УДК 519.714.5

РЕШЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Назаров С.Г.[1], Рахимов М.Р.[2]

Государственный энергетический институт Туркменистана, Мары, Туркменистан,
[1]energetikatdei@gmail.com, [2]rahymowmuhammet72@gmail.com

Аннотация: В данной работе рассматривается не классическая краевая задача, известная в литературе как задача Бицадзе-Самарского. Полученное решение может быть полезным при компьютерном проектировании в электронике и процессе компьютерной технологии в целом. Предложенная процедура построения решения по спектральному разложению может быть применена в компьютерной математике для создания пакета программ. Построена двукратная базисность Рисса собственных и присоединенных функций решенной краевой задачи, установлена двукратная разложимость априори заданных функций, что является важным результатом для устойчивости колебательных и диффузионных процессов.

Ключевые слова: моделирование, не классическая задача, базис Рисса, компьютерная математика.

ВВЕДЕНИЕ

Компьютерное проектирование в электронике и процессе компьютерной технологии в целом, основывается на создание удобной математической модели, позволяющие применить алгоритмы численных методов и логических операций. В проектируемом объекте в создании триады «модель-алгоритм-программа» [1] важное место занимает математическое моделирование изучаемых технических процессов. В настоящее время, наравне с математическим моделированием, бурно развивается и искусство компьютерного моделирования, также компьютерная математика. В этом направлении науки значительно продвинута теория алгоритмов и составления компьютерных программ для вычисления значений функций, приближенного решения алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Несмотря на это, по сравнению с программным обеспечением решений математических задач обыкновенных дифференциальных уравнений, компьютерная математика с программами вычислений решений оптимального моделирования сложных систем, состояния которых описываются линейными и нелинейными уравнениями в частных производных, развита значительно меньше. Эта в первой очереди связано с трудно разрешимыми проблемами несамосопряженных краевых задач математической физики. Оптимальное моделирование тепловых и колебательных процессов, описываемыми несамосопряженными краевыми условиями, методом спектрального разложения приводит к разрешимости проблемы базисности систем корневых функций. Исследованию систем корневых функций несамосопряженных задач посвящены многочисленные работы авторов. Отметим лишь некоторые из них [2,3], которые явились отправной точкой для дальнейшего развития фундаментальной теории несамосопряженных операторов [4]. В настоящей работе предлагается схема построения системы базисных функций несамосопряженной краевой задачи типа Бицадзе-Самарского, которая используется в решении соответствующей задачи оптимального управления и может быть применено в компьютерной математике для создания пакета программ вычислений значений функций по методу разделения переменных. При этом строится двукратная базисность Рисса, что является важным результатом для устойчивости колебательных процессов.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим не классическую краевую задачу, известную в литературе как задача Бицадзе-Самарского [4]. Требуется найти решение следующей задачи:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0,x) = f_o(x) \in \widetilde{w}_2^1(0,1),\ u_t(0,x) = f_1(x) \in\ L_2(0,1), \tag{2}$$

$$u(t,0) = 0,\ \ u_x(t,0) = u_x(t,1)\,, t \in (0,T). \tag{3}$$

Заметим, что условие (3) соответствует граничным условиям колебаний кольца или стержень правая сторона, которой свободно колеблется с углом закрепленного левого конца. Представив искомое решение этой задачи в виде $u(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$, i – мнимая единица, придем к несамосопряженной спектральной задаче:

$$L(i\lambda)u = u'' + \lambda^2 u = u'' + i^2(i\lambda)^2 u = 0, \quad u(0) = 0, u'(0) = u'(1), \tag{4}$$

где $i\lambda$ –собственное значение (с.з.) Разрешив задачу (4), найдем следующие с.з. и соответствующие им собственные элементы (с.э.):

$$i\lambda_o = 0; \quad i\lambda_k = 2k\pi i, \quad k = 1,2,\dots \ , \ u_o(x) = x, \ u_o^k(x) = \lambda_k^{-1} \sin \ \lambda_k x, \quad k = 1,2,\dots.$$

Система с.э $\{x, \lambda_k^{-1} sin\lambda_k x\}$ не образует полной системы в $L_2(0,1)$. Дополним эту систему до полной в $L_2(0,1)$ системы добавлением к ней соответствующих присоединенных элементов (п.э.) Так как кратность с.з. $i\lambda_k$, $k = 1,2,\dots$ краевой задачи (4) равна двум, то длина цепочки п.э. к с.э. $u_o^k = \lambda_k^{-1} sin\lambda_k x$ равна единице, а с.э. $u_o = x$, соответствующая с.з. $i\lambda_o = 0$, п.э. не имеет. П.э. первого порядка определяется из следующего уравнения:

$$\frac{d^2u_1^k}{dx^2} + \lambda_k^2 u_1^k - 2i\lambda_k u_o^k = 0, \ u_1^k(0) = 0, \ \frac{du_1^k(0)}{dx} = \frac{du_1^k(1)}{dx} \tag{5}$$

Решение задачи (5) имеет вид: $u_1^k(x) = \lambda_k^{-1}\left(\frac{1}{2\lambda_k} sin \ \lambda_k x - xcos \ \lambda_k x\right) i.$

Составим вектор $\{y_h^k\}$, $y_h^k = \left\{y_h^{(k,0)}, y_h^{(k,1)}\right\}$; $m_k = 2$; $h = 0,1$; $k = 1,2,\dots$;

$y_h^{(k,0)} = u_h^k, y_h^{(k,1)} = i\lambda_k u_h^k + u_{h-1}^k$ из с.п.э. оператора $L(i\lambda)$ из (4).

Сопряженная краевая задача, соответствующая оператору $L^*(-i\lambda)$, имеет вид

$$\frac{d^2\vartheta_o^k}{dx^2} + \lambda_k^2 \vartheta_o^k = 0, \quad \frac{d\vartheta_o^k(1)}{dx} = 0, \ \vartheta_o^k(0) = \vartheta_o^k(1). \tag{6}$$

Для п.э. оператора L^* имеем уравнение

$$\frac{d^2\vartheta_1^k}{dx^2} + \lambda_k^2 \vartheta_1^k + 2\lambda_k i\vartheta_o^k = 0, \frac{d\vartheta_1^k(1)}{dx} = 0, \ \vartheta_1^k(0) = \vartheta_1^k(1). \tag{7}$$

Разрешив краевые задачи (6) и (7), найдем, что $\vartheta_o(x) \equiv 1$, $k = 1,2,\dots$.

$$\vartheta_o^k(x) = -2 \cos \lambda_k x, \ \vartheta_1^k(x) = -2i\left[(1-x)\sin \lambda_k x - \frac{1}{2\lambda_k}\cos \lambda_k x\right],$$

Тогда находим: $k = 1,2,\dots; h = 0,1$,

$$\tilde{y}_h^k = \left\{\lambda_k u_h^k; i\lambda_k u_h^k + u_{h-1}^k\right\}, \ \tilde{z}_h^k = \left\{i\,\vartheta_{1-h}^k - \lambda_k^{-1}\vartheta_{-h}^k; \ -\vartheta_{1-h}^k\right\},$$

Определим элементы

$$\tilde{y}_\circ^\circ = \{u_\circ, iu_\circ\} = \{x, ix\} \in \mathcal{L}_2(0,1), \tilde{z}_\circ^\circ = \{1, i\} \in \mathcal{L}_2(0,1) = L_2(0,1) \oplus L_2(0,1).$$

Тогда

$$(\tilde{z}_h^k, \tilde{y}_\nu^l)_{\mathcal{L}_2(0,1)} = \delta_{h\nu}^{ke}, k, l = 0,1,2,\dots; h = 0,\dots,m_k - 1; \nu = 0,\dots,m_l - 1; m_\circ = 1, m_k = 2, k = 1,2,\dots$$

Система $\left\{\tilde{y}_h^k\right\}, k = 0,1,2\dots; h = 0,1$ полна в $\mathcal{L}_2(0,1)$.

Доказательство этого утверждения для действительной вектор-функции $f = \{f_\circ, f_1\} \in \mathcal{L}_2(0,1)$ вытекает из следующего соображения. Пусть

$$\int_\circ^1 f\,\tilde{y}_h^k dx = 0, \qquad k = 0,1,2\dots; \quad h = 0,1.$$

Тогда легко получим $\int_\circ^1 f_n(x)xdx = \int_\circ^1 f_n sin\lambda_k xdx = \int_\circ^1 f_n xcos\lambda_k xdx = 0, n = 0,1$, что требовалось доказать.

Вектор-функцию $f = \{f_\circ, f_1\} \in \mathcal{L}_2(0,1)$ можно разложить в ряд по полной системе $\{sin\lambda_k x, xcos\lambda_k x\}$, $k = 0,1,2\dots$. Система $\left\{\tilde{y}_h^k\right\}$, $k = 0,1,2\dots; h = 0,\dots,m_k - 1$ образует базис Рисса в $\mathcal{L}_2(0,1)$.

Из приведенного выше рассуждения вытекает, что система функций, составленная из производных цепочек М.В. Келдыша, т.е. система

$$y_0^{(0,0)} = x \ , \ y_0^0 = \left\{y_0^{(0,0)} \ , \ 0\right\} \ , y_h^k = \ \{y_h^{(k,0)}, y_h^{(k,1)}\} \ ; \ y_h^{(k,0)} = u_h^k \ , \quad y_h^{(k,1)} = i\lambda_k u_h^k + u_{h-1}^k, \ \ h = 0,1; \ \ k = 1,2\dots,$$

не образует полной системы в $\mathcal{L}_2(0,1)$.

Система z_h^k принимает вид $z_h^k = \left\{\zeta_h^{(k,0)}, \zeta_h^{(k,1)}\right\}$, $\zeta_h^{(k,0)} = i\lambda_k \vartheta_{1-h}^k - \vartheta_{-h}^k$, $\zeta_h^{(k,1)} = -\vartheta_{1-h}^k$.

Находим:

$$\tilde{y}_h^k = \left\{\lambda_k u_h^k; i\lambda_k u_h^k + u_{h-1}^k\right\}, \ \tilde{z}_h^k = \left\{i\,\vartheta_{1-h}^k - \lambda_k^{-1}\vartheta_{-h}^k; \ -\vartheta_{1-h}^k\right\}, \qquad k = 1,2,\dots; h = 0,1.$$

Определим элементы $\tilde{y}_\circ^\circ = \{u_\circ, iu_\circ\} = \{x, ix\} \in \mathcal{L}_2(0,1), \tilde{z}_\circ^\circ = \{1, i\} \in \mathcal{L}_2(0,1)$.

Тогда $(\tilde{z}_h^k, \tilde{y}_\nu^l)_{\mathcal{L}_2(0,1)} = \delta_{h\nu}^{ke}, k, l = 0,1,2,\dots; h = 0,\dots,m_k - 1; \nu = 0,\dots,m_l - 1; m_\circ = 1, m_k = 2, k = 1,2,\dots$

Более того, $(\mu, \lambda_k y_h^{(k,0)})_{L_2(0,1)} = (\mu, y_h^{(k,1)})_{L_2(0,1)} = 0,\ \ k = 1,2\,...;h = 0,1.$

$$(\lambda_k^{-1}\zeta_h^{(k,0)}\mu x)_{\mathcal{L}_2(0,1)}(\zeta^{(k,1)}, \mu x)_{\mathcal{L}_2(0,1)} = 0,\ \ k = 1,2\,...;h = 0,1.$$
$$(\zeta_h^{(k,n)}, y_\nu^{(k,m)})_{\mathcal{L}_2(0,1)} = 0,\ \ k = 1,2\,...,$$

где $\mu = 1$, либо i; $h, \nu, n, m = 0,1$, при этом выполняется хотя бы одно из неравенств: $n \neq m$и $h \neq \nu$.

Система $\{sin\lambda_k x, xcos\lambda_k x\}, k = 0,1,2$ ...полна (даже образует базис Рисса в $L_2(0,1)$) в $L_2(0,1)$,.Система $\{\tilde{y}_h^k\}, k = 0,1,2\,...;h = 0,\dots, m_k - 1$ образует базис Рисса в $\mathcal{L}_2(0,1)$.

Произвольные заданные функции $f_0(x) \in \widetilde{W}_2^1(0,1)$ и $f_1(x) \in L_2(0,1)$ можно представить в виде безусловно сходящихся в норме $L_2(0,1)$ рядов по системе производных цепочек $(y_0^0 = \{x, ix\})\,\{y_h^k\},\ k = 0,1,2\,...,h = 0,\dots,m_k - 1$, составленной из с.п.э. оператора $L\ (i\ \lambda)$ из (4). Будем считать, что $f_n(x),\ n = 0,1$ действительные. Используя формулу двукратного разложения элементов f_0, f_1 , приведенную в [2-4] получим:

$$f_0(x) = Re[a_o x + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{1} a_h^k\, u_h^k], \tag{8}$$

$$f_1(x) = Re[a_o ix + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{1} a_h^k\,(i\lambda_k u_h^k + u_{h-1}^k)]\ \ , \tag{9}$$

$$a_o = \int_0^1 [\,f_o(x) - if_1(x)]dx,\ a_h^k = (f_o, i\lambda_k \vartheta_{1-h}^k)_{L_2(0,1)} - \left(f_{1,} \vartheta_{1-h}^k\right)_{L_2(0,1)}.$$

$$\tilde{a}_h^k = (f_o, i\vartheta_{1-h}^k - \lambda_k^{-1}\vartheta_{-h}^k)_{L_2(0,1)} - \left(f_1, \vartheta_{1-h}^k\right)_{L_2(0,1)}.$$

Для решения начально-краевой задачи (1)-(3) можно использовать базис Рисса $\{\tilde{y}_h^k\}$, составленный из с.п.э. задачи (4.4), и сопряженную с ней систему $\{\tilde{z}_h^k\}$.

Составим следующий ряд [4]:

$$u(t,x) = a_0(1+it)x + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{1} a_h^k\, e^{i\lambda kt}\left[u_h^k(x) + tu_{h-1}^k(x)\right]. \tag{10}$$

Тогда решение уравнения (1) с краевыми условиями (3) определяется по той же формуле (10), в которой коэффициенты a_h^k заменены с $\tilde{a}_h^k$, $\ \ k = 1,2,\dots$, т.е. При этом справедливо равенство

$$u(0,x) = \tilde{f}_0(x) = a_o x + \sum_{k=1}^{\infty}\sum\nolimits_{h=0}^{1} \tilde{a}_h^k\, u_h^k(x). \tag{11}$$

Тогда $\forall t \in (O,T]$ справедливы оценки ($F = \{F_o, F_1\}$ априори заданная вектор-функция):

$$\|u(t,x)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_h |\,a_h^k|^2 \leq\ C_2||F||_{\mathcal{L}_2(0,1)}^2 < \infty\ \ , F = \{F_o, F_1\}.$$
$$\|u_t(t,x)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C_1 \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_h |\,a_h^k|^2 \leq C_2\|F\|_{\mathcal{L}_2(0,1)}^2 < \infty, \tag{12}$$
$$\|u_x(t,x)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_h |\,a_h^k|^2 \leq C_2\|F\|_{\mathcal{L}_2(0,1)}^2 < \infty.$$

Нетрудно проверить, что функция $u(t,x)$ из (10) формально удовлетворяет уравнению (1), а также начальным и краевым условиям (2) и (3). Отметим, что ряды (8), (9) сходятся безусловно. Так как $\{y_h^k\}, = 0,1,2,\dots;h = 0,\dots,m_1 - 1$ образует базис Рисса в $\mathcal{L}_2(0,1)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_h |a_h^k|^2 < \infty.$$

Следовательно, ряд (10) $\forall t \in (O,T]$ безусловно сходится в норме $L_2(0,1)$. Получена оценка решений в пространстве решений. Функции $u(t,x)\,, u_t(t,x)$ и $u_x(t,x)$, определяемые согласно равенству (10), являются непрерывными функциями от $t \in [O,T]$ в норме $L_2(0,1)$. Начальные условия выполняются в следующем смысле:

$$\lim_{t\to 0}\|Re\ u(t,x) - f_o(x)\|_{W_2^1(0,1)} = 0;\ \lim_{t\to 0}\|Re\ u_t(t,x) - f_1(x)\|_{L_2(0,1)} = 0.$$

Функция $Reu(t,x) = v(t,x)$ является обобщенным решением задачи (1) – (3), из класса $\widetilde{W}_2^1(Q) = \{f(t,x){:}\, f(t,x) \in W_2^1(Q),\ Q = (O,T)\mathrm{x}(0,1),\ f(t,0) = f_x(t,0) - f_x(t,1) = 0\}$ почти $\forall t \in (O,T)$ и уравнению (1) удовлетворяет в смысле интегрального тождества:

$$\int_0^1 \vartheta_t(t,x)\omega(t,x)|_{t_1}^{t_2}\,dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 [\vartheta_t\omega_t - \vartheta_x\omega_x]dxdt,$$

$\forall\omega \in \tilde{\tilde{W}}_2^1(Q) = \{f(t,x): f \in W_2^1(Q),\ \ f'(t,1) = f(t,1) - f(t,0) = 0\}$ и почти $\forall t_1, t_2 \in [O,T]$.

Из оценок (12) вытекает, что задача (1)-(3) поставлена корректно, т.е. существует единственное решение задачи (1)-(3) в пространстве $\tilde{W}_2^1(Q)$. Это решение в метрике пространства $\tilde{W}_2^1(Q)$ устойчиво относительно начальной вектор-функции $f = \{f_0, f_1\} \in \tilde{W}_2^1(0,1) \oplus L_2(0,1)$.

Задача (1)-(3) поставлена корректно, т.е. существует единственное решение задачи (1)-(3) в пространстве $\tilde{W}_2^1(Q)$. Это решение в метрике пространства $\tilde{W}_2^1(Q)$ устойчиво относительно начальной вектор-функции $f = \{f_0, f_1\} \in \tilde{W}_2^1(0,1) \oplus L_2(0,1)$.

Для приближенного значения функции $u(t,x)$ можно брать функцию

$$u_N(t,x) = \sum_{k=1}^{N}\sum_h a_h^k\, e^{i\lambda_k t}\left[u_h^k(x) + t\, u_{h-1}^k(x)\right] + a_o(1+i\,t)x,$$

полученную из ряда (10) N – усечением.

Отметим, что в равенствах (8), (9), (11) для функций $f_o(x)$, $\tilde{f}_o(x)$ коэффициенты при $u_h^k(x)$ отличаются друг от друга на множители λ_k. Это означает, что для решения задачи (1) - (3) по базису Рисса $\{\tilde{y}_h^k\}$ нужно разложить функцию $f_o(x) \in L_2(0,1)$ (а не заданную $\tilde{f}_o(x) \in \tilde{W}_2^1(0,1)$). Отметим, что функция $f_o(x)$ по росту коэффициентов разложения напоминает производную $\tilde{f}_o'(x)$. Заметим, что для применения базиса $\{\tilde{y}_h^k\}$ в краевой задаче (1) – (3) первое начальное условие нужно задать по формуле (11), что может быть использовано в аналитическом конструировании технологических процессов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе результаты по двукратному базису Рисса и решению не классической краевой задачи может быть полезными в компьютерном проектировании электронной системы и создании пакета программ для численного решения задач колебательных и диффузионных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Игнатьев Ю.Г., Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математике Maple, Казанский университет, 2014.

[2] Келдыш М.В.: О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР, 1951, Т.77, № 1. – С. 11-14.

[3] Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР, 1983, Т. 273, № 5. – С. 1048-1053.

[4] Рахимов М.Р. Оптимальное моделирование процессов теплопередачи и колебаний. Методы динамического программирования и спектрального разложения, научная монография, LAP, LAMBERT Academic Publishing, ISBN:978-620-3-30910-2.

SOLUTION OF A NON-CLASSICAL PROBLEM FOR COMPUTER MODELING

S.G. Nazarov[1], M.R. Rakhimov[2]

State Energy Institute of Turkmenistan, Mary, Turkmenistan,
[1]energetikatdei@gmail.com, [2]rahymowmuhammet72@gmail.com

Abstract: This paper discusses a non-classical boundary value problem, known in the literature as the Bichadze-Samarsky problem. The obtained solution can be useful in computer-aided design in electronics and in the process of computer technology in general. The proposed procedure for constructing a solution based on spectral decomposition can be applied in computational mathematics for creating software packages. A twofold basis of Riesz eigenfunctions and adjoint functions for the solved boundary value problem is constructed, and the double decomposability of a priori given functions is established, which is an important result for the stability of oscillatory and diffusion processes.

Keywords: modeling, non-classical problem, Riesz basis, computational mathematics.