

Власов Владимир Михайлович

**АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ШЕСТИКОЛЁСНОЙ  
МЕКАНУМ-ПЛАТФОРМЫ**

*В представленной работе рассматривается движение платформы на шести роликовых колёсах. Проведён анализ её кинематики и динамики. Получены кинематические уравнения, которые связывают обобщённые скорости платформы с угловыми скоростями роликовых колёс. Рассмотрены простейшие движения платформы, такие как поступательное движение вперёд, влево, вдоль биссектрисы первого координатного угла подвижной системы координат и движение по окружности с поворотом платформы. Получены уравнения динамики в форме уравнений Лагранжа для поступательного движения и Аннеля в произвольном движении. Проведено моделирование траекторного движения*

*платформы по окружности и по квадрату. В случае движения платформы по окружности значения управляющих моментов определены с помощью метода неопределённых множителей Лагранжа. Основные вычисления были проведены с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.*

*Платформа, роликовые колеса, меканум-колесо, всенаправленное движение.*

Vlasov Vladimir Mikhailovich

## **ANALYZING THE DYNAMICS OF A SIX-WHEELED MECANUM PLATFORM**

*In the presented work, the movement of the platform on six roller wheels is considered. The analysis of its kinematics and dynamics is carried out. Kinematic equations are obtained that relate generalized platform velocities to angular velocities of roller wheels. The simplest movements of the platform are considered, such as translational movement forward, to the left, along the bisector of the first coordinate angle of the movable coordinate system and movement along a circle with the rotation of the platform. The equations of dynamics in the form of Lagrange equations for translational motion and Appel in arbitrary motion are obtained. The modeling of the trajectory movement of the platform along the circle and along the square is carried out. In the case of a platform moving around a circle, the values of the control moments are determined using the method of indeterminate Lagrange multipliers. The main calculations were carried out using the Wolfram Mathematica computer algebra system.*

*Platform, roller wheels, mecanum wheel, omnidirectional movement.*

### **Введение**

В настоящее время мобильные роботы получают всё большее распространение. С развитием механизмов транспортировки появилась необходимость создания платформ, которые способны двигаться не только в направлении перпендикулярно оси вращения колеса, но и по направлению оси колеса. Такое движение стало доступно благодаря изобретению колеса с роликами, такое колесо называется роликонесущим.

Первая конструкция роликонесущего колеса была запатентована в 1919 году в США [1]. В данной работе было представлено оми-колесо с восемью роликами в форме цилиндров, закреплённых по краям колеса. Первый вариант меканум-колеса был изобретён инженером шведской компании Mecanum в 1972 году [2]. Его звали Bengt Ilon, поэтому такое колесо получило ещё одно название - колесо Илона. В работах [3,4] рассматривается

математическое и компьютерное моделирования робота на четырёх меканум-колёсах. Приведены уравнения движения меканум-платформы, представлены результаты натурного эксперимента. Движение трехколёсной платформы на омни-колёсах рассматривается в работе [5]. В то же время платформа на шести меканум-колёсах представляет не меньший интерес, так как позволяет перевозить грузы большей массы.

Представленная работа посвящена исследованию движения платформы с шестью роликонесущими колёсами, а именно рассмотрению кинематики и динамики данной системы.

Объектом исследования является платформа с шестью меканум-колёсами, перемещающаяся по горизонтальной плоскости.

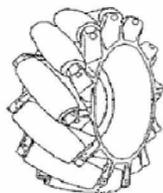
Целью работы является проведение анализа кинематики, динамики и простейших движений платформы на меканум-колёсах.

Актуальность работы обусловлена тем, что платформы, оснащённые роликонесущими колёсами, пользуются большим распространением в области исследований и использования для мобильных роботов за счёт своих преимуществ. Мобильные роботы на меканум-платформах обладают большей мобильностью за счёт возможности всенаправленного движения, что играет важную роль в функционировании робота.

### **Основная часть**

Работа посвящена исследованию движения платформы с шестью роликонесущими формы (рис. 2). Проведён анализ кинематики и динамики шестиколёсной меканум-платформы. Получены уравнения, связывающие колёсами. На их периферии расположены пассивные ролики, оси которых составляют угол  $45^\circ$  с осями вращения колес (рис. 1). Рассматривается случай симметричного расположения колёс по двум сторонам корпуса прямоугольной обобщённые скорости платформы с угловыми скоростями роликовых колёс. Скорость вращения  $i$ -го колеса:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{1}{R} [V_L + V_T \operatorname{tg} \delta_i + \Omega (h_i \operatorname{tg} \delta_i - l_i)].$$



*Рис. 1. Роликонесущее колесо (меканум)*

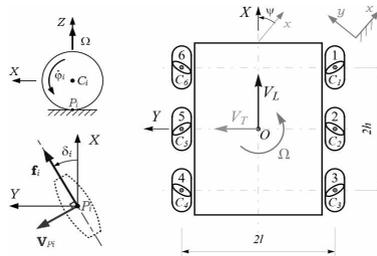


Рис. 2. Кинематическая схема шестиколёсной механум-платформы и колеса

Решены задачи кинематики для простейших движений платформы (рис. 3): поступательного движения вперёд ( $\dot{\varphi}_i = \frac{V_L}{R}, i = 1 \dots 6$ ), влево ( $\dot{\varphi}_{1,3,5} = -\frac{V_T}{R}, \dot{\varphi}_{2,4,6} = \frac{V_T}{R}$ ) и вдоль биссектрисы первого координатного угла подвижной системы координат, связанной с платформой, ( $\dot{\varphi}_{1,3,5} = 0, \dot{\varphi}_{2,4,6} = 2\dot{\varphi}$ ) рассмотрено вращательное движение вокруг геометрического центра платформы O ( $\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_6 = \frac{l-h}{R}\Omega, \dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_5 = \frac{l}{R}\Omega, \dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_4 = \frac{l+h}{R}\Omega$ ) и точки P ( $(OP = l+h): \dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_6 = -\frac{2h}{R}\Omega, \dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_5 = \frac{2l+h}{R}\Omega, \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_4 = 0$ ).

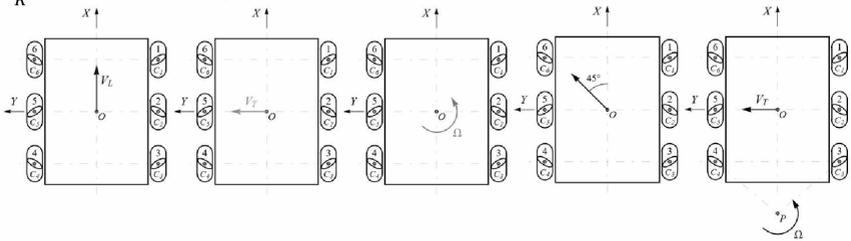


Рис. 3. Схемы простейших движений платформы

В случае поступательного движения платформы [8] её положение характеризуется двумя обобщёнными координатами  $x_0, y_0$ , а  $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_L \\ V_T \end{bmatrix}$ , тогда движение может быть описано двумя уравнениями Лагранжа:

$$m_a \dot{V}_L = F_L - \frac{6\mu_1 V_L}{R^2} - \frac{M_k}{R} \sum \text{sign } \dot{\varphi}_i,$$

$$m_a \dot{V}_T = F_T - \frac{6\mu_1 V_T}{R^2} - \frac{12\mu_2 V_T}{r^2} - \frac{M_k}{R} (-\text{sign } \dot{\varphi}_1 + \text{sign } \dot{\varphi}_2 - \text{sign } \dot{\varphi}_3 + \text{sign } \dot{\varphi}_4 - \text{sign } \dot{\varphi}_5 + \text{sign } \dot{\varphi}_6) - \frac{n_1 \sqrt{2}}{r} M_r \text{sign } V_T.$$

$$F_L = \frac{1}{R}(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6), \quad F_T = \frac{1}{R}(-M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 + M_6).$$

Воспользуемся формализмом Аппеля при произвольном движении платформы [3]. С учётом трения в оси колеса ( $M_i^{\text{тр.к}} = \mu_1 \dot{\phi}_i + M_k \text{sign } \dot{\phi}_i$ ) и в оси ролика ( $M_i^{\text{тр.р}} = \mu_2 \dot{\gamma}_i + M_r \text{sign } \dot{\gamma}_i$ ) получим следующие уравнения движения:

$$m_a \dot{V}_L - m_{p6} \Omega V_T = \frac{1}{R} [M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 - M_1^{\text{тр.к}} - M_2^{\text{тр.к}} - M_3^{\text{тр.к}} - M_4^{\text{тр.к}} - M_5^{\text{тр.к}} - M_6^{\text{тр.к}}],$$

$$m_a \dot{V}_T + m_{p6} \Omega V_L - \frac{2l}{R^2} I_{kV} \dot{\Omega} = \frac{1}{R} [-M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 + M_6 + M_1^{\text{тр.к}} - M_2^{\text{тр.к}} + M_3^{\text{тр.к}} - M_4^{\text{тр.к}} + M_5^{\text{тр.к}} - M_6^{\text{тр.к}}] + \frac{\sqrt{2}}{r} [M_1^{\text{тр.р}} + M_2^{\text{тр.р}} + M_3^{\text{тр.р}} + M_4^{\text{тр.р}} + M_5^{\text{тр.р}} + M_6^{\text{тр.р}}],$$

$$\left( I_{p6} + 6I_{kV} \frac{\rho_k}{R^2} \right) \dot{\Omega} - \frac{2l}{R^2} I_{kV} V_T = \frac{h}{R} [-M_1 + M_3 - M_4 + M_6 + M_1^{\text{тр.к}} - M_3^{\text{тр.к}} + M_4^{\text{тр.к}} - M_6^{\text{тр.к}}] + \frac{l}{R} [M_1 + M_2 + M_3 - M_4 - M_5 - M_6 - M_1^{\text{тр.к}} - M_2^{\text{тр.к}} - M_3^{\text{тр.к}} + M_4^{\text{тр.к}} + M_5^{\text{тр.к}} + M_6^{\text{тр.к}}] + \frac{\sqrt{2}h}{r} [M_1^{\text{тр.р}} - M_3^{\text{тр.р}} - M_4^{\text{тр.р}} + M_6^{\text{тр.р}}].$$

Получено решение прямой задачи динамики для случая, когда траектория движения геометрического центра платформы представляет собой окружность, а вектор скорости центра направлен по оси симметрии платформы. Моменты двигателей, обеспечивающее заданное движение и удовлетворяющие требованию минимума суммы квадратов моментов, определены с помощью метода множителей Лагранжа. При заданных значениях параметров платформы  $l = 0,15$  м,  $h = 0,235$  м;  $R = 0,05$  м;  $m_p = 30$  кг;  $m_k = 1,4$  кг;  $\mu_1 = 0,3$  Н · м · с/рад;  $L = 0,46$  м;  $\Omega = 0,3$  рад/с получим следующие значения для моментов:

$$M_1 = 0,66 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 1,114 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_3 = 1,512 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = 0,144 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_5 = 0,542 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_6 = 0,996 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

При моделировании поступательного движения ( $\Omega = 0$ ) геометрического центра платформы по квадратной траектории моменты каждого колеса вычислялись с помощью обратной связи. При заданных значениях параметров платформы в результате моделирования была получена траектория движения (рис. 4) и построены графики зависимости скоростей движения платформы  $V_x, V_y$  от времени (рис. 4) при идеальном управлении (выделены красным цветом) и при моделировании управления с обратной связью (чёрным цветом).

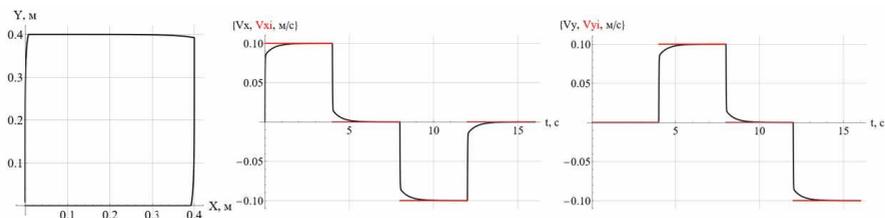


Рис. 4. Траектория движения и графики зависимости скоростей движения платформы  $V_x, V_y$  от времени

Также были построены графики зависимости скоростей вращения колёс  $\dot{\varphi}_1 \dots \dot{\varphi}_6$  от времени при идеальном управлении (выделены красным цветом) и при моделировании управления с обратной связью (чёрным цветом) и графики зависимости управляющих моментов колёс от времени. На рис. 5 представлены графики для первого и второго колеса, поскольку из-за симметричного расположения колёс на платформе графики одинаковы для 1, 3, 5 и 2, 4, 6 колёс соответственно.

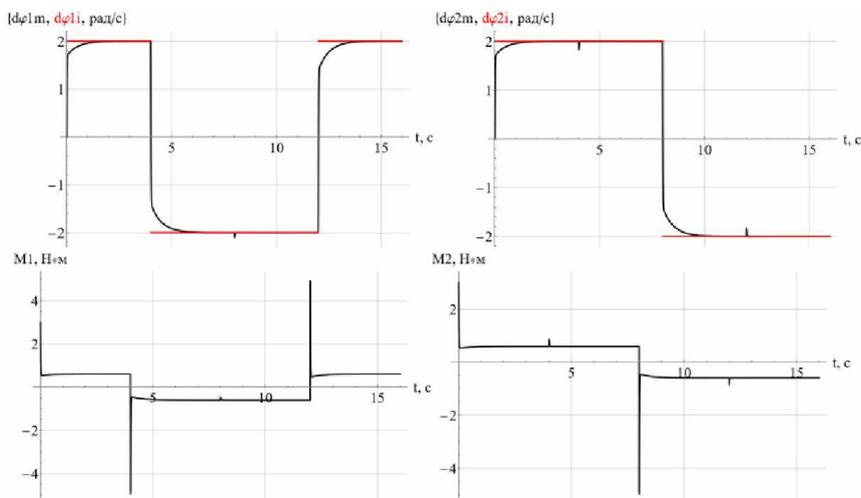


Рис. 5. Графики зависимости скоростей вращения колёс и управляющих моментов от времени

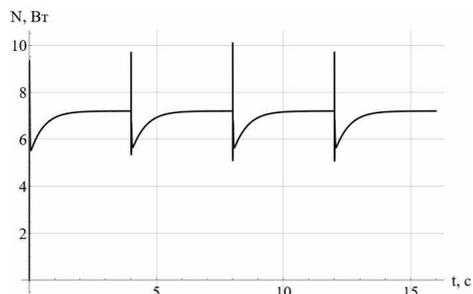


Рис. 6. График зависимости суммарной мощности от времени

Построен график зависимости суммарной мощности управляющих моментов колёс от времени. Заметим на рис. 6 резкие всплески значений моментов и мощностей при  $t = 4, 8, 12$  с. Они обусловлены резким изменением значений угловых скоростей колёс необходимых для смены направления движения платформы.

### Выводы

В данной работе выполнено исследование движения платформы на шести роликовых колёсах. Проведён анализ её кинематики и динамики. Получены кинематические уравнения, которые связывают обобщённые скорости платформы с угловыми скоростями роликовых колёс. Рассмотрены простейшие движения платформы: поступательное движение вперёд, влево, вдоль биссектрисы первого координатного угла подвижной системы координат и вращательное движение вокруг геометрического центра платформы и относительно некоторой точки на оси. Получены уравнения динамики в форме уравнений Лагранжа для поступательного движения и Аппеля в произвольном движении. Проведено моделирование траекторного движения платформы по окружности и по квадрату. В случае движения платформы по окружности значения управляющих моментов определены с помощью метода неопределённых множителей Лагранжа. Основные вычисления и построения уравнений были проведены с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. U.S. Patent 1305535A, CPC B60B 19/003, Y10T16'184, Vehicle wheel / Grabowiecki J. Filed: May. 11, 1918. Issued: June. 3, 1919.
2. U.S. Patent 3876255A, IPC B60B 19/00, B60B 019/12, Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some

- other base / Pon В.Е. – Appl. No.: 305887. – Filed: Nov. 13, 1972. – Issued: Apr. 8, 1975.
3. *Адамов Б.И., Капустина О.М., Меркурьев И.В., Панкратьева Г.В.* Кинематика, динамика и управление движением мобильного робота-манипулятора youbot. — М.: Изд-во МЭИ Москва, 2018.
  4. *Адамов Б.И.* Идентификация параметров математической модели мобильной роботизированной платформы всенаправленного движения КУКА YUBOT// статья в сборнике трудов конференции «Навигация и управление движением». – с. 158-160, 2017.
  5. *Мартыненко Ю.Г.* Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 74, № 4.
  6. *Lin L.C., Shih H.Y.* Modeling and adaptive control of an Omni-mecanum-wheeled robot // Intelligent Control and Automation. - 2013. Т. 4. № 02.
  7. *Мартыненко Ю.Г.* Управление движением мобильных колёсных роботов. Фундамент. и прикл. Матем., 2005, том 11, выпуск 8.
  8. *Зацепин М.Ф., Мартыненко Ю.Г., Тиньков Д.В.* Уравнение Лагранжа, Вронца, Чаплыгина в задачах динамики мобильных роботов: методическое пособие - М.: Изд-во МЭИ Москва, 2005.
  9. *Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г.* «Мобильные роботы и мехатронные системы: Неголономная механика мобильных роботов и её моделирование в реальном времени». РАН 1999г.
  10. *Килин А.А., Бобыкин А.Д.* Управление тележкой с омниколесами на плоскости// Нелинейная динамика. – 2014, том 10, № 4, с. 473-481.

**Власов Владимир Михайлович**, магистрант Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия, г. Москва, вн.тер.г. муниципальный округ Лефортово, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1, 111250, телефон: +7 (926) 599-91-93, email: vlasov2000vladimir@yandex.ru.

**Vlasov Vladimir Mikhailovich**, Candidate National Research University «Moscow Power Engineering Institute», 111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya str., 14, p. 1, phone: +7 (926) 599-91-93, email: vlasov2000vladimir@yandex.ru.