

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра защиты информации

Я. В. Рощупкин, И. И. Чёрная

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСВЯЗИ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В 2-х частях
Часть 1

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники для специальностей
1-45 01 01 «Многоканальные системы телекоммуникаций»,
1-45 01 03 «Сети телекоммуникаций»,
1-45 01 05 «Системы распределения мультимедийной информации»,
1-45 01 02 «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения»,
1-98 01 02 «Защита информации в телекоммуникациях»,
1-45 01 01-01 «Инфокоммуникационные технологии
(системы телекоммуникаций)»,
1-45 01 01-02 «Инфокоммуникационные технологии
(сети инфокоммуникаций)»,
1-45 01 01-04 «Инфокоммуникационные технологии
(цифровое теле- и радиовещание)»
1-45 01 01-05 «Инфокоммуникационные технологии (системы
распределения мультимедийной информации)» в качестве пособия*

Минск БГУИР 2013

УДК 621.391(076.5)

ББК 32.88-01я73

P81

Рецензенты:

кафедра информационных систем и технологий
Белорусского национального технического университета
(протокол №7 от 14 марта 2013 г.);

кафедра радиосвязи и радиовещания
учреждения образования «Высший государственный колледж связи»
(протокол №12 от 1 июня 2012 г.);

заведующий кафедрой телекоммуникационных систем
учреждения образования «Высший государственный колледж связи»,
кандидат технических наук, доцент К. И. Пирогов

Рощупкин, Я. В.

P81 Теория электросвязи. Лабораторный практикум. В 2 ч. Ч. 1 :
Спектральный анализ телекоммуникационных сигналов : пособие /
Я. В. Рощупкин, И. И. Чёрная. – Минск : БГУИР, 2013. – 48 с. : ил.
ISBN 978-985-488-899-6 (ч. 1).

Практикум содержит четыре лабораторные работы по исследованию телекоммуникационных сигналов и их спектров, а также дискретизации непрерывных сигналов с ограниченным спектром. Каждая лабораторная работа включает краткие теоретические сведения, описание лабораторной установки, лабораторное задание и порядок выполнения работы, содержание отчёта и контрольные вопросы по теме.

УДК 621.391(076.5)

ББК 32.88-01я73

ISBN 978-985-488-899-6 (ч. 1)

ISBN 978-985-543-003-3

© Рощупкин Я. В., Чёрная И. И., 2013

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2013

Содержание

Лабораторная работа №1 Спектральный анализ элементарных сигналов	4
1.1 Цель работы.....	4
1.2 Краткие теоретические сведения.....	4
1.3 Описание программного обеспечения.....	17
1.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы	20
1.5 Содержание отчёта	21
1.6 Контрольные вопросы и задания.....	21
Лабораторная работа №2 Спектральный анализ модулированных сигналов	22
2.1 Цель работы.....	22
2.2 Краткие теоретические сведения.....	22
2.3 Описание программного обеспечения.....	28
2.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы	31
2.5 Содержание отчёта.....	32
2.6 Контрольные вопросы и задания	32
Лабораторная работа №3 Синтез сигналов по дискретным отсчётам	33
3.1 Цель работы.....	33
3.2 Краткие теоретические сведения.....	33
3.3 Описание лабораторной установки.....	39
3.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы.....	41
3.5 Содержание отчёта	42
3.6 Контрольные вопросы и задания	42
Лабораторная работа №4 Фильтр нижних частот	43
4.1 Цель работы.....	43
4.2 Краткие теоретические сведения.....	43
4.3 Описание лабораторной установки.....	45
4.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы	46
4.5 Содержание отчёта.....	47
4.6 Контрольные вопросы и задания	47
Литература.....	47

Лабораторная работа №1
**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СИГНАЛОВ**

1.1 Цель работы

Исследовать спектры базовых сигналов, используемых в системах телекоммуникаций. Изучить влияние основных параметров сигналов на общий вид и параметры спектров.

1.2 Краткие теоретические сведения

Для представления телекоммуникационных сигналов в качестве базисов может быть использовано большое количество систем ортогональных функций. Гармонические функции (синусоидальные и косинусоидальные) занимают исключительное место среди ортогональных функций, что обусловлено их инвариантностью относительно линейных преобразований и простотой генерирования.

Если какой-либо сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, то говорят, что осуществлено *спектральное разложение* этого сигнала. Отдельные гармонические компоненты сигнала образуют его *спектр*.

Разложение сигналов в обобщённый ряд Фурье. Важным понятием является ортогональность векторов. Два вектора ψ_i и ψ_j ортогональны, если

$$(\psi_i, \psi_j) = 0. \quad (1.1)$$

Легко показать, что если векторы ψ_i и ψ_j при $j \neq i$ взаимно ортогональны, то они также линейно независимы. Поэтому совокупность ортогональных векторов можно использовать в качестве базиса линейных пространств.

Представим непрерывную (во времени и по уровню) функцию $x(t)$ с интегрируемым квадратом через произвольную ортонормированную систему базисных функций $\{\psi_i(t)\}$, для которых

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \psi_i(t)\psi_j(t)dt = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases} \quad (1.2)$$

Это представление может быть записано как

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \psi_i(t), \quad (1.3)$$

где C_i – коэффициенты разложения в ортонормированном базисе $\{\psi_i(t)\}$.

Представление (1.3) называют *обобщённым рядом Фурье*. Для определения коэффициентов C_i найдем скалярное произведение

$$(x, \psi_j) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \psi_i(t) \psi_j(t) dt.$$

С учетом (1.2) следует

$$C_j = (x, \psi_j) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \psi_j(t) dt. \quad (1.4)$$

Таким образом, коэффициенты обобщённого ряда Фурье C_i являются проекциями вектора x на ортогональные оси (единичные орты) ψ_i . С учётом (1.2) и (1.3) можно получить

$$E_x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{i=0}^{\infty} C_i \psi_i(t) \right]^2 dt = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^2. \quad (1.5)$$

Равенство (1.5) является частным случаем равенства Парсеваля.

Разложим теперь приближённо функцию $x(t)$ в усечённый ряд по ортонормированным базисным функциям $\{\psi_i(t)\}$:

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \psi_i(t) \quad (1.6)$$

и определим коэффициенты γ_i так, чтобы минимизировать среднеквадратичную погрешность (СКП):

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t) - x_\varepsilon(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[x(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \psi_i(t) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt - \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \psi_i(t) dt + \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i^2. \end{aligned}$$

С учётом (1.4) можно записать

$$\tilde{\varepsilon}^2(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt + \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma_i - C_i)^2 - \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2. \quad (1.7)$$

Погрешность $\varepsilon^2(t)$ принимает минимальное значение, если $\gamma_i = C_i$, т. е. если коэффициенты разложения в усечённом представлении (1.6) являются коэффициентами обобщённого ряда Фурье. Обозначив $\varepsilon^2(t) = \Delta_n$, можно написать, исходя из (1.7),

$$\Delta_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt - \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2 \geq 0$$

или

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \geq \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2. \quad (1.8)$$

Неравенство (1.8) называют неравенством Бесселя. С ростом n величина Δ_n уменьшается. Если при $n \rightarrow \infty$ СКП стремится к нулю, то систему базисных функций $\{\psi_i(t)\}$ называют полной. Имея в виду, что при $n \rightarrow \infty$ справедливо (1.5), можно утверждать, что в пространстве Гильберта система базисных функций $\{\psi_i(t)\}$ является полной. Эта система функций является также замкнутой, т. к. для любой функции $x(t)$ из $L_2(t)$ неравенство (1.8) переходит при $n \rightarrow \infty$ в равенство.

Спектральное представление периодических колебаний. При формировании и обработке сигналов часто приходится иметь дело с периодическими колебаниями сложной формы. Периодическую функцию $x(t) = x(t - nT)$ (T – период повторения) можно представить разложением в обобщённый ряд Фурье (1.3) по базисным функциям основной тригонометрической системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos k\omega_1 t, \dots \\ \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin k\omega_1 t, \dots \end{array} \right\}. \quad (1.9)$$

Все функции системы (1.9) попарно ортогональны на интервале $(-T/2; T/2)$. Обобщённый ряд Фурье по базисным функциям (1.9) можно записать

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (1.10)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(k\omega_1 t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(k\omega_1 t) dt. \quad (1.11)$$

Представление (1.10) называют рядом Фурье [1]. Ряд (1.10) можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k), \quad (1.12)$$

где

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (1.13)$$

Согласно формуле (1.12) периодическую функцию $x(t)$ можно представить суммой гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $f = 1/T$ с амплитудами A_k и начальными фазами φ_k . Совокупность амплитуд A_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) образует амплитудный спектр сигнала, а совокупность фаз φ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) – фазовый спектр сигнала. Линейчатый амплитудный спектр периодического сигнала $x(t)$ изображён на рисунке 1.1.

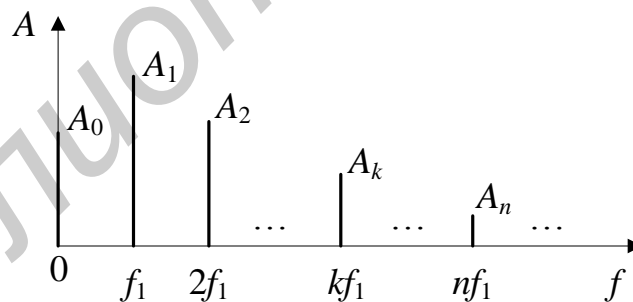


Рисунок 1.1 – Амплитудный спектр периодического сигнала с периодом следования $T = 1/f_1$

Ряд Фурье (1.12) часто представляется в комплексной форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (1.14)$$

где C_k – комплексная амплитуда, определяемая по формуле

$$\dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (1.15)$$

Следует обратить внимание на то, что сумма в (1.14) охватывает не только положительные значения k , но и отрицательные (появляются «отрицательные частоты»).

Для перехода из (1.12) к (1.14) можно воспользоваться формулой Эйлера:

$$\cos(k\omega_1 t - \varphi_k) = \frac{e^{j(k\omega_1 t - \varphi_k)} - e^{-j(k\omega_1 t - \varphi_k)}}{2}. \quad (1.16)$$

Выражение (1.16) можно интерпретировать как представление гармонического сигнала единичной амплитуды с положительной частотой $k\omega_1$ в виде суммы двух гармонических колебаний (половинной амплитуды) на положительной частоте $k\omega_1$ и отрицательной частоте $-k\omega_1$. Для вещественных функций $x(t)$, как следует из (1.11) и (1.13), $a_k = a_{-k}$, $b_k = -b_{-k}$, $A_k = A_{-k}$, $\varphi_k = -\varphi_{-k}$ (амплитудный спектр – чётная функция частоты, фазовый – нечётная функция частоты). Как следствие

$$\dot{C}_{-k} = \frac{a_{-k} - jb_{-k}}{2} = \frac{a_k + jb_k}{2} = \dot{C}_k^*, \quad \frac{A_k}{2} = |C_k| = |\dot{C}_{-k}|, \quad \arg \dot{C}_k = -\varphi_k = -\arg \dot{C}_{-k}.$$

Комплексное представление ряда Фурье оказывается очень удобным при выполнении различных расчётов.

Спектральное представление неперiodических функций. Разложение в тригонометрический ряд Фурье (1.14) может быть обобщено на случай неперiodических функций $x(t)$ путем устремления $T \rightarrow \infty$ или $f_1 = 1/T \rightarrow 0$. Для этого запишем (1.14) так:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta f, \quad (1.17)$$

где $\Delta f = f_1 = 1/T$ – частотный разнос между линиями спектра перiodического сигнала.

Введем в рассмотрение текущую частоту спектра $k\omega_1 = \omega$ ($kf_1 = f$) и определим *спектральную плотность* (СП) по Фурье неперiodического сигнала:

$$\dot{S}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\dot{C}_k}{\Delta f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \dot{C}_k T. \quad (1.18)$$

Тогда из (1.17) при $\Delta f \rightarrow 0$ следует представление

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j\omega t} df, \quad (1.19)$$

а из (1.15) и (1.18) следует формула для определения СП

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.20)$$

Формула для определения спектральной плотности (1.20) также называется *прямым преобразованием Фурье*, тогда как формула (1.19) – *обратным преобразованием Фурье*.

Согласно (1.19) непериодическая функция $x(t)$ представляется суммой гармонических компонент $e^{j\omega t}$ (на положительных и отрицательных частотах) с бесконечно малыми амплитудами $\dot{S}(f)df$. Модуль $|\dot{S}(f)|$ определяет сплошной (непрерывный) амплитудный спектр непериодического сигнала, а $\arg \dot{S}(f) = \varphi(f)$ – сплошной (непрерывный) фазовый спектр непериодического сигнала. Спектр по Фурье можно записать в виде

$$\dot{S}(f) = A(f) - jB(f) = |\dot{S}(f)| e^{j\varphi(f)}, \quad (1.21)$$

где $A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos dt$ – чётная функция частоты;

$B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin dt$ – нечётная функция частоты.

Из (1.21) видно, что для вещественных функций $x(t)$ амплитудный спектр $|\dot{S}(f)| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)}$ является четной функцией частоты, фазовый спектр $\varphi(f) = -\arctg \frac{B(f)}{A(f)}$ – нечетная функция частоты. Дискретный (линейчатый) спектр амплитуд \dot{C}_k периодического сигнала $x(t) = x(t + nT)$ можно найти по формуле

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \dot{S}\left(\frac{k}{T}\right). \quad (1.22)$$

Пара преобразований Фурье $x(t) \rightarrow \dot{S}(f)$ (прямое) и $\dot{S}(f) \rightarrow x(t)$ (обратное) описывается, как видно из (1.19) и (1.20), линейным оператором. Поэтому для этих преобразований справедлив *принцип суперпозиции (наложения)*: СП для

сигнала $x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)$ определяется суммой СП слагаемых $x_k(t)$. Следует подчеркнуть, что, строго говоря, СП (1.20) существует для функций $x(t)$, удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (1.23)$$

Тем не менее можно определить СП и для сигналов $x(t)$, не удовлетворяющих условию (1.23), если воспользоваться обобщённой δ -функцией. Например, пусть $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. СП по Фурье такого сигнала по определению

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt. \quad (1.24)$$

Воспользовавшись интегральным определением δ -функции, из (1.24) получим результат $\dot{S}(f) = \delta(f - f_0)$. Аналогично можно показать, что СП для сигнала

$$x(t) = e^{-j\omega_0 t} \quad \text{равна} \quad \dot{S}(f) = \delta(f + f_0).$$

Как следствие, можно вычислить спектральные плотности гармонических сигналов:

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \rightarrow \dot{S}(f) = 0,5 \cdot \delta(f - f_0) + 0,5 \cdot \delta(f + f_0).$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \rightarrow \dot{S}(f) = 0,5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \delta(f - f_0) + 0,5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \delta(f + f_0).$$

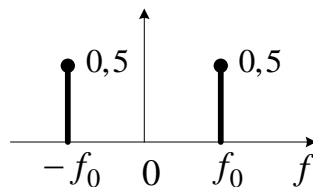


Рисунок 1.2 – Спектральная плотность гармонического колебания

Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса. Пусть данный сигнал $x(t)$ имеет амплитуду U , длительность τ_n и располагается симметрично относительно начала отсчёта времени. На основании формулы (1.20) имеем

$$\dot{S}(f) = U \int_{-\tau_{и}/2}^{\tau_{и}/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{U}{\pi f} \sin \frac{2\pi f \tau_{и}}{2}.$$

Спектральная плотность рассматриваемого сигнала есть вещественная функция частоты. Удобно ввести безразмерную переменную $\xi = \omega\tau_{и}/2$ и окончательно представить результат так:

$$\dot{S}(\xi) = U\tau_{и} \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (1.25)$$

Отметим, что значение спектральной плотности на нулевой частоте равно площади импульса: $\dot{S}(0) = U\tau_{и}$. Графики прямоугольного видеоимпульса и его спектральной плотности по формуле (1.25) изображены на рисунках 1.3, 1.4.

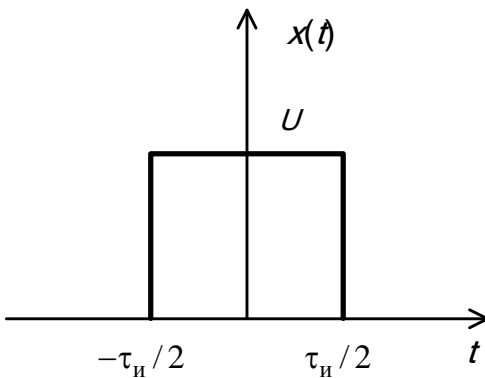


Рисунок 1.3 – График прямоугольного видеоимпульса

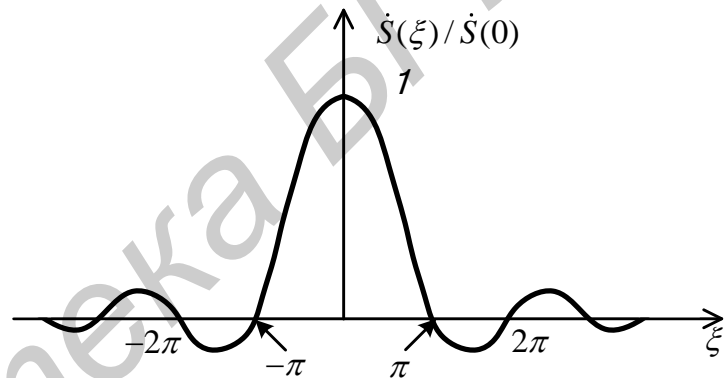


Рисунок 1.4 – График нормированной спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса как функции параметра $\xi = \omega\tau_{и}/2$

Если проанализировать спектральную плотность прямоугольного видеоимпульса и некоторые другие частные случаи [2], то можно сделать важный вывод: *чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр.*

Под шириной спектра здесь и в дальнейшем будем понимать частотный интервал, в пределах которого модуль спектральной плотности не меньше некоторого наперёд заданного уровня, например, изменяется в пределах от $|\dot{S}|_{\max}$ до $0,1 |\dot{S}|_{\max}$.

Рассмотрим прямоугольный видеоимпульс, полагая при этом, что верхняя граничная частота спектра $\omega_{в}$ – частота, соответствующая первому нулю спектральной плотности. Нетрудно видеть, что

$$\omega_{в}\tau_{и} / 2 = \pi \quad \text{или} \quad f_{в}\tau_{и} = 1.$$

Итак, произведение ширины спектра импульса на его длительность есть постоянное число, зависящее только от формы импульса и, как правило, имеющее порядок единицы.

Это соотношение имеет первостепенное значение для систем телекоммуникаций. Оно определяет требования к ширине полосы пропускания телекоммуникационного канала или устройства. Например, чем короче длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания соответствующего канала связи. Короткие импульсные помехи имеют широкий спектр и поэтому могут ухудшать условия приема в значительной полосе частот.

В качестве иллюстраций в таблице 1.1 приведены примеры спектров некоторых импульсов (непериодических функций) и даны графики их амплитудных спектров в области положительных частот. Из приведённых примеров видно, что импульсы ограниченной длительности теоретически имеют бесконечный спектр. Практически под шириной спектра будем понимать эффективную область частот F_3 , в пределах которой сконцентрировано 90...99 % энергии. Для колокольного (гауссовского, см. ниже) и экспоненциального импульсов, имеющих теоретически бесконечную длительность, для удобства расчётов также вводят понятие эффективной длительности τ_3 , понимая под этим интервал времени, в пределах которого сосредоточена основная доля энергии сигнала. Если принять за основную часть энергии $E_\gamma = \gamma E$ ($\gamma = 0,9 \dots 0,99$), то эффективная ширина спектра и эффективная длительность находятся из выражений

$$E_\gamma = \int_{-\frac{\tau_3}{2}}^{\frac{\tau_3}{2}} x^2(t) dt = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad \text{и} \quad E_\gamma = \int_0^{F_3} W_{0,x}(f) df = \gamma \int_0^{\infty} W_{0,x}(f) df.$$

Для сравнения в таблице 1.2 представлены значения произведений $F_3 \tau_3$ при $\gamma = 0,9$ для импульсов из таблицы 1.1. Для импульсов с «плавными» фронтами, например, гауссовского и косинусоидального, произведение $F_3 \tau_3$ оказывается меньше, чем у импульсов со скачкообразными фронтами, например, прямоугольного и экспоненциального. Характерная особенность заключается в том, что для всех импульсов (простых сигналов)

$$F_3 \tau_3 \approx 1,$$

т. е. произведение $F_3 \tau_3$ – величина порядка единицы. Соотношение $F_3 \tau_3 \approx 1$ указывает на явную связь между шириной спектра и длительностью импульса: чем короче импульс, тем шире его спектр.

Таблица 1.1 – Импульсные сигналы и их спектральные плотности

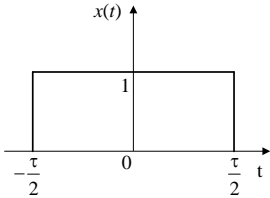
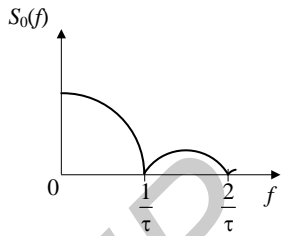
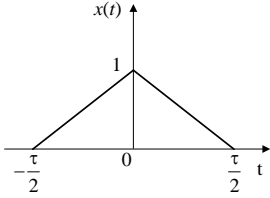
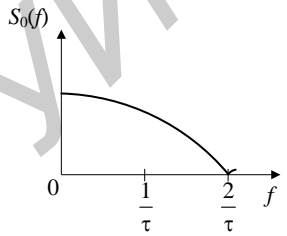
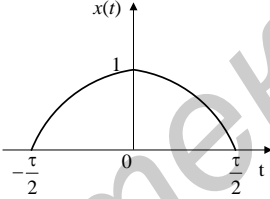
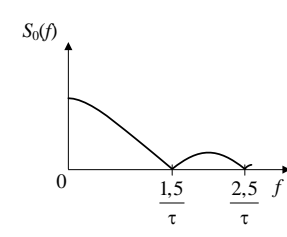
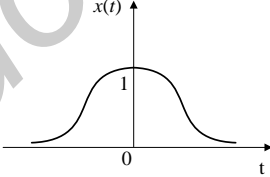
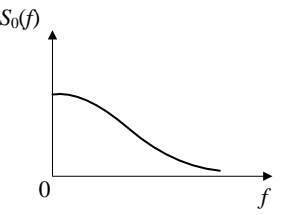
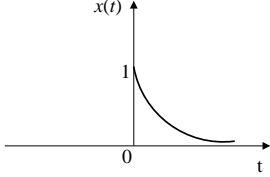
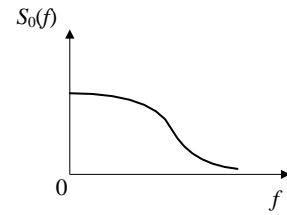
№ сигнала	Сигнал $x(t)$	Спектральная плотность $\dot{S}(f)$	Амплитудный спектр $S_0(f)$
1	$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ 	$\tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$	
2	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 t }{\tau}, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ 	$\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$	
3	$x(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ 	$\frac{4\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$	
4	$x(t) = e^{-\beta^2 t^2}$ 	$\frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \cdot e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2}$	
5	$x(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 	$\frac{1}{\beta + j\omega}$	

Таблица 1.2 – Значения произведений $F_3\tau_3$ при $\gamma = 0,9$ для различных импульсов

Импульс	τ_3	F_3	$F_3\tau_3$
1 Прямоугольный	0,90 τ	0,81 $1/\tau$	0,73
2 Треугольный	0,541 τ	0,84 $1/\tau$	0,46
3 Косинусоидальный	0,596 τ	0,73 $1/\tau$	0,43
4 Колокольный	0,825 $1/\beta$	0,26 β	0,22
5 Экспоненциальный	1,155 $1/\beta$	0,98 β	1,13

Основные свойства преобразования Фурье. Линейность. Это важнейшее свойство формулируется так: если имеется некоторая совокупность сигналов $x_1(t), x_2(t), \dots$, причём $x_1(t) \leftrightarrow \dot{S}_1(\omega), x_2(t) \leftrightarrow \dot{S}_2(\omega), \dots$, то взвешенная сумма сигналов преобразуется по Фурье следующим образом:

$$\sum_i a_i x_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i \dot{S}_i(\omega), \quad (1.26)$$

где a_i – произвольные числовые коэффициенты.

Для доказательства формулы (1.26) следует подставить сумму сигналов в преобразование Фурье (1.20).

Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности. Пусть $x(t)$ – сигнал, принимающий вещественные значения. Его спектральная плотность в общем случае является комплексной:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega).$$

Подставим это выражение в формулу обратного преобразования Фурье (1.19):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega.$$

Для того чтобы сигнал, полученный путём такого двукратного преобразования, оставался вещественным, необходимо потребовать, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = 0.$$

Это возможно лишь в том случае, если вещественная часть $A(\omega)$ спектральной плотности сигнала есть чётная, а мнимая часть $B(\omega)$ – нечётная функция частоты:

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega). \quad (1.27)$$

Спектральная плотность сигнала, смещённого во времени. Предположим, что для сигнала $x(t)$ известно соответствие $x(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на t_0 секунд позже. Принимая точку t_0 за новое начало отсчёта времени, обозначим этот смещённый сигнал как $x(t - t_0)$. Покажем, что

$$x(t - t_0) \leftrightarrow \dot{S}(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (1.28)$$

Доказательство очень простое. Действительно,

$$x(t - t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(y) e^{-j\omega t_0} e^{-j\omega y} dy = \dot{S}(\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

Модуль комплексного числа $\exp(-j\omega t_0)$ при любых t_0 равен единице, поэтому амплитуды элементарных гармонических составляющих, из которых складывается сигнал, не зависят от его положения на оси времени. Информация об этой характеристике сигнала заключена в частотной зависимости аргумента его спектральной плотности (фазовом спектре).

Зависимость спектральной плотности сигнала от выбора масштаба измерения времени. Предположим, что исходный сигнал $x(t)$ подвергнут изменению масштаба времени. Это означает, что роль времени t играет новая независимая переменная kt (k – некоторое вещественное число). Если $k > 1$, то происходит «сжатие» исходного сигнала; если же $0 < k < 1$, то сигнал «растягивается» во времени.

Оказывается, что если $x(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$, то

$$x(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} \dot{S}\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (1.29)$$

Действительно,

$$x(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(kt)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} x(y)e^{-j\frac{\omega}{k}y} dy,$$

откуда следует формула (1.29).

Итак, для того чтобы, например, сжать сигнал во времени, сохраняя его форму, необходимо распределить те же спектральные составляющие в более широком интервале частот при соответствующем пропорциональном уменьшении их амплитуд.

К рассматриваемому здесь вопросу близко примыкает следующая задача. Дан импульс $x(t)$, отличный от нуля на отрезке $[0, \tau_n]$ и характеризуемый спектральной плотностью $\dot{S}(\omega)$. Требуется найти спектральную плотность $\dot{S}_{\text{обр}}(\omega)$ «обращённого во времени» сигнала $x_{\text{обр}}(t)$, который представляет собой «зеркальную копию» исходного импульсного колебания. Поскольку очевидно, что $x_{\text{обр}}(t) = x(\tau_n - t)$, то

$$\dot{S}_{\text{обр}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_n - t)e^{-j\omega t} dt.$$

Выполнив замену переменной $y = \tau_n - t$, находим, что

$$\dot{S}_{\text{обр}}(\omega) = e^{-j\omega\tau_n} \int_{-\infty}^{\infty} x(y)e^{-j\omega y} dy = e^{-j\omega\tau_n} \dot{S}(-\omega) = e^{-j\omega\tau_n} \dot{S}^*(\omega). \quad (1.30)$$

Спектральная плотность производной и неопределённого интеграла. Пусть сигнал $x(t)$ и его спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ заданы. Будем изучать новый сигнал $f(t) = dx/dt$ и поставим цель найти его спектральную плотность $\dot{F}(\omega)$.

По определению

$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \tau)}{\tau}. \quad (1.31)$$

Преобразование Фурье – линейная операция, значит, равенство (1.31) справедливо и по отношению к спектральным плотностям. Учитывая (1.28), получаем

$$\dot{F}(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-j\omega\tau)}{\tau} \dot{S}(\omega). \quad (1.32)$$

Представляя экспоненциальную функцию ряда Тейлора: $\exp(-j\omega\tau) = 1 - j\omega\tau - (\omega\tau)^2/2 - \dots$, подставляя этот ряд в (1.32) и ограничиваясь первыми двумя членами, находим

$$\dot{F}(\omega) = j\omega\dot{S}(\omega). \quad (1.33)$$

При дифференцировании скорость сигнала во времени возрастает. Как следствие, модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению с модулем спектра исходного сигнала.

Формула (1.33) обобщается на случай спектра производной n -го порядка. Легко доказать, что если $g(t) = d^n s/dt^n$, то

$$\dot{G}(\omega) = (j\omega)^n \dot{S}(\omega). \quad (1.34)$$

Итак, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной плотности на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $j\omega$ является оператором дифференцирования, действующим в частотной области.

Рассмотренная функция $x(t) = \int f(t)dt$ является первообразной (неопределённым интегралом) по отношению к функции $f(t)$. Из (1.33) следует, что спектр первообразной представляется следующим выражением:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{F}(\omega)/(j\omega). \quad (1.35)$$

Таким образом, множитель $1/(j\omega)$ служит оператором интегрирования в частотной области.

1.3 Описание программного обеспечения

Данная программа позволяет проводить исследование пяти видов сигнала, а именно: гармонического сигнала, последовательности видеоимпульсов, амплитудно-манипулированного, фазоманипулированного и частотно-манипулированного сигналов.

В процессе исследования можно изменять основные параметры каждого из сигналов: амплитуду, частоту, период, длительность. Более того, имеется возможность определения мгновенных значений параметров сигналов в определенные моменты времени и оценки фронтов импульсов.

По установленным исходным данным программа позволяет получить изображение формы сигнала, его теоретического и реального спектра, т. е. дает возможность сравнить спектры любых из перечисленных сигналов, полученные при помощи теоретического анализа и дискретного преобразования Фурье.

Интерфейс программы можно условно представить в виде четырех полей: панели выбора типа сигнала, панели установки параметров сигнала, графического окна для построения сигнала и графического окна для построения спектров выбранного сигнала (рисунок 1.5).

Панель выбора типа сигнала

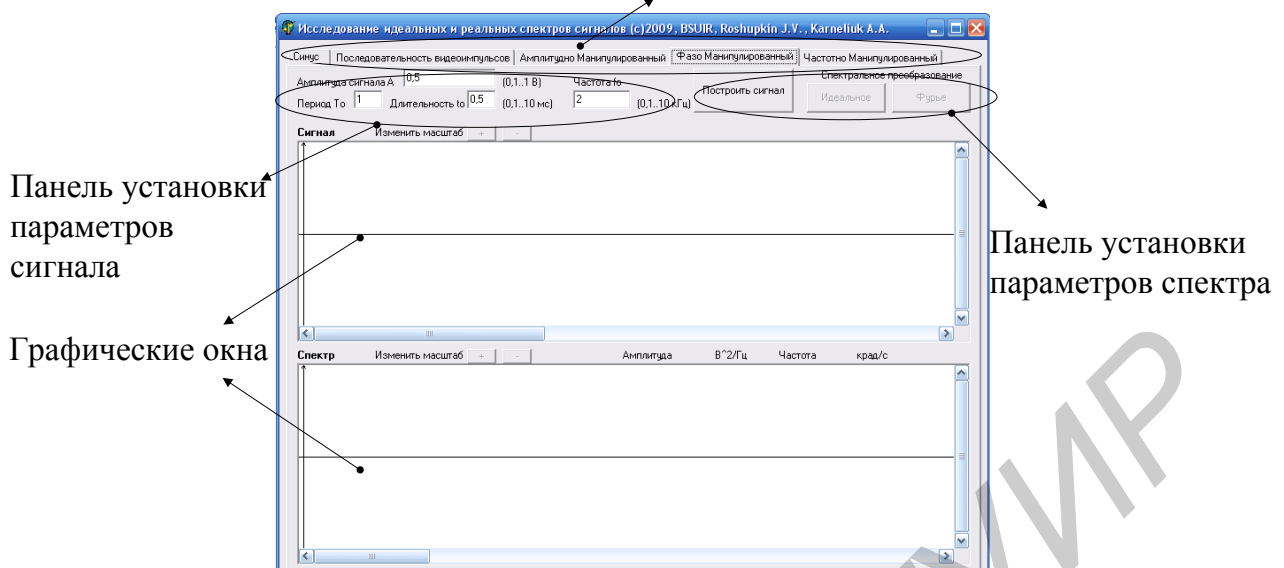


Рисунок 1.5 – Интерфейс главного окна программы

Изучим назначение каждого из полей более детально.

Как уже было сказано ранее, программа позволяет производить исследования пяти различных сигналов. На панели выбора типа сигнала щелчком левой клавиши мыши выбирается необходимый тип сигнала (рисунок 1.6).

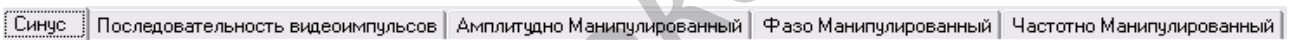


Рисунок 1.6 – Панель выбора типа сигнала

На панели установки параметров сигнала задается амплитуда сигнала в интервале от 0,1 до 1В, период в мс, длительность в диапазоне от 0,1 до 10 мс, а также частоты в интервале от 0,1 до 10кГц (рисунок 1.7).

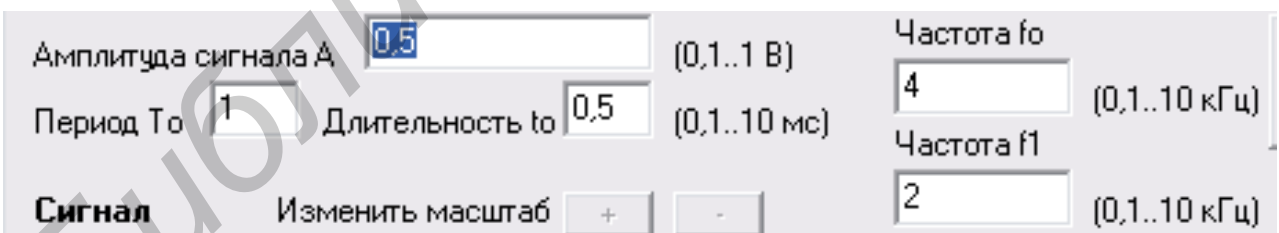


Рисунок 1.7 – Панель установки параметров сигнала

Выбрав тип сигнала и установив все его необходимые параметры, как было описано выше, для получения изображения формы сигнала необходимо нажать кнопку «Построить сигнал» (рисунок 1.8).

В графическом окне «Сигнал» строится изображение выбранного сигнала с указанными параметрами (рисунок 1.9).

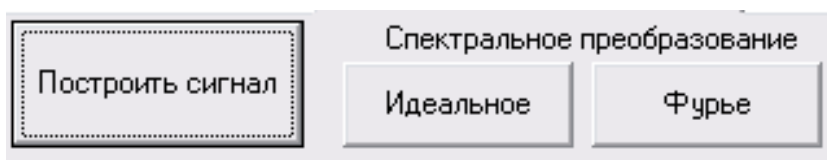


Рисунок 1.8 – Панель установки параметров спектра

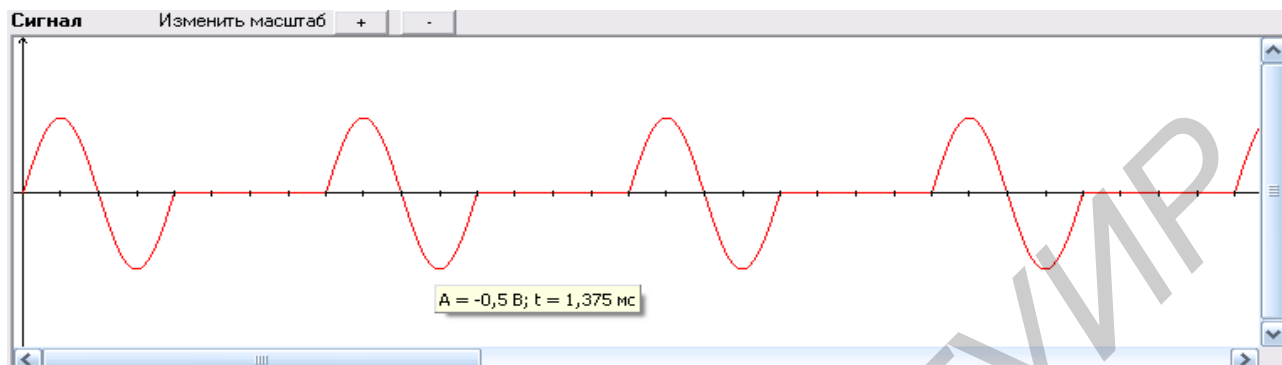


Рисунок 1.9 – Графическое окно «Сигнал»

Там же находятся кнопки «+», «-» для увеличения и уменьшения масштаба соответственно. Программное обеспечение предоставляет возможность измерять мгновенные значения сигнала. Для этого необходимо переместить указатель мыши в нужную точку сигнала. Соответствующие мгновенные значения будут отображаться рядом с указателем мыши во всплывающем окне.

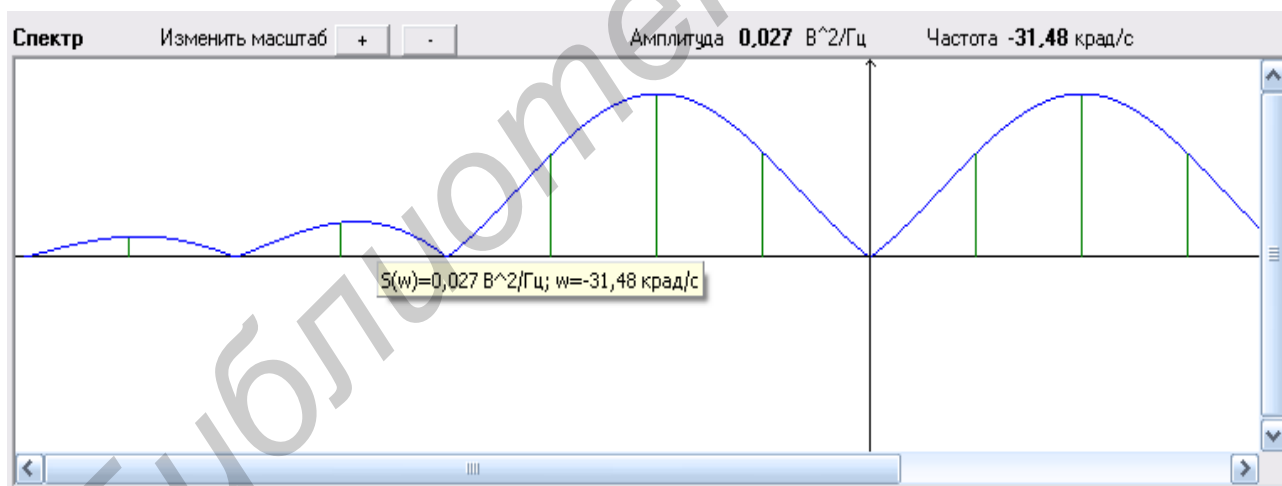


Рисунок 1.10 – Графическое окно «Спектр». Теоретический спектр

Затем необходимо выбрать одно из двух спектральных преобразований: «Идеальное», по которому строится теоретический спектр сигнала (рассчитанный математическими методами с помощью преобразования Фурье), либо «Фурье», строящее спектр, близкий к реальному. В этом случае выбранный сигнал преобразуется в дискретный сигнал, а далее используется быстрое преобразование Фурье (БПФ). В графическом окне «Спектр» строится теоретический спектр (рисунок 1.10) и реальный спектр (рисунок 1.11). Данное

графическое окно обладает теми же возможностями, что и графическое окно «Сигнал».

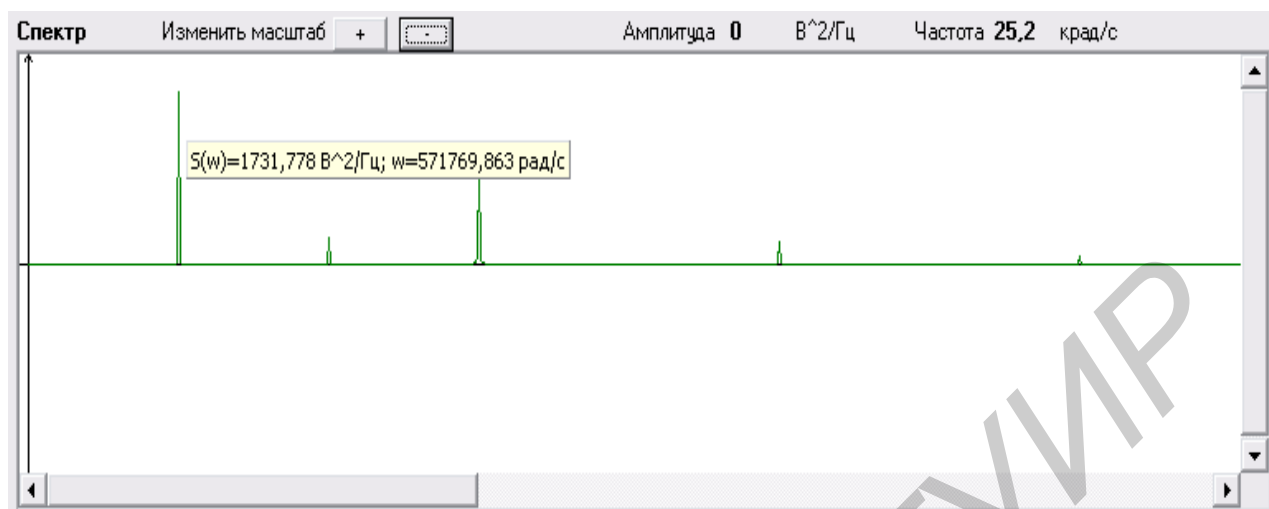


Рисунок 1.11 – Графическое окно «Спектр». Спектр, рассчитанный с использованием БПФ

1.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы

1 Исследование гармонического сигнала

В панели выбора типа сигнала установить «Синус» в качестве исследуемого. Ввести значение амплитуды (A) и частоты (f_0) по таблице 1.3 в соответствии с заданным вариантом. Нажать кнопку «Создать сигнал».

В интервале от 0 до 2 мс с шагом 0,125 мс измерить мгновенные значения амплитуды сигнала в графическом окне «Сигнал», используя указатель мыши. Результаты измерений занести в таблицу 1.4. Зарисовать сигнал.

В поле установки параметров спектрального преобразования выбрать «Идеальное». Теоретический спектр выбранного сигнала будет отображён в графическом окне «Спектр». Данный график необходимо зарисовать, а также записать значения частоты, на которых спектр существует.

В поле установки параметров спектрального преобразования выбрать «Фурье». Проанализировать и зарисовать график реального спектра и сравнить его с теоретическим спектром.

Изменяя параметры сигнала, проанализировать соответствующие изменения спектра. Результаты анализа отразить в выводе по лабораторной работе.

2 Исследование последовательности видеоимпульсов

Аналогично методике, изложенной в пункте 1.4.1, исследовать последовательность видеоимпульсов и заполнить соответствующие графы таблицы 1.4. Зарисовать график сигнала. Зарисовать график теоретического спектра и отметить значения частот, на которых спектр существует. Зарисовать график реального спектра и сравнить его с теоретическим.

Изменяя параметры сигнала, проанализировать соответствующие изменения спектра. Результаты анализа отразить в выводе по лабораторной работе.

Таблица 1.3 – Исходные данные к лабораторному заданию

Вариант	1	2	3	4
Синус	$A = 1 \text{ В}$ $f_0 = 1 \text{ кГц}$	$A = 0,75 \text{ В}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 0,5 \text{ В}$ $f_0 = 1,5 \text{ кГц}$
Последовательность видеоимпульсов	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1,25 \text{ мс}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1,5 \text{ мс}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 0,75 \text{ мс}$

Таблица 1.4 – Результаты выполнения лабораторного задания

Момент времени, мс	0	0,125	0,25	0,375	0,5	...	1,625	1,75	1,875	2
Синус										
Последовательность видеоимпульсов										

1.5 Содержание отчёта

- 1 Цель работы.
- 2 Заполненная таблица с отсчетными значениями исследуемых сигналов.
- 3 Графики сигналов, теоретических и реальных спектров с указанными значениями частоты.
- 4 Выводы и замечания по результатам работы.

1.6 Контрольные вопросы и задания

- 1 Дайте определение спектра сигнала.
- 2 Запишите формулы ряда Фурье в тригонометрической и комплексной форме и формулу для вычисления коэффициентов Фурье.
- 3 Запишите формулы прямого и обратного преобразований Фурье.
- 4 В чем основное отличие спектральных представлений периодических и непериодических сигналов?
- 5 Что представляют собой амплитудный и фазовый спектры сигнала, и как они вычисляются?
- 6 Вычислите и изобразите спектр гармонического колебания.
- 7 Вычислите и изобразите амплитудный спектр прямоугольного видеоимпульса.
- 8 Какова взаимосвязь между длительностью импульсного сигнала и шириной его спектра?
- 9 Перечислите свойства преобразования Фурье.
- 10 Как в частотной области отображаются операции дифференцирования и интегрирования сигнала?

Лабораторная работа №2
**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ**

2.1 Цель работы

Исследовать спектры сигналов с различными видами модуляции. Изучить влияние способа модуляции и основных параметров модулирующих сигналов и несущего колебания на общий вид и параметры спектров модулированных сигналов.

2.2 Краткие теоретические сведения

Спектральная плотность произведения сигналов. Как известно, при суммировании сигналов их спектры складываются. Однако спектр произведения сигналов не равен произведению спектров, а выражается некоторым специальным интегральным соотношением между спектрами сомножителей.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – два сигнала, для которых известны соответствия $u(t) \leftrightarrow \dot{U}(\omega)$, $v(t) \leftrightarrow \dot{V}(\omega)$. образуем произведение этих сигналов: $x(t) = u(t)v(t)$ и вычислим его спектральную плотность. По общему правилу

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.1)$$

Применив обратное преобразование Фурье, выразим сигнал $v(t)$ через его спектральную плотность и подставим результат в (2.1):

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}(\xi) e^{j\xi t} d\xi \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j(\omega-\xi)t} dt \right] d\xi,$$

откуда

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}(\xi) \dot{U}(\omega - \xi) d\xi. \quad (2.2)$$

Интеграл, находящийся в правой части, называют свёрткой функций \dot{U} на \dot{V} . В дальнейшем будем символически обозначать операцию свёртки так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}(\xi)\dot{U}(\omega - \xi)d\xi = \dot{V}(\omega) \cdot \dot{U}(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до постоянного числового множителя равна свёртке спектральных плотностей сомножителей:

$$u(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \dot{V}(\omega) \cdot \dot{U}(\omega). \quad (2.3)$$

Нетрудно убедиться, что операция свёртки коммутативна, т. е. допускает изменение порядка следования преобразуемых функций:

$$\dot{V}(\omega) \cdot \dot{U}(\omega) = \dot{U}(\omega) \cdot \dot{V}(\omega).$$

Доказанная выше теорема о свёртке может быть обращена: если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения: $\dot{S}(\omega) \leftrightarrow \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2(\omega)$, причём $\dot{S}_1(\omega) \leftrightarrow x_1(t)$ и $\dot{S}_2(\omega) \leftrightarrow x_2(t)$, то сигнал $x(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$ является свёрткой сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, но уже не в частотной, а во временной области:

$$\dot{S}(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \xi)x_2(\xi)d\xi. \quad (2.4)$$

Обобщённая формула Рэлея. Скалярное произведение функций $x(t)$ и $y(t)$ (в общем случае комплексных) можно выразить и через их СП по Фурье:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{x}(t) \cdot \dot{y}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f) \cdot \dot{S}_y^*(f) df. \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) называют обобщённой формулой Рэлея (или соотношением Парсеваля). Легко запоминающаяся трактовка этой формулы такова: скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей. Докажем её.

В первом интеграле представим $\dot{y}(t)$ обратным преобразованием Фурье

$$\dot{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_y(f)e^{j\omega t} df. \text{ Тогда } \dot{y}^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_y^*(f)e^{-j\omega t} df \text{ и}$$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_y^*(f) df \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f)\dot{S}_y^*(f) df.$$

Если в (2.5) положить $y(t) = x(t)$, то для вещественного сигнала $x(t)$:

$$(x, x) = E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f) \dot{S}_x^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(f) df. \quad (2.6)$$

Характеристика $S_x^2(f) = W_x(f)$ имеет смысл СП энергии, и (2.6) можно записать

$$(x, x) = E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df. \quad (2.7)$$

Можно также ввести СП мощности (СПМ) сигнала длительностью T :

$$G_x(f) = \frac{1}{T} W_x(f) = \frac{S_x^2(f)}{T}.$$

Тогда

$$(x, x)_p = P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df. \quad (2.8)$$

Характеристики $W_x(f)$ и $G_x(f)$ играют важную роль в ТЭС. Из их определения ясно, что эти характеристики являются чётными функциями частоты. Тогда можно записать

$$E = 2 \int_0^{\infty} W_x(f) df = \int_0^{\infty} W_{0,x}(f) df; \quad (2.9)$$

$$P = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) df = \int_0^{\infty} G_{0,x}(f) df, \quad (2.10)$$

где $W_{0,x}(f) = 2W_x(f)$ и $G_{0,x}(f) = 2G_x(f)$ – СП энергии и мощности, определённые на положительных частотах.

Соотношение (2.5) полезно обобщить. Определим скалярное произведение

$$(\dot{x}, \dot{y}_\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{x}(t) \dot{y}^*(t-\tau) dt.$$

С учётом того, что спектр Фурье для задержанного на время τ сигнала $\dot{y}_\tau(t) = \dot{y}(t-\tau)$ равен $\dot{S}_y(f)e^{-j\omega\tau}$, а для сигнала $\dot{y}^*(t-\tau)$ спектр Фурье равен $\dot{S}_y^*(f)e^{j\omega\tau}$, получаем вместо (2.5) соотношение

$$(\dot{x}, \dot{y}_\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{x}(t) \dot{y}(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(t) \dot{S}_y^*(t) e^{j\omega\tau} df. \quad (2.11)$$

Если в (2.11) положить $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$ и ввести обозначение $B_{E,x}(\tau)$ для функции корреляции (ФК) сигнала $\dot{x}(t)$ с размерностью энергии, то из (2.11) следует

$$B_{E,x}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) e^{j\omega\tau} df = \int_0^{\infty} W_{0,x}(f) \cos \omega\tau df. \quad (2.12)$$

Вводя обозначение $B_x(\tau) = (x, x_\tau)$ для ФК сигнала $\dot{x}(t)$ с размерностью мощности, получаем соотношение

$$B_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{j\omega\tau} df = \int_0^{\infty} G_{0,x}(f) \cos \omega\tau df \quad (2.13)$$

и, как следствие,

$$\begin{aligned} W_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{E,x}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ G_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, ФК $B_x(\tau)$ сигнала $x(t)$ и его СП мощности $G_x(f)$ (аналогично ФК сигнала $B_{E,x}(\tau)$ и его СП энергии $W_x(f)$) образуют пару преобразований Фурье.

Обобщение понятия спектральной плотности. Будем считать, что сигнал $v(t)$ представляет собой абсолютно интегрируемую функцию. Тогда его преобразование Фурье $\dot{V}(\omega)$ – обычная классическая функция частоты. Пусть наряду с этим сигнал $u(t)$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, и в обычном классическом смысле преобразование Фурье $\dot{U}(\omega)$ не существует. Однако можно расширить понятие спектральной плотности, допустив, что $\dot{U}(\omega)$ является обобщённой функцией. Для этого в соответствии с обобщённой формулой Рэлея достаточно положить, что $\dot{U}(\omega)$ – функционал, который, действуя на известную функцию $\dot{V}(\omega)$, даёт следующий результат:

$$(\dot{U}, \dot{V}) = 2\pi(u, v). \quad (2.15)$$

Приёмы вычисления спектров неинтегрируемых сигналов целесообразно рассмотреть на конкретных примерах.

Спектральная плотность постоянного во времени сигнала. Простейший неинтегрируемый сигнал – постоянная величина $u(t) = A = \text{const}$. Предположим, что $v(t)$ – произвольный вещественный абсолютно интегрируемый сигнал с известной спектральной плотностью $\dot{V}(\omega)$. Раскрывая формулу (2.15), имеем

$$(\dot{U}, \dot{V}) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt.$$

Но, как легко заметить,

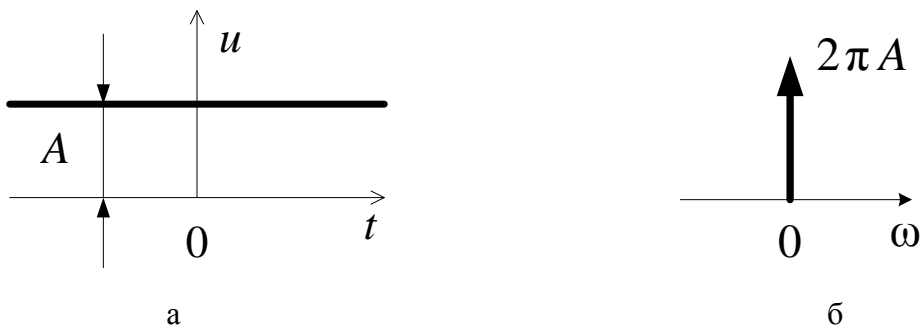
$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j0t} dt = \dot{V}(0).$$

Отсюда на основании фильтрующего свойства дельта-функции приходим к выводу, что равенство (2.15) возможно лишь при условии, что

$$\dot{U}(\omega) = 2\pi A \delta(\omega). \quad (2.16)$$

Физический смысл полученного результата нагляден – неизменный во времени сигнал имеет спектральную составляющую только на нулевой частоте (рисунок 2.1).

Спектральные плотности таких неинтегрируемых сигналов, как комплексный экспоненциальный сигнал и гармонические колебания, были получены выше на основе определения обобщённой δ -функции.



а – постоянный во времени сигнал;
 б – спектральная плотность постоянного во времени сигнала
 Рисунок 2.1 – Графическое представление сигнала

Спектральная плотность радиоимпульса. Как известно, радиоимпульс $s_p(t)$ задаётся в виде произведения некоторого видеоимпульса $s_b(t)$, играющего роль огибающей, и неинтегрируемого гармонического колебания:

$$s_p(t) = s_b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Рисунок 2.2 – Радиоимпульс

Чтобы найти спектральную плотность радиоимпульса, будем полагать известной функцию $S_b(\omega)$ – спектр его огибающей. Спектр косинусоидального сигнала с произвольной фазой получается путём элементарного обобщения формулы спектра косинуса:

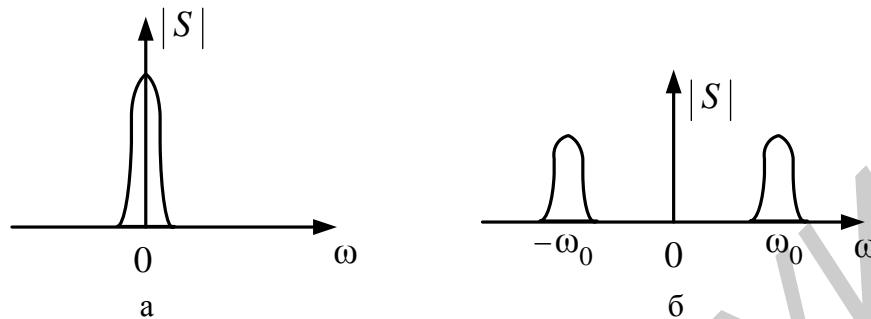
$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_0} \right].$$

Спектр радиоимпульса есть свёртка:

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_b(\omega - \xi) \left[\delta(\xi - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\xi + \omega_0) e^{-j\varphi_0} \right] d\xi.$$

Приняв во внимание фильтрующее свойство Δ -функции, получаем важный результат:

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S_B(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S_B(\omega + \omega_0). \quad (2.17)$$



а – спектральная плотность видеоимпульса; б – спектральная плотность видеоимпульса
Рисунок 2.3 – Частотные зависимости модуля спектральной плотности

Рисунок 2.3 иллюстрирует трансформацию спектра видеоимпульса при умножении его на высокочастотный гармонический сигнал.

Видно, что переход от видеоимпульса к радиоимпульсу при спектральном подходе означает перенос спектра видеоимпульса в область высоких частот – вместо единственного максимума спектральной плотности при $\omega = 0$ наблюдаются два максимума при $\omega = \pm \omega_0$; абсолютные значения максимумов сокращаются вдвое.

Отметим, что графики на рисунке 2.3 отвечают ситуации, когда частота ω_0 значительно превышает эффективную ширину спектра видеоимпульса (именно такой случай обычно и реализуется на практике). При этом не наблюдается ощутимого «перекрывания» спектров, отвечающих положительным и отрицательным частотам. Однако может оказаться, что ширина спектра видеоимпульса велика настолько (при коротком импульсе), что выбранное значение частоты ω_0 не устраняет эффект «перекрывания». Как следствие, профили спектров видеоимпульса и радиоимпульса перестают быть подобными.

2.3 Описание программного обеспечения

Выполнение лабораторной работы производится при помощи программного обеспечения подробно описанного в подразделе 1.3.

При помощи данного программного обеспечения можно проанализировать зависимость спектральных характеристик от различных параметров сигнала и получить наглядные и вместе с тем привычные представления о широком диапазоне характеристик спектров и сигналов. Например, программа позволяет наглядно продемонстрировать сходства и различия сигналов и их спектров (рисунки 2.4 и 2.5).

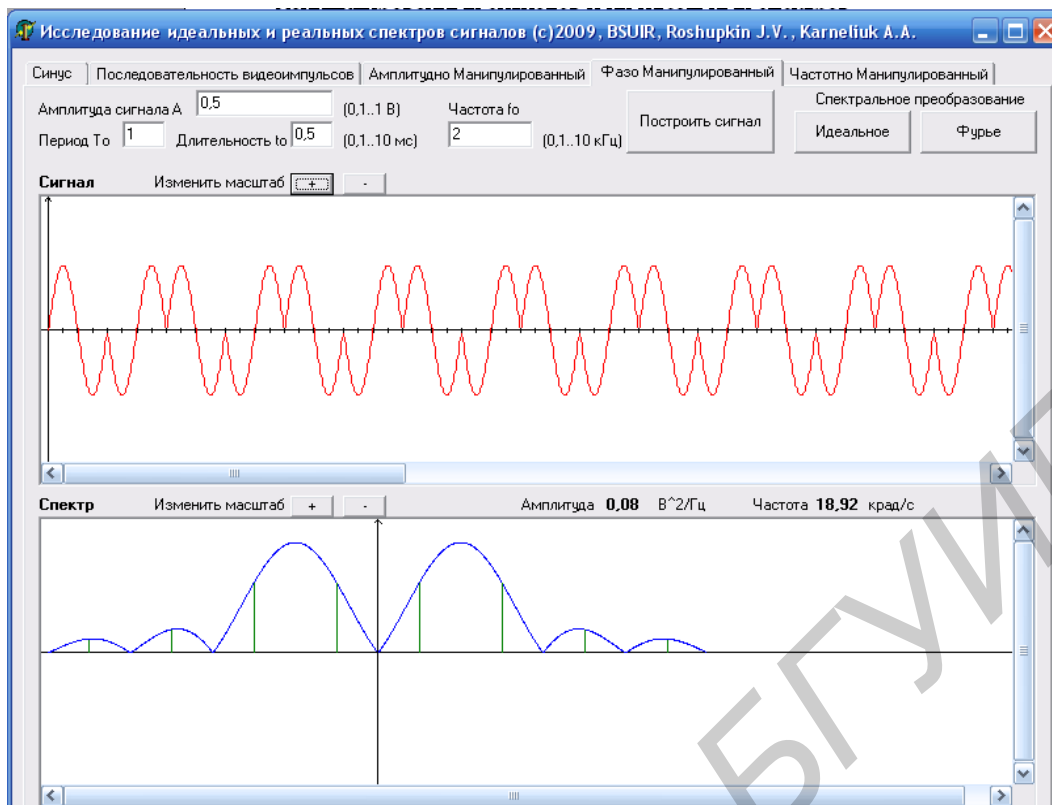


Рисунок 2.4 – Фазоманипулированный сигнал и его теоретический спектр

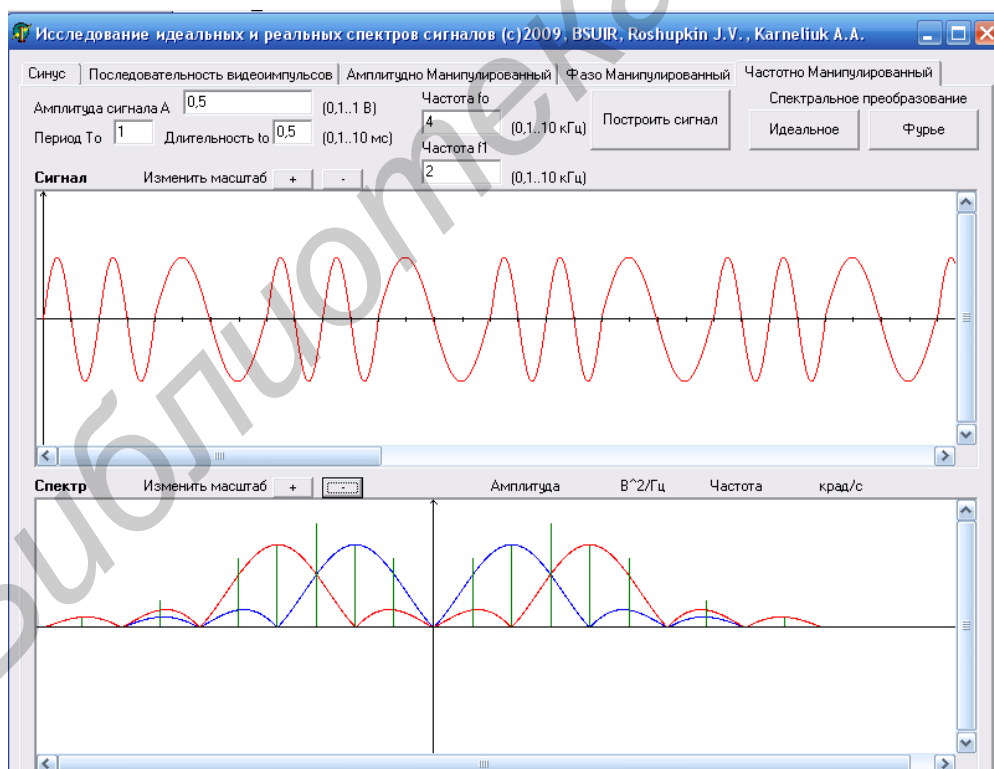


Рисунок 2.5 – Частотно-манипулированный сигнал и его теоретический спектр

Изменяя параметры одного и того же сигнала, можно сравнить его вид и спектральное представление (рисунки 2.6, 2.7).

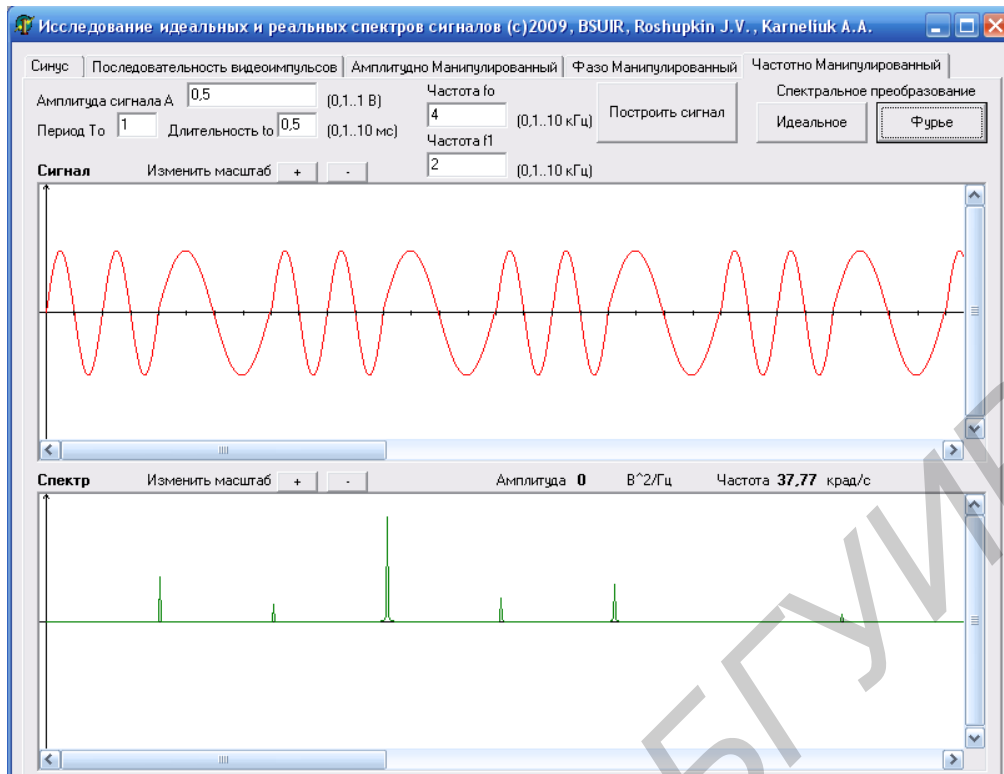


Рисунок 2.6 – Частотно-манипулированный сигнал и его реальный спектр ($f_0 = 4$ кГц, $f_1 = 2$ кГц)

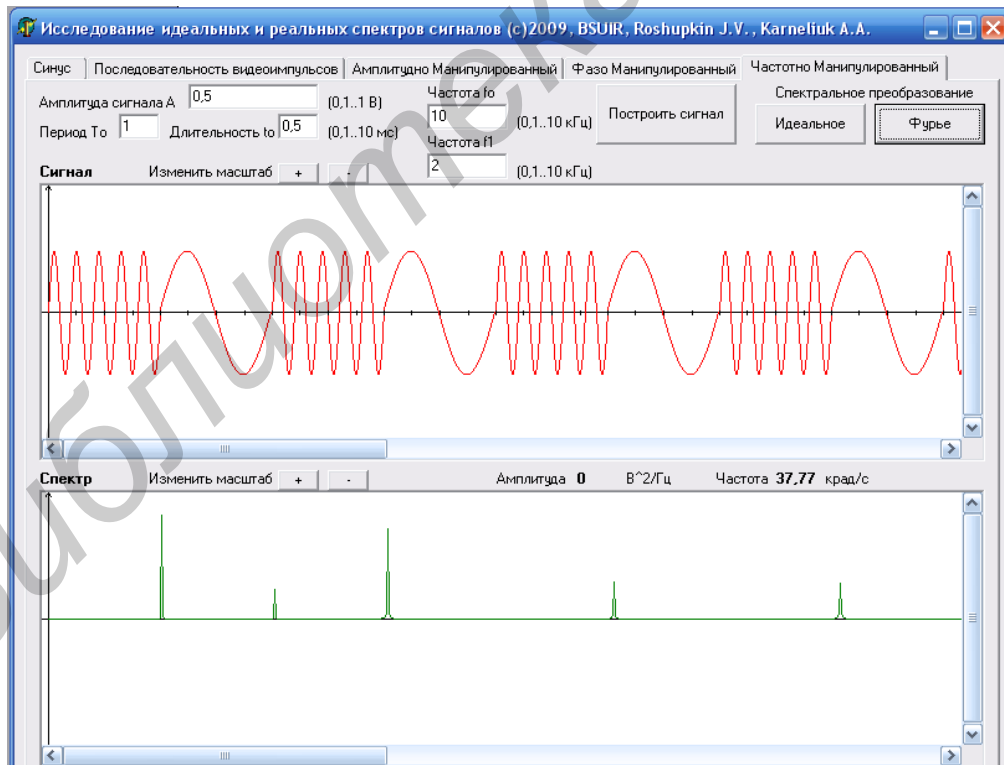


Рисунок 2.7 – Частотно-манипулированный сигнал и его реальный спектр ($f_0 = 10$ кГц, $f_1 = 2$ кГц)

2.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы

1 Исследование амплитудно-манипулированного сигнала

В панели выбора типа сигнала установить «Амплитудно-манипулированный» в качестве исследуемого.

Ввести значения амплитуды (A), периода (T_0), длительности (t_0) и частоты (f_0) по таблице 2.1 в соответствии с вариантом, заданным преподавателем.

Нажать кнопку «Создать сигнал».

В интервале от 0 до 2 мс с шагом 0,125 мс измерить мгновенные значения амплитуды сигнала в графическом окне «Сигнал», используя указатель мыши. Результаты измерений занести в таблицу 2.2. Зарисовать сигнал.

В поле установки параметров спектрального преобразования выбрать «Идеальное». Теоретический спектр выбранного сигнала будет отображён в графическом окне «Спектр». Данный график необходимо зарисовать, а также записать значения частоты, на которых спектр существует.

В поле установки параметров спектрального преобразования выбрать «Фурье». Проанализировать и зарисовать график реального спектра и сравнить его с теоретическим спектром.

Изменяя параметры сигнала, проанализировать соответствующие изменения спектра. Результаты анализа отразить в выводе по лабораторной работе.

2 Исследование фазоманипулированного и частотно-манипулированного сигналов

Аналогично методике, изложенной в пункте 2.4.1, исследовать остальные сигналы и заполнить соответствующие графы таблицы 2.2. Зарисовать графики сигналов. Зарисовать графики теоретических спектров и отметить значения частот, на которых спектр существует. Зарисовать графики реальных спектров и сравнить их с теоретическими. Изменяя параметры сигналов проанализировать соответствующие изменения спектров. Результаты анализа отразить в выводе по лабораторной работе.

Таблица 2.1 – Исходные данные к лабораторному заданию

Вариант	1	2	3	4
Амплитудно-манипулированный	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1,25 \text{ мс}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1,5 \text{ мс}$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 0,75 \text{ мс}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$
Фазо-манипулированный	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1,25 \text{ мс}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1,5 \text{ мс}$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 1 \text{ кГц}$
Частотно-манипулированный	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В}$ $T_0 = 2 \text{ мс}$ $t_0 = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$

Таблица 2.2 – Результаты выполнения лабораторного задания

Момент времени, мс	0	0,125	0,25	0,375	0,5	...	1,625	1,75	1,875	2
Амплитудно-манипулированный										
Фазо-манипулированный										
Частотно-манипулированный										

2.5 Содержание отчёта

- 1 Цель работы.
- 2 Заполненная таблица с отсчетными значениями исследуемых сигналов.
- 3 Графики сигналов, теоретических и реальных спектров с указанными значениями частоты.
- 4 Выводы и замечания по результатам работы.

2.6 Контрольные вопросы и задания

- 1 Запишите формулы прямого и обратного преобразований Фурье.
- 2 Запишите выражение и нарисуйте график спектральной плотности постоянного во времени сигнала.
- 3 Как определяется спектральная плотность произведения двух сигналов, если спектральные плотности каждого сигнала известны?
- 4 Вычислите спектральную плотность радиоимпульса.
- 5 Как по известным спектральным плотностям двух сигналов вычислить их скалярное произведение?
- 6 Как связаны между собой спектральные плотности видеоимпульса и радиоимпульса?

Лабораторная работа №3
СИНТЕЗ СИГНАЛОВ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

3.1 Цель работы

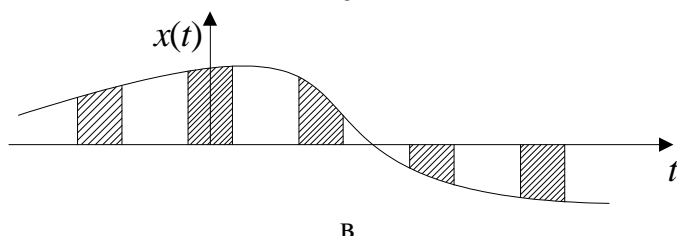
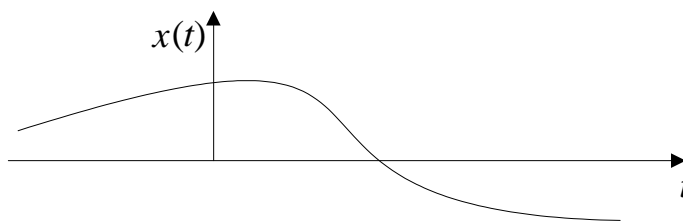
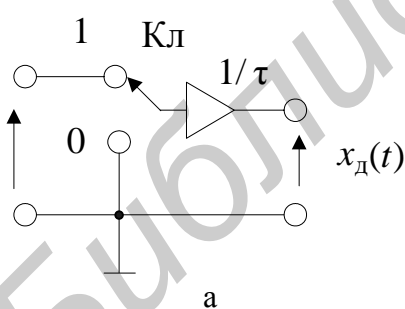
Изучение метода синтеза сигналов по дискретным отсчётам в соответствии с теоремой Котельникова, исследование влияния частоты выборок на качество синтезирования.

3.2 Краткие теоретические сведения

Представление непрерывной функции дискретной последовательностью отсчетов её мгновенных значений. Для точного представления произвольной непрерывной функции $x(t)$ на конечном интервале времени T необходимо располагать данными о мгновенных значениях (отсчетах) этой функции во всех точках интервала, т. е. непрерывным множеством отсчетов, отстоящих друг от друга на бесконечно малые интервалы.

Некоторое приближённое представление о функции $x(t)$ можно составить по её отображению в виде дискретной последовательности импульсов, имеющих на интервалах Δ значения $x(i\Delta)$, называемые отсчетами.

Операция замены непрерывной функции последовательностью отсчетов ее мгновенных значений называется *дискретизацией*. В качестве простейшей физической модели дискретизации рассмотрим коммутационное устройство (рисунок 3.1, а). С помощью ключа Кл обеспечивается периодическое с частотой дискретизации $f_d = 1/\Delta$ подключение к источнику непрерывного сигнала $x(t)$ (рисунок 3.1, б) на время τ , т. е. производится замена непрерывной функции $x(t)$ последовательностью $x_d(t)$ на интервалах τ (рисунок 3.1, в).



а – структурная схема дискретизатора; б – исходный непрерывный сигнал;
в – дискретизированный сигнал

Рисунок 3.1 – Дискретизация непрерывной функции времени посредством периодической коммутации с частотой дискретизации $F_d = 1/\Delta$

Последовательность отсчётов $x_d(t)$ можно трактовать как произведение $x(t)$ на периодическую последовательность импульсов дискретизации $f_d(t)$ (рисунок 3.2):

$$x_d(t) = x(t)f_d(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{\tau}(t - k\Delta),$$

где импульсы дискретизации

$$\psi_{\tau}(t) = \begin{cases} 1/\tau, & t \in [-\tau/2; \tau/2], \\ 0, & t \in [-\tau/2; \tau/2]. \end{cases}$$

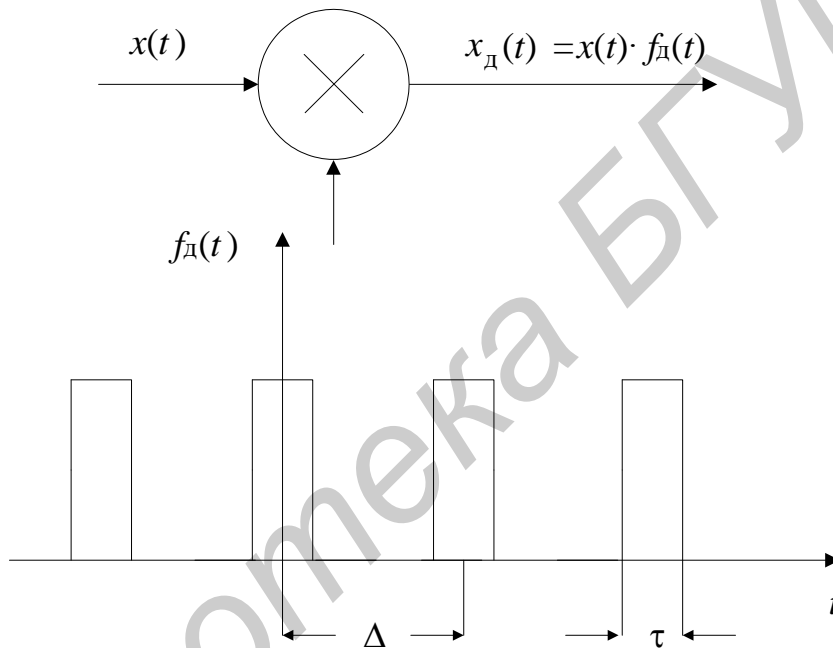


Рисунок 3.2 – Дискретизация непрерывной функции $x(t)$ путем её умножения на периодическую последовательность импульсов $f_d(t)$

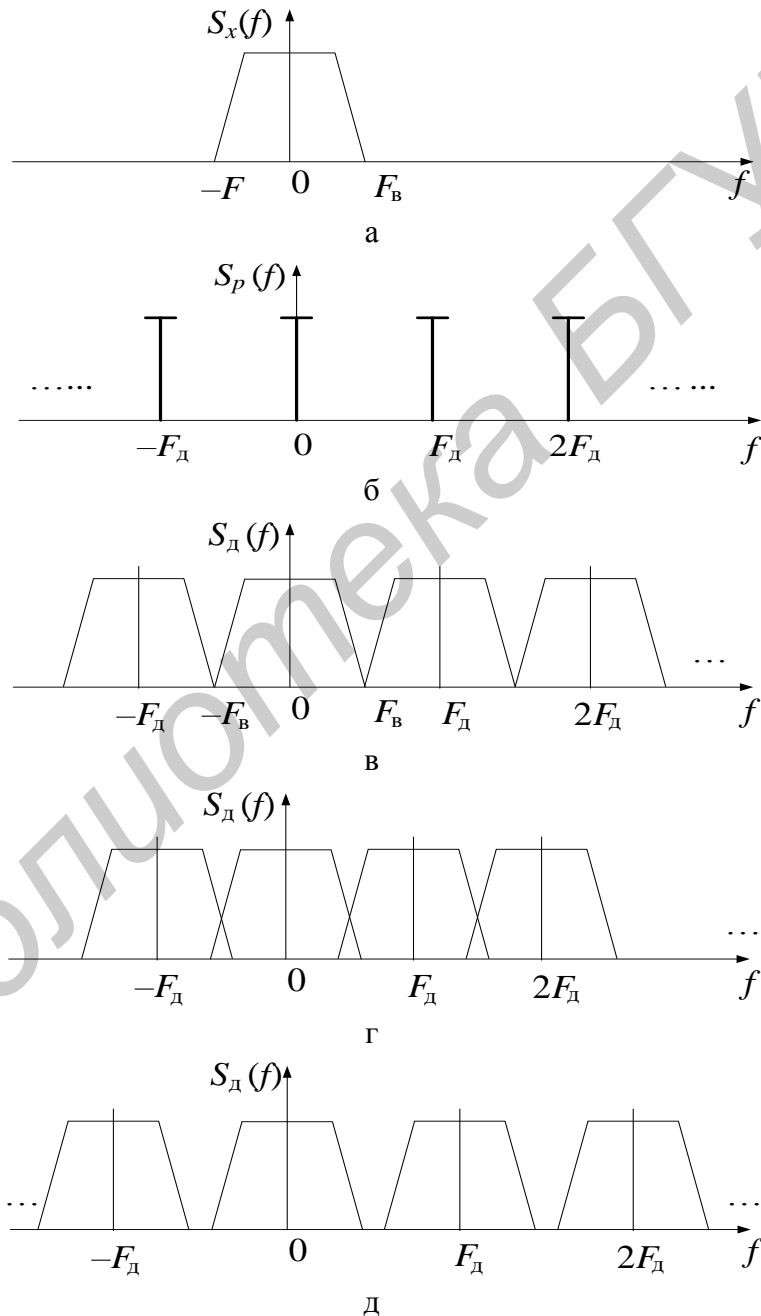
Множитель $1/\tau$ нормирует функцию $\psi_{\tau}(t)$ к единичной площади. Для этого в схеме (см. рисунок 3.1, а) после ключа Кл введено масштабное звено. Чтобы перейти к отсчетам мгновенных значений $x(t)$ в точках $t = k\Delta$, необходимо рассмотреть особенности периодической функции $f_d(t)$; при $\tau \rightarrow 0$ эта периодическая функция заменяется *решётчатой* функцией

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta).$$

Выражение для дискретного сигнала будет иметь вид

$$x_d(t) = x(t)f_p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta).$$

Спектральная трактовка дискретизации. Как было показано, процедура дискретизации сводится к образованию произведения дискретизируемой функции $f_d(t)$. В спектральной области произведению функций времени соответствует свертка их спектров. Пусть спектр функции $x(t)$ финитен и имеет вид, представленный на рисунке 3.3, а, где F_B – верхняя (граничная) частота. Спектр периодической последовательности импульсов дискретизации является линейчатый (рисунок 3.3, б); частоты дискретизации определяются интервалом дискретизации $F_d = 1/\Delta$. Спектры дискретизированного сигнала представлены для случаев, когда $F_d = 2F_B$ (рисунок 3.3, в), $F_d > 2F_B$ (рисунок 3.3, г) и $F_d < 2F_B$ (рисунок 3.3, д).



а – спектр непрерывного сигнала $x(t)$; б – линейчатый спектр решетчатой функции с периодом $\Delta = 1/F_d$; в – спектр дискретного сигнала при $F_d = 2F_B$, г – при $F_d > 2F_B$, д – при $F_d < 2F_B$

Рисунок 3.3 – Спектры сигналов в процессе дискретизации

Для неискаженного воспроизведения функции $x(t)$ по последовательности отсчётов посредством идеального фильтра низких частот необходимо выбирать частоту дискретизации так, чтобы спектральные компоненты свертки $\hat{S}_x(f)$ с каждой из дискретных составляющих периодической функции pF_d ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) располагались в неперекрывающихся областях (см. рисунок 3.3). Этому соответствуют значения $F_d \geq 2F_B$. При $F_d < 2F_B$ спектральные области перекрываются, в полосу частот $(-F_B, F_B)$ дискретизируемого сигнала попадут спектральные компоненты смежных областей и возникнут искажения при восстановлении функции по отсчётам. Далее будет показано, что для точного воспроизведения непрерывной функции с *ограниченным (финитным) спектром* достаточно располагать значениями функции (отсчетами) лишь в определенных точках. Модели сигналов с ограниченным спектром часто используются в технике связи. В частности, в стандартном телефонном канале за верхнюю граничную частоту принимают $F_B = 3400$ Гц, при телевизионной передаче граничная частота определяется числом различимых элементов изображения и равна $F_B = 6,5$ МГц.

Теорема отсчетов (теорема Котельникова). Фундаментальное значение для решения многих задач теории передачи сигналов имеет следующая теорема отсчетов Котельникова: непрерывная функция $x(t)$, не содержащая частот выше граничной F_B , полностью определяется отсчетами мгновенных значений $x(k\Delta)$ в точках, отстоящих друг от друга на интервалы $\Delta \leq 1/2F_B$. Интервал Δ называется интервалом Котельникова. Эта теорема позволяет представить непрерывную функцию $x(t)$ в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta)}{\omega_B(t - k\Delta)}. \quad (3.1)$$

Из сопоставления ряда (3.1) с общим видом обобщенного ряда Фурье следует, что элементарными базисными функциями в разложении Котельникова являются отсчётные функции

$$\psi_k(t) = a \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta)}{\omega_B(t - k\Delta)} dt. \quad (3.2)$$

Для коэффициентов разложения $x(t)$ по элементарным функциям (3.2) можно записать

$$\dot{C}_k = a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta)}{\omega_B(t - k\Delta)} df, \quad (3.3)$$

где постоянная a вводится с учётом нормировки функций.

Докажем, что коэффициенты C_k соответствуют мгновенным значениям функции $x(t)$ в точках $t = k\Delta$. Пусть $\hat{S}(f)$ – преобразование Фурье функции $x(t)$, тогда

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j\omega t} df, \quad (3.4)$$

где

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.5)$$

Если $x(t)$ имеет ограниченный спектр с наивысшей частотой F_B , то $\dot{S}(f)$ вне полосы $\pm F_B$ равно нулю, а выражение (3.4) принимает вид

$$x(t) = \int_{-F_B}^{F_B} \dot{S}(f) e^{j\omega t} df.$$

Пусть $t = k\Delta$, тогда

$$x(k\Delta) = \int_{-F_B}^{F_B} \dot{S}(f) e^{j\omega k\Delta} df$$

или после подстановки в последнее выражение вместо $\dot{S}(f)$ его значения из (3.5) и изменения порядка интегрирования, получим

$$x(k\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left[\int_{-F_B}^{F_B} e^{-j\omega(t-k\Delta)} df \right] dt.$$

После вычисления интеграла в квадратных скобках

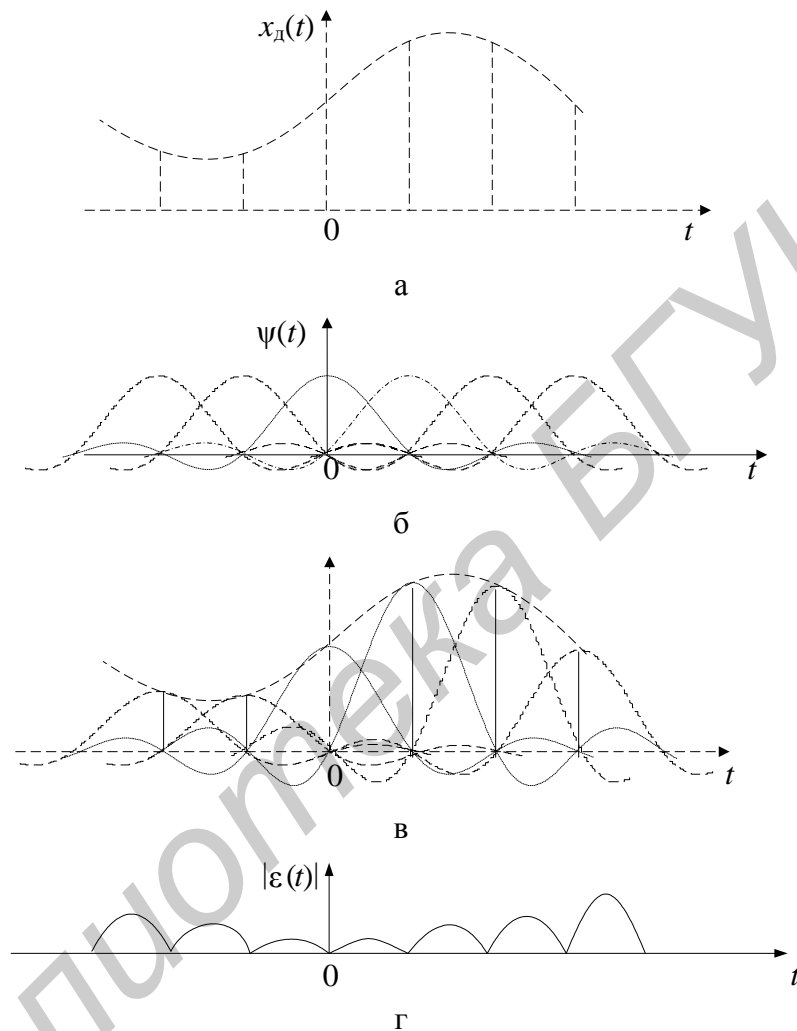
$$\int_{-F_B}^{F_B} e^{-j\omega(t-k\Delta)} df = \frac{\omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_B(t-k\Delta)}{\omega_B(t-k\Delta)}$$

получаем

$$x(k\Delta) = \frac{\omega_B}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin \omega_B(t-k\Delta)}{\omega_B(t-k\Delta)} dt. \quad (3.6)$$

Сравнение (3.6) с (3.3) при $a = \sqrt{\omega_B/\pi}$ показывает, что коэффициентами обобщённого ряда Фурье \dot{C}_k разложения по ортогональным функциям (3.2) являются отсчёты $x(kT)$ мгновенных значений функции $\frac{x(t)}{a}$ в моменты $t = k\Delta$.

Восстановление непрерывной функции по отсчётам. Процедура восстановления непрерывной функции $x(t)$ по отсчётам её мгновенных значений $x(k\Delta)$ вытекает непосредственно из (3.1): нужно перемножить значения отсчётов $x(k\Delta)$ на соответствующие отсчётные функции (3.2) и просуммировать полученные произведения. Эти операции иллюстрирует рисунок 3.4. Спектральная трактовка процесса восстановления $x(t)$ следует из рисунка 3.3.



а – отсчёты непрерывного сигнала; б – базисные функции;
в – восстановленный непрерывный сигнал; г – величина погрешности

Рисунок 3.4 – Иллюстрация принципа восстановления непрерывной функции по ее отсчётам

Для полного восстановления необходимо просуммировать бесконечное множество членов ряда (3.1). Однако если функция с ограниченным спектром $x(t)$ рассматривается на конечном интервале T (рисунок 3.4, а), то точное разложение (3.1) можно заменить следующим приближённым разложением:

$$x_{\varepsilon}(t) = \sum_{-n/2}^{n/2} x(k\Delta) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta)}{\omega_B(t - k\Delta)}. \quad (3.7)$$

Конечное число отсчётов n , определяющее $x_\varepsilon(t)$, равно (при $\Delta = 1/2F_B$) $n = T/\Delta + 1 = 2F_B T + 1$.

Параметр $B = 2F_B T$, играющий важную роль в ТЭС, называют базой сигнала. Очевидно, что погрешность представления сигнала при ограничении числа его отсчётов будет тем больше, чем меньшее число слагаемых учитывается при суммировании.

Оценим качественно погрешность $|\varepsilon(t)| = |x(t) - x_\varepsilon(t)|$. Поскольку все слагаемые ряда (3.1) обращаются при $t = i\Delta$ в нуль во всех точках, за исключением слагаемого с номером $k = i$, то в этих сечениях значения $x_\varepsilon(t)$ совпадают с $x(t)$, т. е. погрешность $\varepsilon(k\Delta)$ равна нулю; погрешность достигает наибольшей величины внутри промежутка между отсчётами. Кроме того, величина погрешности нарастает к краям рассматриваемого интервала.

Другая причина погрешностей обусловлена тем, что спектры реальных финитных сигналов не обращаются в нуль за пределами граничной частоты. Хотя основная энергия сигналов расположена на частотах от нуля до F_B , некоторая часть приходится на частоты выше граничной. Относительная среднеквадратичная погрешность определяется соотношением

$$\frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} = \frac{\int_{F_B}^{\infty} W_{0,x}(f) df}{\int_0^{\infty} W_{0,x}(f) df} = \frac{\Delta E}{E}, \quad (3.8)$$

где E – полная энергия сигнала $x(t)$,

ΔE – та часть энергии, которая оказывается за пределами полосы частот $[0, F_B]$ и не учитывается при восстановлении сигнала.

Таким образом, при заданной погрешности (3.8) можно определить необходимую граничную частоту F_B , а следовательно, и интервалы между отсчётами $\Delta = 1/2F_B$. Детальное исследование показывает, что погрешности за счёт неучитываемой части спектра сигнала будут тем больше, чем медленнее убывает спектр за пределами граничной частоты.

Третьей причиной погрешностей являются неидеальные характеристики фильтра, формирующего отсчётные функции.

3.3 Описание лабораторной установки

На рабочем месте размещаются:

- лабораторный макет;
- двулучевой осциллограф, С1-18.

Схема лабораторного макета представляет собой имитатор дискретного канала связи с амплитудно-импульсной модуляцией и включает передатчик, эквивалент линии связи и приёмник (рисунок 3.7).

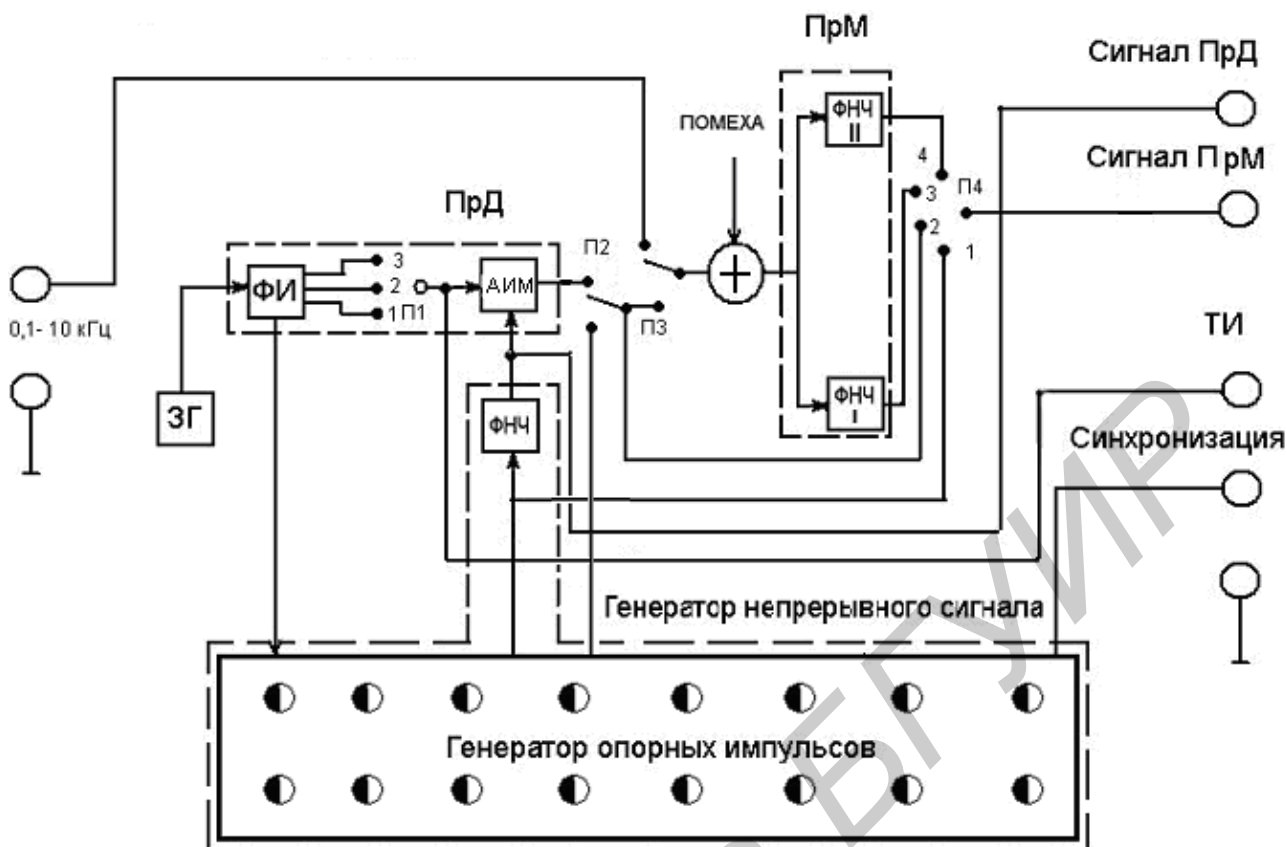


Рисунок 3.7 – Схема лабораторного макета

Передатчик содержит:

- задающий генератор (ЗГ) с частотой следования импульсов 16 кГц;
- формирователь тактовых (стробирующих) импульсов (ФИ) с частотами следования 4, 8, 16 кГц (гнездо «ТИ»);
- амплитудно-импульсный модулятор (АИМ), осуществляющий дискретизацию синтезированного сигнала заданной формы с максимальной частотой спектра 4 кГц, частотами 4, 8, 16 кГц;
- генератор непрерывного сигнала с максимальной частотой спектра 4 кГц, включающий генератор отсчётных импульсов (ГОИ) и ФНЧ с полосой пропускания 4 кГц (гнездо «Сигнал ПрД»).

На приёмной стороне включены фильтры низких частот ФНЧ-I и ФНЧ-II.

Запуск генератора отсчётных импульсов осуществляется прямоугольной последовательностью импульсов с частотой следования 8 кГц, поступающей от ФТИ. При этом ГОИ генерирует:

- а) одиночные импульсы постоянной амплитуды с частотой следования 0,5 кГц (тумблер П2 «одиночн. – последоват.» установлен в положение «одиночн.»);
- б) последовательность из 16-ти отсчётных импульсов с частотой следования 8 кГц (тумблер П2 «одиночн. – последоват.» установлен в положение «последоват.»).

Амплитуды отсчётных импульсов устанавливаются в пределах ± 1 В с помощью 16-ти потенциометров установки амплитуд.

Синтезированный сигнал заданной формы с выхода ФНЧ поступает на вход АИМ, на другой вход которого подается последовательность стробирующих импульсов с соответствующей частотой следования от ФТИ. На выходе АИМ формируется последовательность отсчётов непрерывного сигнала заданной формы, спектр которого ограничен максимальной частотой, равной 4 кГц. Сигнал с выхода АИМ через эквивалент линии связи поступает далее на входы ФНЧ-I и ФНЧ-II.

Кроме отмеченных органов управления на лицевой панели макета расположены:

- переключатель П1, позволяющий подавать на вход АИМ стробирующие импульсы 4, 8, 16 кГц от ФТИ;

- тумблер П3 «синус – импульс», осуществляющий подключение к входам ФНЧ-I и ФНЧ-II синусоидального сигнала звукового генератора (положение тумблера «синус») или импульсных сигналов с выхода АИМ (положение тумблера «импульс»);

- переключатель П4, позволяющей подавать на вход осциллографа сигналы с выходов ГОИ, АИМ, ФНЧ-I и ФНЧ-II (гнездо «Сигнал ПрМ»).

3.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы

1 Синтез сигналов

Тумблер П2 «одионон. – последоват.» поставить в положение «последоват.».

Подключить осциллограф к выходу ГОИ (положение 1 переключателя П4).

Установить значения амплитуд отсчётных импульсов по осциллографу для синтезируемого сигнала. Значения амплитуд взять из результатов выполнения лабораторных работ №1 и №2 (см. таблицы 1.4, 2.2) согласно заданному варианту задания. Синтез произвести для всех пяти сигналов, исследованных в указанных лабораторных работах.

Наблюдать синтезируемые сигналы на выходе генератора непрерывного сигнала (гн. Сигнал ПРД) и на выходах ФНЧ-I и ФНЧ-II (гнездо «Сигнал ПрМ») при частоте дискретизации, соответственно равной 4, 8, 16 кГц (положения 1, 2, 3 переключателя П1). Зарисовать осциллограммы, обратив внимание на различия синтезированных сигналов в зависимости от частоты дискретизации и характеристик ФНЧ. Сравнить с идеальными сигналами. Идеальные сигналы были получены при выполнении лабораторных работ №1 и №2.

3.5 Содержание отчёта

1 Цель работы.

2 Осциллограммы синтезируемых сигналов в одинаковом временном масштабе по подразделу 3.4.

3 Выводы и замечания по результатам работы.

3.6 Контрольные вопросы и задания

- 1 Сформулируйте условия, при которых сигнал может быть представлен рядом Котельникова.
- 2 Сформулируйте теорему Котельникова.
- 3 Каким образом в лабораторном макете формируется сигнал, удовлетворяющий условиям теоремы Котельникова?
- 4 Какой вид имеет спектр сигнала, представленного в виде дискретных отсчётов?
- 5 Дайте спектральное пояснение теоремы Котельникова.
- 6 Каким образом может быть восстановлено непрерывное колебание по дискретным отсчётам?
- 7 Объясните принцип и поясните работу генератора непрерывных сигналов произвольной формы.
- 8 Поясните работу лабораторного макета.
- 9 Объясните погрешность синтезирования реальных сигналов по дискретным отсчётам.
- 10 Как зависит погрешность восстановления сигнала, связанная с конечностью пределов суммирования, от времени?
- 11 В чем состоит «избыточность» непрерывного сигнала, спектр которого ограничен?
- 12 Каким образом свойство «избыточности» непрерывного сигнала, спектр которого ограничен, можно использовать для передачи нескольких непрерывных сообщений по дискретному каналу связи?

Лабораторная работа №4
ФИЛЬТР НИЖНИХ ЧАСТОТ

4.1 Цель работы

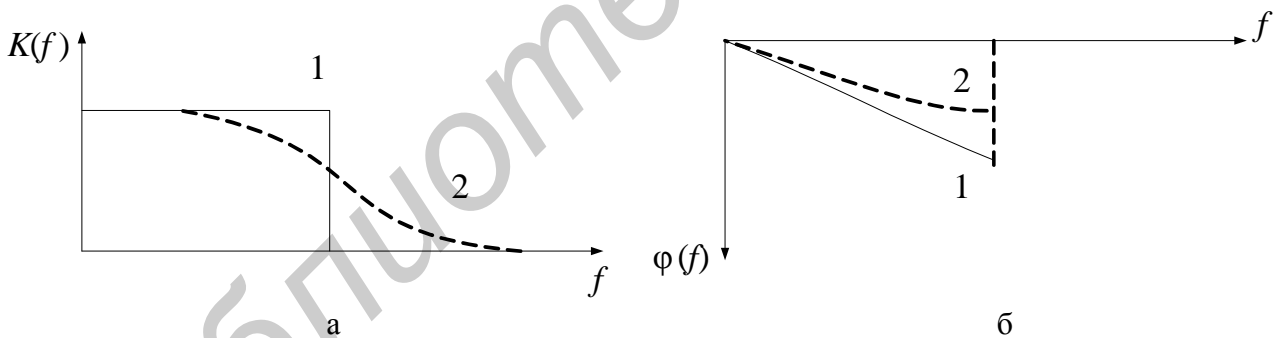
Изучение характеристик и параметров фильтров нижних частот. Использование ФНЧ при восстановлении сигналов, дискретизированных в соответствии с теоремой Котельникова.

4.2 Краткие теоретические сведения

Фильтр нижних частот – устройство, которое с минимальным ослаблением пропускает спектральные составляющие сигнала ниже некоторой заданной граничной частоты (F_B), называемой частотой среза, и эффективно ослабляет или полностью подавляет спектральные компоненты выше этой частоты. Вследствие этого АЧХ идеального ФНЧ должна быть равномерна и равна единице в частотном диапазоне от 0 до F_B , и обращаться в нуль на остальных частотах (рисунок 4.1):

$$K(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq F_B, \\ 0, & f > F_B, \end{cases}$$

а ФЧХ должна быть линейна в указанном частотном диапазоне: $\varphi(f) = -\omega t$.



а – амплитудно-частотная характеристика; б – фазочастотная характеристика;
1 – идеальный ФНЧ; 2 – неидеальный ФНЧ

Рисунок 4.1 – Характеристики фильтра нижних частот

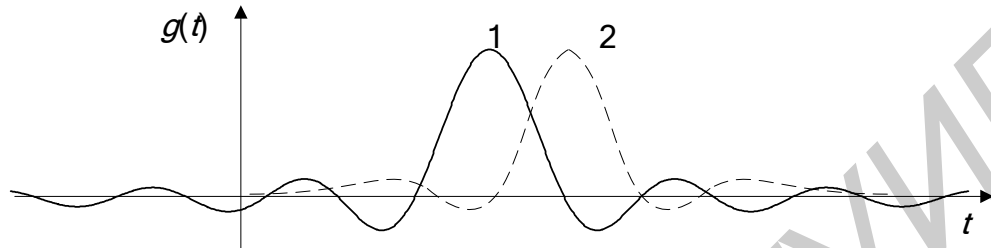
Импульсная характеристика $g(t)$ фильтра, как известно, определяется обратным преобразованием Фурье от комплексного коэффициента передачи $\dot{K}(f)$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(f) e^{j\omega t} df .$$

Для рассматриваемого случая идеального ФНЧ

$$g(t) = \int_{-F_B}^{F_B} e^{j\omega(t-\tau)} df = 2F_B \frac{\sin \omega_B(t-\tau)}{\omega_B(t-\tau)}. \quad (4.1)$$

Импульсная характеристика идеального ФНЧ приведена на рисунке 4.2.



1 – идеальный ФНЧ; 2 – неидеальный ФНЧ

Рисунок 4.2 – Импульсная характеристика

Нетрудно заметить, что импульсная характеристика идеального ФНЧ (4.1) с точностью до постоянного коэффициента совпадает с базисной функцией ряда Котельникова (3.2), следовательно, идеальный ФНЧ оптимально подходит для восстановления сигнала по дискретным отсчётам, в соответствии с теоремой Котельникова.

По определению импульсная характеристика есть реакция фильтра на дельта-функцию. Колебания, имеющие форму отсчётной функции ряда Котельникова (3.2), можно получить на выходе идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с граничной частотой F_B при действии на его входе дельта-импульса $\delta(t)$.

Каждый отсчёт дискретного сигнала является взвешенным дельта-импульсом $\delta(t)$, на который идеальный ФНЧ будет откликаться своей импульсной характеристикой $g(t)$, умноженной на соответствующий весовой коэффициент. На выходе фильтра отклики будут суммироваться и, поскольку весовые коэффициенты численно равны значениям исходного сигнала в соответствующий момент времени, на выходе фильтра мы получим исходный непрерывный сигнал (3.1).

Принцип действия идеального ФНЧ для восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчётам может быть пояснен и в частотной области. Анализируя спектр дискретного сигнала (см. рисунок 3.3), можно заметить, что идеальный ФНЧ с частотой среза, равной граничной частоте спектра непрерывного сигнала F_B , удалит все копии спектра, сохранив лишь низкочастотную составляющую. Следовательно, спектр сигнала на выходе ФНЧ будет полностью совпадать с исходным непрерывным сигналом (рисунок 4.3).

Характеристики реальных фильтров $K(f)$ и $\varphi(f)$ отличаются от идеальных (пунктирные кривые 2 на рисунке 4.1), что приводит к отклонению реальной

импульсной характеристики от идеальной (кривая 2 на рисунке 4.2). Неидеальность характеристик ФНЧ приводит к отклонению реальной функции отсчётов от идеальной и, как следствие, к появлению дополнительных погрешностей восстановления непрерывного сигнала $x(t)$ по отсчётам.

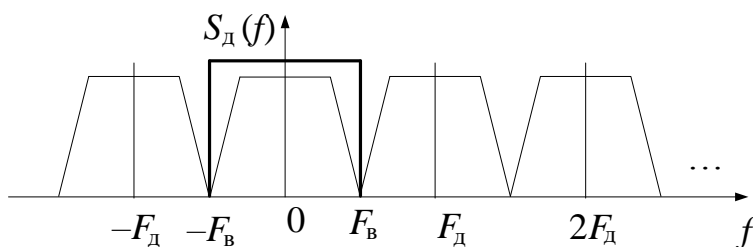


Рисунок 4.3 – Спектр дискретного сигнала при $F_d = 2F_B$ и АЧХ идеального ФНЧ

4.3 Описание лабораторной установки

На рабочем месте размещаются:

- генератор звуковой, ГЗ-33;
- лабораторный макет;
- двухлучевой осциллограф, С1-18.

Схема лабораторного макета представляет собой имитатор дискретного канала связи с амплитудно-импульсной модуляцией и включает передатчик, эквивалент линии связи и приёмник. Подробное описание передающей части и органов управления лабораторного макета приведено в подразделе 3.3. На приёмной стороне включены фильтры низких частот ФНЧ-I и ФНЧ-II.

ФНЧ-I имеет частоту среза 4 кГц, а ФНЧ-II – 4,5 кГц. Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ-I имеет более прямоугольную форму (т. е. в большей степени приближается к характеристике идеального фильтра) по сравнению с характеристикой ФНЧ-II.

Для проведения лабораторной работы необходимо собрать схему, представленную на рисунке 4.4.

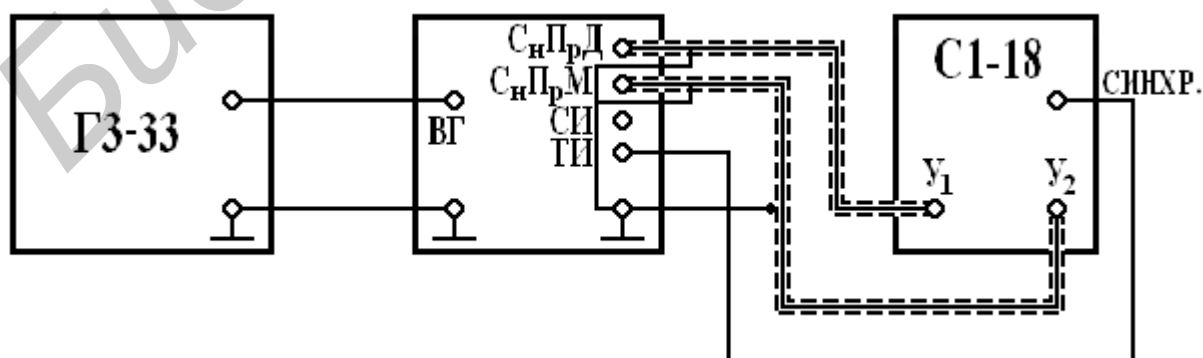


Рисунок 4.4 – Структурная схема исследования

4.4 Лабораторное задание и порядок выполнения работы

1 *Определение амплитудно-частотных характеристик фильтров нижних частот ФНЧ-I и ФНЧ-II*

Подготовить звуковой генератор (ЗГ) и осциллограф к работе. Собрать схему исследования (рисунок 4.4). Включить лабораторный макет.

Тумблер ПЗ «синус – импульс» макета поставить в положение «Синус». Подключить вход осциллографа к выходу ФНЧ-I (положение 3 переключателя П4). Вращая ручку «Рег. Выхода» звукового генератора, установить напряжение ЗГ на частоте $f_{зг} = 1$ кГц, чтобы амплитуда напряжения на выходе ФНЧ-I была бы равна 1 В, контролируя значение амплитуды по осциллографу.

Снять значения нормированной амплитудно-частотной характеристики фильтра, как отношения амплитуд сигнала на выходе фильтра на текущей частоте и на частоте 1 кГц, задавая значения частоты через 0,2 кГц в диапазоне 0,4 ÷ 5 кГц и через 0,5 кГц в диапазоне частот 5 ÷ 10 кГц. Полученные результаты занести в таблицу. Достроить график характеристики в логарифмическом масштабе по оси f и определить коэффициент прямоугольности по формуле

$$K_n = \frac{f_{0,5}}{f_{0,1}},$$

где $f_{0,5}$ и $f_{0,1}$ – частоты, соответствующие значениям нормированной характеристики по уровням 0,5 и 0,1.

Подключить вход осциллографа к выходу ФНЧ-II (положение 4 переключателя П4) и, вращая ручку «рег. выхода» звукового генератора, установить напряжение ЗГ на частоте $f_{зг} = 1$ кГц, чтобы амплитуда напряжения на выходе ФНЧ-II была бы равна 1 В, контролируя амплитуду напряжения фильтра по осциллографу. Снять нормированную амплитудно-частотную характеристику ФНЧ-II.

2 *Определение импульсной характеристики фильтра нижних частот*

Тумблер ПЗ «синус – импульс» поставить в положение «импульс».

Тумблер П2 «одиочн. – последов.» поставить в положение «одиочн.».

Зарисовать импульсы на входе фильтров НЧ (положение 1 переключателя П4) и импульсные характеристики ФНЧ-I, ФНЧ-II соответственно положения 3 и 4 переключателя П4, а также импульсную характеристику ФНЧ генератора непрерывного сигнала (Гнездо «Сигнал ПрД»). Обратит внимание на различия импульсных характеристик и сравнить их с характеристикой идеального ФНЧ (рисунок 4.2).

4.5 Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Таблицы с результатами измерений по пункту 1 подраздела 4.5.
3. Графики зависимостей и осциллограммы по пункту 1 подраздела 4.5.
4. Осциллограммы в одинаковом временном масштабе по пункту 2 подраздела 4.5.
5. Выводы и замечания по результатам работы.

4.6 Контрольные вопросы и задания

- 1 Дайте определение фильтра нижних частот.
- 2 Нарисуйте АЧХ и ФЧХ идеального и реального ФНЧ.
- 3 Как определяется импульсная характеристика фильтра по известному частотному коэффициенту передачи?
- 4 Нарисуйте импульсную характеристику идеального и реального ФНЧ.
- 5 Для чего при восстановлении сигнала, представленного в виде суммы отсчётов, применяется идеальный ФНЧ?

Литература

- 1 Теория электрической связи : учебник для вузов / А. Г. Зюко [и др.] ; под ред. Д. Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 1999. – 432 с.
- 2 Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов по спец. «Радиотехника» / С. И. Баскаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1988. – 448 с.
- 3 Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986. – 432 с.
- 4 Клюев, Л. Л. Теория электрической связи / Л. Л. Клюев. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

Учебное издание

Рощупкин Яков Викторович
Чёрная Ирина Исааковна

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСВЯЗИ.
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

В 2-х частях
Часть 1

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ**

ПОСОБИЕ

Редакторы *Т. П. Андрейченко, И. В. Ничипор*
Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная правка, оригинал-макет *А. А. Лысеня*

Подписано в печать
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 3,0.

Формат 60×84 1/16.
Отпечатано на ризографе.
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л.
Заказ 299.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6