

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ M-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ФУНКЦИЮ УОЛША

В. Ю. ИВАШИН, Т. Н. ДВОРНИКОВА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Республика Беларусь)

E-mail: dvornikova@bsuir.by

Аннотация Функции Уолша применяются во многих областях, таких как теория информации, цифровая обработка сигналов, а также теоретическая информатика. Функции Уолша являются важным инструментом в теории сигналов и информатики благодаря своим уникальным свойствам и простоте применения.

Abstract Walsh's functions are applied in many fields such as information theory, digital signal processing, and theoretical computer science. Walsh functions are an important tool in signal theory and computer science due to their unique properties and ease of application.

Введение

Преобразование сигналов является фундаментальной задачей в области цифровой обработки сигналов и находит широкое применение в различных областях, таких как радиотехника, телекоммуникации, компьютерная томография и многие другие.

В данной работе рассматривается задача преобразования M -последовательностей в функции Уолша, которая является одной из важных операций при обработке цифровых сигналов.

M -последовательность или последовательность максимальной длины – псевдослучайная двоичная последовательность, порожденная регистром сдвига с линейной обратной связью и имеющая максимальный период.

Функции Уолша широко используются в области шифрования данных и защиты информации. Это связано с тем, что функции Уолша обладают свойством ортогональности.

Основная часть

Функции Уолша являются кусочнопостоянными функциями с нормированным интервалом определения $[0, 1)$ или $[-0.5, +0.5)$ и интервалом изменения аргумента, который зависит от порядка системы функций Уолша и равен $\frac{1}{2^n}$, где $n = 1, 2, \dots$. Известны определения функций Уолша через разностное уравнение, функции Радемахера, тригонометрические функции и в виде матриц.

Как разностное уравнение функции Уолша определяются следующим выражением:

$$W(2j + p, \theta) = (-1)^{\lfloor j \rfloor} \left\{ W \left[j, 2 \left(\theta + \frac{1}{4} \right) \right] + (-1)^{j+p} W \left[j, 2 \left(\theta - \frac{1}{4} \right) \right] \right\}, \quad (1)$$

где $\lfloor * \rfloor$ – обозначает целую часть числа; $p = 0$ или 1 ; $j = 0, 1, 2, \dots$; $W(0, \theta) = 1$ для $-0.5 \leq \theta \leq 0.5$; $W(0, \theta) = 0$ для $\theta < -0.5$, $\theta \geq 0.5$. Графики первых четырех функций Уолша представлены на рисунке 1.

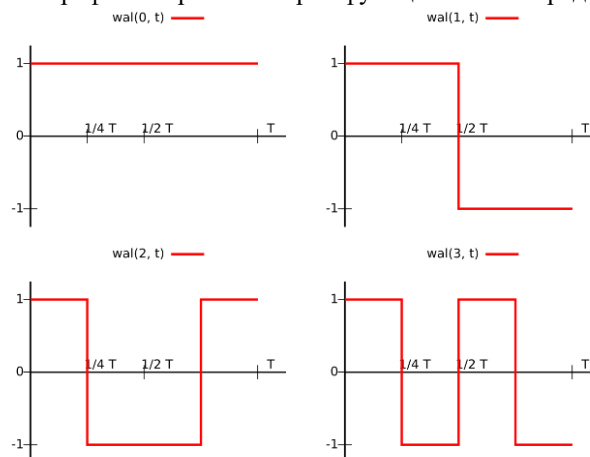


Рис. 1. Графики первых четырех функций Уолша

Упорядочение функций Уолша может проводиться различными способами. Упорядочение Пэли, Адамара, Качмажа и Трахтмана являются особыми, так как их матрицы являются симметричными, и поэтому они рассматриваются и используются в быстрых преобразованиях Уолша.

Между номерами функций Уолша в различных системах упорядочения существует связь. Связь между номерами функций Уолша в различных системах упорядочения приведена на рисунке 2.

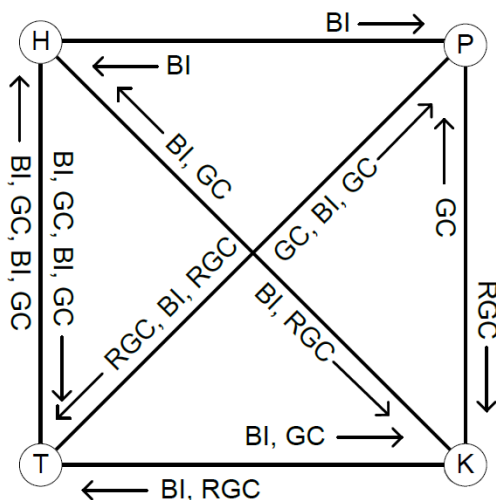


Рис.2. Связь между номерами функций Уолша в различных системах упорядочения

BI - бинарная операция инверсии.

GC - преобразование в код Грея.

RGC - преобразование в обратный код Грея.

Если необходимо сравнить порядковые номера функций Уолша в различных системах, следует провести несколько операций с бинарными порядковыми номерами в соответствии со схемой на рисунке 2. Для сравнения номеров функций Уолша в различных системах, необходимо выполнить одну или несколько операций с двоичными представлениями номеров функций в соответствии с приведенной схемой. Схема может быть проиллюстрирована на примере в таблице 1. Данные таблицы показывают, что для перехода от одной системы упорядочения к другой производится перестановка столбцов матрицы Уолша. Она может быть использована для преобразования псевдослучайной последовательности в Уолш-последовательность.

Таблица 1. Номера функции в системах упорядочения Трахтмана и Пэли

Номер функции в системе Т	Двоичный номер в системе Т	Двоичный код после GC операции	Двоичный код после BI операции	Двоичный номер в системе Р	Номер в системе Р
0	000	000	000	000	0
1	001	001	100	110	6
2	010	011	110	101	5
3	011	010	010	011	3
4	100	110	011	010	2
5	101	111	111	100	4
6	110	101	101	111	7
7	111	100	001	001	1

M-последовательность используется для синхронизации и помехоустойчивого кодирования информации. В приемном устройстве при синхронизации решается задача обнаружения и распознавания сигнала, а при декодировании – задача распознавания. В основе обработки сигнала при решении этих двух задач лежит базовый алгоритм вычисления корреляционного вектора принятого сигнала и опорной M-последовательности.

Процесс преобразования M -последовательности в функцию Уолша состоит из следующих этапов:

1. Формирование матрицы Уолша размером $M \times M$. Каждый элемент матрицы может быть равен 1 или -1.
2. Выбор M -битной M -последовательности.
3. Умножение каждого бита M -последовательности на соответствующий элемент матрицы Уолша. Это производится побитово, где 1 умножается на соответствующий элемент матрицы, а 0 – на элемент, измененный на противоположный знак.
4. Сложение полученных произведений по столбцам матрицы. В результате получается функция Уолша, соответствующая выбранной M -последовательности.

Такие последовательности обладают следующими основными свойствами:

1. M -последовательность является периодической с периодом, состоящим из N импульсов (символов).
2. боковые пики периодической автокорреляционной функции сигналов, образованных M -последовательностью, равны $1/N$.
3. M -последовательность в общем случае состоит из нескольких видов импульсов (например, импульсы могут отличаться начальными фазами, несущими частотами и т.д.). Импульсы различного вида встречаются в периоде примерно одинаковое число раз, т.е. все импульсы распределяются в периоде равномерно. Вследствие этого M -последовательности называют часто псевдослучайными.
4. Формируются M -последовательности как правило с помощью линейных переключательных схем на основе сдвигающих регистров. При этом, если применяется регистр с k разрядами и в M -последовательности используются p различных видов импульсов, то

$$N = pk - 1. \quad (2)$$

Число разрядов регистра $k = \log(N - 1) / \log(p)$. Следовательно, значительное увеличение числа импульсов N в периоде M -последовательности вызывает незначительное, увеличение числа разрядов регистра, так как зависимость k от N является логарифмической.

5. Автокорреляционная функция усеченной M -последовательности, под которой понимается непериодическая последовательность длиной в период N , имеет величину боковых пиков, близкую k . Поэтому с ростом N величина боковых пиков уменьшается.

Общая схема цифрового автомата, формирующего M -последовательность, приведена на рисунке 3.

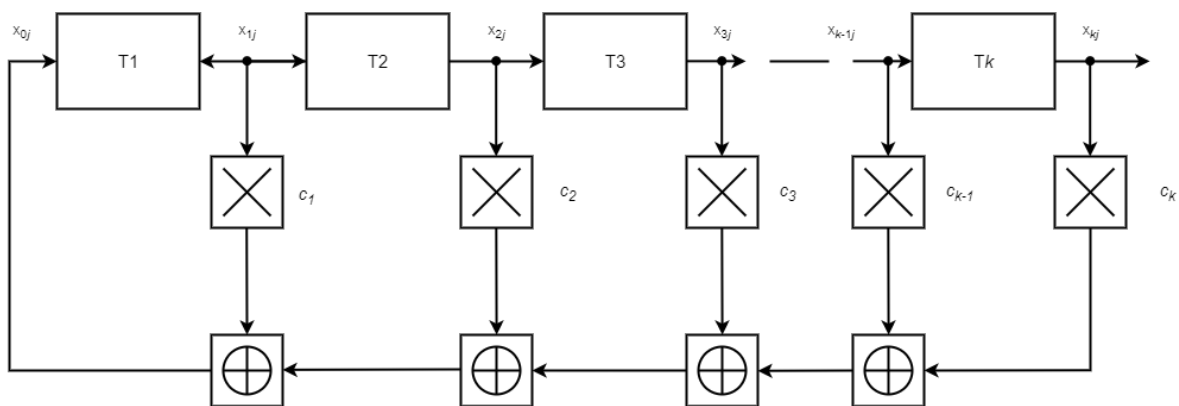


Рис.3. Цифровой автомат формирования M -последовательности

Схема основана на сдвигающем регистре с триггерами T_1, T_2, \dots, T_k , которые осуществляют задержку входного символа на один такт длительностью T_0 . Допустим, что используются p различных символов: $0, 1, 2, \dots, p-1$, которые образуют конечное множество символов $S = S(0, 1, \dots, p-1)$. Символы на выходах триггеров при j -м такте обозначены через $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}$, причем $x_{kj} \in S$. Символ на входе первого триггера обозначен x_{0j} . Символ на выходе j -го триггера на $(j+1)$ -м такте $x_{i,j+1} = x_{i-j}$ так как с каждым тактом символ со входа «переходит» на выход. Символы с выходов триггеров поступают на умножители, с выходов которых снимают символы $c_1x_{1j}, c_2x_{2j}, \dots, c_kx_{kj}$. Множители $c_i \in S$. Поэтому, если операция умножения в множителе производится по модулю p ($\text{mod } p$), то символы $c_kx_{kj} \in S$.

Заключение

Преобразования Уолша находят широкое применение при: построение цифровых фильтров; исследование систем автоматического управления (моделировании, оптимизации, идентификации и т.д.); формировании сигналов; анализе и синтезе логических устройств (в теории цифровых автоматов). Преобразования выполняются в различных системах перестановок, таких как Уолша-Адамара, Уолша-Качмажа, Уолша-Трахтмана и Уолша-Пэли и позволяет разработать аппаратный прототип. Преобразования функций Уолша могут быть использованы для дальнейшего проведения исследований и разработки в области цифровой обработки сигналов.

Список использованных источников

1. Якимов Е.В. Цифровая обработка сигналов / Е.В. Якимов, Г. В. Вавилова, И. А. Клубович. – М.: Издательство Томского политехнического университета, 2008. – 307 с.
2. Бутько, А. Быстрое декодирование кодов максимальной длины / А. Бутько. – Минск : Издательство Минский радиотехнический институт, 1982. – 20 с.
3. Ю. П. Гришин. Радиотехнические системы: Учеб. для вузов по спец. «Радиотехника» / Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др.; Под ред. Ю. М. Казаринова. –М.: Высш. шк., 1990. – 496 с.