

## **ПРИМЕНЕНИЕ РАЗМЫТИЯ ДЛЯ МАСКИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ И УРОВНЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ ЕЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ**

*Маскирование информации является важной и актуальной проблемой при передаче информации по незащищенным каналам связи. При этом возникает новая задача – корректное восстановление информации на принимающей стороне. Данная задача относится к классу некорректных задач и потому требуются специальные математические методы для ее решения. В статье приведены примеры маскирования информации и описывается один из возможных способы ее восстановления на принимающей стороне.*

*Размытие изображения, ядро оператора, стабилизирующий функционал, параметр регуляризации, восстановленное изображение.*

Vasilev Konstantin Alexandrovich

## **USING OF BLUR FOR MASKING INFORMATION AND FREDHOLM'S EQUATION OF FIRST KIND FOR RESTORATION**

*Masking of information is an important and actual problem for transmitting information over unsecured communication channels. In this case, a new task arises - the correct restoration of information on the receiving side. This problem belongs to the class of ill-posed problems and therefore requires special mathematical methods to solve it. The article provides examples of masking information and describes one of the possible ways to restore it on the removable side.*

*Image blur, operator kernel, stabilizing functionality, regularization parameter, reconstructed image.*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Системы технического зрения (СТЗ) призваны и во многих случаях уже решают задачи по дополнению или даже замене человека в областях деятельности, связанных со сбором и анализом зрительной информации. Чтобы СТЗ могла корректно распознать изображение, нужно предварительно удалить шум, который мог возникнуть в процессе оцифровки. Для этого, в системе предварительной обработки изображения, используются

фильтры, на основе свертки ядра (маски) оператора размером  $(2k+1) \times (2k+1)$  с фрагментом изображения [1]

$$AI_{ij} = a * I = \sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k \alpha_{st} I_{i+s, j+t} \quad (1)$$

При увеличении размера ядра, сильнее подавляется дискретный белый шум, однако при этом растет и размытие изображения. Почти во всех областях, где применяется СТЗ, размытие осложняет решение задач более высокого уровня, таких как сегментация изображения или детектирование определенного набора интересующих точек и областей изображения.

Имеет место и обратный, положительный эффект, который происходит при размытии изображения – это маскирование информации, которая оказалась на изображении намеренно или же случайно. Так, например, в сферических изображениях улиц городов (Яндекс или Google карты) размываются лица прохожих и номера автомобилей для соблюдения закона о персональных данных.

Для процедуры маскирования изображений применяется достаточно сложные математические методы, и для получения доступа к сокрытой конфиденциальной информации третьим лицам потребуется серьезные временные и финансовые затраты, которые в редких случаях принесут эффект.

При маскировании информации, передаваемой по незащищенному каналу, возникает другая проблема - проблема восстановления размытых изображений на принимающей стороне. При этом восстановление должно быть максимально корректным и минимально затратным, но, в то же время, затруднено для третьих лиц. Некорректность обратной задачи создает дополнительные преграды на пути несанкционированного доступа к передаваемой информации.

#### ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Алгоритм генерирования сигнала с несовершенной аппаратной функцией описывается интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода [2-5]

$$\int_a^b K(x, s) \cdot \varphi(s) ds = f(x), \quad a \leq x, s \leq b \quad (2)$$

для одномерного сигнала и

$$\int_{ca}^{db} \int_{ca}^{db} K(x, y, t, s) \cdot \varphi(t, s) dt ds = f(x, y), \quad x, y \in [a, b] \times [c, d] \quad (3)$$

- для двумерного (изображения). В (2) и (3)  $K(x, s)$ ,  $K(x, y, t, s)$  - ядра интегрального уравнения (аппаратная функция прибора);  $f(x)$ ,  $f(x, y)$  - наблюдаемые сигналы (изображения);  $\varphi(s)$ ,  $\varphi(t, s)$  - истинные сигналы, которые должны быть найдены в результате решения уравнений (2) и (3). Похожие задачи появляются в компьютерной томографии, рентгенографии и экспериментах по рассеянию частиц [2-4].

Проблема, возникающая при восстановлении сигнала в реальных системах, заключается в том, что правая часть уравнения (2) или (3) – функция  $f$  - известна неточно. Вместо нее наблюдается функция  $\tilde{f}_\delta = f + \xi$  такая, что :  $\|\tilde{f}_\delta - f\|_2 \leq \delta$ . При этом, как известно [2], даже малые изменения функции  $f$  могут приводить к большим изменениям результата решения уравнения (2) или (3). Поэтому прямое использование обратного оператор  $\mathbf{A}^{-1}$  для нахождения решения задачи невозможно. Распространенный подход к поиску квазиоптимального решения заключается в замене исходной некорректной задачи задачей условной минимизации [2]:

$$(\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \alpha \mathbf{W}) \cdot \Phi = \mathbf{R}^T \mathbf{F}, \quad (4)$$

Матрица  $\mathbf{R}$  порождена вектор-строкой  $(r_k, r_{k-1}, \dots, r_1, r_0, r_1, \dots, r_{k-1}, r_k)$ . Каждая следующая строка этой матрицы получается в результате циклического сдвига на одну позицию предыдущей строки. При этом матрица  $\mathbf{W}$  в (4) будет совпадать с единичной матрицей в случае поиска решения уравнения Эйлера в метрике пространства  $\mathbf{K}^* \mathbf{K} \varphi$ . Введем обозначения  $\mathbf{B} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \alpha \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}$ . В результате система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (4) примет следующий вид

$$\mathbf{B} \cdot \Phi = \mathbf{V}. \quad (5)$$

Матрица  $\mathbf{B}$  в данной СЛАУ является симметричной, положительно определенной и. треплицевой [6]. Значит, для решения СЛАУ (5) можно использовать устойчивые к вычислительным ошибкам, что важно для некорректных задач, и более быстрые алгоритмы. Это либо метод квадратного корня [6, 7], либо метод решения СЛАУ с треплицевой основной матрицей [6].

В данной работе поиск оптимального решения СЛАУ (5) реализован в метрике пространства  $L_2[a, b]$  с треплицевой основной матрицей  $\mathbf{B}$  по следующему алгоритму [5]:

- задается монотонно убывающая последовательность  $1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$  значений параметра регуляризации  $\alpha$ ;

- для каждого значения параметра регуляризации  $\alpha_k$  формируется и решается СЛАУ (8). В результате получается параметрическое семейство решений  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}(\alpha_i)$ ;

- начиная со второго шага (со второй СЛАУ) вычисляется уклонение  $\delta_i = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{i-1}\|_2$  в евклидовой метрике текущего вектора  $\mathbf{Y}_i$  от предыдущего  $\mathbf{Y}_{i-1}$ ;

- начиная с  $i = 4$  проверяется выполнение неравенств  $\begin{cases} \delta_i < \delta_{i-1}, \\ \delta_i < \delta_{i+1}. \end{cases}$

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для генерации ядра искажающего оператора применялась порождающая функция вида:

$$K(x, s) = \lambda \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{\sigma^2}\right), \quad (6)$$

где  $\lambda = 1$ ,  $s$  - центр ядра,  $\sigma$  - параметр, от которого зависит длина ненулевой части ядра. Функция (6) определена на всей числовой оси, но при этом  $K(x, s) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому «хвосты» функции  $K(x, s)$  обрезаются. В результате получается вектор-строка  $(r_k, r_{k-1}, \dots, r_1, r_0, r_1, \dots, r_{k-1}, r_k)$  конечной длины  $(2k + 1)$ .

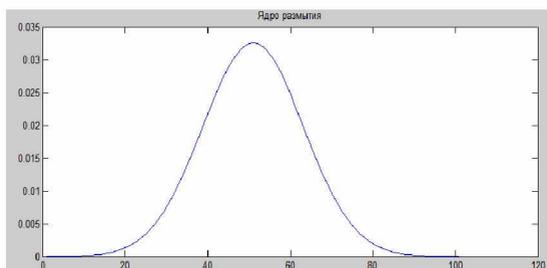


Рис. 1. Ядро размытия длины 101

Подбор параметров в формуле (6), обеспечивающих формирование вектор-строки такой длины достигается выполнением условий:  $r_k = 10^{-6}$  и  $\sum_{i=-k}^k r_i = 1$ . В итоге, разностное ядро длины  $2k+1=101$  имеет следующий вид (рис.1):

Затем формировалась матрица  $\mathbf{R}$ , в результате умножения которой на каждую строку изображения (на транспонированную матрицу  $\mathbf{I}^T$ ) каждой цветовой составляющей матрицы исходного изображения  $\mathbf{I}$ . На рис.

2,а и 2,б приведены исходное текстовое изображение и результат его размытия при указанных выше размерах вектор-строки  $(r_k, r_{k-1}, \dots, r_1, r_0, r_1, \dots, r_{k-1}, r_k)$ , порождающей ядро размытия  $\mathbf{R}$ .

Для начала попробуем размыть и восстановить одну цветовую составляющую изображения, которая по сути своей является строкой пикселей с разными яркостными значениями (рис. 2)

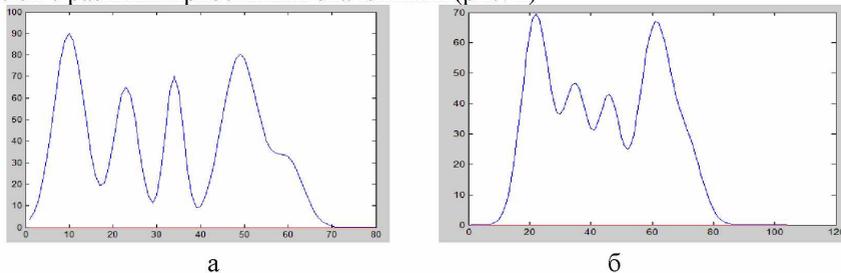


Рис. 2. Исходный одномерный сигнал (а), размытый сигнал (б)

Уже при размере ядре 25, наблюдаются искажения пиков сигнала (рис. 2, б).

Для восстановления сигнала используем описанный выше алгоритм. Составим матрицу  $\mathbf{R}$  и решим СЛАУ  $\mathbf{B} \cdot \Phi = \mathbf{V}$  с помощью теплицевой матрицы. В результате получим параметрическое семейство решений  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}(\alpha_i)$  (рис. 3,а). Квазиоптимальное решение получено при  $\alpha = 10^{-10}$  (рис. 3, б).

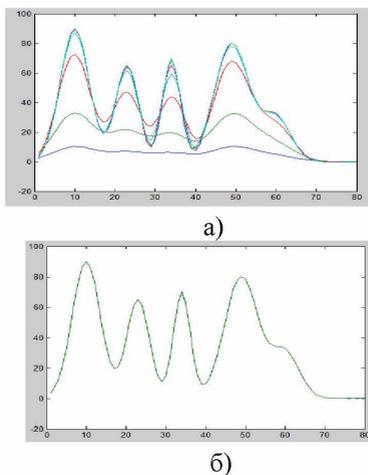


Рис. 3. Восстановленные сигналы, при различных значениях  $\alpha$

Теперь возьмем изображения текста (рис.4,а) и размоем его. Начиная с ядра размытия размером 21, буквы текста становятся малоразличимы (рис.4,б)

---

Следовательно, разруха не в клозетах, а в головах. Значит, когда эти баритоны кричат «бей разруху!» – я смеюсь. Клянусь вам, мне смешно! Это означает, что каждый из них должен пунить себя по затылку! И вот, когда он выпунит из себя всякие галлюцинации и займётся чисткой сараев – прямым своим делом, – разруха исчезнет сама собой. Двум богам служить нельзя! Невозможно в одно и то же время подметать трамвайные пути и устраивать судьбы каких-то испанских оборванцев!

---

а



б

Рис. 4. Исходное изображение текста (а) и результат его размытия (б)

Во время размытия, с левого и правого края изображения появляются черные полосы (рис.4,б). Добавим к исходному изображению дополнительные пиксели слева и справа. Причем для дополнительных пикселей слева отобразим первые  $k$  элементов матрицы исходного изображения слева. Для дополнительных пикселей справа - последние  $k$  элементов каждой строки справа. Тогда  $\dim(I_{ij}) = M * (N + 2n)$ , где  $M$  – высота изображения, а  $N$  – ширина. После размытия дополненного изображения черные полосы остаются, но они приходятся на дополнительные пиксели (рис.5,а). После отбрасывания дополнительных пикселей, получаем корректное размытие.

Аналогично восстановлению исходного одномерного сигнала, проведем восстановление размытого изображения, используя следующие значения параметра регуляризации  $\alpha$ :  $[10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}]$ . Наиболее близким к исходному изображению оказалось восстановленное изображение при значении параметра регуляризации  $\alpha = 10^{-5}$  (рис.5).

---

Следовательно, разруха не в клозетах, а в головах. Значит, когда эти баритоны кричат «бей разруху!» – я смеюсь. Клянусь вам, мне смешно! Это означает, что каждый из них должен пунить себя по затылку! И вот, когда он выпунит из себя всякие галлюцинации и займётся чисткой сараев – прямым своим делом, – разруха исчезнет сама собой. Двум богам служить нельзя! Невозможно в одно и то же время подметать трамвайные пути и устраивать судьбы каких-то испанских оборванцев!

---

Рис. 5. Восстановленное изображение при  $\alpha = 10^{-5}$

Задачи восстановления сигналов, описываемых математическими моделями в виде некорректных задач возникают в различных областях науки и практики. Примеры таких задач содержатся, в частности, в работах [8, 9].

## ВЫВОДЫ

Сформулированы задача маскирования информации с использованием матричных сверточных операторов и задача восстановления размытой информации на принимающей стороне. Рассмотрен подход на основе регуляризации А.Н. Тихонова, в рамках которого задача сводится к решению параметрического семейства систем линейных алгебраических уравнений с теплоцевой основной матрицей. Приведены экспериментальные результаты размытия и восстановления как одномерного сигнала, так и изображения с текстом.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новиков А. И., Пронькин А. В.* Методы цифровой обработки изображений подстилающей поверхности. М.: Горячая линия-Телеком. 2023. 224 с.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. - М.: Наука, 1987. – 160 с.
3. *Майорова В.И., Банников А.М., Зайцев К.И.* Математическое моделирование процесса радиометрической коррекции снимков дистанционного зондирования Земли // Инженерный журнал: наука и инновации.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 20 с.
4. *Гончарский А.В.* Обратные задачи оптики // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1986. №3. – С. 59-76
5. *Новиков А.И., Шамин Н. О.* Исследование регуляризационного метода восстановления размытых изображений // Вестник РГРТУ, № 72. С. 106-115.
6. *Воеводин В.В., Тьртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплоцевыми матрицами. - М.: Наука, 1987. – 320 с.
7. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966. – 664 с.
8. *Борисов В.В., Новиков А.И., Чураков Е.П.* Применение факторного анализа для исследования послонных спектров // Электронное моделирование. 1994. Т. 16. №1. – 80-83.
9. *Майорова В.И., Банников А.М., Зайцев К.И.* Математическое моделирование процесса радиометрической коррекции снимков дистанционного зондирования

ния Земли // Инженерный журнал: наука и инновации.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 20 с.

10. *Огородников И.Н.* Введение в обратные задачи физической диагностики: специальные главы высшей математики для технологов. Издательство Уральского университета 2017.

**Васильев Константин Александрович**, аспирант Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина, Россия, город Рязань, улица Гагарина 59/1, телефон: 79156069304, email: [cornholio62@yandex.ru](mailto:cornholio62@yandex.ru)

**Vasilev Konstantin Alexandrovich**, post-graduate of Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin, Russia, Ryazan, Gagarina str 59/1, phone: 79156069304, email: [cornholio62@yandex.ru](mailto:cornholio62@yandex.ru).