Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В двух частях

Часть 1

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальности 6-05-0611-06 «Системы и сети инфокоммуникаций»

Минск БГУИР 2025

УДК 517(076)
ББК 22.1я73
И32

А в т о р ы:

Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец,
В. М. Метельский, М. А. Сафронова

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра высшей математики
Белорусского государственного аграрного технического университета
(протокол № 4 от 23.11.2023);

ученый секретарь Института математики
Национальной академии наук Беларуси
кандидат физико-математических наук, доцент Т. С. Бусел

И32 **Избранные** главы высшей математики. В 2 ч. Ч. 1 : Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление : пособие / Е. А. Баркова [и др.]. – Минск : БГУИР, 2025. – 98 с.
ISBN 978-985-543-774-2 (ч. 1).

Включает в себя темы, представляющие существенную значимость для профессиональной деятельности инженера. Теория функций комплексной переменной, конформные отображения, операционное исчисление, дискретные преобразования используются при решении задач, возникающих в системах и сетях инфокоммуникаций.

УДК 517(076)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-543-774-2 (ч. 1)
ISBN 978-985-543-773-5

1. Комплексные числа

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 3+2i$ и $z_2 = 2-i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

Δ $z_1 + z_2 = (3+2i)+(2-i) = 5+i,$

$z_1 - z_2 = (3+2i)-(2-i) = 1+3i,$

$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(2-i) = 6-3i+4i+2 = 8+i,$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+2i}{2-i} = \dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{6+3i+4i-2}{5} = \dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i.$ ▲

Пример 2. Представить комплексные числа $z_1 = \dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ и $z_2 = \dfrac{1-5i}{1+i}+(2-i)^3$ в алгебраической форме.

$$\Delta\ z_1 = \frac{5+i}{(1+i)(2-3i)} = \frac{5+i}{2-3i+2i+3} = \frac{(5+i)^2}{(5-i)(5+i)} = \frac{25+10i-1}{26} = \frac{12}{13}+\frac{5}{13}i,$$

$$z_2 = \frac{1-5i}{1+i}+(2-i)^3 = \frac{(1-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+8-12i-6+i = \frac{1}{2}(1-i-5i-5)+$$
$$+8-12i-6+i = -14i.\ ▲$$

Пример 3. Вычислить $i+i^2+i^3+\ldots+i^{1997}$.

Δ Имеем $i+i^2+i^3+\ldots+i^{1997} = (i+i^5+i^9+\ldots+i^{1997})+(i^2+i^6+i^{10}+\ldots+i^{1994})+$ $+(i^3+i^7+i^{11}+\ldots+i^{1995})+(i^4+i^8+i^{12}+\ldots+i^{1996})$.

Легко показать, что прогрессия $1, 5, 9, 1997$ содержит 500 членов.

Следовательно,

$i+i^2+i^3+\ldots+i^{1997} = 500i-499-499i+499 = i.$ ▲

Пример 4. Найти действительные решения уравнения $(3x-i)(2+i)+$ $+(x-iy)(1+2i) = 5+6i$.

Δ Находим действительную и мнимую части левой части уравнения:

$(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i) = (7x+2y+1)+i(5x-y-2).$

Согласно определению равенства комплексных чисел получаем систему

$$\begin{cases} 7x+2y+1=5; \\ 5x-y-2=6. \end{cases} \sim \begin{cases} 7x+2y=4; \\ 5x-y=8. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = \dfrac{20}{17}$, $y = -\dfrac{36}{17}$. ▲

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-(2+i)y=5-i; \\ ix-5y=-1-9i. \end{cases}$$

$$\Delta \left.\begin{cases} 3x-(2+i)y=5-i, \\ ix-5y=-1-9i. \end{cases}\right|_{3i} \Rightarrow \begin{cases} 3x-(2+i)y=5-i, \\ -3x-15iy=-3i+27. \end{cases}$$

$$(-2-i-15i)y=32-4i,$$

$$y=\frac{32-4i}{-2-16i}=2i, \quad ix=-1-9i+10i,$$

$$x=\frac{i-1}{2}=1+i. \quad ▲$$

Пример 6. Решить уравнение $z^2+|z|=0.$

Δ Пусть $z=x+iy$. Тогда $(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0$, откуда

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0; \\ 2xy=0, \end{cases}$$

если $x=0$, то $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=-1$; если $y=0$, то $x=0$.

Таким образом, корнями данного уравнения являются числа $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$. ▲

Пример 7. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$.

$$\Delta \ \frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+2i-1+1-2i-1}{2}=0.$$

Модуль числа z равен 0, аргумент числа z не определен. ▲

Пример 8. Найти модуль и аргумент числа $(1+i)^5$.

Δ Пусть $z_1=1+i$. Тогда $|z_1|=\sqrt{2}$, $\arg z_1=\frac{\pi}{4}$; $|z|=(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$, $\arg z=5\cdot\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$. Так как $-\pi<\arg z\le\pi$, то $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$. ▲

Пример 9. Записать в тригонометрической форме комплексные числа 3, -2, i, $1-i$, $\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}$, $1+\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}$.

Δ $3=3(\cos 0+i\sin 0)$, $-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$, $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$,

$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Так как $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, а $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$,

то $\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)==\cos\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10}$. Следовательно,

$\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}=1\left(\cos\frac{3\pi}{10}-i\sin\frac{3\pi}{10}\right)=1\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\right)$.

Воспользуемся формулами $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ и $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. Имеем: $1+\cos\frac{\pi}{7}=2\cos^2\frac{\pi}{14}$, $\sin\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}$. Следовательно,

$1+\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}=2\cos^2\frac{\pi}{14}-2i\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}=$

$=2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{14}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)\right)$. ▲

Пример 10. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z=-3i\left(\cos\frac{7\pi}{10}-i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$.

Δ Рассмотрим два числа: $z=-3i=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ и

$z_2=\cos\frac{7\pi}{10}-i\sin\frac{7\pi}{10}=1\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right)$.

Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а аргумент равен сумме аргументов. Таким образом,

$$z=z_1\cdot z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot 1\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right)=$$

$$=3\left(\cos\left(-\frac{6}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{6}{5}\pi\right)\right)=3\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right).$$ ▲

Пример 11. Записать в показательной форме комплексное число

$$z=\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(\cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{1-i}.$$

Δ Запишем в показательной форме каждое из трех чисел:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}},$$

$$z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12} = 1e^{-i\cdot\frac{7\pi}{12}},$$

$$z_3 = 1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}.$$

Тогда $z = \dfrac{2\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}\cdot 1e^{-i\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{2}}$. ▲

Пример 12. Вычислить $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{723}\cdot(i-1)^{358}}{2^{900}}$.

Δ Запишем числа $\sqrt{3}+i$ и $i-1$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$i-1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

По формуле Муавра находим:

$$(\sqrt{3}+i)^{723} = 2^{723}\left(\cos\frac{723}{6}\pi + i\sin\frac{723}{6}\pi\right) = 2^{723}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{723}i,$$

$$(i-1)^{358} = 2^{179}\left(\cos\frac{1074}{4}\pi + i\sin\frac{1074}{4}\pi\right) = 2^{179}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{179}i,$$

Искомое произведение равно

$$\frac{2^{723}i\cdot 2^{179}i}{2^{900}} = 4i^2 = -4. \quad ▲$$

Пример 13. Пользуясь формулами бинома Ньютона и Муавра, выразить через степени кратных углов $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$.

Δ По формуле бинома Ньютона

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi.$$

По формуле Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$.

Следовательно,

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi. \quad ▲$$

Пример 14. Найти все значения корня $w=\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

Δ Записав комплексное число $-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, находим

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

Откуда

$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right),\ k=0.$$

$$w_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right),\ k=1.$$

$$w_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)\right),\ k=2.\ \blacktriangle$$

Пример 15. Найти сумму $\sin x+\sin 2x+...+\sin nx,\ n\in N.$

Δ Используя формулы Эйлера, получим

$$\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{1}{2i}\Big((e^{ix}+e^{2ix}+...+e^{inx})-(e^{-ix}+e^{-2ix}+...+e^{-inx})\Big)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}}-\frac{e^{-ix}(1-e^{-inx})}{1-e^{-ix}}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-e^{inx}}{e^{-ix}-1}-\frac{1-e^{-inx})}{e^{ix}-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}-1+e^{inx}-e^{-ix}+e^{-i(n+1)x}+1-e^{-inx}}{1-e^{-ix}-e^{ix}+1}=$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\sin x-2i\sin(n+1)x+2i\sin nx}{2-2\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.\ \blacktriangle$$

Пример 16. Найти на сфере комплексных чисел $(r=1)$ точку, соответствующую точке $A(1;1)$.

Δ Через точки $P(0;0;2)$ и $A(1;1;0)$ проведем прямую: $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}$ (рис. 1.1).

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}=t; \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=t,\ y=t,\ z=-2t+2; \\ t^2+t^2+(-2t+1)^2=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=t,\ y=t,\ z=-2t+2; \\ 6t^2-4t=0. \end{cases}$$

$t=\frac{2}{3}$ (при $t=0$ получаем точку P).

Таким образом, $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. ▲

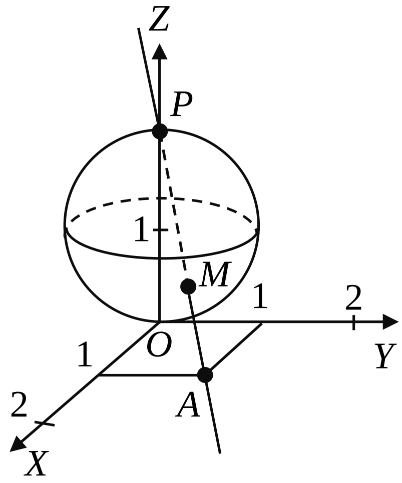


Рис. 1.1

Пример 17. Найти на плоскости точку, соответствующую точке сферы комплексных чисел $(r=1)$, $M(1;1;1)$.

Δ Через точки $P(0;0;2)$ и $M(1;1;1)$ проведем прямую:

$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

Положив $z=0$, находим искомую точку $A(2;2)$. ▲

Дополнительные задачи

1. Представить в алгебраической форме комплексное число

$z=\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}$. **Ответ:** $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$.

2. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=-3+i$.

Ответ: $\sqrt{10}\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)+i\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)\right)$.

3. Вычислить $i+2i^2+3i^3+...+1997i^{1997}$.

Ответ: $998+999i$.

4. Вычислить $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}$. **Ответ:** $\frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

5. Используя формулы бинома Ньютона и Муавра, выразить $\sin 4x$ и $\cos 4x$ через степени $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ: $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$; $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 \times$ $\times x \sin^2 x + \sin^4 x$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

Ответ: $w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $w_1 = -2 + i\sqrt{2}$, $w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

7. Используя формулу Эйлера, показать, что $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

8. Найти на сфере комплексных чисел $(r = 1)$ точку, соответствующую точке $A(0; 1)$.

Ответ: $M\left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

2. Последовательности комплексных чисел. Кривые и области на комплексной плоскости

Пример 1. Исследовать на ограниченность последовательность $z_n = (2+i)^n$.

Δ Так как $|z_n| = (\sqrt{5})^n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{5})^n = +\infty$. Таким образом, последовательность $z_n = (2+i)^n$ является не только неограниченной, но и бесконечно большой. ▲

Пример 2. Доказать, что последовательность $z_n = \frac{i^n + 3i^{n+2}}{4}$ является ограниченной, но расходится.

Δ Имеем $|z_n| = \left|\frac{i^n + 3i^{n+2}}{4}\right| \le \frac{|i^n| + |3i^{n+2}|}{4} = 1.$

Последовательность ограничена. Находим $z_{4n} = \frac{i^{4n} + 3i^{4n+2}}{4} = -\frac{1}{2}$,

$z_{4n+1} = \frac{i^{4n+1} + 3i^{4n+3}}{4} = -\frac{i}{2}$.

Последовательность z_n является расходящейся. ▲

Пример 3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $z_n = \frac{2n + (n+1)i}{n+2}$ имеет пределом число $a = 2 + i$.

Δ Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такой номер N, что при $n > N$ $\left| z_n - a \right| < \varepsilon$.

Так как $\left| z_n - (2+i) \right| = \left| \dfrac{2n+(n+1)i}{n+2} - 2 - i \right| = \left| \dfrac{2n+(n+1)i-2n-4-ni-2i}{n+2} \right| =$

$= \dfrac{\left|-4-i\right|}{n+2} = \dfrac{\sqrt{17}}{n+2}$.

Неравенство $\left| z_n - (2+i) \right| < \varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{\sqrt{17}}{n+2} < \varepsilon$, т. е. $n > \dfrac{\sqrt{17}}{\varepsilon} - 2$. Значит, в качестве N можно взять $N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\sqrt{17}}{\varepsilon} - 2 \right]$. ▲

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3ni}{i-2n}$.

Δ _Первый способ_

Найдем $x_n = \operatorname{Re} z_n$ и $y_n = \operatorname{Im} z_n$:

$$\frac{2+3ni}{i-2n} = \frac{(2+3ni)(i+2n)}{(i-2n)(i+2n)} = -\frac{2i+4n-3n+6n^2 i}{4n^2+1} = \frac{-n}{4n^2+1} + i\frac{-6n^2-2}{4n^2+1}.$$

Найдем пределы последовательностей действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{4n^2+1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-6n^2-2}{4n^2+1} = -\frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{z\to\infty} z_n = 0 - \dfrac{3}{2} i = -\dfrac{3}{2} i$.

Второй способ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+3ni}{i-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+3i}{\frac{i}{n}-2} = -\frac{3}{2} i. \quad ▲$$

Пример 5. Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(2n+1)i}{2n+(3n+2)i}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \operatorname{tg} \dfrac{3}{n} + i \dfrac{n^3}{2^n} \right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{ch} in}{n}$.

Δ а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(2n+1)i}{2n+(3n+2)i}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(2+\dfrac{1}{n}\right)i}{2+\left(3+\dfrac{2}{n}\right)i}=\dfrac{1+2i}{2+3i}=\dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=$

$=\dfrac{8+i}{13}=\dfrac{8}{13}+\dfrac{i}{13}$;

б) запишем n-й член последовательности, используя формулу Муавра:

$$z_n=\left(1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4},\quad z_{8n}=1,\quad z_{8n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Последовательность является расходящейся;

в) имеем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{3}{n}\cdot 3}{\dfrac{3}{n}}=3$, $\quad\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{2^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$. Применив три раза правило Лопиталя, находим, что $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\operatorname{tg}\dfrac{3}{n}+i\dfrac{n^3}{2^n}\right)=3+0i=3$;

г) так как $z_n=\dfrac{\operatorname{ch}in}{n}=\dfrac{e^{in}+e^{-in}}{2n}$, то $0\le|z_n|\le\dfrac{|e^{in}|+|e^{-in}|}{2n}=\dfrac{1}{n}=0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{ch}in}{n}=0$. ▲

Пример 6. Какие линии на плоскости представлены уравнениями:

а) $z=5e^{it}+4e^{-it}$; б) $z=1+i-3t-it^2$.

Δ а) так как $e^{it}=\cos t+i\sin t$, $e^{-it}=\cos t-i\sin t$, то $z=9\cos t+i\sin t$. Отсюда следует параметрическое уравнение линии $\begin{cases}x=9\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$ Это уравнение эллипса. Исключив параметр t, получим $\dfrac{x^2}{9^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$;

б) так как $z=x+iy$, то $\begin{cases}x=1-3t,\\ y=1-t^2.\end{cases}$ Исключим параметр t, получим $y=1-\dfrac{(x-1)^2}{9}$. Это уравнение параболы. ▲

Пример 7. Изобразите на комплексной плоскости все такие числа z, что $|iz-3+4i|=1$. В каких пределах изменяются модули этих чисел?

Δ Умножив левую часть равенства на $|-i|$, получим $|z-(4+3i)|=1$. Это уравнение окружности с центром в точке $M_0\,(4;3)$ и радиусом 1 (рис. 2.1).

Очевидно, что

$$\max|z|=|OB|=|OM_0|+|M_0B|=6,$$

$$\min|z|=|OA|=|OM_0|+|M_0A|=5-1=4.$$

Таким образом, $4\le|z|\le6$.

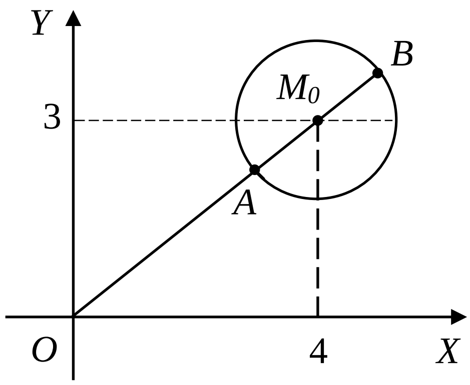


Рис. 2.1

Пример 8. Найти геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющих соотношению $|z+3-9i|=|z-5-i|$.

Δ Эту задачу можно сформулировать так: на плоскости XOY имеются точки $A(-3;\,9)$ и $B(5;\,1)$. Найти уравнение прямой, перпендикулярной прямой AB и проходящей через середину отрезка AB.

Находим угловой коэффициент прямой AB: $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-8}{8}=-1$. Угловой коэффициент искомой прямой $k_1=1$. Середина отрезка AB имеет координаты $C(1;5)$. Уравнение прямой имеет вид $y-5=1(x-1)$, $y=x+4$. ▲

Пример 9. Определить вид кривой, заданной уравнением $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{2}$.

Δ Находим $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{\bar{z}}=\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{x-iy}=\mathrm{Re}\,\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$, $x^2+y^2-2x=0$, $(x-1)^2+y^2=1$. Это уравнение окружности радиусом $R=1$, с центром в точке $C(1;0)$. ▲

Пример 10. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям

$$-\frac{\pi}{4}\le\arg(z+4+2i)\le\frac{\pi}{4},\quad \mathrm{Im}\,2iz\le\mathrm{Re}(z-2).$$

Δ Комплексное число $z+4+2i=z-(-4-2i)$ изображается вектором, началом которого является точка $-4-2i$, а концом – точка z. Угол между этим вектором и осью OX должен меняться в пределах от $-\dfrac{\pi}{4}$ до $\dfrac{\pi}{4}$.

Так как $\operatorname{Im} 2iz = \operatorname{Im}(2ix - 2y) = 2x$, $\operatorname{Re}(z-2) = \operatorname{Re}(x-2+iy) = x-2$, то множеству могут принадлежать только точки $2x \le x-2$, $x \le -2$. Искомое множество изображено на рис. 2.2. ▲

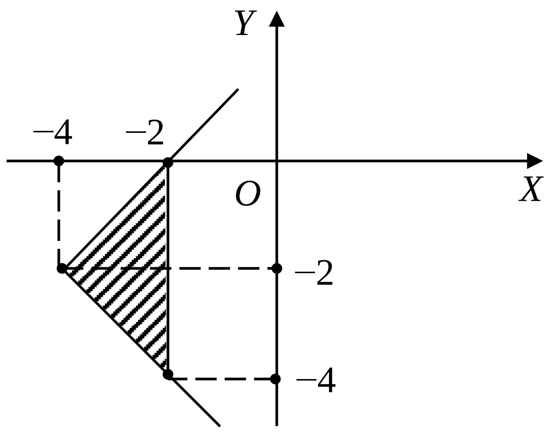


Рис. 2.2

Пример 11. Найти область, определяемую неравенством $|z-1|+|z+1|<3$.

Δ Равенство $|z-1|+|z+1|=3$ выражает, что сумма от точки z до точек 1 и -1 равна 3. Это эллипс с фокусами в точках 1 и -1 и с большой осью, равной 3. Следовательно, неравенство $|z-1|+|z+1|<3$ выражает область, лежащую внутри этого эллипса. ▲

Пример 12. Найти множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right) \ge 1$.

Δ Пусть $z = x+iy$ и $z \ne 0$.

Имеем $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+iy}+\frac{2}{x-iy}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x-iy+2x+2iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$.

Искомое множество: $\frac{y}{x^2+y^2} \ge 1$, $\quad x^2+y^2-y \le 0$, $\quad x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$.

Это круг с центром в точке $(0;\,0{,}5)$ и радиусом $0{,}5$, исключая точку $(0;0)$.

Дополнительные задачи

1. Доказать, что последовательность $z_n = \frac{i^n+(-i)^n}{2}$ ограничена, но расходится.

2. Пользуясь определением, доказать, что последовательность $z_n = \frac{2n-i}{ni+1}$ имеет пределом число $a = -2i$.

3. Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\sin\frac{2i}{n}$. **Ответ:** $-2i$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(3n^2+1)i}{n^2+2}$. **Ответ:** $3i$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3i}{\sqrt{10}}\right)^n$. **Ответ:** не существует;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{i}{n^2}\right)^{2n+3}$. **Ответ:** 0.

4. Какие линии на плоскости представлены уравнениями:

а) $z=6e^t+3e^{-t}$. **Ответ:** эллипс $\dfrac{x^2}{9^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$;

б) $z=t-2+i(t^2-4t+5)$. **Ответ:** парабола x^2+1;

в) $|z+6+i|=|z+2-3i|$. **Ответ:** прямая $y=-x-3$;

г) $\left|\dfrac{z-2}{z-3}\right|=1$. **Ответ:** прямая $x=\dfrac{5}{2}$.

5. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z|=|z-2i|$, найдите число с наименьшим модулем.

Ответ: $z=i$.

6. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию

$$\frac{3\pi}{4}\le\arg(z-2-i)\le\pi,\ |\operatorname{Im} iz|\le 1.$$

Ответ: рис. 2.3.

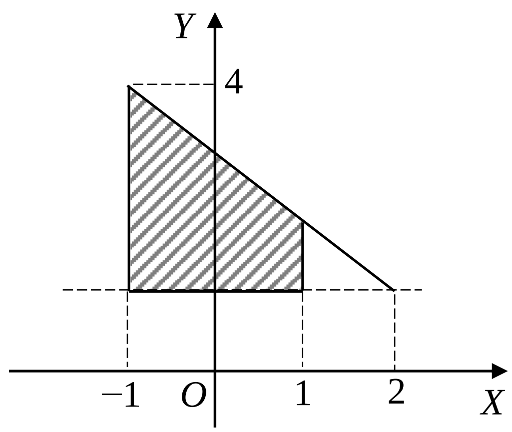


Рис. 2.3

7. Найти геометрическое место точек, удовлетворяющих условию

$$2<|2iz+1-i|<6.$$

Ответ: открытое кольцо, ограниченное окружностями с центром $(0,5;0,5)$ и радиусами 1 и 3.

3. Элементарные функции комплексного переменного

Пример 1. Найти действительные и мнимые части функций:

а) $w=\dfrac{1}{\overline{z}-2i}$; б) $w=\overline{z}-z^3$.

Δ а) полагаем $\overline{z}=x-iy$, получим

$$\frac{1}{\overline{z}-2i}=\frac{1}{x-iy-2i}=\frac{x+i(y+2)}{(x-i(y+2))(x+i(y+2))}=\frac{x+i(y+2)}{x^2+(y+2)^2}.$$

$$\operatorname{Re}w=u(x;y)=\frac{x}{x^2+(y+2)^2},\quad \operatorname{Im}w=v(x;y)=\frac{y+2}{x^2+(y+2)^2};$$

б) $w=x-iy-(x+iy)^3=x-iy-(x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3)$.

$\operatorname{Re}w=u(x;y)=x-x^3+3xy^2$, $\operatorname{Im}w=v(x;y)=-y-3x^2y+y^3$. ▲

Пример 2. Проверить справедливость формул:

а) $\cos iz=\operatorname{ch}z$; б) $\operatorname{ch}iz=\cos z$; в) $\sin iz=i\operatorname{sh}z$; г) $\operatorname{sh}iz=i\sin z$.

Δ а) $\cos iz=\dfrac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2}=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\operatorname{ch}z$;

б) $\operatorname{ch}iz=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$;

в) $\sin iz=\dfrac{e^{iiz}-e^{-iiz}}{2i}=-i\,\dfrac{e^{-z}-e^{z}}{2}=i\operatorname{sh}z$;

г) $\operatorname{sh}iz=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=\dfrac{i(e^{iz}-e^{-iz})}{2i}=i\sin z$. ▲

Пример 3. Определить действительную и мнимую части, модуль и аргумент следующих величин:

а) e^{2+3i}; б) $\sin 3i$;

Δ а) $e^{2+3i}=e^2\cdot e^{3i}=e^2(\cos 3+i\sin 3)$.

$\operatorname{Re}e^{2+3i}=e^2\cos 3$, $\operatorname{Im}e^{2+3i}=e^2\sin 3$, $\left|e^{2+3i}\right|=e^2$, $\arg e^{2+3i}=3$.

б) $\sin 3i=i\operatorname{sh}3=i\,\dfrac{e^3-e^{-3}}{2}$.

$\operatorname{Re}\sin 3i=0$, $\operatorname{Im}\sin 3i=\dfrac{e^3-e^{-3}}{2}$, $|\sin 3i|=\dfrac{e^3-e^{-3}}{2}$, $\arg\sin 3i=\dfrac{\pi}{2}$. ▲

Пример 4. Найти модуль и аргумент числа $f(i)$, если $f(z)=(-1-i)\,\mathrm{th}\,z^2$.

Δ Пусть

$$f_1(i)=-1-i=\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}, \qquad f_2(i)=\mathrm{th}(-1)=\frac{\mathrm{sh}(-1)}{\mathrm{ch}(-1)}=-\frac{\mathrm{sh}1}{\mathrm{ch}1}=-\frac{e^1-e^{-1}}{e^1+e^{-1}}=$$

$$=\left|-\frac{e^1-e^{-1}}{e^1+e^{-1}}\right|e^{i\pi}=\frac{e^1-e^{-1}}{e^1+e^{-1}}\;e^{i\pi}.$$

Перемножим полученные два числа:

$$f(i)=f_1(i)\cdot f_2(i)=\sqrt{2}\,\frac{e^1-e^{-1}}{e^1+e^{-1}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Окончательно получим

$$|f(i)|=\sqrt{2}\;\mathrm{th}1,\quad \arg f(i)=\frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Найти $\mathrm{Re}\,f(z)$, $\mathrm{Im}\,f(z)$, если:

а) $f(z)=e^{z^2}$; б) $f(z)=\cos z$; в) $f(z)=\mathrm{ch}\,z$.

Δ а) $e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+2ixy}=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$, поэтому

$$\mathrm{Re}\,e^{z^2}=e^{x^2-y^2}\cos 2xy,\quad \mathrm{Im}\,e^{z^2}=e^{x^2-y^2}\sin 2xy;$$

б) $\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cdot\cos iy-\sin x\cdot\sin iy=\cos x\cdot\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y.$

Следовательно,

$$\mathrm{Re}\cos z=\cos x\,\mathrm{ch}\,y,\quad \mathrm{Im}\cos z=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y;$$

в) $\mathrm{ch}\,z=\cos iz=\cos(ix-y)=\cos ix\cos y+\sin ix\sin y=\cos y\,\mathrm{ch}\,x+$ $+\,i\,\mathrm{sh}x\sin y$, поэтому $\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}z=\cos y\cdot\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}\,z=\mathrm{sh}\,x\sin y$. $\blacktriangle$

Пример 6. Доказать периодичность функции $f(z)=e^z$.

Δ Покажем, что число $2k\pi i$ является периодом для функции $f(z)=e^z$. Имеем $e^{z+2k\pi i}=e^x e^{i(y+2k\pi)}=e^x(\cos(y+2k\pi)+i\sin(y+2k\pi))=e^x(\cos y+i\sin y)=$ $=e^x e^{iy}=e^{x+iy}=e^z$. $\blacktriangle$

Пример 7. Доказать, что $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.

Δ Используя формулы Эйлера, находим

$$\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2=\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}+\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}}{4i}+$$

$$+\frac{e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{4i}=\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}=\sin(z_1+z_2). \ \blacktriangle$$

Пример 8. Решить уравнение $\sin z=i$.

Δ По формулам Эйлера:

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=i,\ e^{iz}-e^{-iz}+2=0,$$

$$e^{2iz}+2e^{iz}-1=0,$$

$$e^{iz}=-1\pm\sqrt{2};$$

$$e^{iz}=-1+\sqrt{2},\ iz=\ln(\sqrt{2}-1)+2k\pi i,$$

$$z=-i\ln(\sqrt{2}-1)+2k\pi;$$

$$e^{iz}=-1-\sqrt{2},\ iz=\ln(\sqrt{2}+1)+\pi i+2k\pi i,$$

$$z=-i\ln(\sqrt{2}+1)+(2k+1)\pi.$$

Таким образом, получены два множества решений:

$$z_{k_1}=-i\ln(\sqrt{2}-1)+2k\pi,$$

$$z_{k_2}=-i\ln(\sqrt{2}+1)+(2k+1)\pi. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Найти $\operatorname{arctg} 2i$.

Δ В формулу $\operatorname{arctg} z=-\frac{i}{2}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$ подставим $z=2i$:

$$\operatorname{arctg} 2i=-\frac{i}{2}\ln\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3}+\pi i+2k\pi i\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{i\ln 3}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Решить уравнение $\sin z+\cos z=2$.

Δ Имеем $\frac{-i(e^{iz}-e^{-iz})}{2}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2$,

$$e^{iz}(1-i)+e^{-iz}(1+i)=4,$$

$$e^{2iz}(1-i)-4e^{iz}+(1+i)=0,$$

$$e^{2iz}-2(1+i)e^{iz}+i=0,$$

$$e^{iz}=(1+i)+\sqrt{i}.$$

Так как $\sqrt{i}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\end{array}\right.$ получаем два множества решений:

1) $e^{iz}=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=(\sqrt{2}+1)e^{i\frac{\pi}{4}+2k\pi i}$;

2) $e^{iz}=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{\pi}{4}+2k\pi i}$.

Прологарифмировав равенства и разделив на i, получим

$z=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$. ▲

Пример 11. Для функции $w=\cos z$ найти множество точек z, где она принимает: а) действительные значения; б) чисто мнимые значения.

Δ Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cdot\cos(iy)-\sin x\cdot\sin(iy)=\cos x\cdot\operatorname{ch}y-i\sin x\cdot\operatorname{sh}y.$$

Таким образом:

а) $\operatorname{Im}\cos z=0$, если $\operatorname{Re}z=k\pi$ или $\operatorname{Im}z=0$;

б) $\operatorname{Re}\cos z=0$, если $\operatorname{Re}z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$. ▲

Пример 12. Решить уравнение $\ln(z+1)=\pi i$.

Δ По определению $z+1=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, $z=-2$. ▲

Пример 13. Найти $\ln(-2+3i)$.

Δ Модуль числа $-2+3i$ равен $\sqrt{13}$, а главное значение аргумента равно $\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$, а следовательно $\ln(-2+3i)=\dfrac{1}{2}\ln 13+\left(\left(2k+1\right)\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right)i$. ▲

Пример 14. Найти $\ln i^{i}$.

Δ Имеем $\ln i^{i}=\ln e^{i\ln i}=\ln e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}=\ln e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=-\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)+2\pi mi$. ▲

Пример 15. Найти $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

Δ Модуль числа $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ равен 1, главное значение аргумента равно $-\dfrac{\pi}{4}$, следовательно,

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot e^{\left(2m\pi+\frac{1}{4}\right)\pi}, \quad m=-k. \ ▲$$

Пример 16. Найти $(-2)^{\sqrt{2}}$.

Δ Имеем $(-2)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}(-2)}=e^{\sqrt{2}(\ln 2+i\pi+2k\pi i)}=e^{\sqrt{2}\ln 2}\cdot e^{i(2k+1)\pi}=$
$=2^{\sqrt{2}}(\cos(2k+1)\pi\cdot\sqrt{2}+i\sin(2k+1)\pi\cdot\sqrt{2})$. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти действительные и мнимые части функций:

а) $w=\dfrac{1}{z-2i}$. **Ответ:** $u=\dfrac{x}{x^2+(y-2)^2}$, $v=\dfrac{2-y}{x^2+(y-2)^2}$;

б) $w=\sin z$. **Ответ:** $u=\sin x\cdot\mathrm{ch}\,y$, $v=\mathrm{sh}\,y\cdot\cos x$.

2. Найти $\mathrm{Re}\,z$ и $\mathrm{Im}\,z$, если:

а) $z=\cos(1-i)$. **Ответ:** $\mathrm{Re}\,z=\cos 1\,\mathrm{ch}\,1$, $\mathrm{Im}\,z=\sin 1\,\mathrm{sh}\,1$;

б) $z=\mathrm{sh}\,2i$. **Ответ:** $\mathrm{Re}\,z=0$, $\mathrm{Im}\,z=\sin 2$.

3. Найти период функции $w=e^{iz}$.
Ответ: $T=2\pi$.

4. Доказать, что $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$.

5. Найти модуль, аргумент, действительную и мнимую части числа $\ln 2i$.

Ответ: $\mathrm{Re}\ln 2i=\ln 2$, $\mathrm{Im}\ln 2i=\dfrac{\pi}{2}$, $|\ln 2i|=\sqrt{\ln^2 2+\dfrac{\pi^2}{4}}$, $\arg\ln 2i=$
$=\mathrm{arctg}\,\dfrac{\pi}{2\ln 2}$.

6. Найти $\ln(2-i)$. **Ответ:** $\ln(2-i)=\ln\sqrt{5}+\left(\mathrm{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2k\pi\right)$.

7. Решить уравнение $\operatorname{tg} z = \dfrac{i}{3}$.

Ответ: $z_k = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1),\ \ z_k^* = \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}-1).$

8. Найти $(3-4i)^{1+i}$.

Ответ: $5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right) + i\sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right)\right).$

4. Аналитические функции

Пример 1. Показать, что функция $w = z^3$ является непрерывной при любом значении z.

Δ Имеем $\left|z^3 - z_0^3\right| = \left|z - z_0\right| \cdot \left|z^2 + zz_0 + z_0^2\right|$. Если $z \to z_0$, то существует такое $\mu > 0$, при котором выполняются неравенства $|z| < \mu$ и $|z_0| < \mu$. Но тогда $|z^2 + z\cdot z_0 + z_0^2| < \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 = 3\mu^2$. Возьмем $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3\mu^2}$. Из неравенства $\left|z - z_0\right| < \delta$ следует, что $\left|z^3 - z_0^3\right| < \dfrac{\varepsilon}{3\mu^2}\cdot 3\mu^2 < \varepsilon$, т. е. $\left|z - z_0\right| < \varepsilon$.

Таким образом, $\lim\limits_{z\to z_0} z^3 = z_0^3$. Функция $w = z^3$ является непрерывной на всей комплексной плоскости. ▲

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию

$w = z^2 \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im}(z)^2$.

Δ Представим функцию $f(z)$ в виде $w = u(x;y) + iv(x;y)$:

$$w = (x+iy)^2 \operatorname{Re}(x+iy) + i\operatorname{Im}(x+iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2)\cdot x + i\cdot 2xiy =$$
$$= x^3 - xy^2 - 2xy + 2ix^2y.$$

Отсюда следует, что $u(x;y) = x^3 - xy^2 - 2xy,\ \ v(x;y) = 2x^2y$.

Так как функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются непрерывными на всей комплексной плоскости, то и функция $f(z)$ также непрерывна при любом значении z. ▲

Пример 3. Исследовать на непрерывность функции $\dfrac{z^3+3}{2z-4}$ и $\dfrac{3z+2}{z^2+16}$.

Δ Элементарные функции непрерывны в области их определения, поэтому функция $\frac{z^3+3}{2z-4}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=2$, а функция $\frac{3z+2}{z^2+16}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z=\pm 4i$. ▲

Пример 4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+3}{3z^4+1}$; б) $\lim\limits_{z\to i}\frac{2z+i}{z^2+1}$; в) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\frac{z^2+2z+5}{z+1-2i}$.

Δ а) ввиду непрерывности функции $\frac{z^2+3}{3z^4+1}$ в точке i получаем $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+3}{3z^4+1}=\frac{-1+3}{3+1}=\frac{1}{2}$;

б) имеем $\lim\limits_{z\to i}\frac{2z+i}{z^2+1}=\left(\frac{3i}{0}\right)=\infty$;

в) $\lim\limits_{z\to -1+2i}\frac{z^2+2z+5}{z+1-2i}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{z\to -1+2i}\frac{(z+1-2i)(z+1+2i)}{z+1-2i}=\lim\limits_{z\to -1+2i}(z+1+2i)=4i$. ▲

Пример 5. Показать, что функция $w=z^n$ $(n\in N)$ является дифференцируемой на всей комплексной плоскости.

Δ Возьмем любую точку z. Для нее будем иметь

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z-z)((z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1})}{\Delta z}=$$

$$=(z+\Delta z)^{n-1}+(z+\Delta z)^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}.$$

Отсюда $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=n\cdot z^{n-1}$; $f'(z)=n\cdot z^{n-1}$. ▲

Пример 6. Доказать, что функция $w=\bar{z}+3z$ нигде не дифференцируема.

Δ Находим $u(x;y)=\mathrm{Re}(\bar{z}+3z)=\mathrm{Re}(x-iy+3x+3iy)=4x$;

$v(x;y)=\mathrm{Im}(x-iy+3x+3iy)=2y$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, то условия Коши – Римана не выполняются ни в одной точке. Функция недифференцируема на всей комплексной плоскости. ▲

Пример 7. Доказать, что функция $w = z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема только в точке $z = 0$. Найти $w'(0)$.

Δ Находим действительную и мнимую части этой функции.

$$w = (x + iy)\cdot x = x^2 + ixy;$$

$$u(x;y) = x^2,\; v(x;y) = xy.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\; \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\; \frac{\partial v}{\partial x} = y,\; \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Запишем условия Коши – Римана:

$$\begin{cases} 2x = x; \\ 0 = y. \end{cases}$$

Условия Коши – Римана выполняются только в одной точке $O(0;0)$. Находим $w'(0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$. Отметим, что функция не является аналитической ни в одной точке. ▲

Пример 8. Проверить условия Коши – Римана в произвольной точке и в случае их выполнения найти $f'(z)$ для функций:

а) $f(z) = \sin(z + 3i)$; б) $f(z) = z\cdot e^{2z}$.

Δ а) определим действительную и мнимую части функции $f(z) = \sin(z + 3i)$:

$$\sin(x + i(y+3)) = \sin x\cos(i(y+3)) + \cos x\sin(i(y+3)) = \sin x\,\mathrm{ch}(y+3) + $$
$$+ i\,\mathrm{sh}(y+3)\cdot\cos x.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\cdot\mathrm{ch}(y+3),\; \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x\cdot\mathrm{sh}(y+3),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x\cdot\mathrm{sh}(y+3),\; \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x\cdot\mathrm{ch}(y+3).$$

На всей комплексной плоскости производные непрерывны и $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Функция $f(z)=\sin(z+3i)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, поэтому $f'(z)=(\sin(z+3i))'=\cos(z+3i)$;

б) определим действительную и мнимую части функции $w=z\cdot e^{2z}$:

$w=(x+iy)\cdot e^{2x+2iy}=(x+iy)e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y).$

Найдем частные производные функций $u(x;y)=e^{2x}(x\cos 2y-y\sin 2y)$ и $v(x;y)=e^{2x}(y\cos 2y+x\sin 2y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}(x\cos 2y-y\sin 2y)+e^{2x}\cos 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{2x}(-2x\sin 2y-\sin 2y-2y\cos 2y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}(y\cos 2y+x\sin 2y)+e^{2x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{2x}(\cos 2y-2y\sin 2y+2x\cos 2y).$$

На всей комплексной плоскости частные производные непрерывны и удовлетворяют условиям $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Функция $f(z)=z\cdot e^{2z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости, а значит,

$(z\cdot e^{2z})'=e^{2z}+2ze^{2z}=e^{2z}(1+2z)$. ▲

Пример 9. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z=2i$ при отображении $w=\frac{z+1}{z+i}$.

Δ Находим $w'=\frac{z+i-z-1}{(z+i)^2}=\frac{i-1}{(z+i)^2}$;

$$w'(2i)=\frac{1-i}{9};\quad |w'(2i)|=\frac{\sqrt{2}}{9};\quad \arg\frac{1-i}{9}=-\frac{\pi}{4}.$$

Коэффициент растяжения равен модулю производной, угол поворота – аргументу производной.

Таким образом, $k=\frac{\sqrt{2}}{9}$, угол поворота равен $-\frac{\pi}{4}$. ▲

Пример 10. При каком условии трехчлен $u(x;y)=ax^2+2bxy+cy^2$ является гармонической функцией?

Δ Находим u''_{xx} и u''_{yy}:

$u'_x=2ax+2by,\ u''_{xx}=2a,\ u'_y=2bx+2cy,\ u''_{yy}=2c.$

Вторые частные производные удовлетворяют уравнению $u''_{xx}+u''_{yy}=0,$ если $2a+2c=0,$ т. е. $a=-c.$

При этом условии трехчлен $u(x;y)=ax^2+2bxy+cy^2$ будет гармонической функцией. ▲

Пример 11. Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $v(x;y)=2x^2-2y^2+x;$

б) $u(x;y)=\ln(x^2+y^2).$

Δ а) проверим, является ли функция $v(x;y)=2x^2-2y^2+x$ гармонической:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=4,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-4,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Функция $v(x;y)$ является гармонической.

Так как $\dfrac{\partial v}{\partial x}=4x+1,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-4y,$ то из условий Коши – Римана следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-4y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-4x-1.$$

Находим $u(x;y)=\int -4y\,dx+\varphi(y)=-4xy+\varphi(y).$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-4x+\varphi'(y)=-4x-1,$ то $\varphi'(y)=-1,\ \varphi(y)=-y+c.$ Следовательно, $u=-4xy-y+c.$

Окончательно получаем

$$f(z)=u+iv=-4xy-y+c+i\,(2x^2-2y^2+x)=2i(x^2-y^2+2ixy)+$$
$$+i(x+iy)+c=2iz^2+iz+c;$$

б) проверим, является ли функция $u(x;y)=\ln(x^2+y^2)$ гармонической.

Находим $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Функция $u(x;y)=\ln(x^2+y^2)$ является гармонической. Из условий Коши – Римана получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Первое уравнение дает

$$v(x;y)=\int -\frac{2y}{x^2+y^2}\,dx+\varphi(y)=-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

Дифференцируем по y:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Таким образом, $\varphi'(y)=0$, $\varphi(y)=c$. Окончательно получаем

$$u(x;y)=\ln(x^2+y^2)+i\left(-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+c\right).$$

Дополнительные задачи

1. Исследовать функции на непрерывность:

а) $f(z)=z^2\cdot\operatorname{Im}\bar{z}+i\operatorname{Re}z^2$.

Ответ: функция непрерывна на всей комплексной плоскости z;

б) $f(z)=\dfrac{z^2+2z-5}{|z+2i|-4}$.

Ответ: точками разрыва являются все точки окружности $|z+2i|=4$;

в) $f(z)=\dfrac{z-4i}{z^2+16}$.

Ответ: функция непрерывна на всей комплексной плоскости z, за исключением точек $z=\pm 4i$;

г) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z+\bar{z}}$.

Ответ: точками разрыва являются все точки оси Oy.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to -1+2i} \dfrac{z^2+2z+3}{z+1-2i}$. **Ответ:** $2+3i$;

б) $\lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{z^3+8i}{z-2i}$. **Ответ:** -12;

в) $\lim\limits_{z\to 1+i} \dfrac{\mathrm{Im}(z^2)}{\mathrm{Re}(z^2)}$. **Ответ:** ∞;

г) $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{\mathrm{ch}\, iz + i\,\mathrm{sh}\, iz}$. **Ответ:** $\sqrt{2}$.

3. Пользуясь определением, показать, что функция $w=z^2$ непрерывна и дифференцируема при любом значении z.

4. Исследовать на дифференцируемость и аналитичность функции:

а) $w=|z|$.

Ответ: функция не является дифференцируемой ни в одной точке плоскости z;

б) $w=(z-2)\,\mathrm{Im}(z+3i)$.

Ответ: функция дифференцируема только в одной точке $z=2$, $f'(z)\big|_{z=2}=3$, функция не является аналитической;

в) $w=\sin\bar{z}$.

Ответ: функция дифференцируема только в точках $z_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $f'(z_k)=0$, функция не является аналитической.

5. Используя условия Коши – Римана, докажите аналитичность следующих функций и найдите их производные:

а) $w=e^{iz^2}$. **Ответ:** $w'=2iz\cdot e^{iz^2}$;

б) $w=\dfrac{1}{z-3}$ $(z\neq 3)$. **Ответ:** $w'=-\dfrac{1}{(z-3)^2}$;

в) $w=\cos iz$. **Ответ:** $w'=-i\sin iz$.

6. Найдите коэффициент растяжения и угол поворота любой гладкой кривой, проходящей через точку $z_0=1-i$ при отображении $f(z)=\dfrac{z-4i}{z+2i}$.

Ответ: коэффициент растяжения равен 3, а угол поворота кривой $\varphi=0$.

7. Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x;y)=2x^2-2y^2-3y+1,\;\; f(1)=3+3i.$ **Ответ:** $f(z)=2z^2+3iz+1;$

б) $v(x;y)=-6xy+2x,\;\; f(1)=1+2i.$ **Ответ:** $f(z)=-3z^2+2iz+4.$

5. Интегрирование функций комплексной переменной

Пример 1. Вычислить $\int\limits_c \operatorname{Re} z dz$, где c – ломаная OBA; $O(0;0)$, $B(1;0)$, $A(1;1)$.

Δ Для отрезка OB имеем $\begin{cases} y=0, \\ 0\le x\le 1, \end{cases}$ а для отрезка BA имеем $\begin{cases} x=1, \\ 0\le y\le 1. \end{cases}$

Запишем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_c \operatorname{Re} z dz = \int\limits_{OB} \operatorname{Re} zzdz + \int\limits_{BA} \operatorname{Re} z dz = \int\limits_{OB} x(dx+idy) + \int\limits_{BA} x(dx+idy) =$$

$$= \int\limits_0^1 x dx + i\int\limits_0^1 1 dy = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + iy\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+i. \;\blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_c (1+i-2\bar{z})dz$, где c – отрезок прямой между точками $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

Δ Выделим действительную и мнимую части функции $f(z)$:

$f(z)=u(x;y)+iv(x;y)=1+i-2(x-iy)=(1-2x)+i(1+2y).$

Имеем $\int\limits_c (1+i-2\bar{z})dz = \int\limits_c (1-2x)\,dx-(1+2y)dy + i\int\limits_c (1+2y)\,dx+(1-2x)dy.$

Уравнение отрезка между точками z_1 и z_2 имеет вид $y=x$, поэтому $dy=dx$. Следовательно,

$$\int\limits_c (1+i-2\bar{z})dz = \int\limits_0^1 ((1-2x)-(1+2x))dx + i\int\limits_0^1 ((1+2x)+(1-2x))dx =$$

$$= -4\int\limits_0^1 x dx + 2i\int\limits_0^1 dx = -4\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + 2ix\Big|_0^1 = -2+2i. \;\blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{c}(2z+3\bar{z})dz$, $c-$ верхняя полуокружность $|z-2|=3$ от точки $z_1=5$ до точки $z_2=-1$.

Δ Здесь удобно использовать формулу $\int\limits_{c} f(z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt.$

Кривая c имеет параметрическое уравнение $z=2+3e^{it}$, $\bar{z}=2+3e^{-it}$. Находим $dz=3ie^{it}dt$. Подставляем z, $\bar{z}$ и dz в подынтегральное выражение и вычисляем полученный интеграл:

$$\int\limits_{c} f(z)dz=\int\limits_{0}^{\pi}(4+6e^{it}+6+9e^{-it})3ie^{it}dt=\int\limits_{0}^{\pi}(30i\,e^{it}+18ie^{2it}+27i)dt=$$

$$=(30e^{it}+9e^{2it}+27it)\Big|_{0}^{\pi}=30e^{i\pi}-30+9e^{2i\pi}-9+27i\pi=-60+27\pi i.\ \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_{c}(2i-z)dz$:

а) $c-$ отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$;

б) $c-$ отрезок параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

Объяснить совпадение полученных значений.

Δ а) так как уравнение отрезка от точки z_1 до точки z_2 имеет вид $y=x$, то

$$\int\limits_{c}(2i-z)dz=\int\limits_{0}^{1}(2i-x-ix)(dx+idx)=\int\limits_{0}^{1}(-x-2+x)\,dx+i\int\limits_{0}^{1}(2-2x)dx=$$

$$=-2x\Big|_{0}^{1}+i(2x-x^2)\Big|_{0}^{1}=-2+i;$$

б) так как уравнение кривой имеет вид $y=x^2$, то $z=x+ix^2$, $dz=(1+2ix)dx$.

Имеем

$$\int\limits_{c}(2i-z)dz=\int\limits_{0}^{1}(2i-x-ix^2)(1+2ix)dx=\int\limits_{0}^{1}(2i-4x-x-2ix^2-ix^2+2x^3)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(-5x+2x^3)dx+i\int\limits_{0}^{1}(2-3x^2)dx=\left(-\frac{5}{2}x^2+\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}+i(2x-x^3)\Big|_{0}^{1}=-2+i.$$

Полученные значения совпадают, т. к. подынтегральная функция является аналитической. $\blacktriangle$

Пример 5. Вычислить интегралы от аналитических функций:

а) $\int\limits_1^i (iz^3+3)dz$; б) $\int\limits_0^i \sin^2 z\,dz$; в) $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz$.

Δ Подынтегральные функции являются аналитическими на всей комплексной плоскости z, поэтому интегралы можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница:

а) $\int\limits_1^i (iz^3+3)dz=\left(\dfrac{iz^4}{4}+3z\right)\Bigg|_1^i=\dfrac{i}{4}+3i-\dfrac{i}{4}-3=3i-3;$

б) $\int\limits_0^i \sin^2 z\,dz=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^i(1-\cos 2z)dz=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_0^i=\dfrac{1}{2}i-\dfrac{1}{4}\sin 2i=$

$=\dfrac{1}{2}i-i\dfrac{\operatorname{sh}2}{4}=\dfrac{i}{4}(2-\operatorname{sh}2);$

в) $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz=\left|\begin{matrix} z-i=u & du=dz \\ e^{-z}dz=dv & v=-e^{-z}\end{matrix}\right|=-(z-i)e^{-z}\Big|_0^i+\int\limits_0^i e^{-z}dz=$

$=-(z-i)e^{-z}\Big|_0^i-e^{-z}\Big|_0^i=-i-e^{-i}+1=-i+1-\cos 1+i\sin 1=1-\cos 1+i(\sin 1-1).$ ▲

Пример 6. Вычислить $\int\limits_c \dfrac{\cos 2z}{z^2+2}dz$, где $c-$контур, образованный кривыми $y=x^2$, $x=y^2$.

Δ Функция $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{z^2+2}$ является аналитической на всей комплексной плоскости z, за исключением точек $z_1=\sqrt{2}\,i$ и $z_2=-\sqrt{2}\,i$.

Эти точки лежат вне контура.

Согласно теореме Коши $\int\limits_c \dfrac{\cos 2z}{z^2+2}dz=0.$ ▲

Пример 7. $\int\limits_c \dfrac{e^{3z}}{z^2+16z}dz$, где контур c: $|z-2-i|=2$.

Δ Находим особые точки функции. Это точки $z_1=0$, $z_2=4i$, $z_3=-4i$.

Контур интегрирования представляет собой окружность радиусом 2 с центром в точке $z_0 = 2+i$.

Находим расстояния от точек z_1, z_2, и z_3 до точки z_0:

$$|z_1 - z_0| = |0-2-i| = \sqrt{5} > 2,$$

$$|z_2 - z_0| = |4i-2-i| = |-2+3i| = \sqrt{13} > 2,$$

$$|z_3 - z_0| = |-4i-2-i| = |-2-5i| = \sqrt{29} > 2.$$

Все особые точки находятся вне контура интегрирования.

По теореме Коши $\displaystyle\int\limits_c \frac{e^{3z}}{z^2+16z}\,dz = 0.$ ▲

Пример 8. Вычислить $\displaystyle\int\limits_c \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}\,dz$, где контур c: $|z-i| = 1.$

Δ Подынтегральную функцию представим в виде $\displaystyle\frac{e^{\pi z}}{z^2+1} = \frac{\dfrac{e^{\pi z}}{z+i}}{z-i}$.

Применяя интегральную формулу Коши, получим

$$\int\limits_c \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{\pi z}}{z+i}\right|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{\pi i}}{2i} = \pi(\cos\pi + i\sin\pi) = -\pi. \ ▲$$

Пример 9. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=6} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)}\,dz.$

Δ <u>*Первый способ*</u>

Разложим дробь $\displaystyle\frac{1}{(z-1)(z-5)}$ на простейшие:

$$\frac{1}{(z-1)(z-5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-1}\right).$$

Имеем

$$\int\limits_{|z|=6} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)}\,dz = \frac{1}{4}\left(\int\limits_{|z|=6} \frac{e^{z-3}}{z-5}\,dz - \int\limits_{|z|=6} \frac{e^{z-3}}{z-1}\,dz\right) = \frac{1}{4}\cdot 2\pi i\left(e^{z-3}\Big|_{z=5} - e^{z-3}\Big|_{z=1}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}(e^2 - e^{-2}) = \pi i\,\mathrm{sh}\,2;$$

Второй способ

Построим окружности c_1 и c_2 с центрами в точках $z_1 = 1$ и $z_2 = 5$ достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и лежали внутри контура $|z| = 6$ (рис. 5.1).

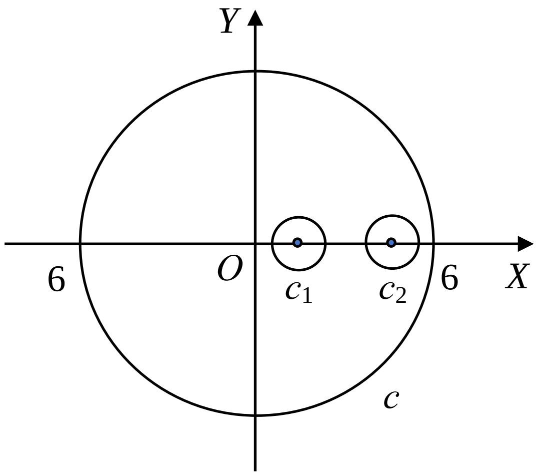


Рис. 5.1

По теореме Коши для многосвязной области:

$$\int\limits_{|z|=6} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)} = \int\limits_{c_1} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)}\,dz + \int\limits_{c_2} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)}\,dz = \int\limits_{c_1} \frac{\frac{e^{z-3}}{z-5}}{(z-1)}\,dz +$$

$$+\int\limits_{c_2} \frac{\frac{e^{z-3}}{z-5}}{z-1} = 2\pi i \left.\frac{e^{z-3}}{z-5}\right|_{z=1} + 2\pi i \left.\frac{e^{z-3}}{z-1}\right|_{z=5} = 2\pi i \left(\frac{e^{-2}}{-4} + \frac{e^{2}}{4} \right) = \pi i \operatorname{sh} 2. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Вычислить интегралы, используя формулу n-й производной для аналитической функции:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+2)^4}\,dz$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{2z^4 + 3z^3 + 4}{(z-2)^{10}}\,dz$.

Δ а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} \left.(\cos z)''\right|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \operatorname{ch} 1$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+2)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} \left.(e^z)'''\right|_{z=-2} = \frac{\pi i}{3e^2}$;

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{2z^4+3z^3+4}{(z-2)^{10}}dz = \frac{2\pi i}{9!}(2z^4+3z^3+4)^{(9)}\Big|_{z=2} = 0.$ ▲

Пример 11. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}.$

Δ Внутри контура интегрирования находится одна особая точка $z=2$. Имеем $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)} = \int\limits_{|z-3|=6} \frac{\frac{z}{z+4}}{(z-2)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{z}{z+4}\right)''\Bigg|_{z=2} = -\frac{\pi i}{27}.$ ▲

Пример 12. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)^3}.$

Δ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки $z_1=0$ и $z_2=1$.

Имеем $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)^3} = \frac{e^z\,dz}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Bigg|_{z=1} =$

$$= -1 + \frac{e^z\cdot z^3 - 2e^z\cdot z^2 + 2e^z\cdot z}{z^4}\Bigg|_{z=1} = \frac{e}{2} - 1. \ ▲$$

Дополнительные задачи

1. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{AB}(z+2\bar{z})dz$, где $AB-$отрезок прямой: $z_A = 1+3i$, $z_B = 2+5i$.

Ответ: $\dfrac{25}{2}+5i$.

2. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{c}|z|\cdot\bar{z}\,dz$, где $c-$верхняя полуокружность $|z|=1$, обход против часовой стрелки.

Ответ: $i\pi$.

3. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{C}(2z+1)dz$:

а) $C-$отрезок прямой от точки $z_1=-1-i$ до точки $z_2=1+i$;

б) c − отрезок кривой $y = x^3$ от точки $z_1 = -1 - i$ до точки $z_2 = 1 + i$.

Объяснить совпадение полученных значений.

Ответ: а) $2(1+i)$; б) $2(1+i)$. Полученные значения совпадают, т. к. подынтегральная функция является аналитической.

4. Вычислить:

а) $\int\limits_0^{i+1} z^3 dz$. **Ответ:** -1;

б) $\int\limits_0^{i} z \cos z \, dz$. **Ответ:** $e^{-1} - 1$.

5. Вычислить $\int\limits_c \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$, где c: $|z - 3| = 2$. **Ответ:** 0.

6. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz$. **Ответ:** $\frac{\pi i}{2} \sin 2$;

б) $\int\limits_{|z+3|=1} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 3z} dz$. **Ответ:** $-\frac{2}{3} \pi i \cos 3$;

в) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3} dz$. **Ответ:** $\pi \operatorname{sh} 1$.

7. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=8} \frac{\operatorname{sh}(z+2)}{(z-1)(z+5)} dz$. **Ответ:** $\frac{2}{3} \pi i \operatorname{sh} 3$;

б) $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+6)}$. **Ответ:** $-\frac{\pi}{45} i$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+2}{(z+1)^2 (z-3)} dz$. **Ответ:** $-\frac{5}{8} \pi i$;

б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}\,dz.$ **Ответ:** $-\pi i$;

в) $\oint\limits_{|z|=10} \frac{4z^5-3z^2+z}{(z-3)^8}\,dz.$ **Ответ:** 0;

г) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}\,dz.$ **Ответ:** 0.

6. Ряды в комплексной области

Пример 1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2ni+3}{2n^2 i-3n+5i}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5ni+2i}{n^3+4n^4 i+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{3^n}+i\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-3i}{4+i}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}+i\frac{2^n}{n!}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2i-1}{3n+2i}\right)^{n^2}$.

Δ а) находим $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2ni+3}{2n^2 i-3n+5i}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{2i}{n}+\frac{3}{n^2}}{2i-\frac{3}{n}+\frac{5i}{n^2}}\right| = \left|\frac{1}{2i}\right| = \frac{1}{2} \neq 0.$ Ряд расходится;

б) пусть $a_n = \frac{n^2+5ni+2i}{n^3+4n^4 i+3}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n^2(n^2+5ni+2i)}{n^3+4n^4 i+3}\right| = \frac{1}{4}$, то в плане сходимости оба ряда ведут себя одинаково. Ряд a_n сходится абсолютно;

в) исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, то $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$, $n\to\infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является расходящимся. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{3^n}+i\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ расходится;

г) так как $\left|\frac{2-3i}{4+i}\right|=\sqrt{\frac{13}{17}}<1,$ то этот ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, следовательно, он сходится абсолютно;

д) так как $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n},\ n\to\infty,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+i\frac{2^n}{n!}\right)$ расходится;

е) применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+2i-1}{3n+2i}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left|1-\frac{1}{3n+2i}\right|^n\le\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^{-(3n+2)\cdot\frac{-n}{3n+2}}=e^{-\frac{1}{3}}<1.$$ Ряд сходится абсолютно. ▲

Пример 2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n\cdot 2^n}$.

Δ а) используя признак Даламбера, находим:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n}=0<1.$$ Ряд сходится абсолютно;

б) по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2+i)^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot(2+i)^n}\right|=\left|\frac{2+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}>1.$$ Ряд расходится. ▲

Пример 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$:

а) $c_n=\frac{1}{n+i\sqrt{n}}$; б) $c_n=\frac{3\sqrt{n}+(-1)^n in}{n^2}$; в) $c_n=\frac{\sin in}{5^n}$;

г) $c_n=(-1)^n\cdot\sin\frac{1}{n}+i\frac{4^n}{n!}$; д) $c_n=\frac{(2i)^n}{n\sqrt{4^n+3}}$; е) $c_n=\frac{1}{n}e^{\frac{\pi i}{n}}$.

Δ а) так как $c_n=\frac{1}{n+i\sqrt{n}}=\frac{n-i\sqrt{n}}{n^2+n}=\frac{\pi}{n^2+n}-\frac{i\sqrt{n}}{n^2+n}=\frac{1}{n+1}-\frac{i}{n^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}$, и ряд $x_n = \frac{1}{n+1}$ расходится, то и ряд $c_n = \frac{1}{n+i\sqrt{n}}$ расходится;

б) $c_n = \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}} + i\frac{(-1)^n}{n}$. Ряд $x_n = \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится абсолютно, ряд $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно, следовательно, ряд c_n сходится условно;

в) так как $|c_n| = \left|\frac{e^{-n} - e^n}{2i\cdot 5^n}\right| \sim \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e}{5}\right)^n$, $n\to\infty$, то ряд c_n сходится абсолютно как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

г) имеем $c_n = (-1)^n \cdot \sin\frac{1}{n} + i\frac{4^n}{n!}$. Ряд $x_n = (-1)^n \cdot \sin\frac{1}{n}$ сходится условно, ряд $\frac{4^n}{n!}$ по признаку Даламбера сходится абсолютно. Следовательно, ряд c_n сходится условно;

д) так как $\frac{(2i)^n}{n\sqrt{4^n+3}} \sim \frac{i^n}{n}$, $n\to\infty$, а ряд $c'_n = \frac{i^n}{n} = (-1)^n\cdot\frac{1}{n} + i(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ сходится условно, то и ряд c_n сходится условно;

е) так как $c_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$, и $\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{n}$, $n\to\infty$, то ряд $x_n = \frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n}$ расходится, следовательно, расходится и ряд $c_n = \frac{1}{n}e^{\frac{\pi i}{n}}$. ▲

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n}$. В случае сходимости найти его сумму.

Δ Ряд сходится как ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, где $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Его сумма равна

$$S = \frac{c_1}{1-q} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1(1+i)}{i} = -i. \ ▲$$

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{z}{2+3i} + \frac{z^2}{(2+3i)^2} + \frac{z^3}{(2+3i)^3} + \ldots + \frac{i}{z} + \frac{i^2}{z^2} + \frac{i^3}{z^3} + \ldots .$$

Δ Рассмотрим два ряда: $\dfrac{z}{2+3i}+\dfrac{z^2}{(2+3i)^2}+\ldots$ и $\dfrac{i}{z}+\dfrac{i^2}{z^2}+\ldots$. Эти ряды – геометрические прогрессии со знаменателями $\dfrac{z}{2+3i}$ и $\dfrac{i}{z}$. Ряды сходятся в области $\begin{cases}\left|\dfrac{z}{z+3i}\right|<1;\\ \left|\dfrac{i}{z}\right|<1\end{cases}$ или $\begin{cases}|z|<\sqrt{13};\\ \left|\dfrac{i}{z}\right|>1.\end{cases}$

Таким образом, областью сходимости ряда является кольцо $1<|z|<\sqrt{13}$. ▲

Пример 6. Исследовать сходимость функциональных рядов:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!z^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2z-i}{z+i}\right)^n$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+4}{z-4i}\right)^n$.

Δ а) очевидно, точка $z=0$ не входит в область сходимости этого ряда. Сходимость других точек исследуем с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\cdot n!\cdot z^n}{(n+1)!\cdot z^{n+1}\cdot 2^n}\right|=0.$$

Ряд сходится на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$;

б) ряд сходится в области

$$\left|\frac{2z-i}{z+i}\right|<1,\ \ |2z-i|<|z+i|,$$

$$|2x+2iy-i|<|x+iy+i|,$$

$$4x^2+4y^2-4y+1<x^2+y^2+2y+1,$$

$$3x^2+3y^2-6y<0,\ \ x^2+y^2-2y<0,$$

$$x^2+(y-1)^2<1,\ \ |z-i|<1.$$

На границе круга ряд расходится;

в) ряд представляет геометрическую прогрессию, поэтому ряд сходится в области

$$\left|\frac{z+4}{z-4i}\right|<1,\ \ |z+4|<|z-4i|,\ \ |x+iy+4|<|x+iy-4i|,$$

$$x^2+8x+16+y^2<x^2+y^2-8y+16,\quad x+y<0.$$

Ряд сходится на полуплоскости $x+y<0$. ▲

Пример 7. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(z-1+3i)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+3-i)^n}{(n^2+1)\,2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i)^{2n}}{9^n}$.

Δ а) находим $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\cdot 3^{n+1}}{3^n\cdot(n+1)!}=0$. Ряд сходится в единственной точке $z=1-3i$;

б) находим $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((n+1)^2+1)\cdot 2^{n+1}}{(n^2+1)\cdot 2^n}=2$. Ряд сходится в области $|z-(-3+i)|<2$. Отметим,что все граничные точки входят в область сходимости;

в) так как ряд содержит бесконечное число нулевых членов, следует применять непосредственно признак Даламбера или Коши. Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|z+i|^{2n}}{9^n}}=\frac{|z+i|}{3}.$$

Из равенства $\dfrac{|z+i|}{3}<1$ находим $|z+i|<3$.

Очевидно, что граничные точки не входят в область сходимости ряда. ▲

Пример 8. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(3n+1)^2\,9^n}$ сходится равномерно в области $|z|\le 3$.

Δ В области $|z|\le 3$ $\left|\dfrac{z^{2n+1}}{(3n+1)^2\,9^n}\right|\le\dfrac{3}{(3n+1)^2}$, т. е. искомый степенной ряд мажорируется числовым знакоположительным сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{(3n+1)^2}$. По теореме Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(3n+1)^2\,9^n}$ в области $|z|\le 3$ сходится равномерно. ▲

Пример 9. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n\cdot 2^n}$.

Δ Радиус сходимости этого ряда $R=2$. Внутри интервала сходимости этот ряд можно почленно дифференцировать:

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n\cdot 2^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2-z}.$$

Проинтегрируем полученное равенство на отрезке $[0;z]$:

$$\int_0^z S'(t)dt=\int_0^z\frac{dz}{2-z};$$

$$S(z)-S(0)=-\ln(2-z)+\ln 2=\ln\frac{2}{2-z}.$$

Так как $S(0)=0$, окончательно получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 2^n}=\ln\frac{2}{2-z}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2in^2+3n-5i}{5n^2+8in-1}$. **Ответ:** расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3ni-5}{4in^5+7n-3i}$. **Ответ:** сходится.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2-3i)^n}$. В случае сходимости найти его сумму.

Ответ: сходится, $S=\frac{11+3i}{10}$.

3. С помощью признаков Даламбера и Коши исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{(n+1)\cdot 4^n}$. **Ответ:** сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4+2i}{5}\right)^{n^2}$. **Ответ:** сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+4i}{2-3i}\right)^{n}$. **Ответ:** расходится.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+in}$. **Ответ:** расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+i}}$. **Ответ:** сходится абсолютно;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos \pi n \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}+i\dfrac{3^n}{n!}\right)$. **Ответ:** сходится условно;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{3^n}$. **Ответ:** сходится абсолютно.

5. Исследовать сходимость функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{z^n}$. **Ответ:** область сходимости $|z|>1$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z-i}{2z+i}\right)^{n}$. **Ответ:** область сходимости $|z+i|>1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot e^{2i+nz}$. **Ответ:** область сходимости $x<-\ln 3$.

6. Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1+3i)^n}{(n^2+1)\,2^n}$. **Ответ:** $|z-1+3i|\le 2$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+3i)^{2n}}{16^n}$. **Ответ:** $|z+3i|<4$.

7. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot z^{2n}$. **Ответ:** $S=\dfrac{z^2}{(1-z^2)^2}$, $|z|<1$.

7. Ряды Тейлора и Лорана

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\dfrac{1}{z}$ в окрестности точки $z_0=-3$.

Δ Вычислим значения данной функции и ее производные в точке $z_0=-3$:

$$f(z)=z^{-1},\ \ f(-3)=-\frac{1}{3};$$

$$f'(z)=-1\cdot z^{-2},\ \ f'(-3)=-\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1!}{3^2};$$

$$f''(z)=1\cdot 2z^{-3},\ \ f''(-3)=\frac{2}{(-3)^3}=-\frac{2!}{3^3};$$

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n n!\,\overline{z}^{n-1},\ \ f^{(n)}(-3)=-\frac{n!}{3^{n+1}}.$$

Подставляя эти значения в ряд Тейлора, получим

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{3}-\frac{1!\,(z+3)}{3^2\cdot 1!}-\frac{2!\,(z+3)^2}{3^3\cdot 2!}-\ldots-\frac{n!\,(z+3)^n}{3^{n+1}\cdot n!}-\ldots=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{3^n}.$$

Расстояние от точки $z_0=-3$ до ближайшей особой точки $z=0$ равно 3. Следовательно, разложение справедливо в области $|z+3|<3$. ▲

Пример 2. Найти три первых отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(z)=\operatorname{tg} z$.

Δ *<u>Первый способ</u>*

Продифференцируем функцию:

$$f(z)=\operatorname{tg} z,$$

$$f'(z)=\frac{1}{\cos^2 z}=1+f^2(z),$$

$$f''(z)=2f(z)\cdot f'(z),$$

$$f'''(z)=2(f'^2(z)+f(z)\cdot f''(z)),$$

$$f^{IV}(z)=2(3f'(z)\cdot f''(z)+f(z)\cdot f'''(z)),$$

$$f^{V}(z)=2(3f''^2(z)+4f'(z)\cdot f'''(z)+f(z)\cdot f^{IV}(z)).$$

Находим $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=2,\ f^{IV}(0)=0,\ f^{V}(0)=16.$

Таким образом, $\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \ldots = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \ldots$.

Расстояние от точки $z_0 = 0$ до ближайшей особой точки $z = \frac{\pi}{2}$ равно $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, разложение справедливо в области $|z| < \frac{\pi}{2}$.

<u>*Второй способ*</u>

Запишем $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots} = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots$,

$$(a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \right) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} = \ldots .$$

Перемножая ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = 1; \\ a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6}; \\ a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120}, \end{cases}$$

из которой находим $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$.

Таким образом, имеет место разложение $\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \ldots$. ▲

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(z) = \sin(2z - 1)$.

Δ Представим функцию $f(z)$ в виде $\sin(2z-1) = \cos 1 \sin 2z - \sin 1 \cos 2z$.

Так как $\sin 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $|z| < \infty$ и $\cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$, $|z| < \infty$, то окончательно получаем $\sin(2z-1) = \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} -$

$$- \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \infty. \ ▲$$

Пример 4. Разложить по степеням $(z-1)$ функцию $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$.

Δ Разложив дробь на элементарные, получим $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z+1}$.

Имеем

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n},$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n},$$

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=-\frac{5}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}((-1)^{n+1}-5)(z-1)^n.$$

Расстояние от точки $z_0=1$ до ближайшей особой точки равно 2. Следовательно, разложение справедливо в области $|z-1|<2$. ▲

Пример 5. Найти первые шесть членов разложения в ряд Маклорена функции $f(z)=e^z\cos z$.

Δ Имеем $e^z\cos z=\left(1+\dfrac{z}{1}+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}+\dfrac{z^4}{24}+\dfrac{z^5}{120}+\ldots\right)\cdot\left(1-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^4}{24}+\ldots\right)=$

$$=1+z-\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{6}z^4-\frac{1}{30}z^5+\ldots.$$

Таким образом, $e^z\cos z=1+z-\dfrac{1}{3}z^3-\dfrac{1}{6}z^4-\dfrac{1}{30}z^5+\ldots$.

Функция $f(z)=e^z\cos z$ является аналитической на всей комплексной плоскости, поэтому разложение справедливо в области $|z|<\infty$. ▲

Пример 6. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{(4-z)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $z-2$.

Δ Разложим в ряд Тейлора функцию $\dfrac{1}{4-z}$.

Имеем

$$\frac{1}{4-z}=\frac{1}{2-(z-2)}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-2}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z-2}{2}+\frac{(z-2)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(z-2)^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Так как $\dfrac{1}{(4-z)^2}=\left(\dfrac{1}{4-z}\right)'$, то

$$\frac{1}{(4-z)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2(z-2)}{2^2}+\frac{3(z-2)^2}{2^3}+\ldots+\frac{n(z-2)^{n-1}}{2^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-2)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(z-2)^n}{2^n}.$$

Разложение справедливо в области $|z-2|<2$. ▲

Пример 7. Используя разложения в степенные ряды, вычислить

$$\lim_{z\to 0}\frac{2+\cos z}{z^3\sin z}-\frac{3}{z^4}.$$

Δ Имеем

$$\lim_{z\to 0}\frac{2z+\cos z\cdot z-3\sin z}{z^4\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z+\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots\right)z-3\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots\right)}{z^4\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2z+z-\dfrac{z^3}{2}+\dfrac{z^5}{24}-\ldots-3z+\dfrac{z^3}{2}-\dfrac{z^5}{40}+\ldots}{z^5\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\ldots\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^5\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{40}\right)+\ldots}{z^5\left(1-\dfrac{z^2}{6}+\ldots\right)}=\frac{1}{60}.\ ▲$$

Пример 8. Функцию $f(z)=\dfrac{z^4}{(z+2)^2}$ разложить в ряд Лорана по степеням $z+2$.

Δ Введем новую переменную $t = z + 2$. Тогда

$$f(z) = \frac{z^4}{(z+2)^2} = \frac{(t-2)^4}{t^2} = \frac{t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16}{t^2} = \frac{16}{t^2} - \frac{32}{t} + 24 - 8t + t^2 =$$

$$= \frac{16}{(z+2)^2} - \frac{32}{z+2} + 24 - 8(z+2) + (z+2)^2, \quad z \neq 2. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z-4)}$ разложить в ряд Лорана в указанных кольцах: а) $3 < |z| < 4$; б) $4 < |z| < \infty$.

Δ Функция $f(z)$ в указанных кольцах является аналитической, поэтому может быть разложена в них в соответствующий ряд Лорана. Запишем функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-3)(z-4)} = \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-3}.$$

Тогда:

а) имеем $\dfrac{1}{z-4} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{4}} = -\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^n} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^{n+1}}$,

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}.$$

Таким образом, $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^{n+1}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^{n+1}}$, $3 < |z| < 4$;

б) $\dfrac{1}{z-4} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\dfrac{4}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n}{z^{n+1}}$,

$$\frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}},$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-4)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n - 3^n}{z^{n+1}}, \quad 4 < |z| < \infty. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в ряд Лорана в окрестностях особых точек.

Δ Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z=-1$ и $z=3$. Окрестностями этих точек являтся области $0<|z+1|<4$ и $0<|z-3|<4$ (рис. 7.1).

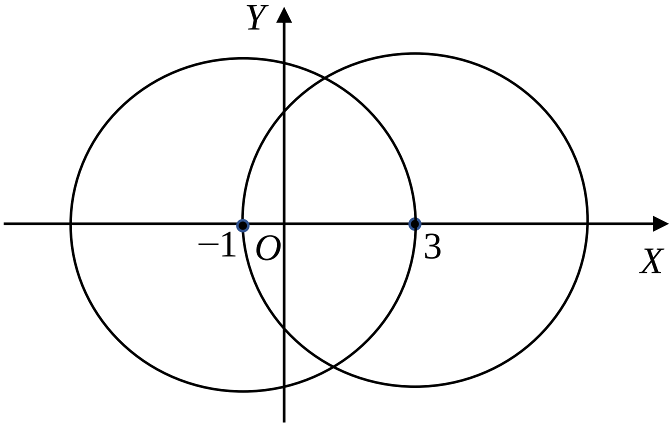


Рис. 7.1

Разложим функцию $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}=\frac{-\frac{5}{16}}{z+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{(z+1)^2}+\frac{\frac{5}{16}}{z-3}.$$

В области $0<|z+1|<4$ имеем

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z+1)-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{4}}=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z+1}{4}+\frac{(z+1)^2}{4^2}+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}.$$

Таким образом, в области $0<|z+1|<4$

$$f(z)=\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}=\frac{-\frac{5}{16}}{z+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{(z+1)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(z+1)^n}{4^{n+3}}.$$

Найдем разложения функций $\frac{1}{z+1}$ и $\frac{1}{(z+1)^2}$ в области $0<|z-3|<4$:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-3)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{4^{n+1}},$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=-\left(\frac{1}{z+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n(z-3)^{n-1}}{4^{n+1}}$$

или

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n+1)}{4^{n+2}}\,(z-3)^n .$$

В области $0<|z-3|<4$

$$f(z)=\frac{z+2}{(z+1)^2\,(z-3)}=\frac{\frac{5}{16}}{z-3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(n+6)}{4^{n+3}}\,(z-3)^n . \quad \blacktriangle$$

Пример 11. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ в ряд Лорана в кольце $0<|z-i|<2.$

Δ Представим заданную функцию $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{(z-i)}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}.$$

Используя разложение функции $\dfrac{1}{1-q}$, $|q|<1$, получаем

$$f(z)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(z-i)^n}{(2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}},\quad 0<|z-i|<2. \quad \blacktriangle$$

Пример 12. Функцию $f(z)=(z+1)e^{\frac{z}{z-2}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2.$

Δ В кольце $0<|z-2|<\infty$ функция $f(z)$ аналитическая, поэтому она представима рядом Лорана.

Имеем $f(z)=(z+1)e^{\frac{z}{z-2}}=((z-2)+3)\cdot e^{\frac{z-2+2}{z-2}}=e((z-2)+3)\cdot e^{\frac{2}{z-2}}=$

$$=e((z-2)+3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!(z-2)^n}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-2)^{n-1}\,n!}+3e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-2)^n\,n!},\quad |z-2|>0. \quad \blacktriangle$$

Пример 13. Функцию $f(z)=\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ разложить в ряд Лорана в области $0<|z-2|<\infty.$

Δ Введем новую переменную t по формуле $t=z-2$, тогда

$$f(z)=\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos\frac{(t+2)^2-4(t+2)}{t^2}=\cos\frac{t^2+4t+4-4t-8}{t^2}=$$

$$=\cos\left(1-\frac{4}{t^2}\right)=\cos 1\cdot\cos\frac{4}{t^2}+\sin 1\cdot\sin\frac{4}{t^2}=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n}}{(2n)!\,t^{4n}}+$$

$$+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n+2}}{(2n+1)!\,t^{4n+2}}=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n}}{(2n)!\,(z-2)^{4n}}+$$

$$+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n+2}}{(2n+1)!\,(z-2)^{4n+2}},\quad 0<|z-2|<\infty.\ \blacktriangle$$

Пример 14. Функцию $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Δ Функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ является аналитической в кольце $0<|z|<\infty$, поэтому ряд $\sin\frac{1}{z}=z-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-...+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}+...$ является рядом Лорана для функции $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ и в окрестности точки $z=0$, и в окрестности бесконечно удаленной точки. $\blacktriangle$

Дополнительные задачи

1. Пользуясь общим алгоритмом, разложить функцию $f(z)=e^{3z-2}$ по степеням $z-1$ и указать область сходимости полученного ряда.

Ответ: $e^{3z-2}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(z-1)^n$, $|z-1|<\infty$.

2. Найти три первых отличных от нуля члена ряда Маклорена для функции $f(z)=\frac{1}{1+e^z}$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

Ответ: $\frac{1}{1+e^z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+...$, $R=\sqrt{\ln^2(2-\sqrt{3})+\pi^2}$.

3. Функцию $f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z-3}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=1$.

Ответ: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}\left((-1)^{n+1}-5\right)(z-1)^n$, $|z-1|<2$.

4. Функцию $f(z)=\cos^2\frac{iz}{2}$ разложить в ряд Маклорена.

Ответ: $f(z)=1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$.

5. Разложить функцию $f(z)=\frac{z+2i}{(1-2i-z)^2}$ по степеням $(z+2i)$.

Ответ: $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+2i)^n$, $|z+2i|<1$.

6. Функцию $f(z)=e^{\sin z}$ разложить в ряд Маклорена до a_3z^3 включительно.

Ответ: $e^{\sin z}=1+z+\frac{1}{2}z^2+oz^3+\ldots$, $|z|<\infty$.

7. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}$. **Ответ:** $-i$;

б) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin 2iz-2iz\,\mathrm{ch}\,iz}{z^3}$. **Ответ:** $\frac{7}{3}i$.

8. Найти всевозможные разложения функции $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ по степеням z.

Ответ: а) $|z|<1$, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$;

б) $1<|z|<2$, $f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$;

в) $|z|>2$, $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}$.

9. Функцию $f(z)=\frac{1}{z^2-3iz+2}$ разложить в ряд Лорана в кольце $0<|z-2i|<1$.

Ответ: $f(z)=-\dfrac{i}{z-2i}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{i^n}$.

10. Функцию $f(z)=\dfrac{z^2-2z-3}{(z-1)^2(z+3)}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.

Ответ: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3\cdot(-1)^n}{4^{n+3}}(z-1)^n+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{(z-1)^2},\ \ 0<|z-1|<4.$

11. Функцию $f(z)=\dfrac{\cos^2 2z}{z^5}$ разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Ответ: $f(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^{2n}z^{2n-5}}{(2n)!},\ \ |z|>0.$

8. Нули и изолированные особые точки аналитических функций

Пример 1. Найти все нули функций и определить их порядок:

а) $f(z)=z^5-3z^4+3z^3-z^2$;

б) $f(z)=z^6-z^5+2z^4-2z^3$;

в) $f(z)=(z^4+2z^2+1)(z^2-2z+2)$.

Δ Разложим многочлены на линейные множители:

а) $z^5-3z^4+3z^3-z^2=z^2(z^3-3z^2+3z-1)=z^2(z-1)^3$.

Точка $z=0$ является нулем второго порядка.

Точка $z=1$ является нулем третьего порядка;

б) $z^6-z^5+2z^4-2z^3=z^3(z^3-z^2+2z-2)=z^3(z-1)(z^2+2)=$
$=z^3(z-1)(z-\sqrt{2}\,i)(z+\sqrt{2}\,i)$.

Точка $z=0$ является нулем третьего порядка.

Точки $z=1,\ z=\sqrt{2}\,i,\ z=-\sqrt{2}\,i$ являются нулями первого порядка (простыми нулями);

в) $(z^4+2z^2+1)(z^2-2z+2)=(z^2+1)^2(z-(1+i))(z-(1-i))=$

$=(z-i)^2(z+i)^2(z-(1+i))(z-(1-i))$.

Точки $z=\pm i$ являются нулями второго порядка.

Точки $z=1\pm i$ являются простыми нулями. ▲

Пример 2. Определить порядок нуля $z_0=0$ для функции

$f(z)=3\cos 2z+6\sin z^2-3$.

Δ Разложим функцию $f(z)$ в ряд Маклорена. Получаем

$$f(z)=3\left(1-\frac{4z^2}{2!}+\frac{16z^4}{4!}-\ldots\right)+6\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\ldots\right)-3=2z^4+\ldots.$$

Точка $z=0$ является нулем четвертого порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 3. Для заданных функций определить порядок нуля в точке z_0:

а) $f(z)=1-\sin^3 z-\cos z$, $z_0=\pi$;

б) $f(z)=z^3+8z^2+20z+16+(1-\cos\pi z)^3$, $z_0=-2$.

Δ а) находим значение функции и ее производных в точке $z_0=\pi$:

$f(z)=1-\sin^3 z-\cos z$, $f(\pi)=0$;

$f'(z)=-3\sin^2 z\cdot\cos z+\sin z$, $f'(\pi)=0$;

$f''(z)=-6\sin z\cos^2 z+3\sin^3 z+\cos z$, $f''(\pi)\neq 0$.

Точка $z_0=\pi$ является нулем второго порядка для функции $f(z)$;

б) запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=z^3+8z^2+20z+16+8\sin^6\frac{\pi z}{2}.$$

Пусть $f_1(z)=z^3+8z^2+20z+16$, $f_2(z)=8\sin^6\frac{\pi z}{2}$;

$f_1(-2)=-8+32-40+16=0$;

$f_1'(z)=3z^2+16z+20$, $f_1'(-2)=0$;

$f_1''(z)=6z+16$, $f_1''(-2)\neq 0$.

Точка $z=-2$ для функции $f_1(z)$ является нулем второго порядка. Для функции $f_2(z)$ точка $z=-2$ является нулем не ниже шестого порядка.

Следовательно, для функции $f(z)$ точка $z=-2$ является нулем второго порядка. ▲

Пример 4. Определить порядок нуля в точке $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=(e^z-1)^3-\sin^4 z$;

б) $f(z)=\sin^4 z(e^{z^2}-1)^3$;

в) $f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$.

Δ а) так как $(e^z-1)^3 \sim z^3$, $z\to 0$, а $\sin^4 z\sim z^4$, $z\to 0$, то $(e^z-1)^3-\sin^4 z\sim z^3$, $z\to 0$.

Следовательно, для функции $f(z)=(e^z-1)^3-\sin^4 z$ точка $z=0$ является нулем третьего порядка;

б) $\sin^4 z\cdot(e^{z^2}-1)^3\sim z^4\cdot z^6\sim z^{10}$, $z\to 0$.

Следовательно, точка $z=0$ для функции $f(z)$ является нулем десятого порядка;

в) разложив функцию $f(z)$ в ряд Маклорена, получим

$$f(z)=6\left(z^3-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}z^3-\ldots\right)+z^9-6z^3=\frac{z^{15}}{20}+\ldots .$$

Точка $z=0$ является нулем пятнадцатого порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 5. Для функции $f(z)=\dfrac{\cos^4 nz}{(4z^2-1)(z^2+1)}$ определить порядок нуля в точке $z_0=\dfrac{1}{2}$.

Δ Запишем функцию $f(z)$ в виде $f(z)=\dfrac{(\cos nz)^4}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(2z+1)(z^2+1)}$.

Так как $\cos nz\Big|_{z=\frac{1}{2}}=0$, $(\cos nz)'\Big|_{z=\frac{1}{2}}\neq 0$, то точка $z_0=\dfrac{1}{2}$ является нулем четвертого порядка для функции $\cos^4 \pi z$. Очевидно, что точка $z_0=\dfrac{1}{2}$ является нулем первого порядка для знаменателя.

Таким образом, точка $z_0=\dfrac{1}{2}$ является нулем третьего порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 6. Определить порядок нуля для функции $f(z)=\frac{1}{z^6}-\frac{z^2+z+1}{z^8}$ в бесконечно удаленной точке.

Δ Запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z^6}-\frac{z^2+z+1}{z^8}=\frac{z^2-z^2-z-1}{z^8}=\frac{-z-1}{z^8}=\frac{1}{z^7}\left(-1-\frac{1}{z}\right).$$

Точка $z=0$ является нулем седьмого порядка. ▲

Пример 7. Для функции $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z+1}}$ определить тип особой точки $z=-1.$

Δ В сколь угодно малой окрестности особой точки $z=-1$ имеется бесконечно много особых точек $z_n=-1+\frac{1}{\pi n}$. Точка $z=-1$ является неизолированной особой точкой. ▲

Пример 8. Определить тип особой точки $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$; б) $f(z)=\frac{z^2}{e^z-1}$.

Δ а) находим $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=1$. Точка $z=0$ является устранимой особой точкой;

б) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2}{e^z-1}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{2z}{e^z}=0$. Точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой.

▲

Пример 9. Определить тип особой точки $z_0=0$ для функции $f(z)=\frac{\cos 2z-1}{\operatorname{sh}z-z-\frac{z^3}{6}}$.

Δ Числитель и знаменатель дроби разложим в ряд Маклорена:

$$f(z)=\frac{\cos 2z-1}{\operatorname{sh}z-z-\frac{z^3}{6}}=\frac{1-\frac{4z^2}{2}+\ldots-1}{z+\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\ldots-z-\frac{z^3}{6}}=\frac{z^2\varphi_1(z)}{z^5\varphi_2(z)}=\frac{\varphi_1(z)}{z^3\varphi_2(z)}.$$

Функции $\varphi_1(z)\neq 0$ и $\varphi_2(z)\neq 0.$

Следовательно, точка $z_0=0$ является полюсом третьего порядка. ▲

Пример 10. Найти конечные особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ и выяснить их характер.

Δ Особыми точками являются точки $z=1$ и $z=2k\pi i$, т. к. $e^{2k\pi i}=1.$

При исследовании точки $z=1$ функцию $f(z)$ запишем в виде $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}\cdot\varphi(z),$ где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в окрестности точки $z=1$ и $\varphi(1)\neq 0.$

В окрестности точки $z=1$ функцию $e^{\frac{1}{z-1}}$ представим рядом Лорана:

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots .$$

Так как разложение содержит бесчисленное количество отрицательных степеней $(z-1)$, точка $z=1$ является существенно особой для функции $f(z)$.

Так как $(e^z-1)\big|_{z=2k\pi i}=0,\ (e^z-1)'\big|_{z=2k\pi i}\neq 0,$ то точки $z=2k\pi i$ являются полюсами первого порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 11. Для заданных функций найти конечные изолированные точки и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+3)}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}.$

Δ а) особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z=\pm\dfrac{1}{2}$ и $z=\pm\sqrt{3}\,i.$

Для исследования точки $z=\dfrac{1}{2}$ $f(z)$ запишем в виде

$$\frac{\cos\pi z}{2z-1}\cdot\frac{1}{(2z+1)(z^2+3)}=\frac{\cos\pi z}{2z-1}\cdot\varphi(z).$$

Функция $\varphi(z)$ является аналитической в окрестности точки $z_0=\dfrac{1}{2}$ и $\varphi(z_0)\neq 0.$ Находим $\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}}\dfrac{\cos\pi z}{2z-1}=\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}}\dfrac{-\pi\sin\pi z}{2}=-\dfrac{\pi}{2}.$

Точка $z=\frac{1}{2}$ является устранимой особой точкой. Аналогично точка $z_1=-\frac{1}{2}$ тоже является устранимой особой точкой. Если функцию $f(z)$ записать в виде $f(z)=\frac{1}{z-\sqrt{3}\,i}\cdot\frac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z+\sqrt{3}\,i)}$, то очевидно, что точка $z=\sqrt{3}\,i$ является полюсом первого порядка. Аналогично точка $z=-\sqrt{3}\,i$ является полюсом первого порядка;

б) функцию $f(z)$ запишем в виде

$$\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}=\frac{z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right)+1}{z\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots-1\right)}=\frac{-\frac{z^2}{2!}-\ldots}{z^2+\ldots}.$$

Отсюда следует, что точка $z=0$ является устранимой особой точкой.

Другими особыми точками будут точки, где $e^z=1$, $z=2k\pi i$, $k\neq 0$. Так как $(e^z-1)\big|_{z=2k\pi i}=0$, $(e^z-1)'\big|_{z=2k\pi i}=e^{2k\pi i}\neq 0$, то точки $z=2k\pi i$ $(k\neq 0)$ являются полюсами первого порядка.

Таким образом, $z=2k\pi i$, $k\neq 0$ – простые полюса, $z=0$ – устранимая особая точка. ▲

Пример 12. Исследовать точку $z=\infty$ для функций:

а) $f(z)=\frac{1}{z^3(z+1)}$; б) $f(z)=\frac{3z^2-1}{2z^2+3}$; в) $f(z)=z^2\cdot\sin\frac{1}{z^2}$.

Δ а) находим $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^3(z+1)}=0$. Точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой. Так как $\frac{1}{z^3(z+1)}\sim\frac{1}{z^4}$, $z\to\infty$, то можно отметить, что точка $z=\infty$ является нулем четвертого порядка;

б) так как $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{3z^2-1}{2z^2+3}=3$, точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой;

в) находим $\lim\limits_{z\to\infty} z^2\cdot\sin\frac{1}{z^2}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z^2}}=1$. Точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой.▲

Пример 13. Определить порядок полюса в точке $z=\infty$ для функции $f(z)=\frac{z^3}{z+1}$.

Δ <u>*Первый способ*</u>

Запишем разложение по степеням z:

$$f(z)=z^3\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-...\right)=z^2-z+1-...,\quad |z|>1.$$

Точка $z=\infty$ является полюсом второго порядка.

<u>*Второй способ*</u>

Обозначим $z=\frac{1}{y}$ и определим порядок полюса для точки $y=0$:

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y^3\left(\frac{1}{y}+1\right)}=\frac{1}{y^2\left(1+y\right)}=\frac{\psi(y)}{y^2}.$$

Функция $\psi(y)$ аналитическая в окрестности точки $y=0$ и $\psi(0)\neq 0$.

Точка $y=0$, или $z=\infty$ является полюсом второго порядка.

<u>*Третий способ*</u>

Для числителя точка $z=\infty$ является полюсом третьего порядка, для знаменателя точка $z=\infty$ является полюсом первого порядка. Следовательно, точка $z=\infty$ для функции $f(z)$ является полюсом второго порядка. ▲

Пример 14. Исследовать точку $z=\infty$ для функции $f(z)=\frac{1+e^z}{2+e^z}$.

Δ Пусть $z=x,\ x>0$. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{2+e^x}=1$. Пусть $z=x,\ x<0$. Находим $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{2+e^x}=\frac{1}{2}$. Точка $z=\infty$ является существенно особой для функции $f(z)$. ▲

Пример 15. Для функции $f(z)=\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$ найти все изолированные особые точки и определить их тип.

Δ Особыми точками $f(z)$ являются точки $z=2,\ z=-2,\ z=\infty$.

При исследовании точки $z=2$ введем в рассмотрение функцию

$$\psi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z+2)^2(z-2)^2\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}}{z^7}=(z-2)^2\cdot\cos\frac{1}{z-2}\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=\dfrac{(z+2)^2}{z^7}$ – аналитическая функция в окрестности точки $z=2$ и $\varphi(z)\neq 0$.

Функцию $(z-2)^2\cdot\cos\dfrac{1}{z-2}$ представим рядом Лорана по степеням $(z-2)$:

$$(z-2)^2\cdot\cos\frac{1}{z-2}=(z-2)^2\left(1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{4!(z-2)^4}-...\right).$$

Разложение содержит бесконечное число отрицательных степеней $(z-2)$. Следовательно, точка $z=2$ является существенно особой точкой для функции $\psi(z)$. Так как существенно особые точки для функций $f(z)$ и $\dfrac{1}{f(z)}$ совпадают, то точка $z=2$ является существенно особой для функции $f(z)$.

При исследовании точки $z=-2$ функцию $f(z)$ запишем в виде

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\varphi(z),\ \ \varphi(z)\neq 0.$$

Точка $z=-2$ является полюсом второго порядка для функции $f(z)$. ▲

Пример 16. Исследовать особую точку $z=\infty$ для функции

$$f(z)=\frac{z^8+5z^5-4z^3}{z^3+5}-z^5+\cos\frac{2z+1}{3z-2}.$$

Δ Запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{z^8+5z^5-4z^3-z^8-5z^5}{z^3+5}+\cos\left(\frac{2z+1}{3z-2}\right)=\frac{-4z^3}{z^3+5}+\cos\left(\frac{2+\dfrac{1}{z}}{3-\dfrac{2}{z}}\right).$$

Находим $\lim\limits_{z\to\infty}\left(\dfrac{-4z^3}{z^3+5}+\cos\left(\dfrac{2+\frac{1}{z}}{3-\frac{2}{z}}\right)\right)=-4+\cos\dfrac{2}{3}$.

Точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)$.

Дополнительные задачи

1. Найти все нули функций и определить их порядок:

а) $f(z)=z^5-z^4+4z^3-4z^2$;

б) $f(z)=z^2\sin z$.

Ответ: а) $z=0-$нуль второго порядка, $z=1,\ z=\pm 2i-$нули первого порядка; б) $z=0-$нуль третьего порядка, $z=k\pi,\ k\neq 0-$нуль первого порядка.

2. Для следующих функций определить порядок нуля в указанных точках:

а) $f(z)=(e^{z^2}-1-z^2)^2\sin^3 z,\ \ z_0=0$;

б) $f(z)=\dfrac{\sin z^4-z^4}{\operatorname{sh} z-z-\frac{z^3}{6}},\ \ z_0=0$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z(z+\pi)},\ \ z_0=-\pi$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z^6}-\dfrac{z^2+z+1}{z^8},\ \ z=\infty$;

д) $f(z)=(e^z-1)^2-\sin^2 z,\ \ z=0$.

Ответ: а) 11; б) 7; в) 1; г) 7; д) 3.

3. Для следующих функций определить тип особой точки $z=0$:

а) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} 6z-6z}{\operatorname{ch} z-1-\frac{z^2}{2}}$;

б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} 6z-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$.

Ответ: а) полюс первого порядка; б) полюс третьего порядка.

4. Для данных функций найти конечные особые точки и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{\sin 2\pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$; б) $f(z)=\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi z}{2}}{(z^2-1)^2(z^2+5)^3}$; в) $f(z)=\dfrac{\sin^3 z}{z^2(1-\cos z)}$.

Ответ: а) $z=0-$существенно особая точка, $z=\pm 1-$устранимые особые точки, $z=\pm i-$простые полюсы;

б) $z=\pm 1-$устранимые особые точки, $z=\pm\sqrt{5}\,i-$полюсы третьего порядка;

в) $z=0-$полюс первого порядка, $z=2k\pi,\ k\pm 0-$устранимая особая точка.

5. Исследовать характер бесконечно удаленной точки для следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{z^8+4z^5+3z^4}{z^3+4}-z^5+e^{\frac{1}{z+2}}$;

б) $f(z)=\dfrac{\sin 2\pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$;

в) $f(z)=(3z+4)(2z^6+5z+7)$.

Ответ: а) полюс первого порядка; б) существенно особая точка; в) полюс седьмого порядка.

9. Вычеты. Приложения вычетов

Пример 1. Для функции $f(z)=\dfrac{3z^3+2z+1}{z^2}$ найти $\operatorname*{Res}_0 f(z)$.

Δ Данную функцию можно записать так: $f(z)=3z+\dfrac{2}{z}+\dfrac{1}{z^2}$ и рассматривать эту сумму как ряд Лорана в окрестности точки $z=0$. Здесь $c_{-1}=2=\operatorname*{Res}_0 f(z)$. ▲

Пример 2. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{\sin^4 2z}{z^2(1-\cos z)}$ в точке $z=0$.

Δ Находим $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^4 2z}{z^2(1-\cos z)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin^4 2z}{2z^2\sin^2\dfrac{z}{2}}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{16z^4}{2z^2\cdot\dfrac{z^2}{4}}=32.$ Точка $z=0$ является устранимой особой точкой, следовательно, $\operatorname*{Res}\limits_{0} f(z)=0.$ ▲

Пример 3. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$ в конечных особых точках.

Δ Функция $f(z)$ имеет два простых полюса $z_1=1$ и $z_2=3$.

$$\operatorname*{Res}_{1}\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 1}\frac{z\cdot(z-1)}{(z-1)(z-3)}=-\frac{1}{2};$$

$$\operatorname*{Res}_{3}\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 3}\frac{z\cdot(z-3)}{(z-1)(z-3)}=\frac{3}{2}.\ ▲$$

Пример 4. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z+2i}{z^3+8i}$ в особых точках.

Δ Особыми точками являются нули знаменателя $z^3+8i=0$, $z_1=2i$, $z_2=\sqrt{3}-i$, $z_3=-\sqrt{3}-i$. Все они являтся простыми полюсами. Здесь удобно использовать формулу $\operatorname*{Res}\limits_{z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Находим вычеты в указанных точках:

$$\operatorname*{Res}_{2i}\frac{z+2i}{z^3+8i}=\left.\frac{z+2i}{3z^2}\right|_{z=2i}=-\frac{i}{3},$$

$$\operatorname*{Res}_{\sqrt{3}-i}\frac{z+2i}{z^3+8i}=\left.\frac{z+2i}{3z^2}\right|_{z=\sqrt{3}-i}=\frac{i}{6},$$

$$\operatorname*{Res}_{-\sqrt{3}-i}\frac{z+2i}{z^3+8i}=\left.\frac{z+2i}{3z^2}\right|_{z=-\sqrt{3}-i}=\frac{i}{6}.\ ▲$$

Пример 5. Найти $\operatorname*{Res}\limits_{2}\dfrac{z^3}{(z-2)^3}$.

Δ Точка $z=2$ является полюсом третьего порядка.

$$\underset{2}{\mathrm{Res}}\frac{z^3}{(z-2)^3}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\left(\frac{z^3(z-2)^3}{(z-2)^3}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 2}6z=6.\ \blacktriangle$$

Пример 6. Найти $\underset{2}{\mathrm{Res}}\left(z^2\sin\frac{1}{z-2}\right)$.

Δ Разложим функцию $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=2$.

$$z^2\sin\frac{1}{z-2}=(2+(z-2))^2\cdot\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3!(z-2)^3}+\frac{1}{5!(z-2)^5}+\ldots\right)=$$

$$=(4+4(z-2)+(z-2)^2)\cdot\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3!(z-2)^3}+\frac{1}{5!(z-2)^5}+\ldots\right).$$

Здесь $c_{-1}=4-\frac{1}{3!}=3\frac{5}{6}=\underset{2}{\mathrm{Res}}\left(z^2\cdot\sin\frac{1}{z-2}\right)$. $\blacktriangle$

Пример 7. Найти $\underset{0}{\mathrm{Res}}\cos\left(1+\frac{3}{z}\right)$.

Δ Разложим функцию $f(z)=\cos\left(1+\frac{3}{z}\right)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$\cos\left(1+\frac{3}{z}\right)=\cos 1\cdot\cos\frac{3}{z}-\sin 1\cdot\sin\frac{3}{z}=\cos 1\left(1-\frac{9}{2!z^2}+\ldots\right)-\sin 1\left(\frac{3}{z}-\frac{27}{3!z^3}+\ldots\right).$$

Здесь $c_{-1}=-3\sin 1=\underset{0}{\mathrm{Res}}\cos\left(1+\frac{3}{z}\right)$. $\blacktriangle$

Пример 8. Найти вычеты функции $f(z)=\frac{z+3}{(z+1)^2(z-2)}$ в конечных особых точках.

Δ Для этой функции точка $z=2$ является полюсом первого порядка, точка $z=-1$ является полюсом второго порядка.

$$\underset{2}{\mathrm{Res}}\frac{z+3}{(z+1)^2(z-2)}=\underset{2}{\mathrm{Res}}\frac{\frac{(z+3)}{(z+1)^2}}{(z-2)}=\left.\frac{\frac{(z+3)}{(z+1)^2}}{(z-2)'}\right|_{z=2}=\frac{5}{9},$$

$$\operatorname*{Res}_{-1}\frac{(z+3)}{(z+1)^2(z-2)}=\frac{1}{1!}\left(\frac{z+3}{z-2}\right)'\Bigg|_{z=-1}=\frac{(z-2)-(z+3)}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=-1}=-\frac{5}{9}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Вычислить $I=\oint\limits_{|z-2|=3}\dfrac{z^2+3}{z^3-4z}dz.$

Δ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки $z_1=2$ и $z_2=0$. Они являются полюсами первого порядка. Находим

$$\operatorname*{Res}_{2}\frac{z^3+3}{z^3-4z}=\frac{z^3+3}{3z^2-4}\Bigg|_{z=2}=\frac{7}{8},$$

$$\operatorname*{Res}_{0}\frac{z^2+3}{z^3-4z}=\frac{z^2+3}{3z^2-4}\Bigg|_{z=0}=-\frac{3}{4},$$

$$I=2\pi\cdot i\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi i}{4}. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Вычислить $I=\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{\sin^2 z}{z\cdot\cos z}dz.$

Δ Внутри контура интегрирования находятся две особые точки: $z_1=0-$ устранимая особая точка и $z_2=\dfrac{\pi}{2}-$полюс первого порядка.

$$\operatorname*{Res}_{0}\frac{\sin^2 z}{z\cdot\cos z}=0,$$

$$\operatorname*{Res}_{\pi/2}\frac{\sin^2 z}{z\cdot\cos z}=\frac{\dfrac{\sin^2 z}{z}}{(\cos z)'}\Bigg|_{z=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi},$$

$$I=2\pi i\left(-\frac{2}{\pi}\right)=-4i. \ \blacktriangle$$

Пример 11. Вычислить $I=\oint\limits_{|z|=10}(z^2+4z-5)\sin\dfrac{2}{z-1}dz.$

Δ Разложим функцию $f(z)=(z^2+4z-5)\sin\dfrac{2}{z-1}$ в окрестности точки $z=1$ в ряд Лорана:

$$f(z)=(z-1)(z+5)\left(\frac{2}{z-1}-\frac{2^3}{3!(z-1)^3}+\frac{2^5}{5!(z-1)^5}-\ldots\right)=$$

$$=((z-1)+6)\left(2-\frac{8}{6(z-1)^2}+\ldots\right).$$

Очевидно, что $c_{-1}=-\frac{4}{3}$.

Следовательно, $I=2\pi i\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{3}\pi i$. ▲

Пример 12. Вычислить $I=(z^2-z-2)\,e^{\frac{3}{z+1}}dz$.

Δ Разложим функцию $f(z)=(z^2-z-2)\,e^{\frac{3}{z+1}}$ в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки $z=-1$:

$$(z^2-z-2)\,e^{\frac{3}{z+1}}=\left((z+1)^2-3(z+1)\right)\left(1+\frac{3}{z+1}+\frac{3^2}{2!\,(z+1)^2}+\frac{3^3}{3!\,(z+1)^3}+\ldots\right).$$

Легко видеть, что $c_{-1}=\frac{3^3}{3!}-3\cdot\frac{3^2}{2!}=-9$,

$I=2\pi i\cdot(-9)=-18\pi i$. ▲

Пример 13. Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить $I=\int\limits_{|z|=10}\frac{z^{32}}{z^{11}+6}dz$.

Δ Все конечные особые точки лежат внутри контура $|z|=10$. Вне контура интегрирования находится единственная бесконечно удаленная особая точка. Разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\frac{z^{32}}{z^{11}+6}=z^{21}\left(\frac{1}{1+\frac{6}{z^{11}}}\right)=z^{21}\left(1-\frac{6}{z^{11}}+\frac{6^2}{z^{22}}-\frac{6^3}{z^{33}}+\ldots\right),$$

$$\operatorname*{Res}_{\infty}\frac{z^{32}}{z^{11}+6}=-c_{-1}=-36.$$

Для особых точек, лежащих внутри контура $|z|=10$, выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{2\,z_k}f(z)=-\operatorname*{Res}_{\infty}f(z).$$

Следовательно, $I=2\pi i\cdot 36=72\pi i$. ▲

Пример 14. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{z^{21}dz}{(z^3+2)^4(z^2+z+3)^5}$.

Δ Подынтегральная функция внутри контура интегрирования имеет пять особых точек, являющихся кратными полюсами. Для вычисления данного интеграла удобно использовать формулу $I=-2\pi i \operatorname*{Res}_{\infty} f(z)$. Функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z)=\frac{z^{21}}{(z^3+2)^4(z^2+z+3)^5}=\frac{z^{21}}{z^{22}+az^{21}+\ldots}=\frac{1}{z}+\frac{b}{z^2}+\ldots .$$

Очевидно, $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=-1$. Следовательно, $I=-2\pi i\cdot(-1)=2\pi i$. ▲

Пример 15. Вычислить с помощью вычетов $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\sin t}$.

Δ Пусть $e^{it}=z$. Тогда $\sin t=\dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$, $dt=\dfrac{dz}{iz}$.

Получим

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\sin t}=\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(3+\dfrac{z-\frac{1}{z}}{i}\right)}=\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+3iz-1}.$$

Функция $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3iz-1}$ имеет два полюса первого порядка: $z_1=\dfrac{i(-3+\sqrt{5})}{2}$ и $z_2=\dfrac{i(-3-\sqrt{5})}{2}$. Внутри контура интегрирования находится только z_1. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{1}{z^2+3iz-1}=\frac{1}{2z+3i}\Bigg|_{z=\frac{i(-3+\sqrt{5})}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}i},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\sin t}=2\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{5}i}=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}.\ ▲$$

Пример 16. Вычислить с помощью вычетов $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t\, dt}{(5-4\cos t)^2}$.

Δ Положим $e^{it} = z$, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t\, dt}{(5-4\cos t)^2} = \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{iz\left(5-2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right)} dz = \frac{1}{2i} \int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2} dz.$$

Функция $f(z) = \frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2}$ имеет два полюса второго порядка: $z_1 = 0{,}5$ и $z_2 = 2$. Внутри контура $|z|=1$ находится только $z_1 = 0{,}5$. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{0,5} \frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)^2} = \lim_{z\to 0,5} \left(\frac{(z-0{,}5)^2(z^2+1)}{4(z-0{,}5)^2(z-2)^2} \right)' = \frac{1}{4} \lim_{z\to 0,5} \left(\frac{z^2+1}{(z-2)^2} \right)' =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{z\to 0,5} \frac{2z(z-2)-2(z^2+1)(z-2)}{(z-2)^4} = \frac{8}{27}.$$

Таким образом, $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2} dt = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{8}{27} = \frac{8\pi}{27}$. ▲

Пример 17. Вычислить с помощью вычетов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

Δ Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$. Для нее бесконечная точка является нулем четвертого порядка, а точки $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -3i$ являются простыми полюсами. В верхней полуплоскости лежат точки $z_1 = i$ и $z_3 = 3i$. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \left. \frac{1}{(z^4+10z^2+9)'} \right|_{z=i} = \left. \frac{1}{4z^3+20z} \right|_{z=i} = \frac{1}{16i},$$

$$\operatorname*{Res}_{3i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \left. \frac{1}{4z^3+20z} \right|_{z=3i} = \frac{1}{-48i}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i\left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right) = \frac{\pi}{12}$. ▲

Пример 18. Вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

Δ Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{(z^2+2z+2)^2}$. Для нее бесконечная точка $z = \infty$ является нулем четвертого порядка, а точки $z_1 = -1+i$ и $z_2 = -1-i$ являются полюсами второго порядка. В верхней полуплоскости лежит только точка $z_1 = -1+i$. Находим:

$$\operatorname*{Res}_{z_1} \frac{1}{(z^2+2z+2)^2} = \lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)^2 \frac{1}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{(z-z_2)^2}\right)' = -\frac{2}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

Поэтому $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$. ▲

Пример 19. Вычислить с помощью леммы Жордана $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+2}dx$.

Δ Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{(z+1)e^{iz}}{z^2-2z+2}$. Она удовлетворяет всем условиям леммы Жордана и имеет особые точки: $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 1-i$. В верхней полуплоскости лежит лишь точка $z_1 = 1+i$. Находим:

$$\operatorname*{Res}_{1+i} \frac{z+1}{z^2-2z+2}e^{iz} = \left.\frac{(z+1)e^{iz}}{(z^2-2z+2)'}\right|_{z=1+i} = \frac{(2+i)e^{-1+i}}{2i}.$$

Получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx = 2\pi i \frac{2+i}{2i}e^{-1+i} = \pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i\sin 1)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2-2x+2}dx = \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx = \operatorname{Res}(\pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i\sin 1)) =$$

$$= \pi e^{-1}(2\cos 1 - \sin 1).$$ ▲

Дополнительные задачи

1. Найти вычеты функций в конечных особых точках:

а) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^3+3z^2+z+3}$.

Ответ: $\operatorname*{Res}_{i} f(z)=\dfrac{1+3i}{20}$, $\operatorname*{Res}_{-i} f(z)=\dfrac{1-3i}{20}$, $\operatorname*{Res}_{-3} f(z)=\dfrac{9}{10}$;

б) $f(z)=(z^2+2z-1)\cos\dfrac{3}{z-1}$.

Ответ: $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=-18$.

2. При помощи вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z\,dz}{\sin z}$. **Ответ:** $-2\pi i e^{\pi}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z+8}{(z+2)^3(z+5)}\,dz$. **Ответ:** $\dfrac{2}{9}\pi i$;

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}\,dz$. **Ответ:** $-\dfrac{\pi}{3}i$.

3. Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{z^{23}}{z^{10}-5}\,dz$.

Ответ: $50\pi i$.

4. Вычислить:

а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$. **Ответ:** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$;

б) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}$. **Ответ:** $\dfrac{10\pi}{27}$;

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{3}$;

г) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2x+17)^2}\,dx.$ **Ответ:** $\dfrac{5\pi}{32}$;

д) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+16}.$ **Ответ:** πe^{-12} ;

е) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+2x+2)^2}.$ **Ответ:** $3\pi e^{-5}\cos 5.$

10. Конформные отображения

Пример 1. Найти образ отрезка AB, где $A(1+i)$, $B(3+i)$ при отображении $w=2iz-i$.

Δ При линейном отображении образом прямой является прямая. Поэтому достаточно найти образы точек A и B.

$$w(A)=2i(1+i)-i=-2+i,\ \ w(B)=2i(3+i)-i=-2+5i.$$

Отображение $w=2iz-i$ геометрически сводится к последовательному выполнению следующих операций:

а) гомотетии с коэффициентом подобия 2;

б) поворот на угол $\alpha=\arg i=\dfrac{\pi}{2}$;

в) смещение на одну единицу вниз (рис. 10.1).

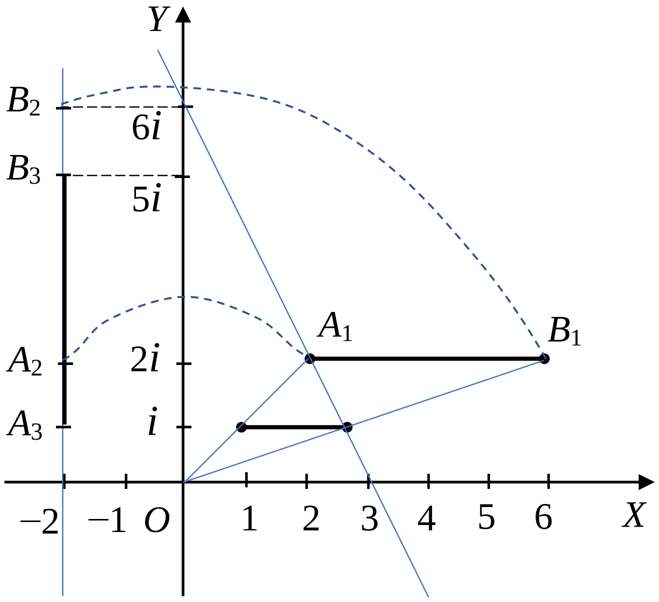


Рис. 10.1

Отрезок A_3B_3 является образом отрезка AB. ▲

Пример 2. Найти образ оси Oy при отображении $w=2iz-i$.

Δ *Первый способ*

Уравнение оси Oy имеет вид $z=o+iy=iy,\ -\infty<y<\infty$.

Из уравнения $w=2iz-i$ находим $z=\dfrac{w+i}{2i}$. Подставляем полученное значение z в уравнение оси Oy:

$$\frac{w+i}{2i}=iy,\ \ w=-2y-i,\ \ -\infty<y<\infty.$$

Отделив действительную и мнимую части, получим $v=-1,\ -\infty<u<\infty$. Это уравнение прямой в плоскости w, параллельной действительной оси.

Второй способ

Решим задачу в комплексной форме. Как известно, уравнение оси Oy $z+\bar{z}=0$. Находим z из $w=2iz-i$ и подставляем $z=\dfrac{w+i}{2i},\ \ \bar{z}=\dfrac{\bar{w}-i}{-2i}$ в уравнение $z+\bar{z}=0$. Получаем

$$\frac{w+i}{2i}+\frac{\bar{w}-i}{-2i}=0,\ \ \frac{w-\bar{w}}{2i}+1=0,\ \ \frac{u+iv-u+iv}{2i}=-1,\ \ v=-1.$$

Третий способ

Так как образом прямой является прямая, то достаточно на оси Oy выбрать две точки и найти их образы.

$w(0+0i)=-i,\ \ w(0+i)=-2-i,\ \ v=-1.$ ▲

Пример 3. Найти образ полосы $0<\operatorname{Re} z<3$ при отображении $w=2iz-i$.

Δ Образом полосы является полоса, т. к. при линейном отображении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Находим образы прямых $\operatorname{Re} z=0$ и $\operatorname{Re} z=3$. Образ прямой $x=0$ был получен: $v=-1$. Образом прямой $\operatorname{Re} z=3$ будет прямая, параллельная прямой $v=-1$. Поэтому нам достаточно найти образ любой точки, лежащей на прямой $\operatorname{Re} z=3$.

Находим $w(3)=2i\cdot 3-i=5i$, или $v=5$. Выбираем внутреннюю точку полосы $0<\operatorname{Re} z<3$, например, $z=1$, ее образ $w(1)=i$. Эта точка должна принадлежать искомому образу. Образом полосы $0<\operatorname{Re} z<3$ является полоса $-1<\operatorname{Im} z<5$ (рис. 10.2).

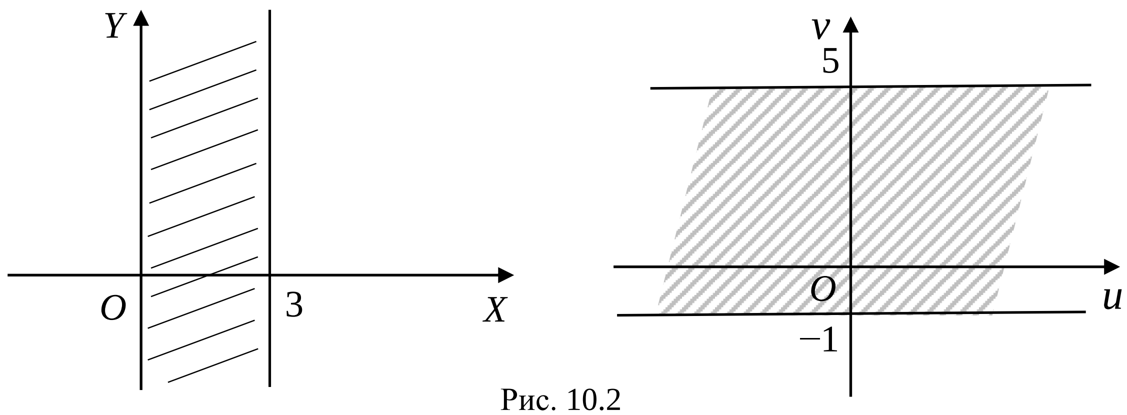


Рис. 10.2

Пример 4. Найти образ окружности $|z-i|=1$ при отображении $w=2iz-i$.

Δ Выразим z и уравнения $w=2iz-i$ и подставим полученное выражение в уравнение окружности:

$$z=\frac{w+i}{2i},\quad \left|\frac{w+i}{2i}-i\right|=1,\quad \left|\frac{w+i+2}{2i}\right|=1,\quad |w-(-2-i)|=2.$$

Это уравнение окружности радиусом 2 с центром в точке $M(-2;-1)$. ▲

Пример 5. Найти линейную функцию, отображающую прямоугольный треугольник с вершинами $A(3+2i)$, $B(7+2i)$ и $C(5+4i)$ в прямоугольный треугольник с вершинами $A'(0)$, $B'(-2i)$ и $C'(1-i)$ (рис. 10.3).

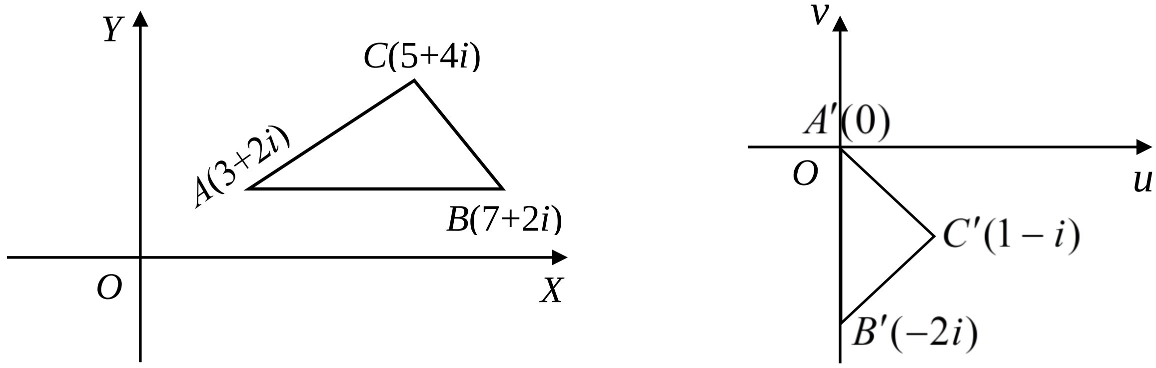


Рис. 10.3

Δ Отображение можно разложить на следующие этапы:

1. Параллельный перенос на вектор $-3-2i$.

2. Поворот около начала координат на угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Сжатие с коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$.

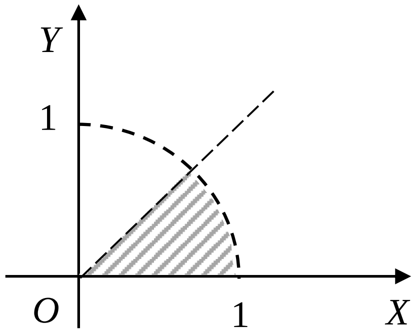
Таким образом,

$$w_1 = z - 3 - 2i,$$

$$w_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} w_1 = -i(z - 3 - 2i),$$

$$w_3 = \frac{1}{2} w_2 = -\frac{1}{2} i(z - 3 - 2i) = -\frac{iz}{2} + \frac{3}{2} i - 1. \ ▲$$

Пример 6. Найти отображение сектора $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$, $|z| < 1$ на сектор $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, $|z| < 1$ (рис. 10.4).



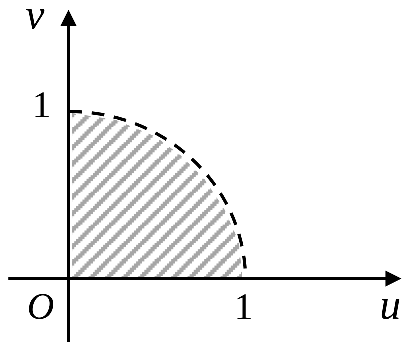
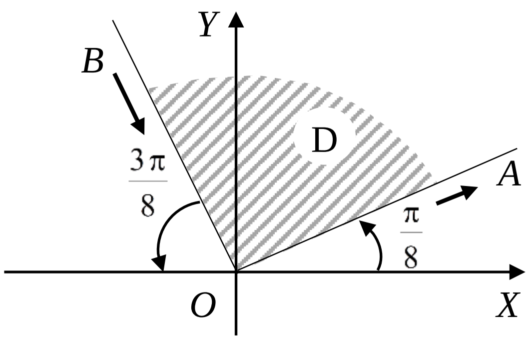


Рис. 10.4

Δ Поскольку $\arg(z^2) = 2\arg z$ и $|z^2| = |z|^2$, то функция $w = z^2$ осуществляет указанное отображение. ▲

Пример 7. Найти образ области, ограниченной лучами OA и OB, при отображении $w = z^4$ (рис. 10.5).



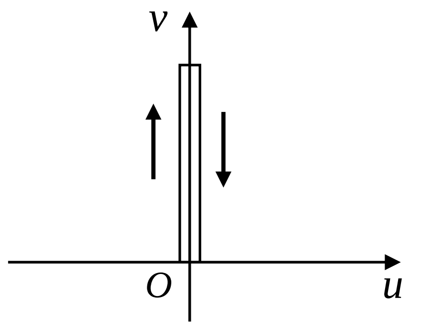


Рис. 10.5

Δ Область D представляет собой угол раствора $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, при отображении $w = z^4$ она перейдет в угол раствора 2π.

Запишем границы области D в параметрическом виде: $z = re^{i\frac{\pi}{8}}$ и $z = re^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)}$, где r – любое, $r > 0$.

Образами этих прямых будут прямые лучи $w = Re^{i\frac{\pi}{2}}$ и $w = Re^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)}$, $R > 0$.

Чтобы отображение было однозначным, проводим разрез по лучу Ov. Образом области D являтся вся плоскость с разрезом по лучу $\arg w = \frac{\pi}{2}$. ▲

Пример 8. Найти образ множества $|z| = 1$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

Δ Преобразование $w = \frac{1}{z}$ можно записать в виде двух составляющих: $w_1 = \frac{1}{\bar{z}}$ – симметричное отражение относительно единичной окружности и $w_2 = \bar{w}_1$ – симметричное отражение относительно действительной оси. При отображении $w = \frac{1}{\bar{z}}$ все точки дуги AB (рис. 10.6) останутся неподвижными.

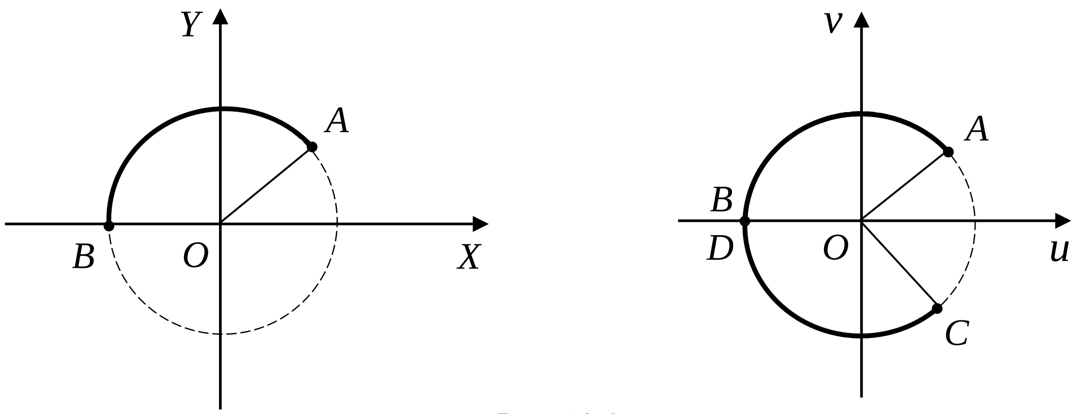


Рис. 10.6

При отображении $w_2 = \bar{w}_1$ точки дуги AB отобразятся в точки дуги CD.

Следовательно, образом множества $|z| = 1$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$ является множество $|w| = 1$, $-\pi < \arg z < -\frac{\pi}{4}$. ▲

Пример 9. Найти образ биссектрисы первого и третьего координатных углов $y=x$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$.

Δ При отображении $w=\dfrac{1}{z}$ окружности и прямые переходят в окружности или прямые. Так как особая точка $z=0$ принадлежит прямой $y=x$, образом прямой будет прямая.

Найдем образы двух каких-либо точек прямой $y=x$:

$$w(1+i)=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2},$$

$$w(-1-i)=\frac{1}{-1-i}=-\frac{1-i}{2}.$$

Образом биссектрисы первого и третьего координатных углов является биссектриса второго и четвертого координатных углов. ▲

Пример 10. Найти образ окружности $|z|=2$ при отображении $w=\dfrac{5}{z}$.

Δ Пусть $z=x+iy,\ w=u+iv$. Соотношение $w=\dfrac{5}{z}$ запишем в виде

$$u+iv=\frac{5}{x+iy}=\frac{5(x-iy)}{x^2+y^2}=\frac{5x}{x^2+y^2}-i\frac{5y}{x^2+y^2}.$$

Так как $x^2+y^2=4$, то $u^2+v^2=\dfrac{25(x^2+y^2)}{16}=\dfrac{25}{4}$. Это окружность радиусом $\dfrac{5}{2}$ с центром в начале координат. ▲

Пример 11. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ при дробно-линейном отображении $w=\dfrac{2+z}{2-z}$.

Δ При дробно-линейном отображении прямая может перейти или в прямую, или в окружность. Так как особая точка $z=2$ не лежит на мнимой оси, то граница области перейдет в окружность.

Чтобы найти уравнение этой окружности, возьмем любые три точки на оси $\operatorname{Re} z=0$, например,

$$z_1=i,\ z_2=0,\ z_3=-i.$$

$$w_1=\frac{2+i}{2-i}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i,\quad w_2=1,\quad w_3=\frac{2-i}{2+i}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i.$$

Так как $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$, то все эти точки лежат на окружности $|w|=1$.

Покажем, что искомой областью будет внешность круга.

Действительно $w(1)=3$ (рис. 10.7).

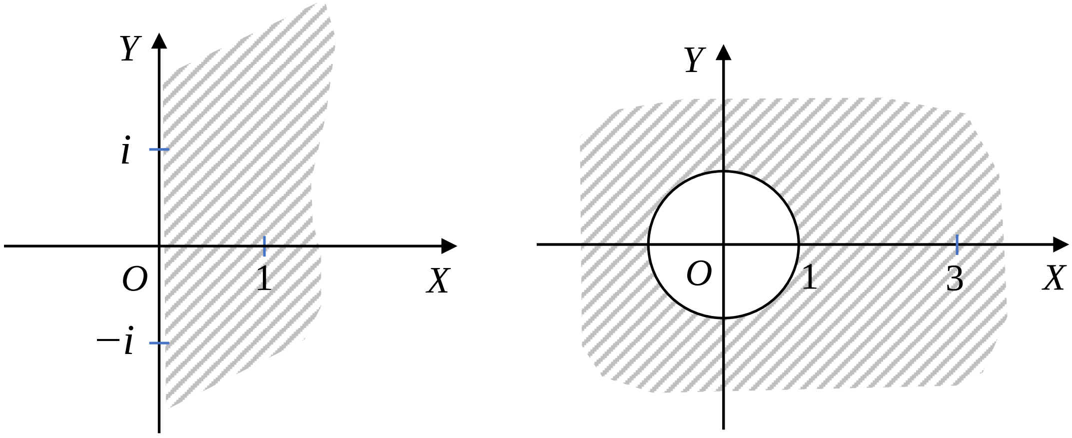


Рис. 10.7

Пример 12. Найти дробно-линейное преобразование $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, переводящее точки $z=-1;1;\infty$ в точки $w=0;1;-1$.

Δ Положим $a=1$. Так как $w(\infty)=-1$, то $c=-1$ и преобразование w можно записать в виде $w=\dfrac{z+b_1}{-z+d_1}$. Для определения коэффициентов b_1 и d_1 получим систему $\begin{cases} \dfrac{-1+b_1}{1+d_1}=0, \\ \dfrac{1+b_1}{-1+d_1}=1. \end{cases}$ Отсюда $b_1=1,\ d_1=3$. Искомое отображение $w=\dfrac{z+1}{-z+3}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Указать геометрический смысл преобразований:

а) $w=z+2i$; б) $w=4z$; в) $w=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}z$.

Ответ: а) сдвиг; б) растяжение; в) поворот.

2. Найти линейное отображение $w=az+b$, оставляющее точку $z_0=-1-i$ неподвижной и переводящее точку $z_1=3-2i$ в точку $w_1=3i$.

Ответ: $w=iz-2$.

3. Найти образ верхней полуплоскости при отображении $w=-i(2z+3)$.

Ответ: правая полуплоскость.

4. Найти образ окружности $|z-i|=1$ при отображении $w=2z+3-2i$.

Ответ: окружность $|w-3|=2$.

5. Для функции $w=\frac{1}{z}$ найти образ прямой $y=x+1$.

Ответ: окружность $u^2+v^2+u+v=0$.

6. Для функции $w=\frac{1}{z}$ найти образ окружности $x^2+y^2=x$.

Ответ: прямая $u=1$.

7. Найти образ квадранта $x>0,\ y>0$ при отображении $w=\frac{z-i}{z+i}$.

Ответ: полукруг $|w|<1$, $\operatorname{Im} w<0$.

8. При отображении $w=\frac{z}{z-1}$ найти образ прямой $\operatorname{Im} z=1$.

Ответ: $(u-1)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

9. На какую область отображает функция $w=e^z$ прямоугольник $0\le x\le 1,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}$?

Ответ: контур четверти кругового кольца (рис. 10.8).

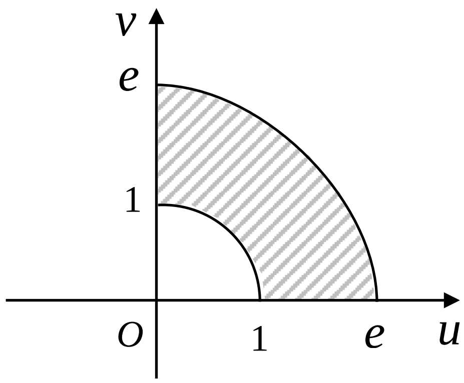


Рис. 10.8

11. Операционное исчисление

Пример 1. Полагая, что $f(t)\equiv 0$ для любого $t<0$, проверить, какие из следующих функций являются оригиналами, а какие – нет:

а) $f(t)=5e^{2t}\cdot\cos 3t$; б) $f(t)=\frac{3}{t-4}$; в) $f(t)=\frac{1}{t^2}$; г) $f(t)=2^{3^t}$;

д) $f(t)=\begin{cases} 2, & 0\le t<3; \\ t, & t>3. \end{cases}$

Δ а) так как по условию задачи $f(t)\equiv 0$ для любого $t<0$, то первое условие в определении оригинала, очевидно, выполнено. При $t\geq 0$ функция $f(t)$ непрерывна. Значит, условие 2 также выполняется. Наконец, т. к. $\left|5e^{2t}\cdot\cos 3t\right|\leq 5e^{2t}$, то в качестве констант M и σ в условии 3 определения оригинала можно выбрать любое $M>5$ и $\sigma=2$. Следовательно, все три условия в определении оригинала выполняются. Значит, $f(t)$ является оригиналом;

б) функция $f(t)$ не является оригиналом, т. к. в точке $t=4$ имеет разрыв второго рода: $\lim\limits_{t\to 4} f(t)=\infty$, а следовательно, не выполнено условие 2 в определении оригинала;

в) $f(t)$ не является оригиналом, т. к. $\lim\limits_{t\to +0} f(t)=+\infty$, т. е. не выполняется условие 2 из определения оригинала;

г) $f(t)$ также не является оригиналом, поскольку для всех $t>0$ неравенство $2^{3^t}<Me^{\sigma t}$ не выполняется ни при каких M и σ;

д) условие 1 в определении оригинала выполнено. При $t\geq 0$ функция $f(t)$ непрерывна всюду, за исключением точки $t=3$, в которой она имеет разрыв первого рода. Условие 2 выполнено. Так как $\left|f(t)\right|\leq e^t$, то и условие 3 тоже выполнено. Значит, $f(t)-$оригинал. ▲

Пример 2. Используя преобразование Лапласа, найти изображение функции $f(t)=e^{(5+i)t}$.

Δ Очевидно, что $f(t)$ является оригиналом. Так как $\left|e^{(5+i)t}\right|<Me^{5t}$ для $M>1$, то изображение $F(p)$ этой функции будет определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p>5$. Далее находим

$$f(t)=e^{(5+i)t} \risingdotseq F(p)=\int_0^\infty e^{(5+i)t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-5-i)t}dt=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{p-(5+i)}e^{-(p-5-i)t}\Bigg|_0^b=\frac{1}{p-(3+i)}.\ ▲$$

Пример 3. Найти изображение данного оригинала:

а) $f(t)=\cos^2 t$; б) $f(t)=\sin 3t\cdot\cos t$; в) $f(t)=e^{3t}\cdot\cos^2 t$.

Δ а) функцию $f(t)$ представим в виде $f(t)=\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)=$ $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$. Далее воспользуемся свойством линейности преобразования

Лапласа и теоремой подобия: $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$. Получим

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t \risingdotseq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)};$$

б) воспользуемся формулой $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$. Тогда функция $f(t)$ запишется в виде $f(t)=\sin 3t\cdot\cos t=\frac{1}{2}(\sin 4t+\sin 2t)$.

Отсюда

$$f(t)=\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{2}\sin 2t \risingdotseq \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{p^2+16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}=\frac{3p^2+24}{(p^2+16)(p^2+4)};$$

в) используя результат решения задачи из пункта «а» и теорему смещения $e^{\alpha t}\cdot f(t) \risingdotseq F(p-\alpha)$, получим

$$f(t)=e^{3t}\cdot\cos^2 t \risingdotseq \frac{(p-3)^2+2}{(p-3)((p-3)^2+4)}=\frac{p^2-6p+11}{(p-3)(p^2-6p+13)}.\ \blacktriangle$$

Пример 4. Найти изображение функции $f(t)=e^{-3t}\cos 3t\cdot\cos 2t$.

Δ Преобразуем функцию $f(t)$, воспользовавшись формулой $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$:

$$f(t)=e^{-3t}\cdot\frac{1}{2}(\cos 5t+\cos t).$$

Вначале найдем изображение функции $\frac{1}{2}(\cos 5t+\cos t)$:

$$\frac{1}{2}(\cos 5t+\cos t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+25}+\frac{p}{p^2+1}\right)=\frac{p^3+13p}{(p^2+25)(p^2+1)}.$$

Далее воспользуемся теоремой смещения:

$$f(t)=e^{-3t}\cdot\cos 3t\cdot\cos 2t \risingdotseq \frac{(p+3)^3+13(p+3)}{((p+3)^2+25)((p+3)^2+1)}=$$

$$=\frac{p^3+9p^2+40p+66}{(p^2+6p+34)(p^2+6p+10)}.\ \blacktriangle$$

Пример 5. Найти изображения оригиналов:

а) $f(t)=t\cdot \operatorname{sh}2t;$ б) $f(t)=t^2\cdot \sin 3t.$

Δ а) воспользуемся теоремой о дифференцировании изображения: $t\cdot f(t) \risingdotseq -F'(p).$

Найдем сначала изображение функции $\operatorname{sh}2t$:

$$\operatorname{sh}2t \risingdotseq \frac{2}{p^2-4}.$$

Тогда $f(t)=t\cdot \operatorname{sh}2t \risingdotseq -\left(\dfrac{2}{p^2-4}\right)'=\dfrac{4p}{(p^2-4)^2};$

б) по таблице изображений находим: $\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{p^2+9}.$

Отсюда по теореме о дифференцировании изображения $t^2\cdot f(t)\risingdotseq F''(p)$ получим

$$f(t)=t^2\cdot \sin 3t \risingdotseq \left(\frac{3}{p^2+9}\right)''=\frac{18p^2-54}{(p^2+9)^3}. \ \blacktriangle$$

Пример 6. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{\sin 3t}{t}.$

Δ Найдем сначала изображение функции $\sin 3t$:

$$\sin 3t \risingdotseq \frac{3}{p^2+9}.$$

Далее воспользуемся теоремой об интегрировании изображения: $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \displaystyle\int_p^{\infty} F(s)\,ds$, где $f(t)=\sin 3t.$

Имеем

$$f(t)=\frac{\sin 3t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty}\frac{3}{s^2+9}ds=3\int_p^{\infty}\frac{ds}{s^2+9}=3\lim_{b\to\infty}\int_p^{b}\frac{ds}{s^2+9}=3\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{s}{3}\Big|_p^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{3}-\operatorname{arctg}\frac{p}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{3}=\operatorname{arcctg}\frac{p}{3}. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Найти изображение оригинала:

а) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{3\tau} d\tau;$ б) $f(t)=\int\limits_0^t \tau \sin^2 2\tau\, d\tau.$

Δ а) воспользуемся теоремой об интегрировании оригинала:

$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$, где $f(t)=t^2 e^{3t}$.

Последовательно находим изображения функций e^{3t}, $t^2 e^{3t}$, $\int\limits_0^t \tau^2 e^{3\tau} d\tau.$

$$e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3},$$

$$t^2 e^{3t} \risingdotseq \left(\frac{1}{p-3}\right)'' = \left(-\frac{1}{(p-3)^2}\right)' = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Тогда $\int\limits_0^t \tau^2 e^{3\tau} d\tau \risingdotseq \dfrac{2}{p(p-3)^3};$

б) находим изображения функций $\sin^2 2t$, $t\cdot\sin^2 2t$:

$$\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1-\cos 4t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4t \risingdotseq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+16} = \frac{8}{p^3+16p},$$

$$t\cdot\sin^2 2t \risingdotseq -\left(\frac{8}{p^3+16p}\right)' = \frac{8(3p^2+16)}{p^2(p^2+16)^2}.$$

По теореме об интегрировании оригинала имеем

$$\int\limits_0^t \tau\cdot\sin^2 2\tau\, d\tau \risingdotseq \frac{8(3p^2+16)}{p^3(p^2+16)^2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Найти изображение данного оригинала:

$$f(t)=\int\limits_0^t \frac{\cos 3\tau-\cos\tau}{\tau}.$$

Δ Воспользуемся теоремой об интегрировании оригинала:

$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$, где $f(t)=\dfrac{\cos 3t-\cos t}{t}$.

Сначала найдем изображение функции $\cos 3t-\cos t$:

$$\cos 3t - \cos t \; \risingdotseq \; \frac{p}{p^2+9} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Тогда по теореме об интегрировании изображения имеем

$$\frac{\cos 3t - \cos t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} \left(\frac{s}{s^2+9} - \frac{s}{s^2+1} \right) ds = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(s^2+9) - \frac{1}{2}\ln(s^2+1) \right)\Bigg|_p^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{s^2+9}{s^2+1} \right)\Bigg|_p^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{b^2+9}{b^2+1} - \ln\frac{p^2+9}{p^2+1} \right) = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+1}{p^2+9}.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\int\limits_0^t \frac{\cos 3\tau - \cos\tau}{\tau} d\tau \risingdotseq \frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+1}{p^2+9}. \; \blacktriangle$$

Пример 9. Найти изображения функций, заданных графически (рис. 11.1, *а*–*в*).

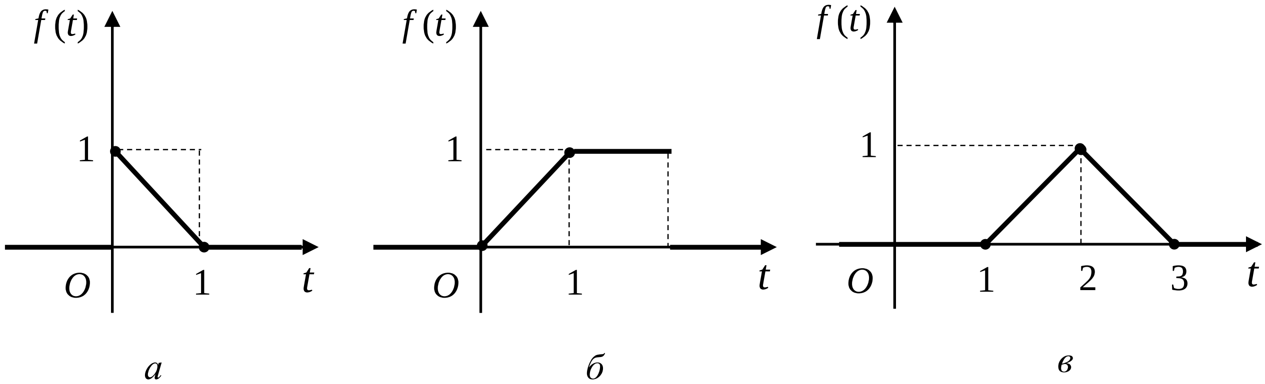


Рис. 11.1

Δ а) запишем функцию $f(t)$ одним аналитическим выражением, используя функции $\chi(t)$ и $\chi(t-\tau)$:

$$f(t) = (1-t)\chi(t) + (t-1)\chi(t-1) = \chi(t) - t\chi(t) + (t-1)\chi(t-1),$$

где $\chi(t) = \begin{cases} 1, \; t>0; \\ 0, \; t\le 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда, а $\chi(t-\tau) = \begin{cases} 1, \; t>\tau, \\ 0, \; t\le\tau \end{cases}$ – единичная ступенчатая функция.

По таблице оригиналов и их изображений находим

$$\chi(t) \risingdotseq \frac{1}{p}, \;\; t\cdot\chi(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$

По теореме запаздывания оригинала имеем $(t-1)\chi(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p^2}e^{-p}$.

Окончательно получим $f(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-p}$;

б) представим функцию $f(t)$ в виде

$f(t) = t\cdot\chi(t) - (t-1)\chi(t-1) - \chi(t-2)$.

По таблице находим $\chi(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, $t\cdot\chi(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$.

Далее согласно теореме запаздывания оригинала получаем

$(t-1)\chi(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p^2}e^{-p}$, $\chi(t-2) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-2p}$.

Окончательно имеем $f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-2p}$;

в) запишем изображенную функцию в виде

$$f(t) = (t-1)\left[\chi(t-1) - \chi(t-2)\right] + (3-t)\left[\chi(t-2) - \chi(t-3)\right] =$$
$$= (t-1)\chi(t-1) - 2(t-2)\chi(t-2) + (t-3)\chi(t-3).$$

Используя талицу и теорему запаздывания оригинала, получим

$(t-1)\chi(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p^2}e^{-p}$, $(t-2)\chi(t-2) \risingdotseq \frac{1}{p^2}e^{-2p}$,

$(t-3)\chi(t-3) \risingdotseq \frac{1}{p^2}e^{-3p}$.

Следовательно, $f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{2}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}$. ▲

Пример 10. Найти оригиналы по заданным изображениям:

а) $F(p) = \frac{5}{p^4}$; б) $F(p) = \frac{3}{p^2 - 5}$; в) $F(p) = \frac{7}{(p+3)^3} - \frac{3}{(p-2)^5}$.

Δ а) преобразуем $F(p)$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться таблицей оригиналов и их изображений. Так как $t^3 \risingdotseq \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}$, то $\frac{5}{p^4} = \frac{5}{6}\cdot\frac{6}{p^4}$. По свойству линейности преобразования Лапласа имеем

$$F(p)=\frac{5}{p^4}=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{p^4}\risingdotseq\frac{5}{6}t^3=f(t);$$

б) запишем изображение в виде $F(p)=\frac{3}{p^2-5}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{p^2-(\sqrt{5})^2}$.

По таблице оригиналов имеем $\frac{\sqrt{5}}{p^2-(\sqrt{5})^2}\risingdotseq \operatorname{sh}\sqrt{5}t$. Следовательно,

$$F(p)=\frac{3}{p^2-5}\risingdotseq\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\sqrt{5}t=f(t);$$

в) представим оригинал в таком виде, чтобы можно было воспользоваться таблицей оригиналов:

$$\frac{7}{(p+3)^3}-\frac{3}{(p-2)^5}=\frac{7}{2!}\cdot\frac{2!}{(p+3)^3}-\frac{3}{4!}\cdot\frac{4!}{(p-2)^5}.$$

Функция $\frac{2!}{(p+3)^3}$ является изображением оригинала $t^2\cdot e^{-3t}$, а $\frac{4!}{(p-2)^5}$ – изображением оригинала $t^4\cdot e^{2t}$. Используя свойство линейности, окончательно получим

$$f(t)=\frac{7}{2}t^2e^{-3t}-\frac{1}{8}t^4e^{2t}.\ \blacktriangle$$

Пример 11. Восстановить оригиналы по их изображениям:

а) $F(p)=\frac{5p+4}{(p-3)^2}$; б) $F(p)=\frac{p^3-3p-6}{p^3(p+2)}$; в) $F(p)=\frac{1}{p^3-64}$.

Δ а) запишем $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$F(p)=\frac{5p+4}{(p-3)^2}=\frac{5(p-3)+19}{(p-3)^2}=5\frac{1}{(p-3)^2}+19\frac{1}{(p-3)^2}.$$

Для каждой из дробей находим ее оригинал. Первая дробь $\frac{1}{p-3}$ является изображением функции e^{3t}, а вторая $\frac{1}{(p-3)^2}$ – изображением функции te^{3t}. Используя линейность преобразования Лапласа, окончательно получим

$$f(t)=5e^{3t}+19te^{3t};$$

б) преобразуем дробь $F(p)$:

$$F(p)=\frac{p^3-3p-6}{p^3(p+2)}=\frac{p^3-3(p+2)}{p^3(p+2)}=\frac{1}{p+2}-\frac{3}{p^3}=\frac{1}{p+2}-\frac{3}{2!}\cdot\frac{2!}{p^3}.$$

Функция $\frac{1}{p+2}$ является изображением оригинала e^{-2t}, а функция $\frac{2!}{p^3}$ – изображением оригинала t^2.

Следовательно, $f(t)=e^{-2t}-\frac{3}{2}t^2$;

в) действуем аналогично пункту «а».

$$F(p)=\frac{1}{p^3-64}=\frac{1}{(p-4)(p^2+4p+16)}.$$

Представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(p-4)(p^2+4p+16)}=\frac{A}{p-4}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+16},$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты. Приводя правую часть равенства к общему знаменателю и приравнивая числители обеих дробей, получим равенство: $1=Ap^2+4Ap+16A+Bp^2+Cp-4Bp-4C$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получим систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$A+B=0,\ \ 4A-4B+C=0,\ \ 16A-4C=1.$$

Решая ее, получаем: $A=\frac{1}{48}$, $B=-\frac{1}{48}$, $C=-\frac{1}{6}$.

Следовательно, $F(p)=\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{p-4}-\frac{1}{48}\cdot\frac{p+8}{p^2+4p+16}$.

Первая дробь $F_1(p)=\frac{1}{p-4}$ представляет собой изображение функции $f_1(t)=e^{4t}$.

В знаменателе второй дроби $F_2(p)=\frac{p+8}{p^2+4p+16}$ выделим полный квадрат и представим ее в виде, позволяющем воспользоваться теоремой смещения:

$$F_2(p)=\frac{p+8}{p^2+4p+16}=\frac{p+2}{(p+2)^2+(\sqrt{12})^2}+\frac{6}{(p+2)^2+(\sqrt{12})^2}=$$

$$=\frac{p+2}{(p+2)^2+(\sqrt{12})^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{12}}{(p+2)^2+(\sqrt{12})^2}.$$

По теореме смещения $\dfrac{p+2}{(p+2)^2+(\sqrt{12})^2} \risingdotseq e^{-2t}\cos(\sqrt{12}\,t)$, а

$$\frac{\sqrt{12}}{(p+2)^2+(\sqrt{12})^2} \risingdotseq e^{-2t}\sin(\sqrt{12}\,t).$$

Тогда по свойству линейности преобразования Лапласа имеем

$$f(t)=\frac{1}{48}e^{-4t}-\frac{1}{48}e^{-2t}\cos(\sqrt{12}\,t)-\frac{1}{48\sqrt{3}}e^{-2t}\sin(\sqrt{12})t. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Найти оригиналы для функций:

а) $F(p)=\dfrac{3-4p}{p^2+4p+8}$; б) $F(p)=\dfrac{7e^{-4p}}{p^2+10p+34}$.

Δ а) выделим полный квадрат в знаменателе дроби $F(p)$:

$$F(p)=\frac{3-4p}{p^2+4p+8}=\frac{3-4p}{(p+2)^2+4}=\frac{3-4p}{(p+2)^2+2^2}.$$

Преобразуем полученную дробь так, чтобы можно было воспользоваться таблицей изображений.

$$\frac{3-4p}{(p+2)^2+2^2}=\frac{3-4(p+2)+8}{(p+2)^2+2^2}=\frac{11-4(p+2)}{(p+2)^2+2^2}=\frac{11}{(p+2)^2+2^2}-4\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+2^2}.$$

Находим

$$\frac{11}{(p+2)^2+2^2}=\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{(p+2)^2+2^2} \risingdotseq \frac{11}{2}\cdot e^{-2t}\sin 2t;$$

$$\frac{p+2}{(p+2)^2+2^2} \risingdotseq e^{-2t}\cos 2t.$$

Окончательно получаем

$$f(t)=\frac{11}{2}e^{-2t}\sin 2t-4e^{-2t}\cos 2t;$$

б) по таблице оригиналов и их изображений находим сначала оригинал для функции $\dfrac{1}{p^2+10p+34}$, для чего выделяем в знаменателе полный квадрат:

$$\frac{1}{p^2+10p+34}=\frac{1}{(p+5)^2+9}=\frac{1}{(p+5)^2+3^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(p+5)^2+3^2}\fallingdotseq$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{3}e^{-5t}\sin 3t=f(t).$$

Применяя теорему запаздывания оригинала, получим

$$\frac{7e^{-4p}}{p^2+10p+34}\fallingdotseq 7\cdot f(t-4)=7\cdot\frac{1}{3}e^{-5(t-4)}\sin 3(t-4)\chi(t-4)=$$

$$=\frac{7}{3}e^{20-5t}\sin 3(t-4)\chi(t-4).\ \blacktriangle$$

Пример 13. Найти оригиналы следующих изображений:

а) $F(p)=\dfrac{3p+2}{2p^2-8p+6}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p-4)^2}$.

Δ а) <u>*первый способ*</u>

Преобразуем дробь:

$$F(p)=\frac{3p+2}{2(p^2-4p+3)}=\frac{1,5p+1}{p^2-4p+3}=\frac{1,5p+1}{(p-2)^2-1}=\frac{1,5(p-2)+4}{(p-2)^2-1}=$$

$$=1,5\frac{p-2}{(p-2)^2-1}+4\frac{1}{(p-2)^2-1}.$$

По таблице изображений и теореме смещения имеем

$$f(t)=1,5e^{2t}\operatorname{ch}z+4e^{2t}\operatorname{sh}z=\frac{3}{2}e^{2t}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}+4e^{2t}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{11}{4}e^{3t}-\frac{5}{4}e^t.$$

<u>*Второй способ*</u>

Запишем изображение в виде

$$F(p)=\frac{3p+2}{2(p^2-4p+3)}=\frac{3p+2}{2(p-1)(p-3)}.$$

Теперь воспользуемся второй теоремой разложения. Функция $F(p)$ имеет два полюса первого порядка: $p_1=1$ и $p_2=3$. Тогда по теореме о разложении оригиналом для $F(p)$ служит функция $f(t)=\operatorname*{Res}_1 F(p)\cdot e^{pt}+\operatorname*{Res}_3 F(p)\cdot e^{pt}$.

Найдем вычеты:

$$\operatorname*{Res}_1\frac{(3p+2)\cdot e^{pt}}{2(p-1)(p-3)}=\lim_{p\to 1}\frac{(p-1)(3p+2)\cdot e^{pt}}{2(p-1)(p-3)}=\lim_{p\to 1}\frac{(3p+2)\cdot e^{pt}}{2(p-3)}=-\frac{5}{4}e^t,$$

$$\operatorname*{Res}_{3}\frac{(3p+2)\cdot e^{pt}}{2(p-1)(p-3)}=\lim_{p\to 3}\frac{(p-3)(3p+2)\cdot e^{pt}}{2(p-1)(p-3)}=\lim_{p\to 3}\frac{(3p+2)\cdot e^{pt}}{2(p-1)}=\frac{11}{4}e^{3t}.$$

Следовательно, $f(t)=-\frac{5}{4}e^{t}+\frac{11}{4}e^{3t}$;

б) <u>*первый способ*</u>

Представим $F(p)$ в виде

$$F(p)=\frac{p}{(p+1)(p-4)^2}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-4}+\frac{C}{(p-4)^2},$$

где $A, B, C-$ неопределенные коэффициенты.

Отсюда

$$A(p-4)^2+B(p+1)(p-4)+C(p+1)=p.$$

Подставляя последовательно $p=4,\ p=-1$ и $p=0,$ получим

$A=-\frac{1}{25}$, $B=\frac{1}{25}$, $C=\frac{4}{5}$. Поэтому

$$F(p)=-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{p-4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{(p-4)^2}.$$

Находим оригиналы:

$$\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t},\quad \frac{1}{p-4}\risingdotseq e^{4t},\quad \frac{1}{(p-4)^2}\risingdotseq t\cdot e^{4t}.$$

Следовательно, $f(t)=-\frac{1}{25}e^{-t}+\frac{1}{25}e^{4t}+\frac{4}{5}te^{4t}$.

<u>*Второй способ*</u>

Применим вторую теорему разложения, учитывая, что $p_1=-1$ – полюс первого порядка, а $p_2=4-$полюс второго порядка функции $F(p)$:

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{-1}F(p)e^{pt}+\operatorname*{Res}_{4}F(p)e^{-pt}=\lim_{p\to -1}\frac{(p+1)p\cdot e^{pt}}{(p+1)(p-4)^2}+$$

$$+\lim_{p\to 4}\left(\frac{(p-4)^2\,p\cdot e^{pt}}{(p+1(p-4)^2}\right)'=-\frac{1}{25}e^{-t}+\lim_{p\to 4}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p+1)-p\cdot e^{pt}}{(p+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{25}e^{-t}+\frac{1}{25}e^{4t}+\frac{4}{5}te^{4t}.\ \blacktriangle$$

Пример 14. Найти свертку фукций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и ее изображение:

а) $f_1(t)=\cos t$, $f_2(t)=t$; б) $f_1(t)=e^t$, $f_2(t)=\sin t$.

Δ а) <u>*первый способ*</u>

По таблице изображений находим

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},\ t \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$

Отсюда, по теореме о свертке, получаем

$$f_1(t)*f_2(t)=\cos t*t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Далее находим саму свертку. Для этого представим дробь $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}.$$

Используя таблицу изображений, находим свертку функций $\cos t$ и t:
$\cos t*t=1-\cos t.$

<u>*Второй способ*</u>

Для вычисления свертки воспользуемся определением:

$$\cos t*t=\int_0^t \cos\tau\cdot(t-\tau)\,d\tau.$$

Интеграл найдем методом интегрирования по частям:

$$\int_0^t \cos\tau\cdot(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t (t-\tau)\,d\sin\tau=(t-\tau)\cdot\sin\tau\Big|_0^t-\int_0^t \sin\tau\, d(t-\tau)=$$

$$=\int_0^t \sin\tau\,d\tau=-\cos\tau\Big|_0^t=-\cos t+1.$$

Таким образом, $\cos t*t=1-\cos t.$ Теперь находим изображение свертки по таблице изображений:

$$\cos t*t \risingdotseq \frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1};$$

б) используя таблицу изображений, найдем изображение функций e^t и $\sin t$:

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}.$$

Тогда $e^t * \sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1} \cdot \dfrac{1}{p^2+1} = \dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Итак, изображение свертки найдено. Теперь находим саму свертку. Для этого запишем дробь $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1}.$$

По таблице изображений находим саму свертку:

$$e^t * \sin t = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

Решить данную задачу можно и вторым способом, используя непосредственное вычисление свертки, но при этом потребуется выполнить двукратное интегрирование по частям. ▲

Пример 15. Используя теорему о свертке, восстановить оригинал по его изображению $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

Δ Представим $F(p)$ в виде произведения изображений:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4} \cdot \frac{p}{p^2+9}.$$

Функции $\dfrac{p}{p^2+4}$ и $\dfrac{p}{p^2+9}$ являются изображениями функций $\cos 2t$ и $\cos 3t$ соответственно. По теореме о свертке получаем

$$\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)} \fallingdotseq \cos 2t * \cos 3t.$$

Теперь находим свертку функций:

$$\cos 2t * \cos 3t = \int_0^t \cos 2\tau \cdot \cos 3(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}\Big(\cos(5\tau - 3t) + \cos(3t - \tau)\Big) d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin(5\tau-3t)-\sin(3t-\tau)\right)\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 2t-\sin 2t-\frac{1}{5}\sin(-3t)+\sin 3t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\sin 2t+\frac{6}{5}\sin 3t\right)=\frac{3\sin 3t-2\sin 2t}{5}.\ \blacktriangle$$

Пример 16. Найти оригиналы для функции $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-4)^2}$.

Δ *Первый способ*

Разложим дробь на элементарные:

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p-4)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-4}+\frac{D}{(p-4)^2}.$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов находим:

$$A=\frac{1}{32},\quad B=\frac{1}{16},\quad C=-\frac{1}{32},\quad D=\frac{1}{16}.$$

Получаем:

$$F(p)=\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{p-4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(p-4)^2}.$$

Для каждой дроби находим оригинал:

$$\frac{1}{p}\risingdotseq 1,\quad \frac{1}{p^2}\risingdotseq t,\quad \frac{1}{p-4}\risingdotseq e^{4t},\quad \frac{1}{(p-4)^2}=te^{4t}.$$

Итак, $f(t)=\dfrac{1}{32}+\dfrac{t}{16}-\dfrac{e^{4t}}{32}+\dfrac{te^{4t}}{16}$.

Второй способ

Воспользуемся второй теоремой разложения. Для функции $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-4)^2}$ значения $p_1=0$ и $p_2=4$ – полюсы второго порядка.

Следовательно,

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{0}F(p)\cdot e^{pt}+\operatorname*{Res}_{4}F(p)\cdot e^{pt}=\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}\cdot p^2}{p^2(p-4)^2}\right)'+$$

$$+\lim_{p\to 4}\left(\frac{e^{pt}(p-4)^2}{p^2(p-4)^2}\right)'=\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{(p-4)^2}\right)'+\lim_{p\to 4}\left(\frac{e^{pt}}{p^2}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{te^{pt}(p-4)^2-e^{pt}\cdot 2(p-4)}{(p-4)^4}+\lim_{p\to 4}\frac{te^{pt}\cdot p^2-e^{pt}\cdot 2p}{p^4}=$$

$$=\frac{16t+8}{256}+\frac{16te^{4t}-8e^{4t}}{256}=\frac{t}{16}+\frac{1}{32}+\frac{te^{4t}}{16}-\frac{e^{4t}}{32}.$$

Третий способ

Запишем функцию $F(t)$ в виде произведения:

$F(p)=\dfrac{1}{p^2}\cdot\dfrac{1}{(p-4)^2}=F_1(p)\cdot F_2(p)$, где $F_1(p)=\dfrac{1}{p^2}$, $F_2(p)=\dfrac{1}{(p-4)^2}$,

Находим оригиналы для $F_1(p)$ и $F_2(p)$:

$f_1(t)=t,\ \ f_2(t)=te^{4t}.$

По теореме о свертке имеем $t*te^{4t}\risingdotseq\dfrac{1}{p^2(p-4)^2}$. Находим свертку оригиналов:

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=t*te^{4t}=\int_0^t(t-\tau)\tau e^{4\tau}d\tau=\int_0^t(t\tau e^{4\tau}-\tau^2e^{4\tau})\,d\tau=$$

$$=t\int_0^t\tau e^{4\tau}\,d\tau-\int_0^t\tau^2e^{4\tau}d\tau=t\int_0^t\tau e^{4\tau}d\tau-\left(\frac{1}{4}\tau^2e^{4\tau}\Big|_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t\tau e^{4\tau}d\tau\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+t\right)\int_0^t\tau e^{4\tau}\,d\tau-\frac{1}{4}t^2e^{4t}=\left(\frac{1}{2}+t\right)\left(\frac{1}{4}te^{4t}-\frac{1}{16}e^{4t}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{4}t^2e^{4t}=$$

$$=\frac{1}{32}+\frac{t}{16}-\frac{e^{4t}}{32}+\frac{te^{4t}}{16}.\ \blacktriangle$$

Пример 17. Решить задачу Коши:

а) $x'+2x=-3t+2,\ x(0)=0;$ б) $x'-x=1,\ x(0)=-1.$

Δ а) пусть функция $x(t)$ имеет изображение $X(p)$, т. е. $x(t)\risingdotseq X(p).$

Тогда по теореме о дифференцировании оригинала получаем

$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-0=pX(p).$

Далее найдем изображение правой части уравнения:

$-3t+2\risingdotseq-\dfrac{3}{p^2}+\dfrac{2}{p}.$

Составляем операторное уравнение, т. е. уравнение для изображений:

$$pX(p)+2X(p)=-\frac{3}{p^2}+\frac{2}{p}.$$

Решаем это операторное уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p)(p+2)=-\frac{3}{p^2}+\frac{2}{p}\Rightarrow X(p)=-\frac{3}{p^2(p+2)}+\frac{2}{p(p+2)}.$$

По найденному изображению $X(p)$ восстанавливаем оригинал $x(t)$:

$$x(t)=\frac{3}{4}(1-2t-e^{-2t})+1-e^{-2t}=1{,}75-1{,}5t-1{,}75e^{-2t};$$

б) пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$. Согласно теореме о дифференцировании оригинала имеем $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)+1$. Изображением функции 1, стоящей в правой части уравнения, является $\frac{1}{p}$. Следовательно, получаем операторное уравнение $pX(p)+1-X(p)=\frac{1}{p}$, из которого находим $X(p)=-\frac{1}{p}$. Отсюда $x(t)=-1$. ▲

Пример 18. Решить задачу Коши:

а) $x''+4x=\cos 2t,\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=-1;$

б) $x''-2x'-3x=e^{3t},\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=0;$

в) $x'''-3x''+3x'-x=e^{t},\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=-1,\ \ x''(0)=1.$

Δ а) пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тогда

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p+1.$$

Находим изображение правой части уравнения $\cos 2t\risingdotseq\frac{p}{p^2+4}$.

Получаем операторное уравнение

$$p^2X(p)-p+1+4X(p)=\frac{p}{p^2+4},$$

из которого находим $X(p)$:

$$X(p)=\frac{p}{(p^2+4)^2}+\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{p^2+4}.$$

Восстанавливаем оригинал:

$$x(t)=\frac{1}{4}t\sin 2t+\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t;$$

б) $x(t)\doteqdot X(p)$. Тогда

$$x'(t)\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p).$$

Для правой части уравнения: $e^{3t}\doteqdot\dfrac{1}{p-3}$.

Составляем операторное уравнение:

$$p^2X(p)-2pX(p)-3X(p)=\frac{1}{p-3}.$$

Решив его относительно функции $X(p)$, получим

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Разложив эту рациональную дробь на сумму элементарных дробей методом неопределенных коэффициентов, получим

$$X(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(p-3)^2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(p-3)}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{p+1},$$

откуда

$$x(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{t};$$

в) $x(t)\doteqdot X(p)$. Тогда

$$x'(t)\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p+1,$$

$$x'''(t)\doteqdot p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3X(p)-p^2+p-1,$$

$$e^t\doteqdot\frac{1}{p-1}.$$

Записываем операторное уравнение:

$$p^3X(p)-p^2+p-1-3p^2X(p)+3p-3+3pX(p)-3-X(p)=\frac{1}{p-1}.$$

Решаем это уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p)=\frac{1}{(p-1)^4}+\frac{p^2-4p+7}{(p-1)^3}=\frac{1}{(p-1)^4}+\frac{(p-1)^2}{(p-1)^3}-\frac{2(p-1)}{(p-1)^3}+\frac{4}{(p-1)^3}=$$

$$=\frac{1}{(p-1)^4}+\frac{1}{p-1}-\frac{2}{(p-1)^2}+\frac{4}{(p-1)^3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{(p-1)^4}+\frac{1}{p-1}-2\cdot\frac{1}{(p-1)^2}+2\cdot\frac{2!}{(p-1)^3}.$$

По таблице оригиналов и их изображений находим оригинал для функции $X(p)$:

$$x(t)=\frac{1}{6}t^3e^t+e^t-2te^t+2t^2e^t. \ \blacktriangle$$

Пример 19. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x'=x+2y-9t, & x(0)=1, \\ y'=2x+y+4e^t, & y(0)=2. \end{cases}$$

Δ Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала:

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1, \ y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-2.$$

Используя свойство линейности, находим изображения правых частей уравнений системы:

$$x+2y-9t\risingdotseq X(p)+2Y(p)-\frac{9}{p^2},$$

$$2x+y+4e^t\risingdotseq 2X(p)+Y(p)+\frac{4}{p-1}.$$

Составляем систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p)-1=X(p)+2Y(p)-\dfrac{9}{p^2}, \\ pY(p)-2=2X(p)+Y(p)+\dfrac{4}{p-1}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$X(p)=\frac{4}{p-1}-\frac{3}{p}-\frac{3}{p^2}-\frac{8}{p(p-1)}+\frac{8}{(p-1)(p+1)}+\frac{4}{(p-3)(p-1)},$$

$$Y(p)=-\frac{4}{p}+\frac{6}{p^2}+\frac{4}{p+1}+\frac{2}{p-3}.$$

Восстанавливаем оригиналы по изображениям $X(p)$ и $Y(p)$:

$$x(t)=2e^{3t}-4e^{-t}-2e^t+5-3t,$$

$$y(t)=-4+6t+4e^{-t}+2e^{3t}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Принадлежат ли множеству оригиналов следующие функции?

а) $f(t)=e^{(2+5i)t}$. **Ответ:** да;

б) $f(t)=\operatorname{tg} t$. **Ответ:** нет;

в) $f(t)=t^2$. **Ответ:** да;

г) $f(t)=\dfrac{1}{t^2+2}$. **Ответ:** да;

д) $f(t)=e^{it^2}$. **Ответ:** да;

е) $f(t)=5\sqrt[3]{t^4+t}$. **Ответ:** нет.

2. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

а) $f(t)=3$. **Ответ:** $\dfrac{3}{p}$, $\operatorname{Re} p>0$;

б) $f(t)=e^{t+2}$. **Ответ:** $e^2\cdot\dfrac{1}{p-1}$, $\operatorname{Re} p>1$.

3. Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа и теоремой подобия, найти изображения функций:

а) $f(t)=2\sin 3t-5\operatorname{ch} 2t$. **Ответ:** $\dfrac{6}{p^2+9}\cdot\dfrac{5p}{p^2-4}$;

б) $f(t)=3e^{-4t}+\operatorname{sh} 7t$. **Ответ:** $\dfrac{3}{p+4}\cdot\dfrac{7}{p^2-49}$.

4. Используя таблицу изображений и свойства преобразования Лапласа, найти изображения функций:

а) $f(t)=\operatorname{sh} 3t-4\cos 7t+e^{2t}+t+8$.

Ответ: $\dfrac{3}{p^2-9}-\dfrac{4p}{p^2+49}+\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{8}{p}$;

б) $f(t)=\sin 2t\cos 3t$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{p^2+25}-\dfrac{1}{p^2+1}\right)$;

в) $f(t)=e^{4t}\sin^2 3t$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-4}-\dfrac{p-4}{(p-4)^2+36}\right)$.

5. Найти изображения следующих функций:

$f_1(t)=e^{t-3}\chi(t), \quad f_2(t)=e^{t-3}\chi(t-3).$

Ответ: $F_1(p)=\frac{1}{e^3}\cdot\frac{1}{p-1}, \; F_2(p)=\frac{1}{p-1}e^{-3p}$.

6. Найти оригиналы для функций:

а) $F(p)=\frac{10p}{p^2+25}-\frac{2}{p^2+3}+\frac{1}{p^4}.$

Ответ: $10\cos 5t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t+\frac{t^3}{6}$;

б) $F(p)=\frac{2}{p-7}+\frac{3p}{p^2-6}-\frac{1}{p^2}.$

Ответ: $2e^{7t}+3\operatorname{ch}\sqrt{6}\,t-t$;

в) $F(p)=\frac{4p-3}{p^2-4p+3}.$

Ответ: $-\frac{1}{2}e^t+\frac{9}{2}e^{3t}$.

7. Найти свертку функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и ее изображение:

а) $f_1(t)=t, \; f_2(t)=e^t.$

Ответ: $t*e^t=e^t-t-1, \; t*e^t \risingdotseq \frac{1}{p^2(p-1)}, \; t*e^t \risingdotseq \frac{1}{p^2(p-1)}$;

б) $f_1(t)=t^2, \; f_2(t)=\cos 2t.$

Ответ: $t^2*\cos 2t=\frac{1}{4}\left(1+2t-2t^2-\cos 2t-\sin 2t\right), \; t^2*\cos 2t \risingdotseq \frac{2p-4}{p^5+4p^3}.$

8. Решить задачу Коши:

а) $x'-4x=1-4t, \; x(0)=1.$ **Ответ:** $e^{4t}+t$;

б) $x''-3x'+10x=9\sin t-3\cos t, \; x(0)=0, \; x'(0)=-2.$

Ответ: $e^{2t}-e^{5t}+\sin t$;

в) $x'''-x''=-\alpha e^t\sin t, \; x(0)=1, x'(0)=1, x''(0)=2.$

Ответ: $1+e^t\sin t$;

г) $x'''+x'=0, \; x(0)=1, x'(0)=2, x''(0)=3.$

Ответ: $4+2\mathrm{int}-3\cos t.$

Список использованных источников

1. Бугров, Я. С. Высшая математика : учеб. для вузов. В 3 т. Т. 3 : Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2004. – 512 с.

2. Вся высшая математика : учеб. В 7 т. Т. 4 / сост. М. Л. Краснов [и др.]. – М. : УРСС, 2001. – 352 с.

3. Теория функций комплексного переменного : учеб. пособие / Н. В. Гредасова [и др.]. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 128 с.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Мир и Образование, 2003. – 416 с.

5. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] – М. : Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

6. Михайлов, В. Д. ТФКП. Практикум / В. Д. Михайлов. – М. : НИЯУ МИФИ, 2013. – 244 с.

7. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – СПб. : Лань, 2015. – 448 с.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2003. – 256 с.

9. Плескунов, М. А. Операционное исчисление : учеб. пособие / М. А. Плескунов. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 143 с.

10. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учеб. для вузов / И. И. Привалов. – М. : Юрайт, 2023. – 402 с.

11. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие. В 10 ч. Ч. 10 : Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2010. – 146 с.

12. Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений : пособие. В 3 ч. Ч. 3 : Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Числовые и функциональные ряды. Элементы теории функции комплексной переменной / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2022. – 262 с.

Содержание

1. Комплексные числа 3
Дополнительные задачи 8
2. Последовательности комплексных чисел. Кривые и области на комплексной плоскости 9
Дополнительные задачи 13
3. Элементарные функции комплексного переменного 15
Дополнительные задачи 19
4. Аналитические функции 20
Дополнительные задачи 25
5. Интегрирование функций комплексной переменной 27
Дополнительные задачи 32
6. Ряды в комплексной области 34
Дополнительные задачи 39
7. Ряды Тейлора и Лорана 41
Дополнительные задачи 48
8. Нули и изолированные особые точки аналитических функций 50
Дополнительные задачи 58
9. Вычеты. Приложения вычетов 59
Дополнительные задачи 67
10. Конформные отображения 68
Дополнительные задачи 74
11. Операционное исчисление 75
Дополнительные задачи 94
Список использованных источников 96

Св. план 2024, поз. 31

Учебное издание

Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович
Метельский Василий Михайлович
Сафронова Марина Андреевна

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В двух частях

Часть 1

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПОСОБИЕ

Редактор *А. Ю. Шурко*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *А. А. Лущикова*

Подписано в печать 20.12.2024. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,93. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 100 экз. Заказ 17.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск