1)/2$$

, в котором неизвестными являются два параметра: безразмерный коэффициент издержек времени k, допускаемых на межличностные взаимодействия и номинальная трудоёмкость задачи P_n. Определить значения этих двух коэффициентов и предполагалось в ходе методического эксперимента.

Таблица 1 – Экспериментальные и расчётные данные

i	Численность бригады,чел	Продолжительность труда, час	Действительная производительность, чел.час	Временные издержки на взаимодействия, чел.час
1	4	0.97	3.87	5.80k
2	5	0.80	4,00	8.00k
3	5	0.52	2,58	5.17k
4	7	0.92	6,42	19.25k
5	9	1.20	10,80	43.20k
6	10	1.13	11,33	51.00k

Тривиальная, на первый взгляд, задача решения системы из двух уравнений, описывающих производительность двух бригад, оказалась неприемлемой, из-за значительного влияния погрешностей эксперимента. Точное нахождение параметров k и P_n возможно только при учёте всех экспериментальных результатов. Однако из-за тех же погрешностей эксперимента пучок прямых, описываемых системой линейных уравнений $A_i \cdot P_n + B_i \cdot k + C_i = 0$ не имеет общей точки (см. рис. 1).

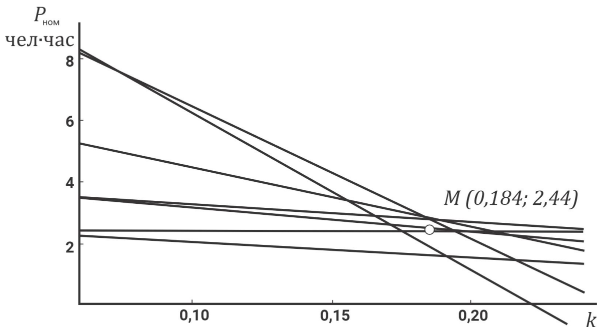

Рис. 1 – Графическая визуализация семейства линейных функций и точки M, максимально удовлетворяющей условиям

II. Аналитический подход к решению задачи

Математическая задача заключается в нахождении той стационарной точки $M(P_n, k)$, расстояния от которой до каждой прямой пучка будут минимальными. Для нахождения этой точки нужно:

- записать уравнения расстояний от произвольной точки до кождой из прямых;
- просуммировать эти расстояния;
- провести исследование полученной функции двух переменных на экстремум.

Путём несложных преобразований $^{T^M}$ эта задача сводится к решению системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j(A_jP_n + B_jk + C_j)}{\sqrt{A_j^2 + B_j^2} \cdot \sqrt{(A_jP_n + B_jk + c_i)^2}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j(A_jP_n + B_jk + C_j)}{\sqrt{A_j^2 + B_j^2} \cdot \sqrt{(A_jP_n + B_jk + c_i)^2}}$$

Для конкретных численных значений из табл. 1 решением системы уравнений являются значения: $P_n = 2.44108$; $k = 0.183916$. Проверка выполнения достаточного условия экстремума в найденной точке, требующая нахождения частных производных функции, также подтверждает, что найденные значения являются решением задачи:

- трудоёмкость лабораторной работы составляет 2.44 человеко-часа;
- безразмерный коэффициент издержек времени составляет $k = 0.18$ или приблизительно 11 минут в час на человека.

III. Статистический подход к решению задачи

Одной из проблем данного метода вычислений является его громоздкость, возрастающая на порядки с увеличением числа экспериментов. Более значительной проблемой является статистическая оценка результатов. Альтернативный вариант решения основан на теории математической статистики.

Если P_n и k связаны линейной зависимостью, и должны одновременно удовлетворять всем заданным условиям, то можно построить линейную функцию $y = kx + P_n$, график которой должен проходить через точки с эмпирически полученными неточными координатами. Воспользуемся такой аппроксимирующей функцией $f(x) = ax + b$, что отклонения (разности значений функции при заданных аргументах и ординат точек) будут минимальными.

Выборочная парная линейная регрессия имеет вид: $\overline{y_x} = ax + b$, где $\overline{y_x}$ – условное среднее арифметическое наблюдаемых значений y_i, соответствующих значениям x_i; a и b – точечные оценки, которые необходимо найти.

Для построения парной линейной регрессии необходимо выполнение предпосылок метода наименьших квадратов (условий Гаусса-Маркова [4]).

Статистический подход к решению задачи позволяет получить в точности те же значения, что и аналитический, однако дополненные величинами среднеквадратичной ошибки $MSPE = 0.019$ и среднеквадратичного отклонения $\sigma = 18.4381$.

В целом можно заключить, что оба метода пригодны для вычислинений и принятия решений, но если первый метод можно рекомендовать для практического использования в управлении предприятиями, располагающими большими вычислительными мощностями и требующими быстрого принятия оперативных решений, то второй более пригоден для научных исследований, требующих статистической обработки результатов.

Основной же результат выполненной работы заключается в экспериментально апробированной методике расчёта номинальной трудёмкости лабораторных заданий и комплектации студенческих бригад.

IV. Список литературы

1. Позняк Т.А. Развитие понятийного аппарата цифровой трансформации высшей школы // Наука и инновации. – 2023. – №12. – С.63–67
2. Киселевский О.С., Харитон Е.О. Преподавание гибких методов управления проектами и гибкие методы преподавания // Инженерное образование в цифровом обществе : матер. Междунар. науч.-метод. конф. – Минск, БГУИР. – 2024. – С.358–363.
3. Brooks F. The Mythical Man-Month: Essays on Software Engineering. – Addison-Wesley. – 1975. – 441 p.
4. Черемухин А.Д., Шамин А.А. Об исследовании выполнимости условий Гаусса-Маркова при построении линейной регресии с помощью языка R //XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2021. – Т.10. – №.1. – С.26-30.