МГВРК

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

**Учебная программа, методические указания и контрольные задания**

**МИНСК 2005**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

ПОДЛЕЖИТ ВОЗВРАТУ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ В.И. Федосенко
« 9 » сентября 2005 г.

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебная программа, методические указания
и контрольные задания
для студентов безотрывной формы обучения
специальности 1-08 01 01-07
«Профессиональное обучение. (Информатика)»

МИНСК 2005



УДК 681.3.06(075)
ББК 32.973.26–018.2
С40

Рекомендовано к изданию кафедрой информатики и Научно-методическим советом Учреждения образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж»

Составитель
**И.Г. Смолер,** ассистент кафедры информатики МГВРК

Рецензент
**С.Н. Нестерова,** ассистент кафедры информатики МГВРК

**Системный** анализ и моделирование : учеб. программа, метод. указания и контрол. задания для студентов безотрыв. формы обучения специальности 1-08 01 01-07 «Профессиональное обучение. (Информатика)» / сост. И. Г. Смолер. – Мн. : МГВРК, 2005. – 28 с.
С40

Рассмотрена программа дисциплины, даны вопросы для самоподготовки и варианты контрольной работы, приведены методические указания по выполнению и оформлению контрольной работы, пример выполнения практического задания контрольной работы и рекомендуемая литература.
Предназначено для студентов и преподавателей колледжа.

**УДК 681.3.06(075)**
**ББК 32.973.26–018.2**

Учебное издание

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Учебная программа, методические указания и контрольные задания
для студентов безотрывной формы обучения
специальности 1-08 01 01-07 «Профессиональное обучение. (Информатика)»

Составитель
**Смолер** Ирина Геннадьевна

Зав. ред.-издат. отд. О.П. Козельская
Редактор Г.Л. Говор
Корректор Н.Г. Михайлова
Компьютерная верстка А.П. Пучек

План издания 2005 г. (поз. 28)

Изд. лиц. № 02330/0056774 от 17.02.2004. Подписано в печать 09.09.2005.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 0,85. Тираж 60 экз. Заказ 231.

Издатель и полиграфическое исполнение Учреждение образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
220005, г. Минск, пр-т Ф. Скорины, 62.

**Введение**

Учебная дисциплина «Системный анализ и моделирование» является одной из основных дисциплин в цикле специальных и базируется на знаниях и навыках, полученных при изучении следующих дисциплин: «Элементы высшей математики», «Основы математической статистики и теории вероятности», «Технология разработки программ», «Методы и алгоритмы принятия решений». Реализация рассмотренных моделей с помощью ЭВМ, осуществляемая на практических занятиях, опирается на знания методов и средств программирования, умения разрабатывать алгоритмы и программы.

Целями изучения дисциплины являются: раскрытие основных областей применения моделирования, проектирование моделей с помощью различных методов.

В результате изучения дисциплины студент должен:

*иметь представление:*

- о взаимосвязи дисциплины «Системный анализ и моделирование» с другими общепрофессиональными и специальными дисциплинами;
- о новейших достижениях и перспективах развития информационных технологий;
- о вопросах безопасности в производственном процессе;

*знать:*

- основы моделирования и принятия решений;
- модели математического программирования и методы их реализации;
- графовые модели и методы решения экстремальных задач на графах имитационных моделей;
- принципы и этапы имитационного моделирования;
- основы разработки и анализ алгоритмов;

*осуществлять:*

- выбор моделей при разработке математической постановки задачи;

*реализовывать:*

- модели с помощью изученных методов на ЭВМ;

*самостоятельно разбираться:*

- в моделях рассмотренных классов и методах принятия решений на них.

Учебным планом специальности 1-08 01 01-07 «Профессиональное обучение. (Информатика)» для студентов безотрывной



формы обучения предусмотрено самостоятельное изучение дисциплины «Системный анализ и моделирование» в объеме 78 часов, из них 40 – практические занятия.

# 1. Учебная программа дисциплины

## 1.1. Тематический план

Таблица 1

| Наименование раздела | Количество часов | | | |
|---|---|---|---|---|
| | по дневной форме обучения | | по безотрывной форме обучения | |
| | теория | практика | теория | практика |
| Введение | 2 | - | - | |
| **Раздел 1.** Основы моделирования | 4 | - | 2 | - |
| **Раздел 2.** Линейное программирование | 10 | 8 | 2 | 2 |
| **Раздел 3.** Графовые модели | 14 | 22 | 4 | 4 |
| **Раздел 4.** Дискретное программирование | 2 | 4 | - | - |
| **Раздел 5.** Динамическое программирование | 2 | 2 | - | - |
| **Раздел 6.** Математические пакеты в моделировании | 3 | 4 | 2 | - |
| Обязательная контрольная работа | 1 | - | - | - |
| Итого | 38 | 40 | 10 | 6 |

## 1.2. Содержание дисциплины

***Введение***

Содержание и задачи дисциплины. Связь с другими дисциплинами. Современное состояние и перспективы развития математического моделирования. – 2 часа.

Литература [4, с. 3 – 7]

**Раздел 1. Основы моделирования**

***1.1. Понятие «модель». Принципы моделирования****

Понятие «модель»: основные свойства модели, существен-

* Обзорные лекции для студентов безотрывной формы обучения, всего 10 часов.

ные признаки. Цели и задачи моделирования. Системный подход в моделировании.

Принципы моделирования. Сферы применения. Конкретные примеры использования.

***1.2. Классификация моделей***

Материальная модель (физическая, аналоговая), идеальная модель (интуитивная, математическая, символьная).

Классификационные признаки. Взаимосвязь моделирования и техники. – 2 часа.

Литература [6, с. 5 – 10]

***1.3. Математическая модель***

Математическая модель. Этапы математического моделирования: огрубление исходного процесса (объекта), построение математической модели, выбор численного метода решения, построение алгоритма, написание программы, анализ результатов, уточнение модели.

***1.4. Классификация математических моделей***

Детерминированные и стохастические модели. Статистические и динамические модели. Линейные модели. Основные требования к математическим моделям. – 2 часа.

Литература [6, с. 11 – 16]

**Раздел 2. Линейное программирование**

***2.1. Постановка задачи линейного программирования***

Сферы применения линейного моделирования. Формы записи задачи линейного программирования, способы преобразования.

Целевая функция и ее оптимизация. Область решений системы неравенств. Оптимальный и допустимый план. – 2 часа.

Литература [5, с. 9 – 12]

***2.2. Двухфазный симплексный метод****

Искусственная переменная. Опорный план. Базисные и свободные переменные. Симплексная таблица. Метод искусственного базиса, алгоритм решения. Вспомогательная задача. – 2 часа.

Литература [4, с. 74 – 96]

***2.3. Двойственные задачи****

Исходная задача. Двойственная задача. Взаимодвойственные задачи. Правила построения двойственной задачи.



Теорема двойственности и экономическая интерпретация двойственных задач. – 2 часа.

Литература [5, с. 30 – 39]

***2.4. Транспортная задача****

Транспортные задачи по критерию стоимости и по критерию времени. Определение исходного опорного решения. Построение последовательных итераций. – 2 часа.

Литература [3, с. 31 – 40]

Метод «Северо-западного угла». Метод «Минимального элемента». Метод потенциалов. Прямые и косвенные стоимости. Балансовый пересчет. – 2 часа.

Литература [3, с. 42 – 66]

**Раздел 3. Графовые модели**

***3.1. Основные понятия и определения***

Задача о «Кенигсбергских мостах». Граф, вершина, степень вершины, висящая вершина, ветвящаяся вершина, изолированная вершина, ребро, вес ребра. Маршрут, цепь, цикл, простой цикл. Связный граф, эйлеров граф. Дерево как частный случай представления графа. Остовное дерево. Алгоритм (Prim). Алгоритм (Kruskal). – 2 часа.

Литература [1, с. 112 – 141]

***3.2. Задачи о нахождении кратчайших путей в графе****

Задача о нахождении кратчайшего пути от заданного узла до всех остальных узлов в графе и метод ее решения – алгоритм Дийкстры. – 2 часа.

Литература [7, с. 12 – 19]

Задача нахождения кратчайших путей между всеми парами узлов. Алгоритм Флойда. – 2 часа.

Литература [7, с. 5 – 8]

***3.3. Потоки на сетях. Задача о максимальном потоке****

Исток графа. Сток графа. Пропускная способность. Поток по сети. Разрез. Пропускная способность разреза. Задача о максимальном потоке и алгоритм Форда-Фалкерсона. – 2 часа.

Литература [4, с. 258 – 263]

Обобщение задачи о максимальном потоке: задачи с нижними пропускными способностями дуг, задачи с пропускными способностями узлов, задачи с множеством истоков и множеством стоков. – 2 часа.

Литература [4, с. 264 – 266]

***3.4. Потоки минимальной стоимости***[*]

Задача нахождения потока заданной величины (максимальной величины) минимальной стоимости в сети. Алгоритм Басакера-Гоуэна. Алгоритм Клейна. – 2 часа.

Литература [7, с. 10 – 14]

***3.5. Элементы сетевого планирования***

Сетевая модель. Алгоритм ранжировки событий. Критический срок. Свободный резерв времени. Полный резерв времени. – 2 часа.

Литература [1, с. 154 – 167]

**Раздел 4. Дискретное программирование**

***4.1. Метод Гомори. Метод ветвей и границ***

Задача целочисленного линейного программирования. Метод Гомори. Метод ветвей и границ. Оптимальный план. – 2 часа.

Литература [4, с. 339 – 369]

**Раздел 5. Динамическое программирование**

***5.1. Общие принципы решения задач динамического программирования***

Метод динамического программирования и простейшие задачи, решаемые этим методом. Принципы моделирования динамических систем. – 2 часа.

Литература [1, с. 173 – 187]

**Раздел 6. Математические пакеты в моделировании**

***6.1. Общий обзор***[*]

Математические пакеты. Общие характеристики пакетов Maple, MathCad, MatLab, Mathematika. Применение пакетов в моделировании. – 4 часа.

Литература [5, с. 175 – 193]

## 1.3. Перечень лабораторно-практических занятий

Перечень лабораторно-практических занятий приведен в табл. 2.



Таблица 2

| Номер занятия | Номер темы | Тематика занятия |
|---|---|---|
| 1 | 2.2 | Оптимизация целевой функции с помощью двухфазного симплекс-метода |
| 2 | 2.2 | Автоматизация простого симплекс-метода |
| 3 | 2.3 | Решение двойственных задач. Экономическая интерпретация задач линейного программирования |
| 4[*] | 2.4 | Решение транспортных задач |
| 5[*] | 3.1<br>3.2 | Построение остовного дерева. Алгоритм Дийкстры |
| 6 | 3.2 | Алгоритм Флойда |
| 7 | 3.2 | Автоматизация алгоритма Дийкстры |
| 8 | 3.2 | Автоматизация алгоритма Флойда |
| 9[*] | 3.3 | Алгоритм Форда-Фалкерсона |
| 10 | 3.3 | Обобщение задачи о максимальном потоке |
| 11 | 3.3 | Автоматизация алгоритма Форда-Фалкерсона |
| 12 | 3.4 | Алгоритм Басакера-Гоуэна |
| 13 | 3.4 | Алгоритм Клейна |
| 14 | 3.4 | Автоматизация алгоритма Басакера-Гоуэна, алгоритма Клейна |
| 15 | 3.5 | Построение сетевой модели. Календарное планирование и распределение ресурсов |
| 16 | 4.1 | Использование методов дискретного программирования при решении задач |
| 17 | 4.1 | Автоматизация методов дискретного программирования |
| 18 | 5.1 | Решение производственных задач методом динамического программирования |
| 19 | 6.1 | Простейшие вычисления в MathCad |
| 20 | 6.1 | |
| [*] Лабораторно-практические занятия для студентов безотрывной формы обучения | | |

# 2. Общие методические указания

## 2.1. Общие требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Учебным планом специальности 1-08 01 01-07 «Профессиональное обучение. (Информатика)» для студентов безотрывной формы обучения предусмотрено выполнение одной контрольной работы по дисциплине «Системный анализ и моделирование».

Выполнение домашней контрольной работы требует тщательной подготовки и изучения основной и дополнительной литературы.

Контрольная работа выполняется строго в соответствии с вариантом рукописным или печатным способом.

Контрольная работа содержит 10 вариантов теоретического и 30 вариантов практического заданий.

Вариант теоретического задания определяется последней цифрой шифра зачетной книжки.

Вариант практического задания определяется порядковым номером записи фамилии студента в учебном журнале.

В каждом варианте даны теоретическое задание (два теоретических вопроса) и практическое задание (один практический вопрос – задача).

На теоретические вопросы следует дать достаточно полные, четкие и конкретные ответы с примерами, с обязательными ссылками на литературу.

Ссылки на литературу должны быть в соответствии с порядковым номером источника в списке литературы, с указанием интервала страниц. Например: [5, с. 3 – 6], [2, с. 45 – 46, с. 48 – 50].

Практическое задание заключается в проведении анализа некоторой учебной задачи и ее решении, в подробном описании метода пошаговой детализации этой задачи со своими собственными выводами и рассуждениями. Главная цель этого задания – показать умение студента проводить анализ и проектирование задачи и способность разъяснить проводимые им действия.

## 2.2. Критерии оценки контрольной работы

Контрольная работа, представленная преподавателю на рецензирование, оценивается по следующим пунктам:



- полнота раскрытия темы;
- научность: изложение вопроса в соответствии с современными положениями и требованиями науки;
- доступность: язык изложения должен быть понятным;
- наглядность: изложение теоретического, и особенно практического материала должно сопровождаться визуальными материалами – графикой, таблицами, схемами, видеограммами;
- систематичность: изложение вопроса должно отвечать четкой логической структуре, не быть хаотичным и разрозненным;
- связь теории с практикой: любое теоретическое положение должно иметь видимую реальную основу.

Контрольная работа, выполненная в соответствии с вышеперечисленными требованиями, получает «зачет».

«Не зачет» выставляется в том случае, если теоретические вопросы раскрыты поверхностно, нет ссылок на литературу, нет примеров и выводов; практическое задание решено с грубыми ошибками.

# 3. Вопросы для самоподготовки

1. Дисциплина «Системный анализ и моделирование»: цели, задачи, применение.
2. Понятие «модель». Системный подход в моделировании.
3. Классификация моделей. Формы представления моделей.
4. Математическая модель. Классификация математических моделей.
5. Этапы моделирования.
6. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Примеры экономических задач, сводящихся к ЗЛП. Допустимые и оптимальные решения.
7. Приведение ЗЛП к канонической форме: симплекс-метод, базисные и свободные переменные, опорный план, оптимальный план. Правила заполнения симплекс-таблиц.
8. Вычислительная процедура симплекс-метода.
9. Критерии оптимальности опорного плана. Критерий бесконечности множества оптимальных планов. Критерий неограниченности целевой функции.
10. Метод искусственного базиса (двухфазный симплекс-метод).

Алгоритм.

11. Исходная задача. Двойственная задача. Взаимно двойственные задачи. Решение и составление двойственных задач.
12. Экономическая интерпретация двойственности в задачах линейного программирования.
13. Транспортная задача. Математическая постановка и экономическая интерпретация.
14. Определение исходного опорного решения методом «Северо-западного угла».
15. Определение исходного опорного решения методом «Минимального элемента».
16. Решение транспортной задачи методом потенциалов.
17. Основные понятия и определения теории графов.
18. Задача о минимальном остове и методы ее решения. Алгоритм Прима.
19. Алгоритм Дийкстры. Постановка задачи.
20. Основные понятия: сеть, исток, сток, поток, пропускная способность. Теорема Форда-Фалкерсона.
21. Задача о максимальном потоке и алгоритм Форда-Фалкерсона.
22. Обобщение задачи о максимальном потоке. Алгоритм Форда-Фалкерсона.
23. Алгоритм Флойда. Постановка задачи.
24. Алгоритм Басакера-Гоуэна. Постановка задачи.
25. Алгоритм Клейна. Постановка задачи.
26. Примеры задач дискретного программирования.
27. Методы решения задач дискретного программирования.
28. Метод динамического программирования.
29. Простейшие задачи, решаемые методом динамического программирования.

# 4. Варианты контрольной работы

## 4.1. Теоретическое задание

***Вариант 1***

1. Понятие «модель». Системный подход в моделировании.
2. Решение транспортной задачи методом потенциалов.



***Вариант 2***

1. Классификация моделей. Формы представления моделей.
2. Задача о минимальном остове и методы ее решения. Алгоритм Прима.

***Вариант 3***

1. Математическая модель. Классификация математических моделей.
2. Алгоритм Дийкстры. Постановка задачи.

***Вариант 4***

1. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Примеры экономических задач, сводящихся к ЗЛП. Допустимые и оптимальные решения.
2. Алгоритм Флойда. Постановка задачи.

***Вариант 5***

1. Этапы моделирования.
2. Алгоритм Басакера-Гоуэна. Постановка задачи.

***Вариант 6***

1. Транспортная задача. Математическая постановка и экономическая интерпретация.
2. Задача о максимальном потоке и алгоритм Форда-Фалкерсона.

***Вариант 7***

1. Основные понятия и определения теории графов.
2. Алгоритм Флойда. Постановка задачи.

***Вариант 8***

1. Основные понятия: сеть, исток, сток, поток, пропускная способность. Теорема Форда-Фалкерсона.
2. Метод динамического программирования.

***Вариант 9***

1. Методы решения задач дискретного программирования.
2. Экономическая интерпретация двойственности в задачах линейного программирования.

***Вариант 10***

1. Дисциплина «Системный анализ и моделирование». Цели, задачи, применение.

2. Алгоритм Клейна. Постановка задачи.

## 4.2 Практическое задание

*Задача.* На предприятии имеется возможность выпускать $n$ видов продукции $П_j$ $(j = \overline{1,\ n})$. При ее изготовлении используются ресурсы $P_1$, $P_2$, $P_3$. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами $b_1$, $b_2$, $b_3$. Расход ресурса $i$-го $(i = \overline{1, 3})$ вида на единицу продукции $j$-го вида составляет $a_{ij}$ единиц. Цена единицы продукции $j$-го вида равна $c_j$ ден. ед.

*Требуется:*

1) составить экономико-математическую модель задачи, пользуясь которой можно найти план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль;

2) симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли. Вскрыть экономический смысл дополнительных переменных в оптимальном плане;

3) составить модель задачи, двойственной к исходной задаче. Пользуясь теоремами двойственности по решению исходной задачи, найденному в п. 2, найти оптимальный план и экстремальную величину целевой функции двойственной задачи;

4) сформулировать в экономических терминах значения двойственных переменных и дополнительных двойственных оценок.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные по вариантам

| Параметр | Вариант | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $n$ | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 |
| $b_1$ | 20 | 150 | 280 | 1200 | 600 | 24 | 500 | 100 | 360 | 180 |
| $b_2$ | 37 | 180 | 80 | 150 | 30 | 10 | 550 | 260 | 192 | 210 |
| $b_3$ | 30 | 120 | 250 | 3000 | 144 | 6 | 200 | 370 | 180 | 244 |
| $a_{11}$ | 2 | 2 | 2 | 15 | 10 | 5 | 2 | 2,5 | 18 | 4 |
| $a_{12}$ | 2 | 3 | 1 | 20 | 20 | 7 | 1 | 2,5 | 15 | 2 |
| $a_{13}$ | 3 | 4 | 1 | 25 | 23 | 4 | 0 | 2 | 12 | 1 |



Продолжение табл. 3

| Параметр | Вариант | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $a_{14}$ | 0 | - | 1 | - | - | - | - | 1,5 | - | - |
| $a_{21}$ | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 5 | 0 | 4 | 6 | 3 |
| $a_{22}$ | 1 | 4 | 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | 10 | 4 | 1 |
| $a_{23}$ | 1 | 5 | 1 | 2,5 | 1 | 1 | 1 | 4 | 8 | 3 |
| $a_{24}$ | 2 | - | 1 | - | - | - | - | 6 | - | - |
| $a_{31}$ | 0 | 3 | 1 | 35 | 5 | 2 | 0 | 8 | 5 | 1 |
| $a_{32}$ | 1 | 4 | 2 | 60 | 6 | 1 | 1 | 7 | 3 | 2 |
| $a_{33}$ | 1 | 2 | 1 | 60 | 6 | 1 | 0 | 4 | 3 | 3 |
| $a_{34}$ | 4 | - | 0 | - | - | - | - | 10 | - | - |
| $c_1$ | 11 | 8 | 4 | 300 | 35 | 18 | 3 | 40 | 9 | 10 |
| $c_2$ | 6 | 7 | 3 | 250 | 60 | 12 | 4 | 50 | 10 | 14 |
| $c_3$ | 9 | 6 | 6 | 450 | 63 | 8 | 1 | 100 | 16 | 12 |
| $c_4$ | 6 | - | 7 | - | - | - | - | 80 | - | - |
| Параметр | Вариант | | | | | | | | | |
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $n$ | 4 | 5 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 4 | 4 | 3 |
| $b_1$ | 2 | 3 | 400 | 6000 | 12 | 1000 | 3 | 4 | 24 | 12 |
| $b_2$ | 2 | 2 | 250 | 5000 | 25 | 500 | 5 | 3 | 12 | 27 |
| $b_3$ | 2 | 2 | 200 | 9000 | 18 | 1200 | 4 | 3 | 35 | 6 |
| $a_{11}$ | 1 | 1 | 1/6 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $a_{12}$ | 1 | 1 | 3/7 | 1 | 4 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| $a_{13}$ | 0 | 1 | 1/4 | 1 | 3 | 3 | 3 | 0 | 4 | 6 |
| $a_{14}$ | 2 | 2 | - | - | - | 1 | 6 | 1 | 8 | - |
| $a_{15}$ | - | 2 | - | - | - | - | 2 | - | - | - |
| $a_{21}$ | 0 | 0 | 1/4 | 1/2 | 5 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| $a_{22}$ | 1 | 1 | 1/7 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 5 | 3 |
| $a_{23}$ | 1 | 1 | 1/4 | 5 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 9 |
| $a_{24}$ | 0 | 1 | - | - | - | 0 | 6 | 0 | 0 | - |
| $a_{25}$ | - | 2 | - | - | - | 0 | 0 | - | - | - |
| $a_{31}$ | 1 | 1 | 1/6 | 1/2 | 4 | 0 | 3 | 0 | 6 | 2 |
| $a_{32}$ | 0 | 1 | 1/7 | 1/2 | 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $a_{33}$ | 1 | 0 | 3/8 | 20 | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 | 2 |
| $a_{34}$ | 0 | 2 | - | - | - | 1 | 6 | 1 | 1 | - |
| $a_{35}$ | - | 1 | - | - | - | - | 4 | - | - | - |
| $c_1$ | 3 | 5 | 120 | 80 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0,4 | 14 |
| $c_2$ | 7 | 2 | 100 | 100 | 2 | 40 | 4 | 4 | 0,2 | 6 |
| $c_3$ | 4 | 8 | 150 | 300 | 3 | 10 | 1 | 1 | 0,5 | 22 |
| $c_4$ | 2 | 3 | - | - | - | 15 | 3 | 1 | 0,8 | - |
| $c_5$ | - | 6 | - | - | - | - | 2 | - | - | - |

Окончание табл. 3

| Пара-метр | Вариант | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| $n$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 |
| $b_1$ | 8 | 5 | 12 | 4 | 18 | 34 | 1 | 12 | 4 | 2 |
| $b_2$ | 18 | 4 | 27 | 7 | 16 | 16 | 2 | 8 | 3 | 3 |
| $b_3$ | 6 | 2 | 6 | 12 | 8 | 22 | 1 | 48 | 3 | 4 |
| $a_{11}$ | 4 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| $a_{12}$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| $a_{13}$ | 2 | 5 | 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a_{14}$ | - | - | - | - | - | 5 | - | 8 | 1 | - |
| $a_{21}$ | 6 | 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 7 | 2 | 1 |
| $a_{22}$ | 1 | 4 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| $a_{23}$ | 3 | 2 | 9 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| $a_{24}$ | - | - | - | - | - | 1 | - | 6 | 0 | - |
| $a_{31}$ | 6 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 5 | 0 | 1 |
| $a_{32}$ | 1 | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 0 | 8 | 1 | 1 |
| $a_{33}$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 3 | 4 | 4 | 1 |
| $a_{34}$ | - | - | - | - | - | 2 | - | 3 | 1 | - |
| $c_1$ | 24 | 20 | 14 | 3 | 3 | 7 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| $c_2$ | 4 | 8 | 6 | 8 | 4 | 3 | 1 | 4 | 6 | 1 |
| $c_3$ | 8 | 30 | 22 | 5 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $c_4$ | - | - | - | - | - | 2 | - | 1 | 3 | - |

# 5. Методические указания по выполнению практического задания

## 5.1. Краткие теоретические сведения

### 5.1.1. Симплексный метод. Каноническая форма

Существует универсальный способ решения задач линейного программирования, называемый *симплекс-методом*.

Идея симплекс-метода заключается в следующем: сначала надо найти некоторую (начальную) вершину многогранника допустимых решений (начальный опорный план), затем надо проверить это решение на оптимальность. Если оно оптимально, то решение найдено; если нет, то перейти к другой вершине многогранника и вновь проверить решение на оптимальность. Надо заметить, что при переходе от одной вершины к другой значение целевой функции убывает (в задаче на минимум) или возрастает (в задаче на максимум).



Для построения симплекс-метода решения задач ЛП соответствующие модели должны быть представлены в канонической форме. Говорят, что задача ЛП имеет каноническую форму, если все ограничения (кроме условий неотрицательности переменных) имеют вид строгих неравенств, а все свободные члены неотрицательны.

Пусть система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ b_i \ge 0,\ \left(i = \overline{1,\ m}\right).$$

Сведем задачу к канонической форме, добавив к левым частям системы ограничений дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$. В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+1} = 0,\ i = \overline{1,\ m}.$

$$MaxF = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ \left(i = \overline{1,\ m}\right) \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0,\ \left(j = \overline{1,\ n}\right)$$

***Пример 1.*** Представить следующую линейную модель в канонической форме:

$$\min z = 2x_1 + 3x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le -5, \\ 7x_1 - 4x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1$ не имеет ограничения в знаке, $x_2 \ge 0$.

*Решение*

1. Умножаем второе ограничение на –1 и вычитаем из его левой части избыточную переменную $s_2 \ge 0$.

2. Прибавляем остаточную переменную $s_3 \ge 0$ к левой части третьего ограничения.

3. В целевой функции и во всех ограничениях осуществляем подстановку $x_1 = x_1' - x_1''$, где $x_1', x_1'' \geq 0$.

Указанные операции позволяют привести исходную модель к каноническому виду.

$$\min z = 2x_1' - 2x_1'' + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' + x_2 = 10, \\ 2x_1' - 2x_1'' - 3x_2 - s_2 = 5, \\ 7x_1' - 7x_1'' - 4x_2 + s_3 = 6, \\ x_1',\ x_1'',\ x_2,\ x_3,\ s_2,\ s_3 \geq 0. \end{cases}$$

Если исходное ограничение определяет расход некоторого ресурса, переменную $s_3$ следует интерпретировать как остаток или неиспользованную часть данного ресурса.

### 5.1.2. Вычислительная процедура симплекс-метода

Угловая точка с неотрицательными координатами называется *опорной*, а соответствующий план – *опорным планом*.

*Опорный план* называется *невырожденным*, если он содержит ровно $m$ положительных компонентов, и *вырожденным,* если компонентов меньше $m$.

Опорный план – одна из вершин многогранника.

*Базисом* опорного плана задачи (1) будем называть систему $m$ линейно-независимых векторов из условия задачи, в которую входят все векторы, соответствующие ненулевым координатам опорного плана.

*Признак оптимальности опорного плана:* если для некоторого опорного плана все оценки строки $f$ неотрицательны, то такой план оптимален; если же исходная задача на минимум и для некоторого опорного плана все оценки строки $f$ неположительны, то такой план оптимален.

Представим задачу (1) при помощи преобразований Гаусса-Жордана в следующем виде:

$$MinF(x) = c + c_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c_n x_n,$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$



*Шаг 0.* Используя каноническую форму, определяем начальный опорный план.

$$x_0 = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

*Шаг 1.* Строим следующую симплекс-таблицу (табл. 4):

Таблица 4

Симплексная таблица

| Базисная переменная | Базисная координата | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_m$ | … | $x_k$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $b_1$ | 1 | 0 | … | 0 | … | $a_{1k}$ | … | $a_{1n}$ |
| $x_2$ | $b_2$ | 0 | 1 | … | 0 | | $a_{2k}$ | | $a_{2n}$ |
| . | . | | | | | … | . | … | . |
| . | . | | | | | | . | | . |
| $x_m$ | $b_m$ | 0 | 0 | | 1 | | $a_{mk}$ | | $a_{mn}$ |
| | $c$ | 0 | 0 | | 0 | | $-c_k$ | | $-c_m$ |

Если в полученной таблице все элементы $f$-строки $\leq 0$, то задача решена, причем min $f = c$, а $x$ оптимальное равно $x_0$. Если нет, то переходим к шагу 2.

*Шаг 2.* Переходим к выбору разрешающего элемента. В качестве разрешающего столбца берем любой столбец, содержащий положительный элемент в $f$-строке. Пусть $-c_k \geq 0$.

Находим отношение $\min\limits_{a_{ik} \geq 0} \left\{ \dfrac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \dfrac{b_{i0}}{a_{i0k}}$. Тогда строку $i_0$ объявляем *разрешающей (ведущей) строкой***.** Элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется *разрешающим элементом*.

*Шаг 3.* Строим новую таблицу, в которой базисную переменную $x_{io}$ меняем на переменную $x_k$. При помощи метода Гаусса-Жордана добиваемся, чтобы в новой таблице элементы

$a_{kk} = 0,$

$a_{ik} = 0, \forall i \in I_B, I_B$ – множество базисных индексов,

$c_k = 0$

Переходим к шагу 1.

Алгоритм конечен, так как конечно число вершин.

***Правила составления таблицы:***

1) элементы строки $i_0$ новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент;

2) все элементы столбца *к* новой таблицы равны нулю, за исключением $a'_{i0k} = 1$;

3) чтобы получить все остальные элементы (включая элементы индексной строки (*f*)) новой таблицы, надо из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент.

*Альтернативный оптимум (признак бесконечности множества оптимальных планов):* если в индексной строке последней симплексной таблицы (содержащей оптимальный план) имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной (небазисные переменные), то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

*Признак неограниченности целевой функции:* если в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция на множестве допустимых планов не ограничена.

### 5.1.3. Двойственные задачи в линейном программировании. Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной.* Первоначальная задача называется *прямой* или *исходной.* Многие задачи линейного программирования первоначально ставятся в виде исходных или двойственных задач, поэтому говорят о паре взаимодвойственных задач линейного программирования. Пара симметричных двойственных ЗЛП имеет следующий вид:

*Прямая задача*

$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max,$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,$

$\ldots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \ldots x_n \ge 0.$



*Двойственная задача*

$f = b_1y_1 + b_2y_2 \ldots + b_my_m \to \min,$

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m = c_1,$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m = c_2,$

$\ldots$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n,$

$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \ldots y_m \ge 0.$

Рассмотренная пара взаимодвойственных задач может быть экономически интерпретирована, например, так.

*Прямая задача:* сколько и какой продукции $x_j (j = \overline{1,n})$ надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции $c_j (j = \overline{1,n})$, объемах имеющихся ресурсов $b_i (i = \overline{1,m})$ и нормах расходов $a_{ij}$ максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

*Двойственная задача*: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов $y_i$ $(i = \overline{1,m})$, чтобы при заданных $b_i, c_j, a_{ij}$ минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

***Пример 2***

| *Прямая задача* | *Двойственная задача* |
|---|---|
| $\max z = 2x_1 + 7x_2,$<br>а) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | $\min f = 14y_1 + 8y_2,$<br>а) $\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| $\min z = 12x_1 + 24x_2 + 18x_3,$<br>б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$ | $\max f = 12y_1 + y_2 + 3y_3,$<br>б) $\begin{cases} y_1 + 3y_2 - 5y_3 \le 12, \\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 \le 24, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \le 18, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$ |

***Пример 3***

Пусть имеется ЗЛП в произвольной несимметричной форме. Построить ей двойственную:

$\max z = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_4 \ge -1, \\ -x_1 + 3x_3 + 2x_4 \ge 2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -5, \\ x_1 \ge 0, x_4 \ge 0, \\ x_2, x_3 - \textit{любого\_знака}. \end{cases}$$

Прежде всего, ограничения типа $\ge$ умножением на –1 сведем к ограничениям $\le$. Получим

$$\max z = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_4 \le -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_4 \le 1, \\ x_1 - 3x_3 - 2x_4 \le -2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -5, \\ x_1 \ge 0, x_4 \ge 0, \\ x_2, x_3 - \textit{любого\_знака}. \end{cases}$$

*Решение*

Для построения двойственной задачи необходимо воспользоваться следующими правилами:

1) если прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум;

2) в задаче на максимум ограничения-неравенства имеют смысл $\le$, а в задаче минимизации – смысл $\ge$;

3) каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, и наоборот, каждому ограничению двойственной задачи соответствует переменная прямой задачи;

4) матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием;

5) свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи, и наоборот;

6) если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, если же нет, то как ограничение-равенство;



7) если какое-либо ограничение прямой задачи записывается как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.

Получим следующую модель двойственной задачи для модели ЗЛП, сформулированной в примере 3:

$$\min f = -3y_1 + 4y_2 + y_3 - 2y_4 - 5y_5,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 + y_4 - 2y_5 \ge -12, \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 + y_5 = 10, \\ 2y_2 - 3y_4 = -15, \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 \ge -11, \\ y_1 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0, \\ y_2, y_5 - \textit{произвольного\_знака}. \end{cases}$$

*Основное неравенство теории двойственности:* для любых допустимых планов $x$ и $y$ пары взаимодвойственных задач справедливо неравенство $z(x) \le f(y)$. Его экономическое содержание состоит в том, что для любого допустимого (опорного) плана производства $x$ и любого допустимого (опорного) вектора оценок ресурсов $y$ общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.

*Первая теорема двойственности:* если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают: $z(x^*) = f(y^*)$. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

*Экономическое содержание первой теоремы двойственности:* если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадения значения целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти решения были оптимальными. Это значит, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, т.е. равенство общей оценки продукции и ресурсов обусловливает убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставлять и балансировать затраты и результаты системы.

Решая симплексным методом одну из задач, автоматически получаем решение другой. Для этого достаточно воспользоваться соответствием переменных прямой и двойственной задач и оценок в последней симплексной таблице.

| | |
|---|---|
| $x_1 \quad x_2 \quad \ldots x_j \quad \ldots x_n$ | $x_{n+1} \quad x_{n+2} \quad \ldots x_{n+i} \quad \ldots x_{n+m}$ |
| $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \ldots \updownarrow \quad \ldots \updownarrow$ | $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \ldots \updownarrow \quad \ldots \updownarrow$ |
| $y_{m+1} \quad y_{m+2} \quad y_{m+j} \quad y_{m+n}$ | $y_1 \quad y_2 \quad y_i \quad y_m$ |
| $\Delta_1^* \; \Delta_2^* \ldots \Delta_j^* \ldots \Delta_n^*$ | $\Delta_{n+1}^* \; \Delta_{n+2}^* \ldots \Delta_{n+i}^* \ldots \Delta_{n+m}^*$ |

Отсюда имеем оптимальный план двойственной задачи. Если прямая задача решается на максимум, то

$$y_1^* = \Delta_{n+1}^*, \; y_2^* = \Delta_{n+2}^*, \ldots, \; y_i^* = \Delta_{n+i}^*, \ldots, \; y_m^* = \Delta_{n+m}^*,$$

$$y_{m+1}^* = \Delta_1^*, \; y_{m+2}^* = \Delta_2^*, \ldots, \; y_{m+j}^* = \Delta_j^*, \ldots, \; y_{m+n}^* = \Delta_n^*.$$

Если прямая задача решается на минимум, то

$$y_i^* = -\Delta_{n+i}^* (i = 1 \ldots m), \; y_{m+j}^* = -\Delta_j^* (j = 1 \ldots n).$$

## 5.2. Пример выполнения практического задания

***Задача.*** Предприятие может выпускать продукцию *П*1, *П*2, *П*3, *П*4. При ее изготовлении используются ресурсы $P_1$, $P_2$, $P_3$, объемы допустимых затрат которых ограничены соответственно величинами 2400, 1200, 3000 единиц. Расход ресурса $P_1$ на единицу продукции *П*1, *П*2, *П*3, *П*4 равен соответственно 2; 1; 0,5; 4, ресурса $P_2$ соответственно – 1; 5; 3; 0, ресурса $P_3$ соответственно – 3; 0; 6; 1. Цена реализации единицы продукции *П*1, *П*2, *П*3, *П*4 соответственно равна 75; 30; 60; 120.

*Требуется:*

1) определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, доставляющий предприятию максимум выручки;

2) составить модель двойственной задачи. Используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, выписать оптимальное решение двойственной задачи. Дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных двойственных переменных прямой и двойственной задач.



*Решение.*

1. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – план выпуска продукции соответственно *П*1, *П*2, *П*3, *П*4; *Z* – сумма выручки от реализации готовой продукции. Запишем суммарную величину прибыли (целевую функцию) в следующем виде:

$$Z = 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4. \qquad (2)$$

Переменные $x_1, x_2, x_3, x_4$ должны удовлетворять ограничениям, накладываемым на расход имеющихся в распоряжении предприятия ресурсов. Так, затраты ресурса $P_1$ на выполнение плана $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ составят $2x_1 + 1x_2 + 0{,}5x_3 + 4x_4$, где $2x_1$ – затраты ресурса $P_1$ на выпуск $x_1$ единицы продукции *П*1; $1x_2$ – затраты ресурса $P_1$ на выпуск $x_2$ единицы продукции *П*2 и т.д. Понятно, что указанная сумма не может превышать имеющийся запас $P_1$ в 2400 единиц, т.е.

$$2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 4x_4 \le 2400. \qquad (3)$$

Аналогично получаем ограничения по расходу ресурсов $P_2$ и $P_3$:

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 1200, \qquad (4)$$

$$3x_1 + 6x_3 + x_4 \le 3000. \qquad (5)$$

По смыслу задачи переменные $x_1, x_2, x_3, x_4$ не могут выражаться отрицательными числам, т.е.

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge, \; x_4 \ge 0. \qquad (6)$$

Выражения (2) – (6) составляют математическую модель задачи:

$$\max Z = 75x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 120x_4,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 + 4x_4 \le 2400, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 1200, \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 \le 3000, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Решение задачи симплексным методом представлено в табл. 5.

Так как все оценки *Z*-строки в последней части симплексной табл. 5 неотрицательны, то найденный опорный план оптимален:

$X^*$ = (0; 0; 400; 550; 0; 0; 50) = 90000.

Т а б л и ц а 5

| Базисная переменная | Базисная координата | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | 2400 | 2 | 1 | 1/2 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| $x_6$ | 1200 | 1 | 5 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_7$ | 3000 | 3 | 0 | 6 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $Z$ | 0 | -75 | -30 | -60 | -120 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 600 | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1 | 1/4 | 0 | 0 |
| $x_6$ | 1200 | 1 | 5 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_7$ | 2400 | 5/2 | -1/4 | 47/8 | 0 | -1/4 | 0 | 1 |
| $Z$ | 7200 | -15 | 0 | -45 | 0 | 30 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 550 | 11/24 | 1/24 | 0 | 1 | 1/4 | -1/24 | 0 |
| $x_3$ | 400 | 1/3 | 5/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 0 |
| $x_7$ | 50 | 13/24 | -241/24 | 0 | 0 | -1/4 | -47/24 | 1 |
| $Z$ | 9000 | 0 | 75 | 0 | 0 | 30 | 15 | 0 |
| | | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |

Основные переменные $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 400$, $x_4^* = 550$ показывают, что продукцию первого и второго вида выпускать нецелесообразно, продукции третьего вида следует выпустить 400 ед., четвертого – 550 ед. При этом, так как $x_5^* = x_6^* = 0$, первый и второй ресурсы используются полностью, а третьего остается в избытке 50 ед. $\left(x_7^* = 50\right)$.

2. Модель двойственной задачи имеет следующий вид:

$$\min F = 2400y_1 + 1200y_2 + 3000y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 75, \\ y_1 + 5y_2 \ge 30, \\ 0.5y_1 + 3y_2 + 6y_3 \ge 60, \\ 4y_1 + y_3 \ge 120, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Ее решение выпишем из последней строки табл. 5, используя соответствие переменных:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Имеем, $Y^* = (30;15;0 \mid 0;75;0;0)$, $F(Y^*) = 90000$.

Двойственные переменные показывают меру дефицитности



ресурсов, они численно равны изменению целевой функции при изменении соответствующего ресурса на единицу. Следовательно, увеличение первого ресурса на единицу ведет к увеличению объема реализации на $y_1 = 30$, второго – на $y_2 = 15$. Третий ресурс избыточен, поэтому его увеличение ни к чему не приведет, т.е. значение функции останется прежним, $y_3 = 0$.

Дополнительные двойственные переменные являются мерой убыточности продукции, которую, согласно оптимальному плану, нецелесообразно выпускать. Следовательно, $y_5 = 75$ говорит о том, что стоимость ресурсов, расходуемых на единицу производства продукции второго вида (в оптимальных оценках), превосходит стоимость единицы этой продукции $\left(c_2 = 30\right)$ на $y_5^* = 75$. В самом деле,

$$a_{12}y_1^* + a_{22}y_2^* + a_{32}y_3^* = 1 \cdot 30 + 5 \cdot 15 + 0 \cdot 0 = 105$$

105 – 30 = 75.

Поэтому, если все же продукцию $П_2$ выпускать, то она будет снижать достигнутый уровень прибыли на $y_5^* = 75$.

## Рекомендуемая литература


***Основная***

1. *Вентцель, Е. С.* Исследование операций : задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
2. *Кузнецов, А. В.* Сборник задач и упражнений по высшей математике / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн. : Выш. шк., 1995.
3. *Сакович, В. А*. Исследование операций / В. А. Сакович. – Мн. : Выш. шк., 1985.
4. *Таха, Х.* Введение в исследование операций : в 2 кн. Кн. 1 / Х. Таха. – М. : Мир, 1985.

***Дополнительная***

5. *Кузнецов, А. В*. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Мн. : Выш. шк., 1984.
6. Экстремальные задачи теории графов : метод. пособие / сост. Ю. В. Лысенко и др. – Мн. : БГУ, 2000.
7. *Самарский, А. А*. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1997.




## Содержание