

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

В. Г. Басов

***ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА
ИХ ОБРАБОТКИ***

В 3-х частях

Часть 1

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования по специальности
«Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей»*

Минск БГУИР 2013

УДК 621.391(076)
ББК 32.811.3я73
Б27

Рецензенты:

кафедра связи учреждения образования «Военная академия
Республики Беларусь» (протокол №17 от 28.03.2011);

доцент кафедры ядерной физики Белорусского государственного университета,
кандидат технических наук, доцент М. В. Комар;

доцент кафедры радиотехнических устройств учреждения образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»,
кандидат физико-математических наук, доцент В. Т. Першин

Басов, В. Г.

Б27 Измерительные сигналы и функциональные устройства их обработки :
учеб.-метод. пособие. В 3 ч. Ч. 1 : Измерительные сигналы / В. Г. Басов. –
Минск : БГУИР, 2013. – 119 с. : ил.
ISBN 978-985-488-759-3 (ч.1).

В первой части пособия рассматриваются детерминированные и случайные измерительные сигналы, классификация и представление их во временной и частотных областях, а также корреляционный анализ. Пособие содержит анализ передачи измерительных сигналов с применением дискретизации и рассматривает условия прохождения их через линейные цепи.

**УДК 621.391(076)
ББК 32.811.3я73**

**ISBN 978-985-488-759-3 (ч.1)
ISBN 978-985-488-758-6**

© Басов В. Г., 2013
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2013

Содержание

Введение.....	6
1 Измерительные сигналы.....	11
1.1 Классификация измерительных сигналов и сигналов помех.....	11
1.1.1 Классификация электрических ИС.....	11
1.1.2 Классификация сигналов-помех.....	16
1.2 Математическое описание детерминированных измерительных видеосигналов.....	17
1.2.1 Сигналы и их математические модели.....	17
1.2.2 Функция включения.....	19
1.2.3 Дельта-функция.....	21
1.2.4 Постоянная и переменная часть сигнала.....	23
1.2.5 Геометрические методы в теории сигналов.....	25
1.2.6 Энергия и мощность сигнала.....	26
1.2.7 Ортогональные сигналы.....	28
1.2.8 Погрешность представления сигнала рядом Фурье.....	30
1.2.9 Спектральное разложение ИС в тригонометрический ряд Фурье...	31
1.2.10 Ряд Фурье в комплексной форме.....	34
1.2.11 Энергетический спектр и спектр мощности периодического сигнала.....	35
1.2.12 Интегральные значения периодических сигналов.....	36
1.2.13 Гармонический сигнал и его параметры.....	37
1.2.14 Спектральное представление непериодических сигналов.....	39
1.2.15 Связь между спектральной плотностью и амплитудой гармоник	41
1.2.16 Соотношение между длительностью сигнала и шириной спектра.....	42
1.2.17 Спектральный анализ сигналов по Лапласу.....	43
1.2.18 Свойства преобразований Фурье и Лапласа (теоремы о спектрах сигналов).....	44
1.2.19 Структурные схемы устройств для анализа спектра и синтеза сигналов.....	46
1.3 Корреляционный анализ детерминированных измерительных сигналов.....	47
1.3.1 ВКФ сигнала и ее свойства.....	47
1.3.2 АКФ сигнала и ее свойства.....	48
1.3.3 Примеры АКФ.....	50
1.3.3.1 АКФ для сигналов конечной длительности	50
1.3.3.2 АКФ периодических сигналов.....	50
1.3.3.3 АКФ неограниченно протяжённых сигналов.....	51
1.3.3.4 АКФ дискретного во времени сигнала.....	52
1.3.4 Обобщённая структурная схема коррелометра.....	53

1.4	Математическое описание детерминированных измерительных радиосигналов.....	53
1.4.1	Необходимость преобразования видеосигналов в радиосигналы....	53
1.4.2	Временные и спектральные характеристики однотонового АМ- радиосигнала.....	54
1.4.3	Энергетические свойства АМ-сигнала	57
1.4.4	Импульсные АМ-сигналы и их АКФ.....	59
1.4.5	Временные и спектральные характеристики однотонового радиосигнала с УМ	60
1.4.6	Векторная диаграмма однотонового ЧМ-сигнала и различие между ЧМ- и ФМ-сигналами	63
1.4.7	Сравнительная оценка радиосигналов с АМ и УМ	65
1.4.8	Манипулированный сигнал с УМ	66
1.4.9	Радиосигнал с внутриимпульсной ЛЧМ и его АКФ	66
1.4.10	Математическая модель представления узкополосных сигналов	67
1.4.11	Реализация сигналов, сопряжённых по Гильберту	69
1.4.12	Аналитический сигнал.....	70
1.5	Математическое описание случайных измерительных сигналов...	71
1.5.1	Измерительный сигнал как случайный процесс и его классификация.....	71
1.5.2	Статистические характеристики случайного сигнала и их свойства	72
1.5.3	Числовые характеристики СП.....	75
1.5.4	Эффективная ширина спектральной плотности и интервал корреляции.....	78
1.5.5	Примеры случайных сигналов.....	80
1.5.5.1	Случайный сигнал с нормальным законом распределения	80
1.5.5.2	Случайный «клиппированный» сигнал.....	81
1.6	Передача измерительных сигналов.....	81
1.6.1	Назначение дискретизации и ее классификация.....	81
1.6.2	Восстановление исходного сигнала. Теорема Котельникова.....	83
1.6.3	Дискретизация исходного ИС и преобразование его временной функции и спектра. Понятие числа степеней свободы сигнала.....	84
1.6.4	Погрешности восстановления исходного ИС.....	88
1.6.5	Дискретизация узкополосных сигналов (радиосигналов с АМ и ЧМ) и спектров сигналов.....	89
1.6.6	Преобразование дискретного сигнала в амплитудно-модулированный	91
1.6.7	Равномерное и неравномерное квантование ИС.....	91
1.6.8	Информационный объём ИС.....	93
1.6.9	Числовые характеристики для описания передачи ИС.....	95
1.6.9.1	Абсолютные уровни напряжения и мощности.....	96
1.6.9.2	Критерии качества передачи ИС.....	97

1.7	Испытательные и калибровочные измерительные сигналы.....	99
2	Прохождение измерительных сигналов через радиоэлектронные цепи.....	102
2.1	Классификация радиоэлектронных цепей.....	102
2.2	Физические цепи (системы) и их математическая модель.....	104
2.3	Анализ прохождения измерительных сигналов через линейные цепи.....	105
2.3.1	Методы анализа прохождения детерминированных ИС через линейные цепи (ЛЦ) с постоянными параметрами.....	105
2.3.1.1	Классический (метод дифференциальных уравнений).....	105
2.3.1.2	Временной (метод интеграла Дюамеля)	106
2.3.1.3	Спектральный (частотный метод)	107
2.3.1.4	Операторный (метод преобразований Лапласа).....	108
2.3.2	Прохождение детерминированных сигналов через апериодические цепи, дифференцирование и интегрирование сигналов.....	109
2.3.2.9	Дифференцирование и интегрирование сигналов.....	109
2.3.2.2	Прохождение прямоугольного импульса через дифференцирующую и интегрирующую RC-цепи.....	111
2.3.2.3	Прохождение радиосигналов через избирательные узкополосные цепи.....	113
2.3.2.4	Прохождение АМ-сигнала через узкополосную резонансную цепь (метод огибающей)	114
2.3.2.5	Метод «мгновенной» частоты	116
2.3.2.6	Приближённый спектральный метод	118
	Литература	119

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении всей истории развития человеческого обществу приходится сталкиваться с измерениями различных физических величин: длины, температуры, давления, напряжения электрического тока, веса и т. д.

Согласно РГМ 29-99, измерение – совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

В процессе измерения определяют физическую величину – одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них. Полученные сведения о значениях физических величин образуют измерительную информацию.

Развитие промышленного производства и научных исследований поставило задачу передачи измерительной информации, полученной в процессе измерений тех или иных физических процессов, на значительные расстояния. Для этих целей наиболее эффективным является преобразование полученной с помощью специальных преобразователей измерительной информации о различных значениях физических величин в измерительный электрический сигнал.

Измерительный сигнал – сигнал, содержащий количественную информацию об измеряемой физической величине. Измерительный электрический сигнал (ИЭС) имеет существенные преимущества перед другими носителями информации в том, что он позволяет:

- передавать измерительную информацию на большие расстояния;
- измерять быстро и медленно протекающие процессы;
- осуществлять сложную обработку измерительной информации при воздействии внешних (температуры, давления и т. д.) и внутренних (нестабильность источника питания, шумов электронных приборов и т. д.) помех;
- применять специальные электрические устройства (коммутаторы, модуляторы и т. д.) для построения многоканальных измерительных систем для передачи информации о различных физических процессах;
- запоминать и записывать информацию на длительное время с помощью специальных устройств памяти и записи измерительной информации для дальнейшей ее обработки и применения.

Использование ЭИС в измерительной технике позволило строить сложные измерительные системы, которые представляют собой совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей, ЭВМ, программных и других технических средств, размещенных в разных точках контролируемого объекта с целью измерений одной или

нескольких физических величин, свойственных этому объекту, и выработки измерительных сигналов для применения в различных целях.

Измерительные системы являются составной частью информационно-измерительных систем (ИИС), которые представляют собой совокупность функционально объединенных измерительных, вычислительных и вспомогательных технических средств, предназначенных для получения измерительной информации, ее преобразования и обработки с целью представления потребителю, управления и классификации (контроль, диагностика, обнаружение, распознавания и др.).

В настоящее время ИИС широко применяются в различных отраслях промышленности, науке и технике: в гидролокации, медицине (УЗИ, томография и т. д.), машиностроении (системы неразрушающего контроля), метеорологии, в создании космической техники, атомной промышленности и т. д.

Как видно из определения измерительных систем и ИИС, последние содержат различные функциональные блоки, осуществляющие те или иные преобразования, которыми могут быть усиление, модуляция и демодуляция, генерация электрических сигналов и т. д.

В измерительной технике используются следующие термины и определения:

Средство измерений (СИ) – техническое средство (или их комплекс), предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики.

Измерительный прибор (ИП) – средство измерений, предназначенное для получения значений измеряемой физической величины.

Функциональное измерительное устройство (ФИУ) – часть средства измерения (прибора), имеющее обособленное назначение и выполняющее определенную функцию.

Измерительная цепь (ИЦ) – совокупность элементов измерительного прибора, образующих непрерывный путь прохождения измерительного сигнала одной физической величины от входа до выхода.

Измерительный канал (ИК) – ИЦ измерительной системы.

Измерительная информационная система (ИИС) – совокупность функционально объединенных измерительных приборов.

Измерительная информация (ИИ) – информация о значениях физических величин.

Измерительный сигнал (ИС) – сигнал, содержащий количественную информацию об измеряемой физической величине.

СИ – необходимые составляющие любого производства и научных исследований.

В промышленности СИ используются для контроля и регулирования практически всех физических величин (механических, акустических, оптических, электрических, магнитных, тепловых, ионизирующих излучений и др.), которые характеризуют параметры различных технологических процессов, свойства и качество материалов, полуфабрикатов и готовых изделий.

В научных исследованиях СИ практически определяют предельные возможности изучения и выявления свойств исследуемых физических объектов, включая человека. От метрологических характеристик СИ во многом зависят возможности осуществления научных открытий.

Обобщённая структурная схема СИ показана на рисунке В.1 и содержит:

- блок измерительного преобразователя – преобразует входной ИС в пропорциональный ему электрический ИС X_1 (этот блок может отсутствовать);
- блок масштабирования – усиливает или ослабляет сигнал X_1 в m раз;
- блок выделения измеряемого параметра – выделяет информативный параметр сигнала P ;
- блок индикации параметра прямого действия – осуществляет показания полученного значения измеряемой величины;
- блок сравнения – сравнивает параметр измеряемой величины с изменяемым значением многозначной меры с точностью до Q ;
- блок управления – осуществляет управление изменением значения величины меры по результату сравнения с параметром измеряемой величины;
- блок многозначной меры – служит для воспроизведения разных значений физической величины измеряемого параметра;
- блок индикации параметра сравнения – осуществляет показания значения величины меры X_M , полученное путём сравнения значения меры со значением величины измеряемого параметра.

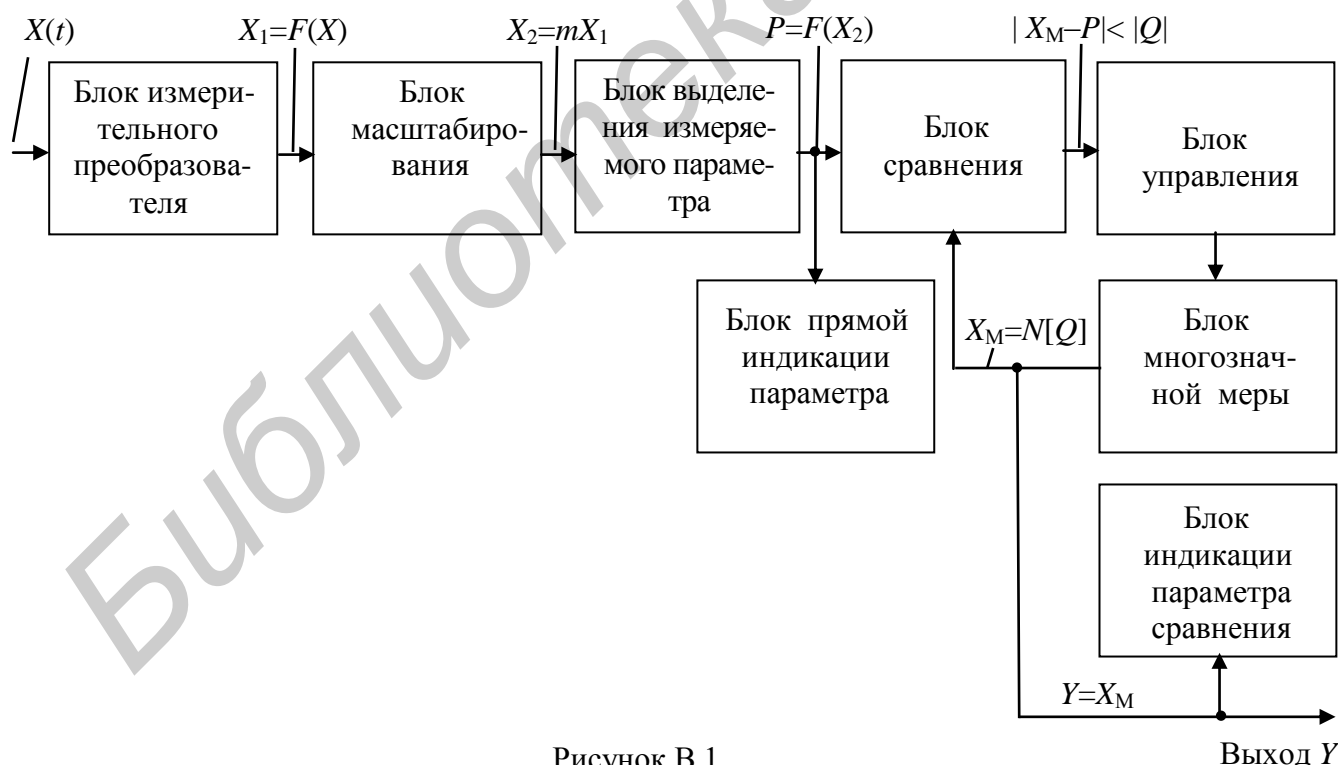


Рисунок В.1

Сигналом называется материальный носитель информации, представляющий собой некоторый физический процесс (акустическое колебание, излучение света, электрическое напряжение или ток и т. д.), один из параметров кото-

рого функционально связан с измеряемой физической величиной. Такой параметр называется **информативным**.

Информация – сведения об окружающем нас мире.

Сообщение – совокупность знаков (символов), содержащих ту или иную информацию.

Различают **неэлектрические, электрические и комбинированные** (например **электроакустические** и **магнитоакустические**) ИС.

Большинство процессов, протекающих в природе, характеризуется непрерывным изменением физических величин неэлектрической природы и, следовательно, является источником **аналоговых (континуальных) неэлектрических** ИС. Для обработки ИС при передаче, регистрации, хранении и т. д. наиболее удобно их использовать в электрическом виде. Поэтому ИС неэлектрической природы преобразуют с помощью разнообразных преобразователей (датчиков), например, микрофон, фотоэлемент в ИС в виде тока или напряжения, который называется **электрическим ИС**.

Электрические ИС, полученные с датчика информации, называют **первичными**, или **видеосигналами**, и они, как правило, могут передаваться только по проводным линиям связи. Для передачи на большие расстояния без проводников (например при телеметрии) видеосигнал преобразуют в **радиосигнал** (материальный носитель – электромагнитные волны). Радиосигналы представляют собой модулированные высокочастотные **сигналы-переносчики (несущие сигналы)**.

По характеру изменения **информативного** параметра во времени электрические ИС могут быть аналоговыми, дискретными и цифровыми. Соответственно, функциональные устройств для обработки перечисленных ИС бывают **аналоговыми, дискретными и цифровыми**.

К **функциональным** относятся устройства, которые осуществляют непосредственную функциональную обработку входных ИС, и их выходные ИС (показания) являются результатом этой обработки.

Аналоговые – устройства, которые осуществляют обработку аналоговых ИС с использованием методов аналоговой функциональной обработки, и на их выходе ИС (показания) являются непрерывными функциями изменений измеряемых величин.

Дискретные – аналоговые устройства, которые могут производить обработку дискретных сигналов по алгоритмам, аналогичным цифровым.

Цифровые – устройства, которые способны преобразовывать аналоговые ИС в цифровые ИС и (или) наоборот, обрабатывать ИС цифровыми методами, представлять выходной ИС (показания) в цифровом, дискретном или аналоговом виде.

В электрорадиоизмерительных СИ электрические ИС подвергаются необходимой обработке, например усилению, модуляции, демодуляции, преобразованию и умножению частоты), которая осуществляется с помощью различных функциональных устройств. Роль этих устройств весьма важна, так как они в значительной степени определяют метрологические характеристики СИ.

Обобщённая структурная схема функционального устройства обработки ИС показана на рисунке В.2. ИС $X(t)$ от источника сигнала через входную цепь связи проходит каскады первичного $F_1(X)$, промежуточного $F_2(X_1)$ и конечного $F_3(X_2)$ преобразования. Затем обработанный сигнал $Y(t)$ передаётся через выходную цепь связи в нагрузку (другое устройство).

В данном учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с теорией электрических измерительных сигналов, способами их передачи и обработки различными функциональными устройствами.

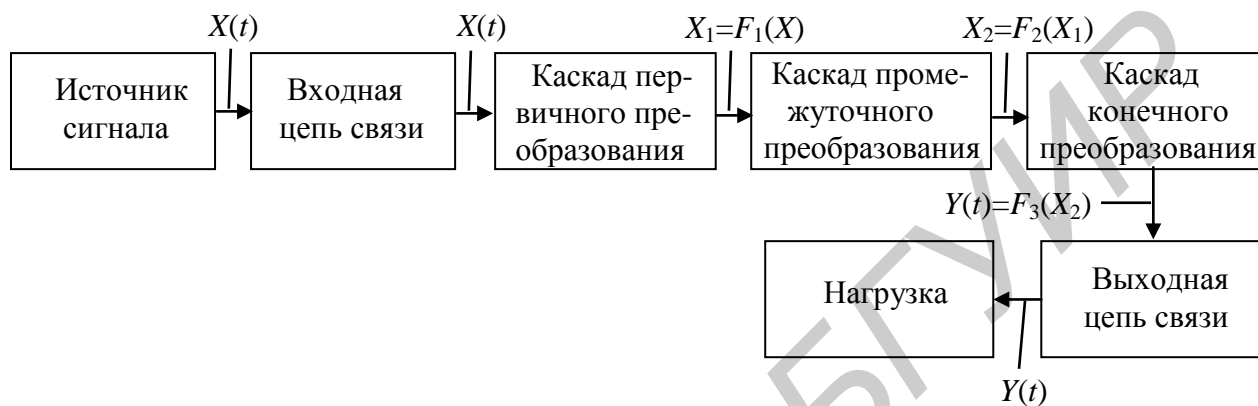


Рисунок В.2

1 ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ

Основные понятия, термины и определения в области измерительных сигналов (ИС) устанавливает ГОСТ 15465-70 «Сигналы радиотехнические. Термины и определения». ИС чрезвычайно разнообразны и широко используются в производстве, научных исследованиях, информационно-измерительных и телекоммуникационных системах.

1.1 Классификация измерительных сигналов и сигналов помех

1.1.1 Классификация электрических измерительных сигналов

Основную классификацию ИС по различным признакам можно представить в виде следующей иерархической структуры (рисунок 1.1).

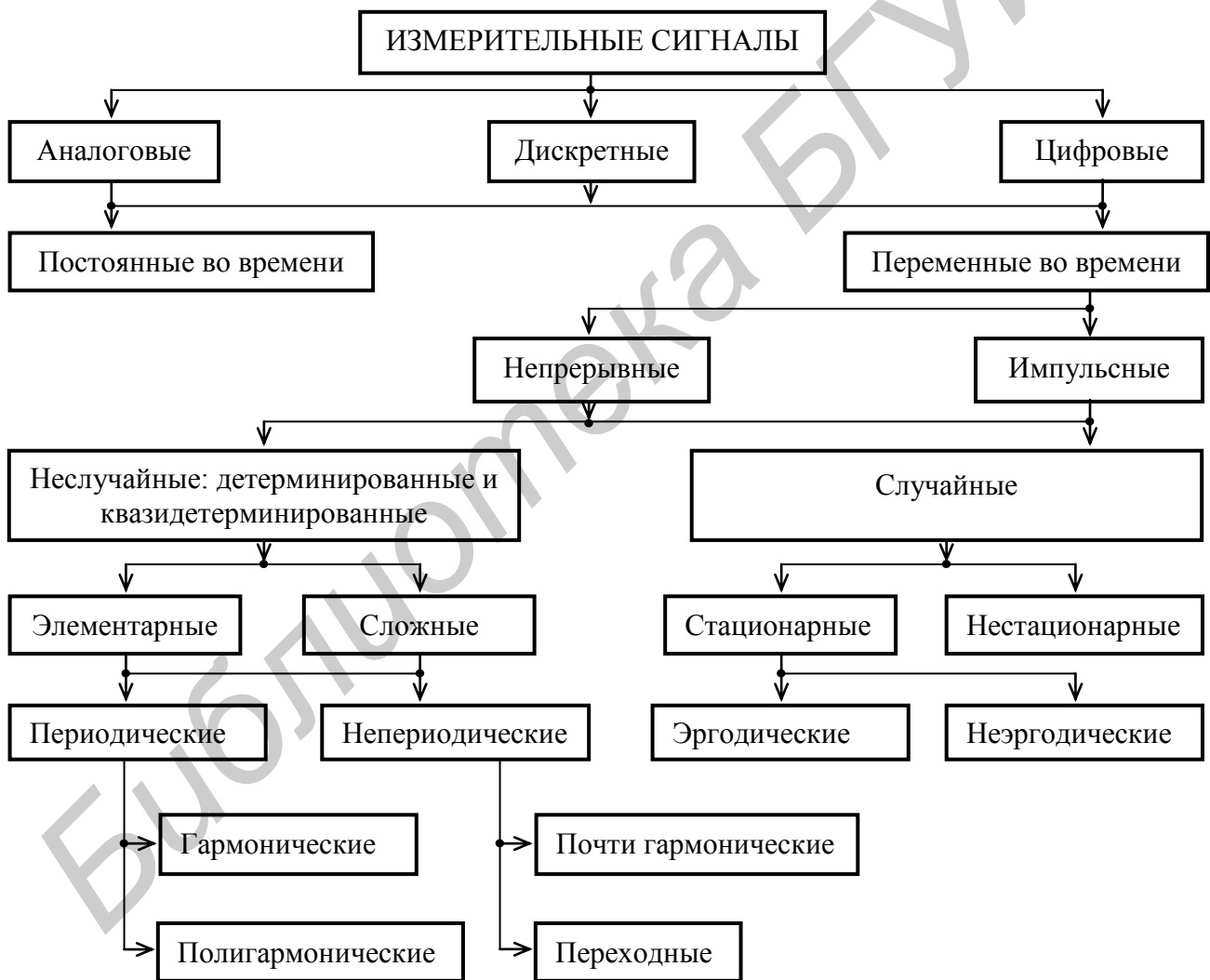


Рисунок 1.1

По характеру изменения информативного параметра во времени ИС делятся на **аналоговые, дискретные и цифровые**.

Аналоговый (континуальный) сигнал – это сигнал, описываемый непрерывной или кусочно-непрерывной функцией $S_a(t)$, причём как сама эта функция, так и её аргумент t могут принимать любые значения на заданных интервалах $S \in (S_{\min}; S_{\max})$ и $t \in (t_{\min}; t_{\max})$ (рисунок 1.2, а).

Дискретный сигнал (аналогово-импульсный) ИС – это сигнал $S_d(t)$, изменяющийся дискретно (рисунок 1.2, б, в) по уровню $S_{д\у}(t)$ и / или во времени $S_{дв}(t)$.

Когда значения сигнала $S_d(t)$ существуют в любой момент времени $t \in (t_{\min}; t_{\max})$ и он принимает любые фиксированные уровни S_i , его называют **дискретным по уровню** $S_{д\у}(t)$ (рисунок 1.2, б). В случае когда уровни $S_d(t)$ принимают ряд значений $S_i = nq$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), кратных кванту q (рисунок 1.2, в), он является **квантованным** $S_k(t)$.

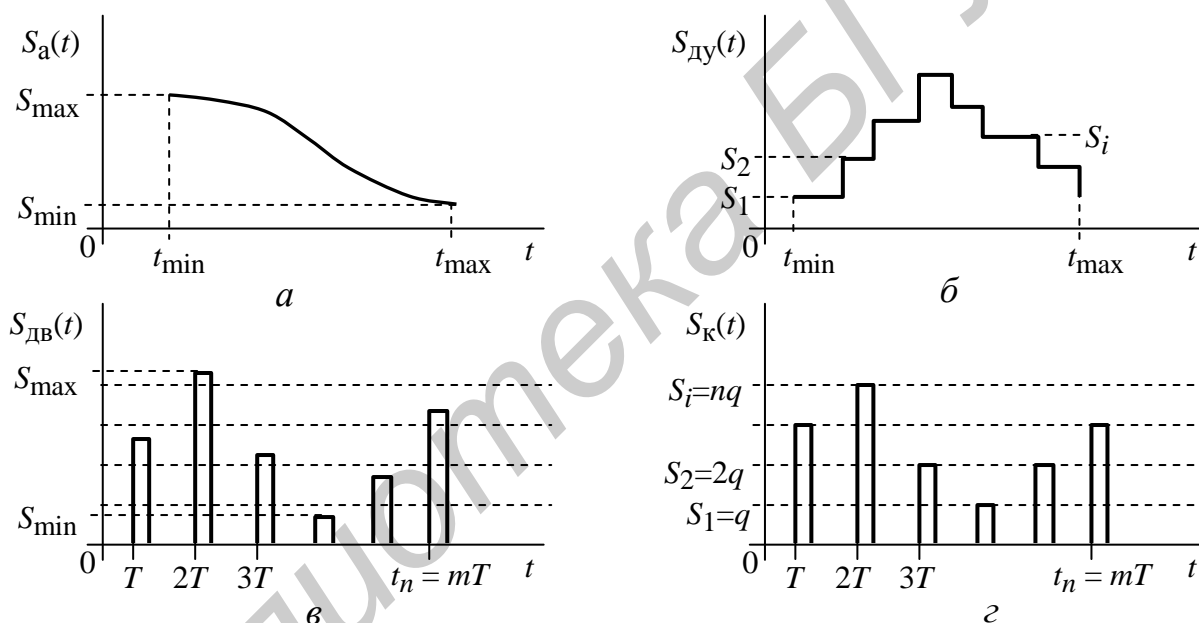


Рисунок 1.2

СИ будет **дискретным во времени** – когда он может принимать в любые дискретные моменты времени t_m любые значения $S_{дв}(t_m) \in (S_{\min}; S_{\max})$, называемые выборками, или отсчётами (рисунок 1.2, в). Если величина $t_m = mT$ и $T = \text{const}$, то T называется интервалом (периодом) **дискретизации**.

Цифровой ИС – сигнал, дискретный во времени $S_{ц}(nT)$ и квантованный по уровню, принимаемые значения квантованных уровней которого (рисунок 1.4, в) являются, например, последовательностью логических уровней, представляющих код числового значения в двоичной системе счисления.

Цифровой ИС является сигналом с **кодированной импульсной** модуляцией (КИМ).

По характеру изменения во времени ИС делятся на **постоянные**, значения которых с течением времени не изменяются, и **переменные**, значения которых меняются во времени. Постоянные ИС являются наиболее простым видом.

Переменные ИС могут быть **непрерывными** во времени и **импульсными**.

Непрерывным называется сигнал, параметры которого изменяются непрерывно.

Импульсный ИС – это сигнал конечной энергии, существенно отличный от нуля в течение ограниченного интервала времени, соизмеримого с временем завершения переходного процесса в системе, для воздействия на которую он предназначен.

По степени наличия априорной информации переменные ИС делятся на **детерминированные**, **квазидетерминированные** и **случайные**.

Детерминированный ИС – это сигнал, закон изменения мгновенных значений которого известен с вероятностью 1 в любой момент времени. Детерминированными (с известной степенью точности) являются сигналы на выходе мер. Например ИС на выходе устройств калибровки осциллографа.

Квазидетерминированные ИС – это сигналы с частично известным характером изменения во времени, т. е. с одним или несколькими неизвестными параметрами. Они наиболее интересны с точки зрения метрологии (подавляющее большинство ИС являются квазидетерминированными).

Случайный ИС – это изменяющаяся во времени физическая величина, мгновенное значение которой является случайной величиной. Он бывает **стационарным** – статистические характеристики которого не изменяются во времени и **нестационарным** – когда они зависят от времени.

Стационарные ИС бывают **эргодическими** и **неэргодическими**.

Эргодическими называются ИС, вероятностные характеристики которых можно определить по одной из любых его реализаций $S_k(t)$, производя усреднение по всему интервалу времени.

Детерминированные и квазидетерминированные сигналы делятся на **элементарные**, описываемые простейшими математическими формулами, и **сложные**. К **элементарным** относятся **постоянный** и **гармонический** сигналы, а также сигналы, описываемые **дельта-функцией** (**единичный импульс**) и **функцией Хевисайда** (**импульс единичного скачка**).

К **сложным** ИС относятся **импульсные** и **модулированные** сигналы.

Элементарные и сложные ИС могут быть **периодическими** и **непериодическими**.

Периодическим называется ИС, мгновенные значения которого повторяются через постоянный наименьший интервал времени T – период сигнала. Величина, обратная периоду $f = 1 / T$, – циклическая частота сигнала.

Периодические ИС бывают **гармоническими**, т. е. содержащими только одну гармонику, и **полигармоническими** (негармоническими), которые состоят из множества гармонических составляющих. К гармоническим ИС относятся

сигналы, описываемые только **функцией синуса** или **косинуса**. Все остальные сигналы являются полигармоническими.

Непериодические ИС делятся на **почти периодические** и **переходные (одионые)**.

Почти периодическим ИС называется сигнал, значения которого приближенно повторяются при добавлении к временному аргументу надлежащим образом выбранного числа T – почти периода. Периодический сигнал является частным случаем таких сигналов. Почти периодические функции получаются в результате сложения периодических функций с некратными периодами.

Переходные (одионые) ИС характеризуются переходными процессами в физических системах.

По диапазону частот, занимаемому спектром ИС, (т. е. по ширине спектра Δf_c) ИС бывают – **узкополосные** и **широкополосные**. К **узкополосным** относят ИС, ширина спектра которых (Δf_c) много меньше его средней частоты f_0 , а к **широкополосным** – когда параметры Δf_c и f_0 соизмеримы.

В зависимости от значения средней частоты f_0 спектра ИС условно делятся на низкочастотные (НЧ) высокочастотные (ВЧ) и сверхвысокочастотные (СВЧ).

По назначению ИС, использующиеся для испытаний и калибровки СИ, соответственно называются **испытательными** (тестовыми) и **калибровочными** сигналами.

По типу модуляции информативного параметра сигнала-переносчика для аналогового гармонического (рисунок 1.3, а) сигнала-переносчика (несущего сигнала) ИС бывают с **амплитудной** (АМ), **угловой** (УМ), **частотной** (ЧМ) или **фазовой** (ФМ) модуляцией. У них пропорционально изменению модулирующего сигнала (рисунок 1.3, б) изменяется его амплитуда (рисунок 1.3, в), частота или фаза (рисунок 1.3, г). Так как в ЧМ-сигнале при изменении частоты также изменяется фаза (по закону интеграла от частоты), ЧМ- и ФМ-сигналы относят к сигналам с УМ.

Для несущего аналогово-импульсного сигнала (рисунок 1.3, д) ИС бывают: с **амплитудно-импульсной** (АИМ) (рисунок 1.3, е); **широотно-импульсной** (ШИМ или ДИМ) (рисунок 1.3, ж), **частотно-импульсной** (ЧИМ) и **фазо-импульсной** (ФИМ) (рисунок 1.3, з) модуляцией. Эти ИС представляют собой, как правило, импульсы прямоугольной формы, у которых пропорционально изменению модулирующего сигнала изменяется амплитуда (АИМ), длительность (ДИМ или ШИМ), частота следования (ЧИМ) или фаза (ФИМ). Максимальное смещение импульсов (временная девиация) у ФИМ ИС и максимальное отклонение частоты импульсов (девиация частоты) у ЧИМ ИС пропорциональны амплитуде модулирующего сигнала и, соответственно, для ФИМ не зависит от его частоты, а для ЧИМ обратно пропорционально его частоте. ЧИМ- и ФИМ-сигналы имеют временное смещение импульсов и поэтому относятся к временной импульсной модуляции (ВИМ).

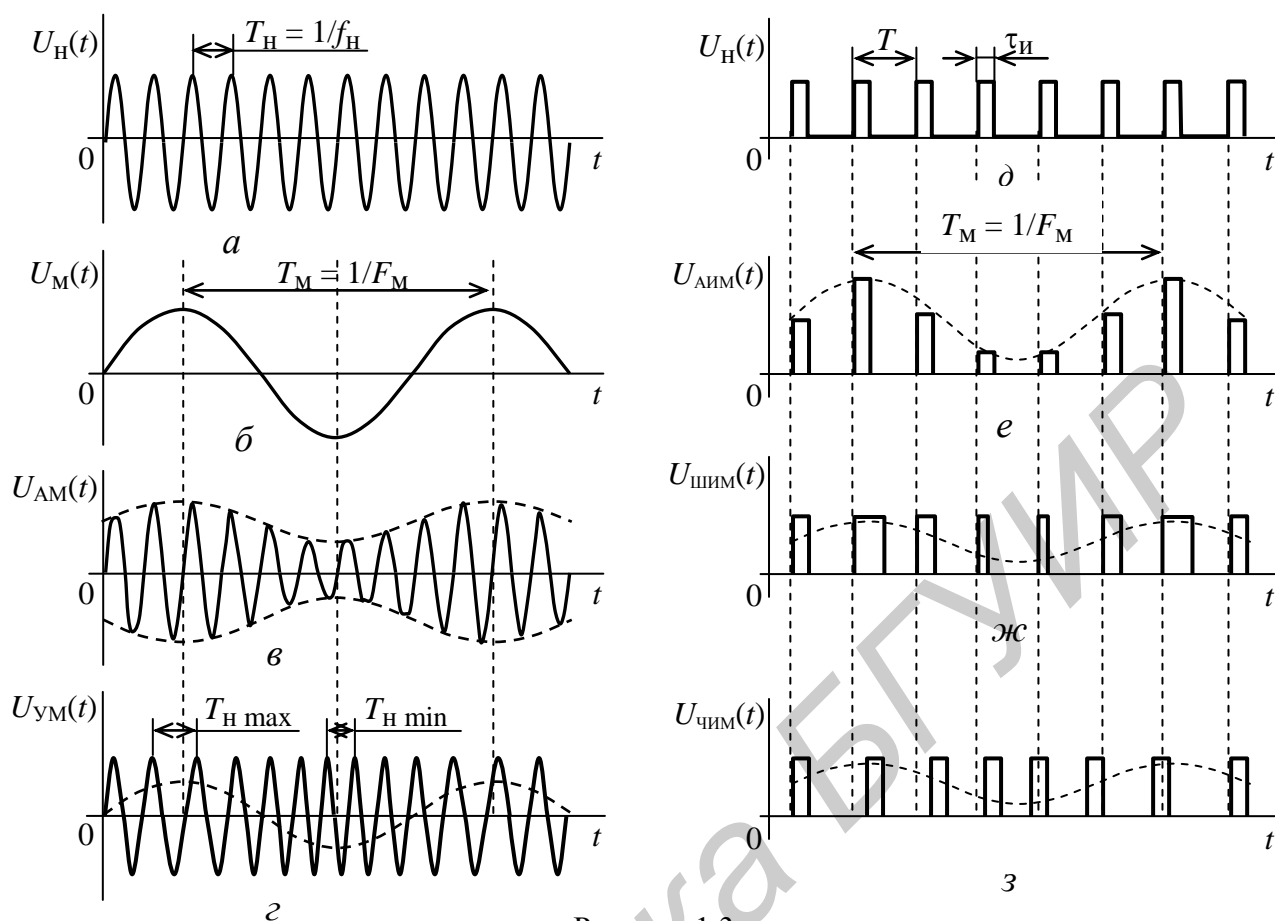


Рисунок 1.3

Для несущего цифрового сигнала ИС бывают: с **временн**импульсной (ВИМ) и **код**ово-импульсной (КИМ) модуляцией. Сущность КИМ заключается в том, что модулирующий ИС $U_M(t)$ (рисунок 1.4, а) дискретизируется во времени и весь диапазон его значений квантуется по уровню (рисунок 1.4, б), а затем каждому значению уровня присваивается кодовая комбинация импульсов (рисунок 1.4, в).

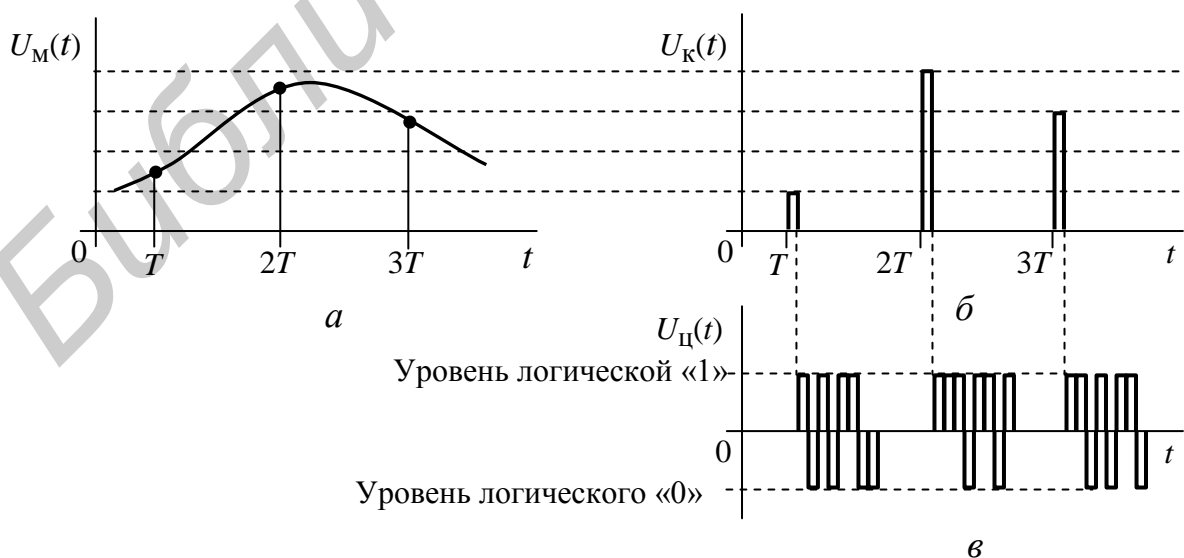


Рисунок 1.4

1.1.2 Классификация сигналов-помех

Помехой называется любой **неслучайный** или **случайный** сигнал, в том числе **посторонний ИС**, **однородный** с рабочим ИС и действующий на СИ и (или) на ИС так, что появляются погрешности в передаваемой информации.

Помехи весьма разнообразны как по своему происхождению, так и по физическим свойствам и всегда воздействуют на ИС в цепях СИ.

Помехи классифицируются по ряду признаков:

– **по воздействию на ИС** – **аддитивные** и **мультипликативные**. К классу **аддитивных** помех относят те, которые непосредственно добавляются к ИС, а к классу **мультипликативных**, которые воздействуют на ИС через изменения свойств измерительного канала во времени;

– **по месту возникновения** – делятся на **внешние** и **внутренние**. **Внешние** помехи вызываются природными процессами, а также работой различных технических устройств, создающих так называемые **индустриальные** помехи. **Внутренние** помехи обусловлены процессами, происходящими при работе самого СИ. Основные виды внутренних помех – это **шум**, **фон** и «**микрофонный**» эффект. Последний возникает от механических воздействий (звука, вибраций, ударов и других) на СИ и его детали. При этом шум рассматривается как высокочастотная часть помехи, а фон и «микрофонный» эффект – как низкочастотная;

– в зависимости от **включения** источников помехи и ИС в эквивалентных схемах СИ различают помехи **общего вида** (синфазные) и помехи **нормального** (последовательные) вида. Источник помехи общего вида включён между общими точками (корпусами) схем объекта измерений и СИ. Источник помехи нормального вида включён последовательно во входную цепь СИ;

– **по виду частотного спектра** помехи делятся на **белый** и **розовый** шумы. Спектральная плотность мощности (СПМ) **белого шума** постоянна во всём частотном диапазоне. У **розового шума** постоянна СПМ, приходящаяся на **декаду** частоты (например от 1 до 10 кГц).

По основным свойствам помехи можно разделить на три вида: **флуктуационные**, **сосредоточенные** и **импульсные**.

Флуктуационные помехи представляют собой хаотическое, беспорядочное изменение во времени сигнала, однородного с измеряемым, в каком-либо месте СИ. Такие помехи часто называют **шумом**. Пример – внутренние шумы измерительных электронных усилителей. Различают следующие виды шумов:

– **тепловой (шум Джонсона)**, по своим свойствам близкий к белому шуму. Тепловой шум генерируется любым резистором, находящимся в измерительной цепи, и его значение устанавливает нижнюю границу напряжения шумов любого измерительного преобразователя, имеющего выходное сопротивление;

– **дробовый**, обусловленный движением электронов и других дискретных носителей электрического тока. Он является белым шумом;

– **фликер-шум** – шумы, у которых СПМ на декаду частоты примерно постоянна, т. е. розовые шумы, например шум постоянного резистора, пропорциональный протекающему через него току, шум тока базы транзистора и др.

Сосредоточенными называют помехи, основная часть мощности которых сосредоточена на отдельных участках диапазона частот, меньших полосы пропускания СИ. Сосредоточенными являются помехи, наводимые в измерительных цепях СИ от промышленной силовой сети на частоте 50 Гц и кратные ей.

Импульсными помехами называются регулярные или хаотические последовательности импульсных сигналов, однородных с ИС. Источниками таких помех являются цифровые и коммутирующие элементы СИ или работающего рядом с ними устройства. Например, помехи от устройств зажигания двигателей внутреннего сгорания. Импульсные и сосредоточенные помехи часто называют **наводками**.

1.2 Математическое описание детерминированных измерительных видеосигналов

1.2.1 Сигналы и их математические модели

Наблюдение ИС как некоторого физического процесса с помощью различных приборов и устройств (осциллографов, вольтметров, приёмников) не позволяет судить об их фундаментальных свойствах и предсказывать их изменения при передаче.

Чтобы сделать ИС объектами теоретического изучения (расчётов), необходимо использовать математическую модель сигнала, обозначаемую функцией $S(t)$. Математическая модель позволяет абстрагироваться от конкретной природы ИС и успешно описывать их в виде тока, напряжения, напряжённости электромагнитного поля и т. д. Существенным преимуществом математической модели является возможность описывать именно те свойства сигналов, которые объективно выступают как наиболее важные.

Модели конкретных ИС при наибольшей простоте должны наилучшим образом описывать сигналы и поэтому их выбор связан с творчеством.

Функции, описывающие сигналы, могут быть как вещественными, так и комплексными. Какие из них использовать – исключительно дело математического удобства. Математические модели ИС позволяют сравнивать сигналы между собой.

Сигнал, описываемый одной функцией времени $S_1(t)$, принято называть **одномерным**. Многомерные сигналы описываются некоторым упорядоченным множеством одномерных сигналов на зажимах многополюсника (рисунок 1.5), например совокупностью напряжений на выводах микросхемы

$$S(t) = \{U_1(t), U_2(t), \dots, U_N(t)\} \in M. \quad (1.1)$$

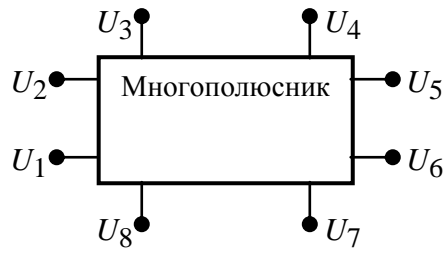


Рисунок 1.5

Целое число N называют размерностью такого сигнала. В общем случае сигналы с различным порядком следования компонент не равны друг другу:

$$\{U_1(t), U_2(t)\} \neq \{U_2(t), U_1(t)\}. \quad (1.2)$$

Применение многомерных моделей сигналов особенно целесообразно в тех случаях, когда функционирование сложных систем СИ анализируется с помощью ЭВМ.

Многие задачи требуют специфической формы представления сигнала, для того чтобы иметь информацию о мгновенном его значении «сейчас» и знать его поведение на всей временной оси как «в прошлом», так и «в будущем».

Принцип динамического представления ИС заключается в том, что реальный сигнал $S(t)$ приближённо описывается суммой некоторых элементарных сигналов $d_n(t)$, возникающих в последовательные моменты времени. Если длительность отдельных элементарных сигналов $d_n(t)$ стремится к нулю, то в пределе будет получено точное представление исходного сигнала $S(t)$. Выбор элементарных сигналов $d_n(t)$ произволен, однако широкое применение нашли два способа динамического представления сигналов. В первом из них в качестве элементарных сигналов $d_n(t)$ используются ступенчатые функции, возникающие через равные промежутки времени Δt (рисунок 1.6, а). Высота каждой ступеньки ΔS_n равна приращению сигнала на интервале Δt_n .

При втором способе элементарными сигналами $d_n(t)$ служат прямоугольные импульсы, непосредственно примыкающие друг к другу и образующие последовательность, вписанную в кривую $S(t)$ (рисунок 1.6, б) или описанную вокруг неё.

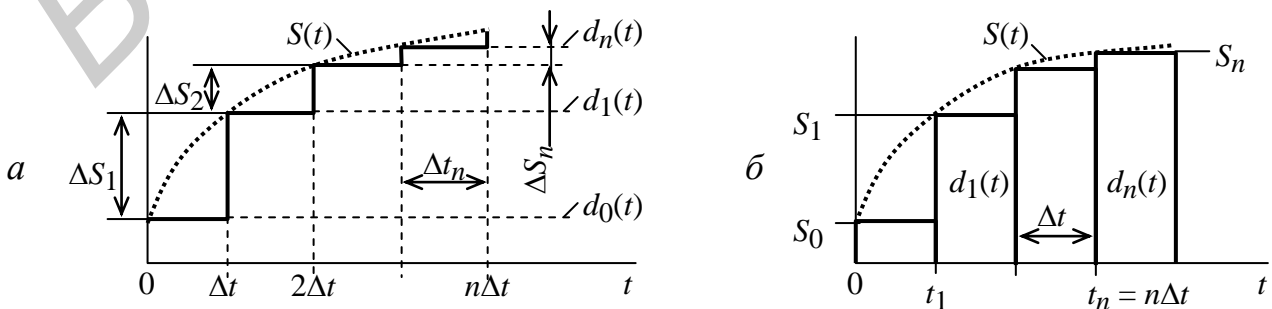


Рисунок 1.6

Рассмотрим более подробно свойства элементарного сигнала $d_n(t)$, используемого для динамического представления в первом способе.

1.2.2 Функция включения

Пусть математическая модель сигнала $d_n(t)$ задаётся системой равенств

$$d_n(t) = \begin{cases} 0, & t < -\Delta t, \\ 0.5[(t/\Delta t) + 1], & -\Delta t \leq t < \Delta t, \\ 1, & t > \Delta t. \end{cases} \quad (1.3)$$

Такая функция описывает процесс перехода ИС из «нулевого» в «единичное» состояние (рисунок 1.7, а), причём этот переход совершается по линейному закону за время $2\Delta t$. Если Δt устремить к нулю, то в пределе переход из одного состояния в другое будет совершаться мгновенно. Математическая модель этого предельного сигнала $g(t)$ получила название функции включения, или функции Хевисайда:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0.5, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$



Рисунок 1.7

С помощью функции включения $g(t)$ удобно описывать в теоретическом анализе разрывные ИС, в частности импульсные сигналы, а также разнообразные процессы коммутации в электрических цепях.

В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчёта времени на значение t_0 :

$$g(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 0.5, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Приведенный способ определения функции включения не является единственно возможным.

Например функции, образующие последовательность

$$d_n(t) = \frac{1}{1 + \exp(-nt)}, \quad (1.6)$$

с ростом номера n всё более точно аппроксимируют собой разрывный сигнал (рисунок 1.7, б).

Пример 1

Имеется импульсный сигнал $S(t)$ прямоугольной формы длительностью 5 мкс и амплитудой 15 В (рисунок 1.8). Начало отсчёта времени совпадает с фронтом импульса. Записать аналитическое выражение динамического представления этого сигнала функцией включения $g(t)$.

Эффект скачка уровня при $t = 0$ описывается функцией $S_1(t=0) = 15g(t=0)$. Для того чтобы импульс окончился при $t_{\text{и}} = 5 \cdot 10^{-6}$ с, необходимо вычесть такой же импульс включения, запаздывающий на этот отрезок времени $S_2(t = t_{\text{и}}) = 15g(t - 5 \cdot 10^{-6})$, так, чтобы

$$S(t) = S_1(t=0) - S_2(t = t_{\text{и}}) = 15g(t=0) - 15g(t - 5 \cdot 10^{-6}) \text{ В.}$$

С помощью функций включения можно осуществлять динамическое представление произвольного сигнала. Рассмотрим некоторый сигнал $S(t)$, причём положим, что $S(t) = 0$ при $t < 0$ (рисунок 1.9). Пусть $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t\}$ – последовательность моментов времени и $\{S_0, S_1, S_2, \dots, S_n\}$ – соответствующая им последовательность значений сигнала.

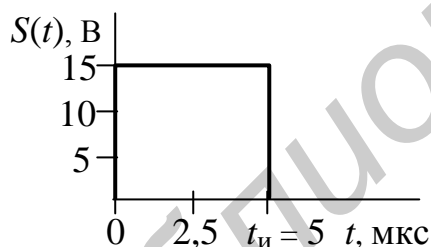


Рисунок 1.8

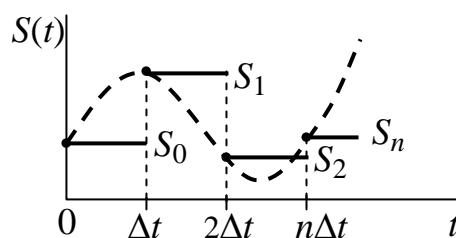


Рисунок 1.9

Если $S_0 = S(t = 0)$ – начальное значение, то, как видно из построения, текущее значение сигнала при любом t приближенно равняется сумме ступенчатых функций:

$$S(t) \cong S_0g(t=0) + (S_1 - S_0)g(t - \Delta t) + (S_2 - S_1)g(t - 2\Delta t) + \dots + (S_n - S_{n-1})g(t - n\Delta t) = S_0g(t=0) + \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1})g(t - n\Delta t). \quad (1.7)$$

Если теперь шаг Δt устремить к нулю, то дискретную переменную $n\Delta t$ можно будет заменить непрерывной переменной τ . Малые приращения

$(S_n - S_{n-1})$ превратятся в дифференциалы $ds = (dS/d\tau)d\tau$, и получаем форму динамического представления произвольного сигнала:

$$S(t) = S_0 g(t=0) + \int_0^{\infty} \frac{dS}{d\tau} g(t-\tau) d\tau . \quad (1.8)$$

Пример 2

Сигнал $S(t)$ равен нулю при $t < 0$ и изменяется по закону квадратичной параболы $S(t) = At^2$ при $t \geq 0$. Записать динамическое представление этого сигнала.

Так как $S_0 = 0$, а $ds/d\tau = 2A\tau$,

$$S(t) = 2A \int_0^{\infty} \tau g(t-\tau) d\tau . \quad (1.9)$$

Смысл формулы (1.9) в том, что высота элементарных ступенек, из которых складывается сигнал, линейно нарастает во времени.

1.2.3 Дельта-функция

Рассмотрим свойства элементарного сигнала в виде короткого прямоугольного импульса $d(t)$, используемого при втором способе динамического представления $S(t)$ и задаваемого следующим образом (рисунок 1.10, а):

$$d(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \left[g\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - g\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right]. \quad (1.10)$$

Этот импульс характерен тем, что при любом выборе параметра Δt его площадь равна единице:

$$P_d = \int_{-\infty}^{\infty} d(t, \Delta t) dt = 1. \quad (1.11)$$

Например, если $S(t)$ – напряжение, то $P_d = 1 \cdot \text{В} \cdot \text{с}$. Пусть величина Δt стремится к нулю. Импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, поэтому его высота должна неограниченно возрастать.

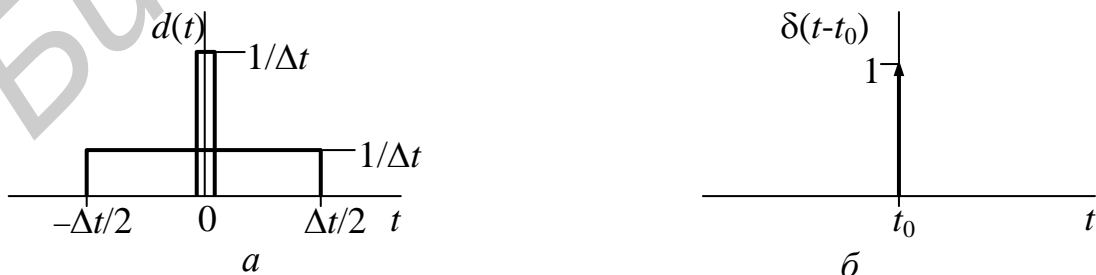


Рисунок 1.10

Предел такой функции при $\Delta t \rightarrow 0$ носит название дельта-функции, или функции Дирака:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} d(t, \Delta t). \quad (1.12)$$

Дельта-функция равна нулю всюду, за исключением точки $t = 0$ (сосредоточена в этой точке), и обладает единичным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.13)$$

Функция Дирака с точки зрения математики является обобщённой функцией. Она позволила во многих областях науки изучать разрывные процессы, описание которых средствами классического анализа затруднительно.

Дельта-функция (рисунок 1.10, б) является математической моделью короткого воздействия с единичным импульсом (площадью), смещённым от начала отсчёта времени на значение t_0 , и записывается как $\delta(t - t_0)$. Физическая размерность дельта-функции такая же, как и размерность частоты.

В математике показано, что свойства дельта-функции присущи многим последовательностям обычных классических функций, например

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nt)}{nt}.$$

С помощью дельта-функций можно производить динамическое представление сигналов. Рассмотрим аналоговый сигнала $S(t)$, представляемый суммой примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (см. рисунок 1.6, б). Если S_n – значение сигнала на n -м отсчёте, то элементарный импульс с номером n представляется так:

$$d_n(t) = S_n [\delta(t - t_n) - \delta(t - t_n - \Delta t)]. \quad (1.14)$$

По принципу динамического представления исходный сигнал $S(t)$ должен рассматриваться как сумма таких элементарных слагаемых:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(t). \quad (1.15)$$

Если подставить (1.14) в (1.15), предварительно разделив и умножив (1.14) на величину шага Δt , а затем перейти к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ (интегрированию по формальной переменной $\tau = n\Delta t$), получим формулу динамического представления сигнала:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Итак, если непрерывную функцию $S(t)$ умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции $S(t = t_n)$ в точке $t_n = n\Delta t$, где сосредоточен δ -импульс. В этом состоит фильтрующее свойство дельта-функции.

Для измерения мгновенных значений сигнала может быть применена следующая структурная схема измерительного устройства. Схема состоит из двух звеньев: перемножителя и интегратора (рисунок 1.11). Измерение величины $S(t = t_n)$ будет тем точнее, чем короче реальный прямоугольный видеоимпульс, приближенно представляющий дельта-функцию.

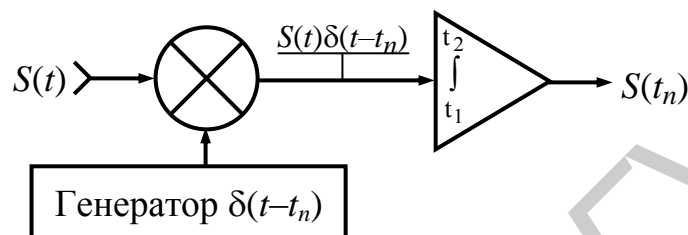


Рисунок 1.11

1.2.4 Постоянная и переменная часть сигнала

Любой сигнал $S(t)$ на временном интервале $[t_1, t_2]$ (рисунок 1.12, а) можно представить как сумму

$$S(t) = S_c(t) + S_v(t), \quad (1.17)$$

где $S_c(t)$ – постоянная (рисунок 1.12, б);

$S_v(t)$ – переменная (рисунок 1.12, в) часть его значения.

Часть $S_c(t)$ можно рассматривать как среднее значение сигнала $\bar{S}(t)$, определяемое как

$$S_c(t) = \bar{S}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S(t) dt. \quad (1.18)$$

Тогда $S_v(t) = S(t) - \bar{S}(t)$, а среднее значение переменной части $\bar{S}_v(t) = \bar{S}(t) - S_c(t) = 0$.

Следовательно, энергию сигнала $S(t)$ можно записать как

$$\begin{aligned} E_S &= \int_{t_1}^{t_2} [S_c(t) + S_v(t)][S_c^*(t) + S_v^*(t)] dt = \\ &= E_C + E_V + \int_{t_1}^{t_2} [S_c(t)S_v^*(t) + S_c^*(t)S_v(t)] dt = E_C + E_V + 0 = E_C + E_V. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Относительно выбранного начала отсчёта времени существуют три класса сигналов: чётные, нечётные и произвольные.

Чётные – сигналы, которые при изменении знака отсчёта времени не изменяют свои мгновенные значения (рисунок 1.13, б и д):

$$S_{\text{ч}}(t) = S_{\text{ч}}(-t) . \quad (1.20)$$

Нечётные – сигналы, которые при изменении знака отсчёта времени изменяют только знак своих мгновенных значений (рисунок 1.13, в и е):

$$S_{\text{н}}(t) = -S_{\text{н}}(-t) \text{ или } S_{\text{н}}(-t) = -S_{\text{н}}(t) . \quad (1.21)$$

Произвольные – сигналы, которые нельзя отнести к чётным или нечётным сигналам (рисунок 1.13, а и з).

Любой произвольный сигнал $S(t)$ можно представить как сумму чётной $S_{\text{ч}}(t)$ и нечётной $S_{\text{н}}(t)$ части сигналов (рисунок 1.13):

$$S(t) = S_{\text{ч}}(t) + S_{\text{н}}(t) \text{ или } S(-t) = S_{\text{ч}}(t) - S_{\text{н}}(t) , \quad (1.22)$$

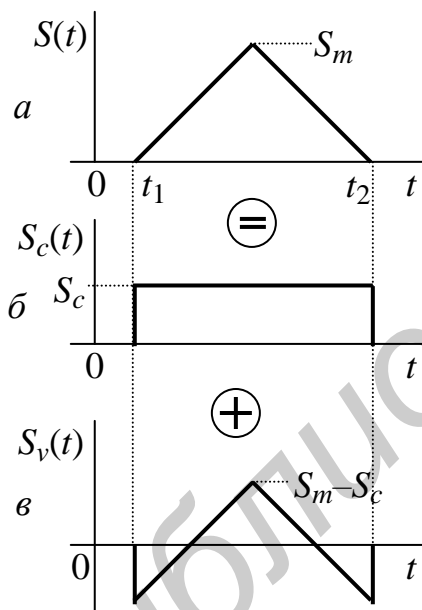


Рисунок 1.12

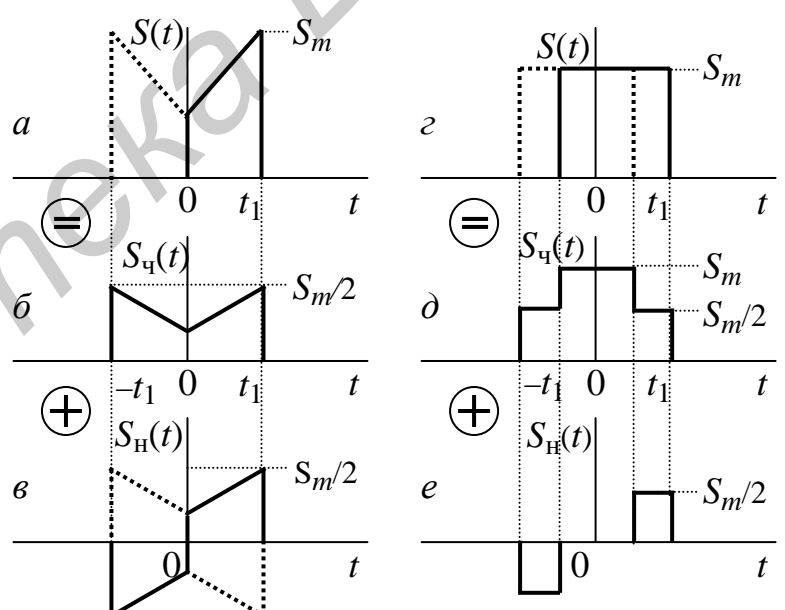


Рисунок 1.13

откуда

$$S_{\text{ч}}(t) = [S(t) + S(-t)] / 2 \text{ и } S_{\text{н}}(t) = [S(t) - S(-t)] / 2 . \quad (1.23)$$

Так как среднее значение $\bar{S}_{\text{н}}(t) = 0$, то $\bar{S}(t) = \bar{S}_{\text{ч}}(t)$.

Любой сигнал можно рассматривать как комплексный

$$\dot{S}(t) = \text{Re}[\dot{S}(t)] + \text{Im}[\dot{S}(t)] \quad (1.24)$$

и комплексно-сопряжённый ему

$$\dot{S}^*(t) = \text{Re}[\dot{S}(t)] - \text{Im}[\dot{S}(t)]. \quad (1.25)$$

Тогда

$$\text{Re}[\dot{S}(t)] = (\dot{S}(t) + \dot{S}^*(t))/2, \quad \text{Im}[\dot{S}(t)] = (\dot{S}(t) - \dot{S}^*(t))/2. \quad (1.26)$$

Из сравнения (1.26) с (1.23) следует, что действительная часть комплексного сигнала $\text{Re}[\dot{S}(t)]$ эквивалентна $S_{\text{ч}}(t)$, а мнимая $-\text{Im}[\dot{S}(t)] = S_{\text{н}}(t)$.

Комплексные функции сигналов, у которых $\text{Re}[\dot{S}(t)]$ – чётная, а $\text{Im}[\dot{S}(t)]$ – нечётная, называются **эрмитово-сопряжёнными**.

1.2.5 Геометрические методы в теории сигналов

Разработанные в математике методы функционального анализа позволили создать стройную геометрическую теорию сигналов, когда сигнал $S(t)$ представляется как вектор в специфически заданном вещественном **бесконечномерном линейном пространстве**, образованном множеством сигналов (функций):

$$\{S_0(t), S_1(t), S_2(t), \dots, S_k(t), \dots, S_m(t), \dots\} \in M. \quad (1.27)$$

Чтобы это множество сигналов, взаимосвязанных некоторыми общими свойствами, образовывало вещественное линейное пространство, должны выполняться следующие **аксиомы**:

1) любые сигналы $S_k(t)$ и $S_m(t)$ из $\in M$ при любых значениях t принимают только действительные значения;

2) для любой пары сигналов $S_k(t)$ и $S_m(t)$ из $\in M$ существует суммарный сигнал $S_w(t) = S_k(t) + S_m(t)$, принадлежащий $\in M$. Причём операция суммирования коммутативна $S_k(t) + S_m(t) = S_m(t) + S_k(t)$ и ассоциативна $S_k(t) + [S_m(t) + S_l(t)] = [S_m(t) + S_k(t)] + S_l(t)$;

3) для любого сигнала $S_k(t) \in M$ и любого вещественного числа « α » определен сигнал $\alpha S_k(t) \in M$;

4) существует особый нулевой сигнал $\Phi \in M$, такой, что для всех

$$S_k(t) + \Phi = S_k(t) \in M.$$

Если рассматривать сигнал $S_k(t)$ как комплексный и в 3-й аксиоме считать число « α » комплексным, то получим комплексное линейное пространство сигналов.

Это линейное пространство сигналов, роль системы координат которого выполняет совокупность векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots\} \in M$ при условии, что равенство

$$\sum_k \alpha_k \varphi_k = \Phi \quad (1.28)$$

возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех коэффициентов α_k , образует **линейно независимый координатный базис**.

Сигнал $S(t)$ в линейном N -мерном пространстве ($N \rightarrow \infty$) представляется точкой конца вектора, идущего из начала координат, и характеризуется своими проекциями $\{C_0, C_1, \dots, C_N\}$ на структуру координатных осей, задаваемых координатным базисом (системой функций) $\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ как

$$S_N(t) = \sum_{k=0}^N C_k \varphi_k(t) \quad (1.29)$$

Линейное пространство, в которое введено понятие нормы $\|S(t)\|$, эквивалентное по смыслу длине вектора сигнала $S(t)$, т. е. расстоянию между началом координат и точкой пространства, соответствующей концу вектора сигнала, называется **нормированным**. Норма вектора сигнала может быть определена через его проекции на координатные оси.

Метрическое пространство, в котором каждой паре сигналов $S_k(t)$ и $S_m(t)$ из $\in M$ сопоставлено неотрицательное число $\rho[S_k(t), S_m(t)]$, называется **метрикой**, или расстоянием между его двумя точками, соответствующими концам векторов сигналов $S_k(t)$ и $S_m(t)$. Обычно метрику ρ определяют как норму разности двух сигналов

$$\|S_k(t) - S_m(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [S_k(t) - S_m(t)]^2 dt} \quad (1.30)$$

Значение метрики позволяет судить о том, насколько один сигнал подобен другому (хорошо аппроксимирует другой).

1.2.6 Энергия и мощность сигнала

Для вещественных электрических сигналов $S(t)$ полагают, что их норма равна

$$\|S(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt}, \text{ а для комплексных } - \|\dot{S}(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t) dt}, \quad (1.31)$$

где $\dot{S}^*(t)$ – сигнал, комплексно-сопряжённый сигналу $\dot{S}(t)$.

Квадрат нормы соответствует **энергии** сигнала E_S , выделяющейся на сопротивлении 1 Ом:

$$\|S(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = E_S \quad [\text{В}^2 \cdot \text{с}]. \quad (1.32)$$

Средняя мощность для действительного сигнала $S(t)$ на заданном конечном интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$P_S = \frac{E_S}{T} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S^2(t) dt \quad [\text{В}^2]. \quad (1.33)$$

Мгновенная мощность сигналов в момент времени $t = t_i$

$$P_S(t_i) = S^2(t_i) \quad [\text{В}^2]. \quad (1.34)$$

В 3-мерном пространстве квадрат модуля суммы вектора \vec{A} и \vec{B} равен

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\psi), \quad (1.35)$$

где $(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\psi)$ – скалярное произведение этих векторов, зависящее от угла ψ между ними.

По аналогии определим энергию суммы двух сигналов $S_k(t)$ и $S_m(t)$:

$$E_{\Sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} (S_k(t) + S_m(t))^2 dt = E_{S_k} + E_{S_m} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_k(t)S_m(t) dt. \quad (1.36)$$

Как видно из (1.36), в отличие от самих сигналов, их энергии **неаддитивны**, т. е. энергия суммарного сигнала содержит так называемую **взаимную** энергию сигналов:

$$E_{S_k, S_m} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_k(t)S_m(t) dt. \quad (1.37)$$

С учётом (1.35) получим скалярное произведение сигналов

$$(\bar{S}_k, \bar{S}_m) = \int_{-\infty}^{\infty} S_k(t) S_m(t) dt, \quad (1.38)$$

откуда

$$\cos(\psi_{S_k, S_m}) = \frac{(\bar{S}_k, \bar{S}_m)}{\|S_k(t)\| \|S_m(t)\|}. \quad (1.39)$$

Скалярное произведение сигналов обладает следующими свойствами:

$$1) (\bar{S}_k, \bar{S}_m) \geq 0; \quad 2) (\bar{S}_k, \bar{S}_m) = (\bar{S}_m, \bar{S}_k); \quad 3) (\lambda \bar{S}_k, \bar{S}_m) = \lambda (\bar{S}_k, \bar{S}_m),$$

где λ – число;

$$2) (\bar{S}_k + \bar{S}_m, \bar{S}_w) = (\bar{S}_k, \bar{S}_w) + (\bar{S}_m, \bar{S}_w).$$

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение (1.38) и выполняются его вышеуказанные свойства, называется вещественным **гильбертовым** пространством, или H -пространством. Для этого H -пространства справедливо фундаментальное неравенство Коши–Буняковского

$$|(\bar{S}_k, \bar{S}_m)| \leq \|S_k(t)\| \|S_m(t)\|. \quad (1.40)$$

Для комплексных сигналов аналогично вводится понятие **комплексного** H -пространства со скалярным произведением:

$$(\dot{\bar{S}}_k, \dot{\bar{S}}_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_k(t) \dot{S}_m^*(t) dt. \quad (1.41)$$

При этом $(\dot{\bar{S}}_k, \dot{\bar{S}}_m) = (\dot{\bar{S}}_m, \dot{\bar{S}}_k)^*$.

Отметим, что H -пространство сигналов обладает важным свойством **полноты**, заключающимся в том, что если существует предельное значение суммы

вида $S(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N C_k \phi_k(t)$, то этот предел сам всегда входит в

H -пространство. В полном H -пространстве ошибка аппроксимации $S(t)$ монотонно убывает с увеличением числа N .

1.2.7 Ортогональные сигналы

Сигналы $S_k(t)$ и $S_m(t)$ называются **ортогональными**, если их скалярное произведение $(\dot{\bar{S}}_k, \dot{\bar{S}}_m) = 0$, т. е. взаимная энергия равна нулю.

Если H -пространство сигналов задаётся бесконечной системой действительных функций $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_k(t), \dots, \phi_m(t), \dots\}$ на конечном или бесконечном интервале времени $[t_1, t_2]$ и выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \|\varphi_k(t)\|^2, & k = m, \end{cases} \quad (1.42)$$

то оно имеет **ортогональный** базис. А если норма всех входящих функций $\|\varphi_k(t)\| = 1$, то такой базис называется **ортонормированным**.

В радиоэлектронике в качестве системы базисных ортогональных функций используются: тригонометрические, экспоненциальные, Уолша, Лежандра, Эрмита, Чебышева, Хаара и др.

Любой сигнал $S(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле и имеющий конечное количество точек разрыва первого рода, может быть представлен **обобщённым** рядом Фурье по выбранной системе (базису) ортогональных функций $\{\varphi_k(t)\}$ в виде

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varphi_k(t), \quad (1.43)$$

где коэффициенты ряда определяются как

$$C_k = \frac{1}{\|\varphi_k(t)\|^2} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \varphi_k(t) dt. \quad (1.44)$$

Если базис ортонормированный, $\|\varphi_k(t)\| = 1$, то

$$C_k = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \varphi_k(t) dt. \quad (1.45)$$

Для комплексного сигнала $\dot{S}(t)$ коэффициенты ряда вычисляются по формуле

$$\dot{C}_k = \frac{1}{\|\varphi_k(t)\|^2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{S}(t) \varphi_k^*(t) dt. \quad (1.46)$$

Геометрический смысл формулы (1.43) в том, что коэффициенты C_k являются проекциями сигнала $S(t)$ на координатные функции $\varphi_k(t)$ и представляют их значения (рисунок 1.14).

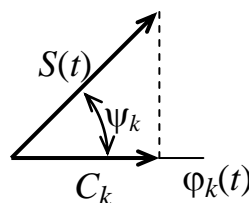


Рисунок 1.14

1.2.8 Погрешность представления сигнала рядом Фурье

Обобщённый ряд Фурье при ограниченном значении $k = N$ обеспечивает возможный минимум среднеквадратичной погрешности аппроксимации $S(t)$, которая оценивается как квадрат метрики:

$$\beta^2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[S(t) - \sum_{k=0}^N C_k \varphi_k(t) \right]^2 dt . \quad (1.47)$$

Так как всегда $\beta \geq 0$, то можно получить **неравенство Бесселя**:

$$\|S(t)\|^2 \geq \sum_{k=0}^N C_k^2 \|\varphi_k(t)\|^2 . \quad (1.48)$$

При $N \rightarrow \infty$ получим **равенство Парсеваля**:

$$\int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N C_k^2 \|\varphi_k(t)\|^2 . \quad (1.49)$$

При ортонормированном базисе получим

$$E_S = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 , \quad (1.50)$$

т. е. энергия сигнала равна сумме квадратов коэффициентов обобщённого ряда Фурье.

При выборе базисных функций возможно три основных варианта:

1) требуется точная аппроксимация широкого класса функций сигналов $S(t)$ простейшими базисными функциями.

В этом случае наиболее эффективно использовать систему тригонометрических функций – синусов и косинусов, т. к. они сохраняют свою форму при прохождении через линейные цепи и позволяют использовать символический метод расчёта, разработанный для цепей переменного тока;

2) при заданной допустимой погрешности аппроксимации требуется свести к минимуму число членов обобщённого ряда Фурье.

Для этого применяются разнообразные системы функций в виде полиномов: Чебышева; Эрмита; Лагерра; Лежандра и многие другие;

3) требуется такой базис функций, который адекватен выполняемым процедурам обработки сигнала.

Например, для вычислительных процедур в ЭВМ удобно использовать функции Уолша и Хаара.

Для экспериментального определения коэффициентов разложения произвольного сигнала $S(t)$ в обобщённый ряд Фурье по заданной системе ортонормированных базисных функций $\varphi_k(t)$ может быть применена структурная схема устройства, показанная на рисунке 1.15.

Сигнал $S(t)$ одновременно подаётся на совокупность перемножительных звеньев, осуществляющих его перемножение с соответствующей базисной функцией $\varphi_k(t)$. С выходов перемножителей сигналы $S(t)\varphi_k(t)$ поступают на интеграторы. В конце промежутка времени интегрирования $[t_1, t_2]$ на выходе каждого интегратора возникает сигнал, значение которого, согласно формуле (1.45), равно коэффициенту C_k обобщённого ряда Фурье.

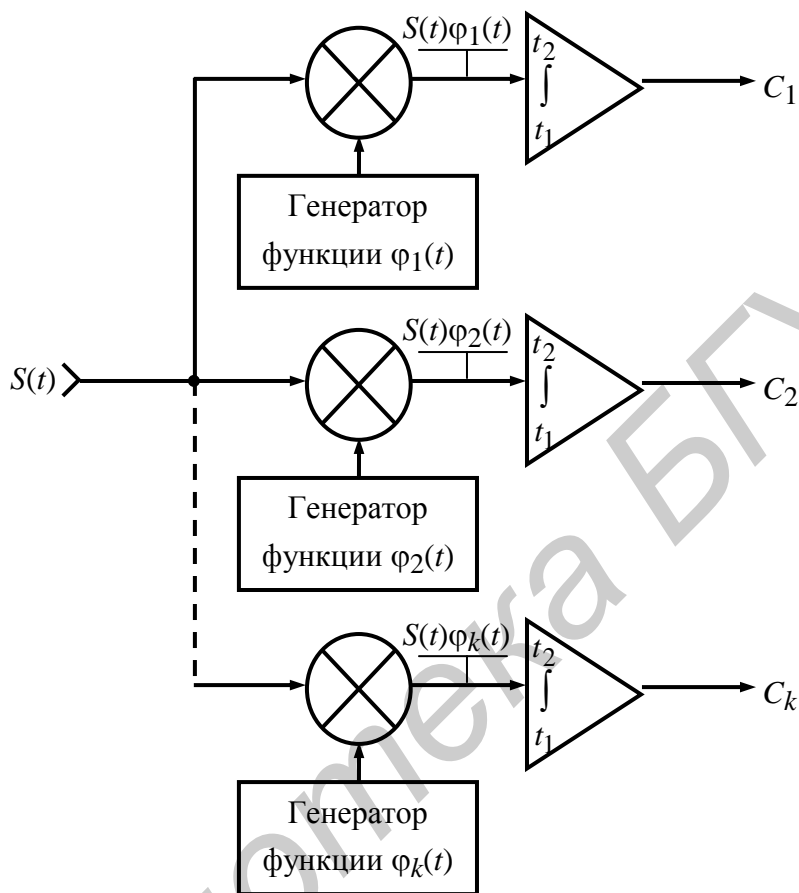


Рисунок 1.15

1.2.9 Спектральное разложение ИС в тригонометрический ряд Фурье

Простота математического описания и техники генерирования, бесконечно узкая занимаемая полоса частот, возможности точного представления широкого класса сигналов и др. объясняют выбор в качестве базиса спектрального разложения $S(t)$ бесконечной системы попарно ортогональных гармонических функций (сигналов) $\varphi_n(t)$, дополненных постоянным во времени сигналом $\varphi_0=1$:

$$\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t), \cos(2\omega_1 t), \sin(2\omega_1 t), \dots, \cos(n\omega_1 t), \sin(n\omega_1 t), \dots \quad (1.51)$$

При этом считаем, что сигнал $S(t)$ периодический, т. е. на бесконечном отрезке времени $S(t) = S(t + nT)$, где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$; $T = 2\pi / \omega_1$ – период повторения сигнала.

Физически сигнал может рассматриваться как периодический, если время существования во много раз превышает период его повторения T .

Интервал ортогональности базисной системы сигналов $\varphi_n(t)$ совпадает с периодом T функции сигнала $S(t) - \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_1 t) \sin(n\omega_1 t) dt = 0$, метрика –

$$\|S_n(t) - S_m(t)\| = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} [\cos(n\omega_1 t) - \cos(m\omega_1 t)]^2 dt} = \sqrt{T},$$

а квадрат их нормы равен $\|\varphi_{n=0}(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot dt = T$;

$$\|\varphi_{n \geq 1}(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega_1 t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega_1 t) dt = \frac{T}{2}. \quad (1.52)$$

Подставляя значение нормы в (1.44), получаем формулы, используемые для определения коэффициентов a_0 , a_n и b_n ряда Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \text{постоянная составляющая} - a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt; \\ \text{амплитуды косинусоидальных гармоник} - a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \\ \text{амплитуды синусоидальных гармоник} - b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Подставляя значения для a_0 , a_n и b_n в (1.43), получаем разложение $S(t)$ на гармонические составляющие, называемое **спектральным анализом**, в виде тригонометрического **ряда Фурье**:

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)],$$

или

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \psi_n), \quad (1.54)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} - \text{модуль амплитуды гармоник;} \\ \psi_n &= \text{arctg} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) - \text{фаза гармоник.} \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Если сигнал представляет собой функцию, чётную относительно $t = 0$, т. е. $S(t) = S(-t)$, в тригонометрической записи ряда остаются только косинусоидальные члены a_n , так как коэффициенты b_n обращаются в нуль. Для нечётной относительно $t = 0$ функции $S(t)$, наоборот, в нуль обращаются коэффициенты a_n и ряд состоит только из синусоидальных членов b_n .

Для периодического сигнала $S(t)$ (рисунок 1.16, а) совокупность коэффициентов a_n и b_n или A_n (размерность которых напряжение или ток) образует амплитудный спектр (рисунок 1.16, б, в, д), а значения ψ_n в радианах или градусах образуют фазовый спектр (рисунок 1.16, з). Оба спектра являются **дискретными (линейчатыми)**. В общем случае спектр периодического сигнала $S(t)$ состоит из не зависящей от времени постоянной составляющей a_0 и бесконечного набора гармоник с амплитудами A_n в виде спектральных линий, содержащих некоторую долю энергии сигнала на частотах $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots, n\omega_1$, кратных частоте повторения $\omega_1 = 2\pi / T$.

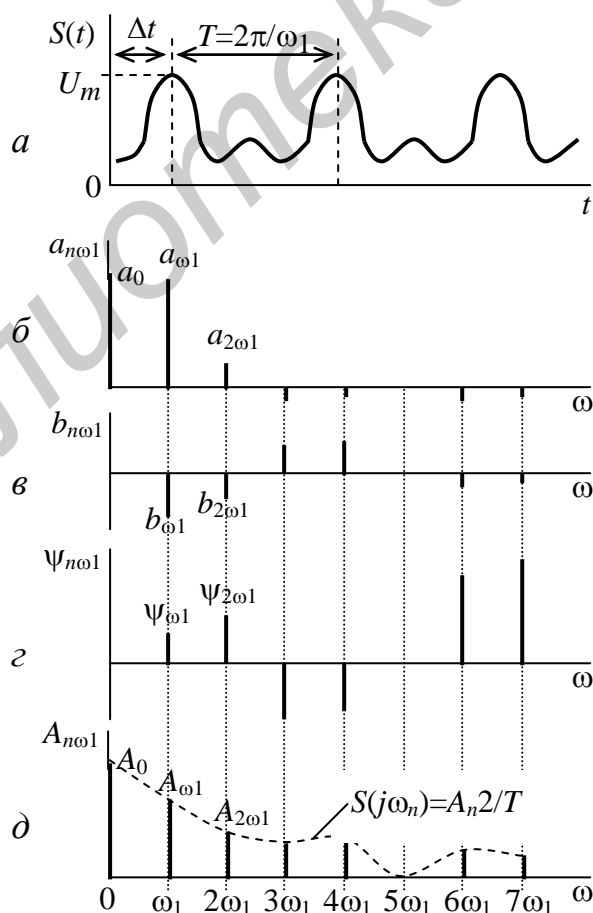


Рисунок 1.16

Так как точка временного отсчёта функции сигнала $S(t)$ при анализе его спектра может выбираться **произвольно**, получаемые фазовые спектры для одного и того же сигнала будут **отличаться** на величину начального фазового сдвига $\varphi_n = \Delta t n \omega_1$, при этом модули амплитудного спектра не изменяются.

1.2.10 Ряд Фурье в комплексной форме

Запишем временную функцию n -й гармоники из (1.54), используя формулу Эйлера, в виде суммы показательных функций:

$$A_n \cos(n\omega_1 t - \psi_n) = \frac{1}{2} A_n e^{j(n\omega_1 t - \psi_n)} + \frac{1}{2} A_n e^{-j(n\omega_1 t - \psi_n)}. \quad (1.56)$$

Введя комплексные амплитуды $\dot{C}_n = A_n e^{-j\psi_n}$, $\dot{C}_n^* = A_n e^{j\psi_n}$, $\dot{C}_0 = a_0$ (* – символ комплексно-сопряжённого числа) и подставив (1.56) в (1.54) с учётом, что коэффициенты ряда Фурье с положительными и отрицательными частотами комплексно-сопряжены, получим запись ряда Фурье в более удобной **комплексной** форме комплексные амплитуды и фазы гармоник

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(n\omega_1 t - \psi_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (1.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_n = C_n e^{-j\psi_n} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt; \\ \psi_n &= \arctg \left(\frac{\text{Im}[\dot{C}_n]}{\text{Re}[\dot{C}_n]} \right), \quad C_n = \frac{A_n}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

Действительная часть $\text{Re}[\dot{C}_n]$ есть чётная, а мнимая часть $\text{Im}[\dot{C}_n]$ – нечётная функция частоты $n\omega_1$.

При изменении в (1.57) знака числа n получаем изменение знака частоты, потому что векторы $\dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}$ и $\dot{C}_n e^{-jn\omega_1 t}$ отличаются противоположным направлением вращения, однако, складываясь, эти две комплексные величины образуют вещественное число. Поэтому отрицательная частота – понятие не физическое, а **математическое**.

Множество коэффициентов комплексного ряда Фурье, рассматриваемых как функция частоты, называется комплексным спектром сигнала, который является **двусторонним или теоретическим** (рисунок 1.17, а).

Структура ряда Фурье, представленного в комплексной форме, даёт возможность графически изобразить периодический сигнал посредством бесконечной суммы векторов, вращающихся при изменении времени (рисунок 1.17, б). Для этого же сигнала на комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до ∞ точка конца суммарного вектора будет описывать траекторию, называемую **годографом** (рисунок 1.17, в).

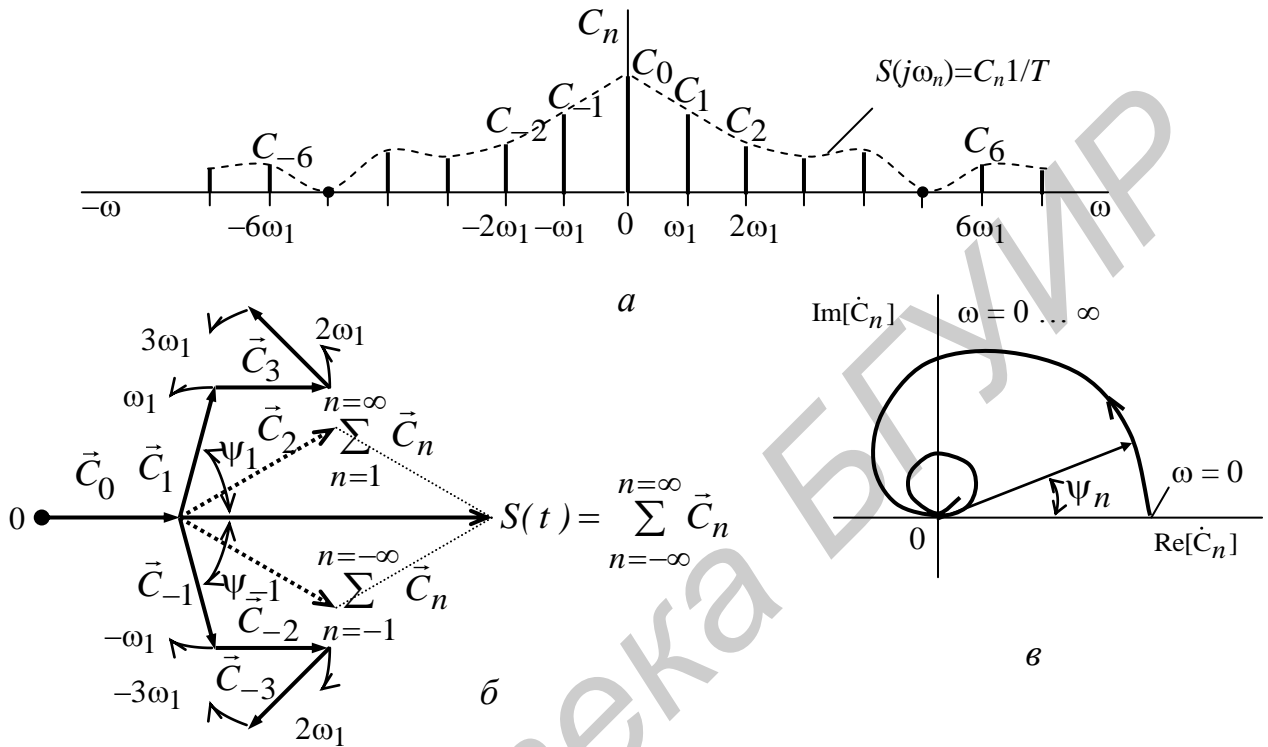


Рисунок 1.17

1.2.11 Энергетический спектр и спектр мощности периодического сигнала

Энергия сигнал $E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt$ [В²·с], для комплексного сигнала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t) dt \quad (1.59)$$

Интеграл (1.59) для периодического сигнала расходится, то есть его **энергия бесконечно велика**. Поэтому определяют **среднюю мощность** сигнала, которая совпадает с энергией, рассеиваемой на сопротивлении $R = 1$ Ом за время $t = T$ и равна

$$P = \frac{1}{T} \int S^2(t) dt = \frac{1}{T} \int \dot{S}(t) \dot{S}^*(t) dt \quad [\text{В}^2]. \quad (1.60)$$

Энергия одного периода $E_T = PT = \int_T S^2(t) dt$ [В²·с].

Подставив (1.54) в (1.60), получим равенство

$$P = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \quad [\text{B}^2], \quad (1.61)$$

называемое **теоремой Парсеваля**, а для комплексного ряда, подставляя (1.57) в (1.60),

$$P = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n^2 \quad [\text{B}^2]. \quad (1.62)$$

Таким образом, **средняя мощность** периодического сигнала в его спектре распределена **пропорционально квадратам амплитуд гармоник, не зависит от их фазы и равна сумме мощностей** всех гармоник, включая постоянную составляющую.

Ограничивая бесконечную сумму в (1.61) числом первых её членов $n = N$, получим мощность

$$P_k = kP = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 \quad (1.63)$$

в полосе частот $\Delta\omega = N\omega_1$. Выбрав $k = 0 \dots < 1$, можно найти значение N_k , для которого правая часть выражения (1.63) будет иметь меньшее или равное kP значение, и тогда **ширина спектра сигнала по заданному уровню мощности** равна

$$\Delta\omega_c = N_k\omega_1. \quad (1.64)$$

Ширина спектра может также определяться как диапазон частот $\Delta\omega_c = \omega_B - \omega_H$, ограниченный ω_B и ω_H – наибольшей и наименьшей частотой в спектре, на которых амплитуды гармоник уменьшаются до заданного значения (0,1 или 0,05) относительно максимального.

1.2.12 Интегральные значения периодических сигналов

Периодический сигнал $S(t)$ часто описывается несколькими общепринятыми обобщающими параметрами: амплитудным, средним, средневыпрямленным и среднеквадратичными значениями – называемыми **интегральными**.

Амплитудное (пиковое) значение S_m равно максимальному мгновенному значению сигнала $S(t)$ на его периоде.

$$\text{Среднее значение} - S_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - \quad (1.65)$$

характеризует постоянную составляющую сигнала.

$$\text{Средневыпрямленное значение} - S_{\text{СВ}} = \frac{1}{T} \int_0^T |S(t)| dt - \quad (1.66)$$

используется для сигналов, не содержащих постоянной составляющей.

$$\text{Среднеквадратичное значение} - S_{\text{СК}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2}, \quad (1.67)$$

где A_n – среднеквадратичное (эффективное) значение n -й гармоники сигнала $S(t)$.

Большинство вольтметров проградуировано в среднеквадратичных значениях напряжения.

Связь между перечисленными параметрами устанавливается с помощью следующих коэффициентов:

$$\text{формы} - k_{\text{Ф}} = S_{\text{СК}} / S_{\text{СВ}}; \quad (1.68)$$

$$\text{амплитуды} - k_{\text{а}} = S_m / S_{\text{СК}}; \quad (1.69)$$

$$\text{и усреднения} - k_{\text{у}} = S_m / S_{\text{СВ}} = k_{\text{а}} k_{\text{Ф}}. \quad (1.70)$$

1.2.13 Гармонический сигнал и его параметры

Это простейший периодический сигнал (рисунок 1.18, а), который в зависимости от выбора модели гармонической функции и начальной фазы ψ может иметь следующие формы записи:

$$\begin{aligned} 1 \ S(t) &= A_m \cos(\Omega t + \psi_1); & 2 \ S(t) &= A_m \cos(\Omega t - \psi_2); \\ 3 \ S(t) &= A_m \sin(\Omega t + \psi_3); & 4 \ S(t) &= A_m \sin(\Omega t - \psi_4); \\ 5 \ S(t) &= A_m \cos(\Theta(t)) \text{ или } S(t) = A_m \sin(\Theta(t)), \end{aligned} \quad (1.71)$$

где $\Theta(t) = (\Omega t + \psi_k)$.

Параметрами такого сигнала являются: амплитуда A_m , угловая (круговая) частота

$$\Omega = 2\pi / T \text{ (рад/с)},$$

где T – период колебания (с) или $F = 1 / T$ – циклическая частота (Гц);

$\Theta(t)$ – полная (текущая) фаза;

$\psi_k = \Theta(t = 0)$ – начальная фаза, равная фазе колебания в момент времени, принятый за $t = 0$.

На практике пользуются понятием циклической частоты F , а в качестве параметра тригонометрических функций используется угловая частота Ω .

Начальная фаза ψ_k у функции косинуса определяется расстоянием от максимума колебания до начала координат. При положительной фазе ψ_1 максимум смещён влево, а при отрицательной ($-\psi_2$) – вправо относительно начала координат. Аналогично, но от нулевых значений, отсчитываются начальные фазы ψ_3 и ($-\psi_4$) у синусоиды.

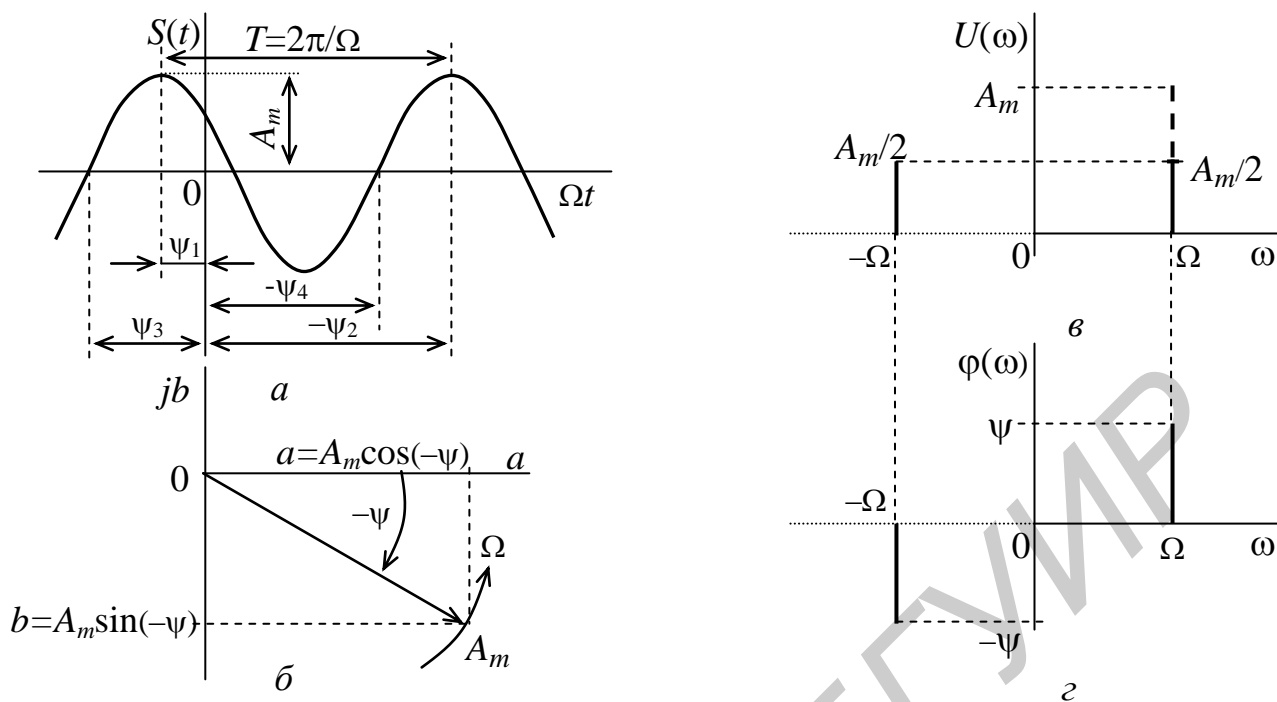


Рисунок 1.18

В общем случае выбор начала координат не имеет принципиального значения. При выбранном начале координат для корректного понятия начальной фазы выбирается такой вариант формы записи, чтобы выполнялось условие $0 \leq \psi_k \leq \pi$ или $-\pi \leq \psi_k \leq 0$ (соответственно, максимум / минимум косинусоиды / синусоиды расположен слева или справа от начало координат). В ряде практических случаев допускается не изменять знак ψ_k в интервале определения $[-2\pi, 0]$ или $[0, 2\pi]$.

Так как этот сигнал полностью характеризуется A_m и $\Theta(t)$, то его можно условно изображать (рисунок 1.18, б) вектором на плоскости (векторная диаграмма), который вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью Ω .

Для проведения расчётов удобно гармонические колебания представлять с помощью комплексных чисел $a + jb = A_m e^{j\psi}$. Тогда сигнал можно записать в виде $\dot{S}(t) = A_m e^{j(\Omega t - \psi)}$ и векторную диаграмму перенести на комплексную плоскость (рисунок 1.18, б). Число $A_m e^{-j\psi}$ называют **комплексной амплитудой** \dot{A}_m , и тогда $\dot{S}(t) = \dot{A}_m e^{j\Omega t}$. Метод расчёта, базирующийся на понятии комплексной амплитуды, называют методом комплексных амплитуд. Этот сигнал в частотном диапазоне представляет собой **одну спектральную линию** как в спектре амплитуд (рисунок 1.18, в), так и в спектре фаз (рисунок 1.18, г).

Энергия одного периода гармонического сигнала

$$E_T = \int_T [A_m \cos(\Omega t)]^2 dt = A_m^2 \frac{T}{2}, \quad (1.72)$$

средняя мощность

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{A_m^2}{2}, \quad (1.73)$$

и норма $0,707A_m\sqrt{T}$.

Для этого сигнала $k_a \cong 1,41$, $k_\phi \cong 1,11$ и $k_y \cong 1,57$, а $S_{св} \cong 0,637A_m$ и $S_{ск} \cong 0,707A_m$.

1.2.14 Спектральное представление непериодических сигналов

Разложение (1.57) периодической функции $S(t)$ в тригонометрический ряд может быть обобщено и на случай непериодической функции, если применить **предельный переход**, полагая, что **период T стремится к бесконечности**. Тогда частота $\omega_1 = 2\pi / T$, определяющая интервал между соседними гармониками (см. рисунок 1.16), стремится к бесконечно малому приращению $d\omega$, а величина $n\omega_1 = nd\omega$ становится непрерывно изменяющейся частотой ω , т. е. спектр сигнала становится **сплошным** (рисунок 1.19).

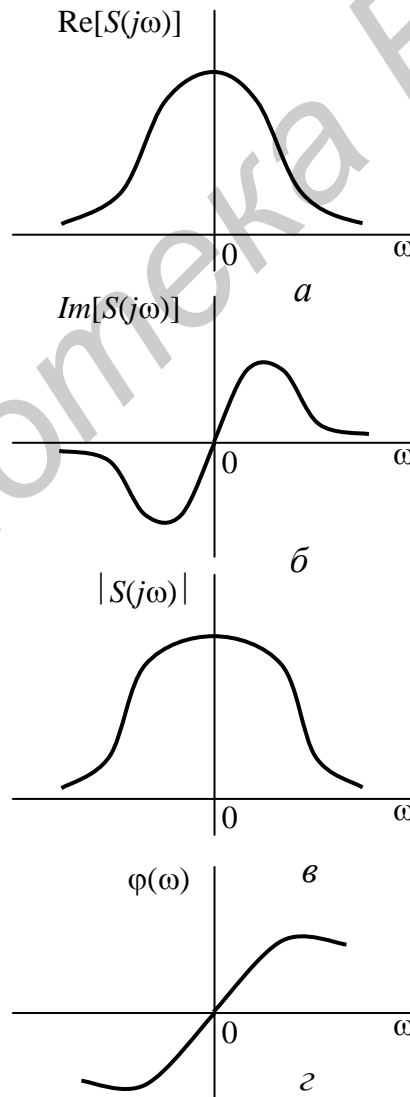


Рисунок 1.19

При этом интеграл (1.57) для \dot{C}_n

$$\dot{C}_n(n\omega_1) = \frac{1}{T} \int_T S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

при $T \rightarrow \infty$ преобразуется к виду

$$C(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.74)$$

Из (1.74) следует, что непериодический сигнал можно представить в виде бесконечного количества гармонических колебаний с **бесконечно малыми амплитудами**, что неудобно на практике. Поэтому спектр непериодического сигнала рассматривают в виде функции **спектральной плотности**, показывающей, какое напряжение приходится на единицу полосы частот:

$$S(j\omega) = C(j\omega) \frac{2\pi}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \quad [\text{В/Гц}] \quad (1.75)$$

прямое преобразование Фурье. Для $S(\omega=0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) dt$ – площадь под кривой $S(t)$ или постоянная составляющая.

Выражение (1.75) преобразуется к виду

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [\text{В}] \quad (1.76)$$

обратное преобразование Фурье. Для $S(t=0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$ – площадь под кривой спектральной плотности или значение сигнала в момент времени $t = 0$.
Функция частоты, равная

$$S(j\omega) = S(\omega) e^{j\psi(\omega)} \quad (1.77)$$

где $S(\omega) = \sqrt{\text{Re}[S(j\omega)]^2 + \text{Im}[S(j\omega)]^2}$, состоящая из модуля спектральной плотности $S(\omega)$ (функция чётная), называемого **амплитудным спектром** (рисунок 1.19, в);

$\psi(\omega) = \text{arctg}\{\text{Im}[S(j\omega)] / \text{Re}[S(j\omega)]\}$ – её **фазовый спектр** (функция нечётная) (рисунок 1.19, з).

Действительная часть спектральной плотности равна (рисунок 1.19, а)

$$\text{Re}[S(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cos(\omega t) dt \quad (1.78)$$

а мнимая (рисунок 1.19, б) –

$$\operatorname{Im}[S(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin(\omega t) dt . \quad (1.79)$$

Свойства спектральной плотности:

- 1) $\dot{S}(-t) \Leftrightarrow S(-j\omega)$; 2) $\dot{S}^*(t) \Leftrightarrow S^*(-j\omega)$; 3) $\dot{S}^*(-t) \Leftrightarrow S^*(j\omega)$;
- 4) если $\dot{S}(t) = \dot{S}^*(-t)$, то $S^*(j\omega) = \operatorname{Re}[S(\omega)]$ – спектр действительный;
- 5) если $\dot{S}(t) = \dot{S}(-t)$, то $\operatorname{Re}[S(\omega)] = \operatorname{Re}[S(-\omega)]$ – спектр чётный;
- 6) если $\dot{S}(t) = -\dot{S}(-t)$, то $\operatorname{Im}[S(\omega)] = -\operatorname{Im}[S(-\omega)]$ – спектр нечётный.

1.2.15 Связь между спектральной плотностью и амплитудой гармоник

Между спектральной плотностью $S(j\omega)$ непериодического (одиночного) сигнала, а также если этот сигнал является периодическим, и комплексными коэффициентами ряда Фурье \dot{C}_n (амплитудами гармоник) существует связь

$$\dot{C}_n = S(j\omega_n) \frac{1}{T} \text{ [В]} \text{ или } S(j\omega_n) = \dot{C}_n T \text{ [В / Гц]}, \quad (1.80)$$

причём $\omega_n = n\omega_1 = n2\pi / T$ и $|S(j\omega_n)|$ с точностью до множителя $2 / T$ или $1 / T$ является **оггибающей** дискретной последовательности (см. рисунок 1.16, д) амплитуд A_n или C_n (см. рисунок 1.17, а).

Согласно (1.59) и с учётом (1.76), энергия непериодического сигнала, выделяющаяся на сопротивлении $R = 1$ Ом, равна

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega t} dt = S^*(j\omega) \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega \text{ [В}^2 \cdot \text{с]}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Выражение (1.81) называют **равенством Парсеваля**, в нём $E(\omega) = S^2(\omega) d\omega$ означает энергию, содержащуюся в единице полосы частот. Выражение показывает, как распределяется энергия сигнала по оси частот, и рассматривается как **спектральная плотность энергии** сигнала. Значит, энергия сигнала равна площади ограниченной кривой $E(\omega)$.

Для мощности сигнала можно записать соотношение

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) d\omega \text{ [В}^2\text{]}, \quad (1.82)$$

где $P(\omega)$ – спектр мощности.

Мощность сигнала, не удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости, можно определить как

$$P = \lim_{T_c \rightarrow \infty} \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} S^2(t) dt \quad \text{или} \quad P = \lim_{T_c \rightarrow \infty} \frac{E_{T_c}}{T_c}, \quad (1.83)$$

где $E_{T_c} = \int_{-T_c/2}^{T_c/2} S^2(t) dt$ – энергия сигнала длительностью T_c .

Используя (1.82), получаем

$$P = \lim_{T_c \rightarrow \infty} \frac{1}{T_c} \int_{-\infty}^{\infty} S_{T_c}^2(\omega) d\omega, \quad (1.84)$$

где $S_{T_c}(\omega)$ – функция спектральной плотности отрезка сигнала длительностью T_c .

С учётом (1.84) имеем

$$P(\omega) = \lim_{T_c \rightarrow \infty} \frac{1}{T_c} S_{T_c}^2(\omega). \quad (1.85)$$

Представление спектра мощности в виде (1.85) можно использовать как для детерминированных, так и для случайных сигналов и флуктуационных шумов.

1.2.16 Соотношение между длительностью сигнала и шириной его спектра

Понятие длительности сигнала имеет ясный физический смысл для импульсных сигналов (прямоугольный, треугольный и др.), определённых на конечных интервалах времени. Для сигналов, определённых на бесконечном или полубесконечном интервале времени (например гауссов или экспоненциальный импульсы), используют понятие эквивалентной или эффективной длительности сигнала τ_3 в одном из двух определений:

1) под эффективной длительностью понимают конечную величину τ_3 , определённую из решения уравнения

$$\int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt, \quad (1.86)$$

где $(t_2 - t_1) = \tau_3$ (рисунок 1.20, а);

ε – коэффициент, численно определяющий часть полной энергии сигнала, чаще всего принимаемый $\varepsilon = 0,9$ и реже $\varepsilon = 0,95$ или $0,99$;

2) в качестве τ_3 принимается интервал времени, ограниченный значениями t_1 и t_2 , для которых значение $S(t)$ уменьшается с максимального до $0,1$ или $0,05$ (рисунок 1.20, б).

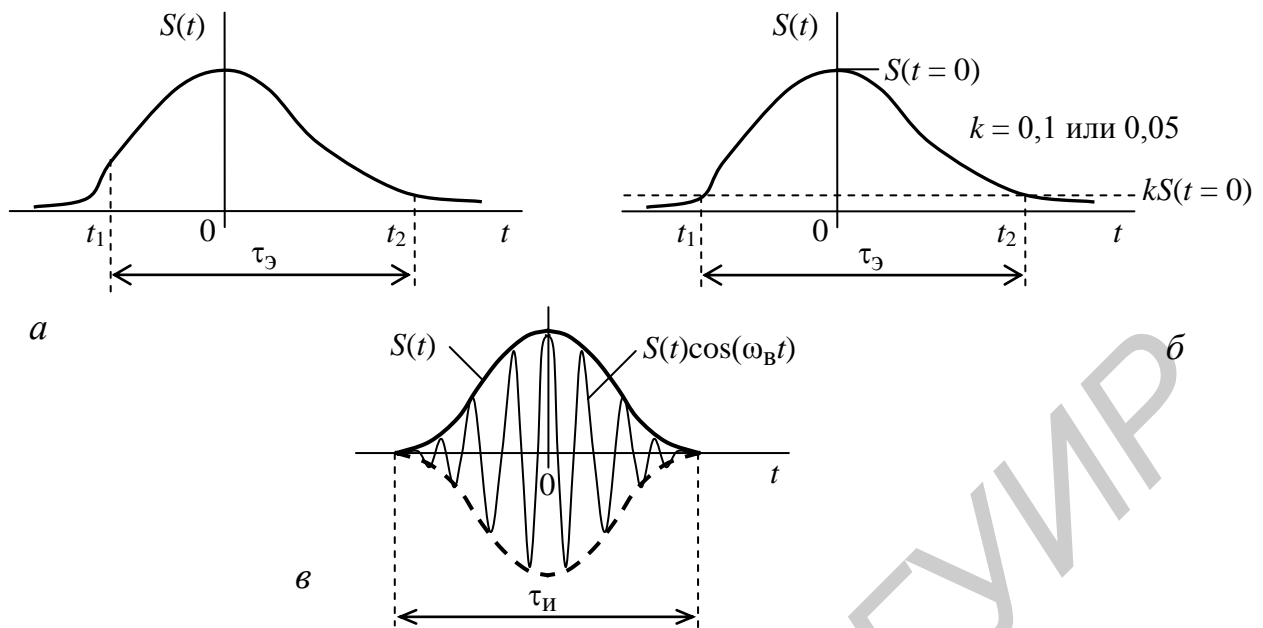


Рисунок 1.20

Из леммы Римана, утверждающей, что если функция $S(t)$ абсолютно интегрируема в некотором конечном интервале времени $[t_1, t_2]$, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cos(\omega t) dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \sin(\omega t) dt = 0, \quad (1.87)$$

и, следовательно, чем короче сигнал, тем выше должна быть частота ω , соответствующая этому условию (рисунок 1.20, б), т. е. граничная частота спектра сигнала ω_B .

Для многих сигналов произведение эффективной длительности на «техническую» ширину спектра Δf_c является величиной, близкой к единице $\tau_3 \Delta f_c \cong 1$. Под технической шириной спектра сигнала подразумевается полоса частот Δf_c , в которой сосредоточена основная часть (90...95 %) энергии сигнала. Например: для прямоугольного импульса в случае $\varepsilon = 1$ и $k = 0,902$ — $\Delta f_c \tau_{и} = 1$; для колокольного импульса в случае $\varepsilon = k = 0,95$ — $\Delta f_c \tau_3 = 0,61$.

Итак, **ширина спектра** зависит от **длительности импульса**, причём **чем меньше** длительность импульса, **тем шире** спектр.

1.2.17 Спектральный анализ сигналов по Лапласу

Прямое преобразование Фурье с математической точки зрения **не позволяет** вычислить спектральную плотность функции сигнала, когда интеграл не имеет конечного значения (сигнал не обладает конечной энергией).

Более универсальным является прямое одностороннее преобразование Лапласа

$$S(p) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-pt} dt, \quad (1.88)$$

получаемое формально из преобразования Фурье отбрасыванием отрицательной части временной оси и заменой мнимого аргумента $j\omega$ на комплексный $\alpha + j\omega$, который называется комплексной частотой (оператором Лапласа). Это соответствует умножению функции $S(t)$ на убывающую экспоненту $e^{-\alpha t}$, благодаря чему интеграл становится конечным. Вычислив функцию

$$S(p = \alpha + j\omega) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-(\alpha + j\omega)t} dt \quad (1.89)$$

и найдя её предел при $\alpha \rightarrow 0$, получим искомую функцию $S(j\omega)$.

Обратное преобразование Лапласа

$$S(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} S(p) e^{pt} dp, \quad (1.90)$$

интегрирование производится на комплексной плоскости параллельно мнимой оси. Функцию $S(p)$ называют изображением функции оригинала $S(t)$, она эквивалентна $S(j\omega)$ и поэтому называется ещё **спектральной плотностью комплексной переменной**.

Физически прямое преобразование Фурье представляет непериодический сигнал рядом неограниченных во времени гармонических сигналов с постоянной амплитудой, а по Лапласу – рядом бесконечных во времени «гармонических» сигналов с экспоненциально убывающей амплитудой. Истинная физическая частота играет роль мнимой части комплексной частоты.

В зависимости от выбора действительной и мнимой частей комплексной частоты можно получать разнообразные вещественные сигналы: $\alpha = 0$ и $\omega \neq 0$ – гармонические колебания вида $\cos(\omega t)$; если $\omega = 0$ и $\pm \alpha \neq 0$ – нарастающие либо убывающие во времени экспоненциальные колебания; если $\omega \neq 0$ и $\pm \alpha \neq 0$ – экспоненциально нарастающие либо убывающие во времени гармонические колебания.

Преобразование Лапласа используется только как математическое средство, удобное при решении задач. Для упрощения анализа и синтеза сигналов по Лапласу используются справочные таблицы операционных соотношений оригинала (временной функции) и изображения (спектральной функции).

1.2.18 Свойства преобразований Фурье и Лапласа (теоремы о спектрах сигналов)

Теоремы о спектрах позволяют существенно облегчить задачу анализа или синтеза сигналов при некоторых преобразованиях функции сигнала или его спектра. Эти теоремы справедливы для анализа по Фурье и Лапласу, и поэтому

в любой из теорем слово «спектр» можно заменить словом «изображение», а слова «временная функция» или «функция сигнала» – словом «оригинал».

В равной степени обозначение $S(j\omega)$ может быть заменено на $S(p)$.

1 Теорема суммирования

Спектр суммы временных функций сигналов равен сумме значений амплитудных и фазовых спектров этих сигналов:

$$S_1(t) + S_2(t) + \dots + S_n(t) \Leftrightarrow S_1(j\omega) + S_2(j\omega) + \dots + S_n(j\omega) . \quad (1.91)$$

2 Теорема умножения на постоянное число

Изменение значений (амплитуды) функции сигнала в « a » раз приводит к изменению в « a » раз значений его амплитудного спектра без изменения его ширины:

$$S(t) \cdot a \Leftrightarrow S(j\omega)a . \quad (1.92)$$

3 Теорема запаздывания (смещения по времени)

Сдвиг начала отсчёта функции сигнала на время $\pm t_0$ приводит к изменению значений его фазового спектра на величину $\mp \omega t_0$:

$$S(t \pm t_0) \Leftrightarrow S(j\omega)e^{\mp j\omega t_0} . \quad (1.93)$$

4 Теорема умножения на $e^{\pm j\omega_0 t}$ (смещения по частоте)

Умножение функции сигнала на величину $e^{\pm j\omega_0 t}$ вызывает смещение спектра на $\mp \omega_0$:

$$S(t)e^{\pm j\omega_0 t} \Leftrightarrow S[j(\omega \mp \omega_0)] . \quad (1.94)$$

5 Теорема подобия

Изменение временного масштаба функции сигнала в « a » раз приводит к изменению в « a » раз значений его амплитудного спектра, частоты гармоник и ширины частотной полосы амплитудного и фазового спектра:

$$S(ta) \Leftrightarrow aS(j\omega a) . \quad (1.95)$$

6 Теорема дифференцирования

Дифференцирование функции сигнала адекватно умножению его исходного спектра на величину $j\omega$, что приводит к увеличению в « ω » раз значений амплитудного спектра и сдвигу на $\pi / 2$ значений фазового спектра:

$$\frac{dS(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega S(j\omega) . \quad (1.96)$$

7 Теорема интегрирования

Интегрирование функции сигнала адекватно делению его исходного спектра на величину $j\omega$, что приводит к уменьшению в « ω » раз значений амплитудного спектра и сдвигу на $-\pi / 2$ значений фазового спектра:

$$\int_0^t S(t)dt \Leftrightarrow S(j\omega) / j\omega \quad (1.97)$$

8 Теорема о свёртке двух сигналов
Спектр свёртки двух сигналов определяется произведением их спектров

$$S_1(t) \otimes S_2(t) \Leftrightarrow S_1(j\omega)S_2(j\omega) \quad (1.98)$$

где
$$S_1(t) \otimes S_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t - \tau)dt$$

9 Теорема дуальности (взаимной обратимости частоты и времени)

Если $S(t)$ имеет спектр $U(j\omega)$, то, рассматривая этот спектр как функцию сигнала $U(t)$, исходный сигнал $S(t)$, представленный в частотной области как $S(-j\omega)$, рассматривается в качестве спектра сигнала $U(t)$.

1.2.19 Структурные схемы устройств для анализа спектра и синтеза сигналов

Практически спектр ИС рассматривается в виде изменения значения модуля амплитуд гармоник от их частоты, называемой спектрограммой. Используемое для этого измерительное устройство называется спектроанализатором. Структурная схема устройства спектроанализатора, использующего фильтровой метод, приведена на рисунке 1.21 и работает как узкополосный приёмник сигналов. Через входное устройство (ВУ) сигнал $U(t)$ поступает на узкополосный перестраиваемый фильтр (Ф), который выделяет напряжение гармоники в спектре сигнала; это напряжение детектируется (Д) и отображается на индикаторе (И).

Из записи тригонометрического ряда Фурье (1.53) и (1.57) следует, что временная функция сигнала $S(t)$ определяется суммой гармонических составляющих с заданными амплитудами и фазами. Следовательно, по заданному спектру (заданной «генной структуре») сигнала можно выполнить синтез (воспроизведение) функции сигнала $S(t)$. На рисунке 1.22 показана структурная схема устройства для синтеза сигналов $S(t)$ по заданной структуре спектров. Сигналы $U_n e^{jn\omega t}$ с генераторов гармоник подаются на сумматор, а на его выходе формируется периодический сигнал $U(t)$.

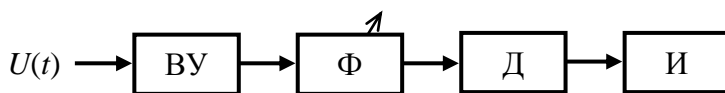


Рисунок 1.21

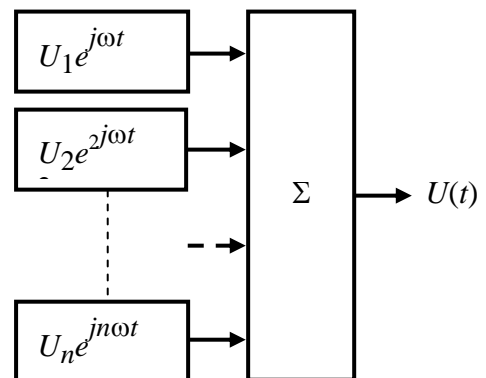


Рисунок 1.22

1.3 Корреляционный анализ детерминированных измерительных сигналов

Важными временными характеристиками, расширяющими представления о сигналах и их свойствах, являются **взаимокорреляционные функции (ВКФ)** и **автокорреляционные функции (АКФ)**. ВКФ устанавливают временную связь между сигналом $S_1(t)$ и другим смещаемым на время τ сигналом $S_2(t - \tau)$, а АКФ – между сигналом $S(t)$ и его копией $S(t - \tau)$. АКФ является частным случаем функции ВКФ, когда сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ идентичны.

Для сигналов, у которых постоянная составляющая (среднее значение) не равна нулю, используется также понятие ковариационной функции.

Как известно, при смещении сигнала по оси времени изменяется только его фазовый спектр, что и приводит к изменению во времени взаимодействия между двумя сигналами.

1.3.1 ВКФ сигнала и ее свойства

Для оценки временной связи между двумя различными комплексными сигналами $\dot{S}_1(t)$ и $\dot{S}_2(t)$ используется ВКФ, которая определяется выражениями:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(t) \dot{S}_2^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(t + \tau) \dot{S}_2^*(t) dt \quad [\text{B}^2 \cdot \text{c}]; \quad (1.99)$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_2(t) \dot{S}_1^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_2(t + \tau) \dot{S}_1^*(t) dt \quad [\text{B}^2 \cdot \text{c}]. \quad (1.100)$$

Учитывая, что, согласно (1.98), величина

$R_{12}(\tau) = \dot{S}_1(\tau) \otimes \dot{S}_2^*(-\tau) \Leftrightarrow S_1(j\omega) S_2^*(j\omega)$ и $S_{12}(j\omega) = S_1(j\omega) S_2^*(j\omega)$ есть взаимная спектральная плотность для сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, то ВКФ связана с взаимным энергетическим спектром двух сигналов $W_{12}(\omega) = |S_{12}(j\omega)|^2$ парой преобразований Фурье:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad [\text{B}^2 \cdot \text{c}] \quad (1.101)$$

и

$$W_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad [\text{B}^2 / \Gamma \text{ц}^2]. \quad (1.102)$$

ВКФ характеризуется следующими основными свойствами:

- 1) $R_{12}(\tau) = E_{12}(\tau)$, где $E_{12}(\tau)$ – взаимная энергия сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$;
- 2) при $\tau = 0$ ВКФ не обязательно достигает абсолютного максимума (рис. 1.23). Например, максимум ВКФ синусоидального и косинусоидального сигналов с одинаковым периодом T имеет место при $\tau = T/4$;

3) ВКФ может не обладать свойством чётности или нечётности относительно $\tau = 0$;

$$4) R_{21}(\tau) \neq R_{12}(\tau), R_{12}(\tau) = R_{21}^*(\tau) \text{ и } R_{21}(\tau) = R_{12}^*(\tau); \quad (1.103)$$

5) из неравенства Коши–Буняковского следует, что сигналы с конечной энергией имеют ВКФ конечной длительности;

6) длительность ВКФ двух импульсных сигналов равна сумме их длительностей;

7) если, например, $S_2(t)$ является дельта-импульсом с равномерным бесконечно широким энергетическим спектром, то ВКФ существует со всеми сигналами и имеет форму $S_1(t)$ (рисунок 1.24);

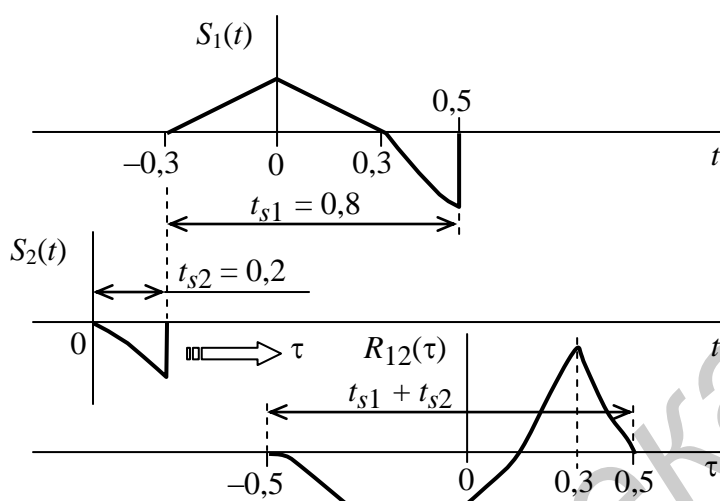


Рисунок 1.23

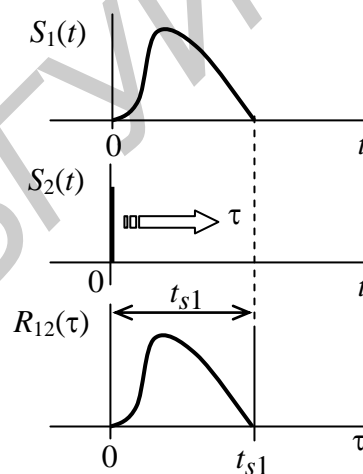


Рисунок 1.24

8) если $S_2(t)$ – функция эрмитова, тогда функция свёртки сигналов совпадает с ВКФ:

$$R_{12}(\tau) = S_1(t) \otimes S_2(t - \tau); \quad (1.104)$$

9) для двух сигналов, у которых частотные диапазоны спектров не перекрываются или которые сами не перекрываются во времени, а также для ортогональных сигналов ВКФ равна нулю, т. е. они не имеют взаимной энергии и некоррелированы.

1.3.2 АКФ сигнала и ее свойства

АКФ $R(\tau)$ вводится для количественной оценки степени отличия сигнала $S(t)$ и его копии $S(t - \tau)$, смещаемой во времени, и определяется как их скалярное произведение, характеризующее изменение взаимной энергии от временного смещения (сдвига или задержки) τ :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t - \tau)dt \quad [\text{В}^2 \cdot \text{с}]. \quad (1.105)$$

Для комплексного сигнала

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t+\tau)\dot{S}^*(t)dt, \quad (1.106)$$

из выражения видно, что АКФ есть свёртка сигнала $S(t)$ с его зеркальным отображением во времени $S(-t)$, т. е.

$$R(\tau) = S(t) \otimes S(-t - \tau). \quad (1.107)$$

Очевидно, что $\dot{R}^*(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}^*(t)\dot{S}(t-\tau)dt = \dot{R}(-\tau)$, и, следовательно, комплексная

АКФ обладает свойствами функции Эрмита, т. е. её модуль и действительная часть являются чётными функциями, а фаза и мнимая часть – нечётными функциями временного сдвига τ .

На основании теоремы о свёртке функций сигналов $S(t)$ и $S(-t)$ имеем

$$S(t) \otimes S(-t) \Leftrightarrow S(j\omega)S^*(j\omega) = |S(j\omega)|^2, \quad (1.108)$$

где $S(j\omega)$ и $S^*(j\omega)$ – спектральная плотность сигнала $S(t)$ и $S(-t)$;

$|S(j\omega)|^2 = W(\omega)$ – спектральная плотность энергии (энергетический спектр) сигнала.

Тогда

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S^*(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \quad [\text{В}^2 \cdot \text{с}] \quad (1.109)$$

и

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad [\text{В}^2 / \Gamma\tau^2]. \quad (1.110)$$

Выражения (1.109) и (1.110) называются соотношениями Винера–Хинчина и из них следует, что АКФ сигнала $S(t)$ и его энергетический спектр взаимосвязаны между собой преобразованиями Фурье.

Можно утверждать, что чем шире энергетический спектр сигнала, тем меньше интервал корреляции τ_K , т. е. меньше величина τ , в пределах которой $R(\tau) \neq 0$.

Так как в энергетическом спектре отсутствуют сведения о фазовой характеристике спектра сигнала, сигналы, у которых модуль спектральной плотности одинаков, имеют одну и ту же АКФ. Например, АКФ одинаковы для синусоидального и косинусоидального гармонических сигналов.

АКФ характеризуется следующими основными свойствами:

- 1) АКФ существует для всех сигналов;
- 2) для фиксированного момента времени τ АКФ равна площади, ограниченной осью абсцисс и графиком функции, описывающей произведение сигналов $S(t)S(t - \tau)$, т. е. общей площадью перекрытия двух сигналов;
- 3) АКФ характеризует как положение сигналов на оси времени, так и скорость их изменения;
- 4) длительность АКФ импульсных сигналов равна удвоенной их длительности;
- 5) при $\tau = 0$ АКФ равна энергии сигнала

$$R(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = E_S \quad [\text{В}^2 \cdot \text{с}]; \quad (1.111)$$

б) при любом значении временного сдвига τ модуль АКФ не превосходит энергии сигнала

$$|R(\tau)| \leq R(\tau = 0) = E_S; \quad (1.112)$$

- 7) АКФ функция чётная $R(\tau) = R(-\tau)$;
- 8) АКФ является симметричной кривой с центральным экстремумом, который всегда положителен;
- 9) в зависимости от вида сигнала $S(t)$ функция АКФ может иметь как монотонно убывающий, так и колеблющийся характер;
- 10) АКФ обращается в нуль при значениях τ , когда сигналы становятся ортогональными или не перекрываются во времени.

1.3.3 Примеры АКФ

1.3.3.1 АКФ для сигналов конечной длительности

На рисунке 1.25 показан сигнал в виде «пачки» из трёх одинаковых прямоугольных импульсов с одинаковым интервалом T и его АКФ. Максимальное значение АКФ при $\tau = 0$ равно $3E$ – утроенной энергии одного импульса.

1.3.3.2 АКФ периодических сигналов

Периодические сигналы являются бесконечно протяжёнными во времени и, следовательно, имеют бесконечно большую энергию. Для таких сигналов АКФ определяется в пределах одного периода T в единицах средней мощности, т. е.

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{S}(t + nT) \dot{S}^*(t + nT - \tau) dt = R(\tau - nT) \quad [\text{В}^2], \quad (1.113)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

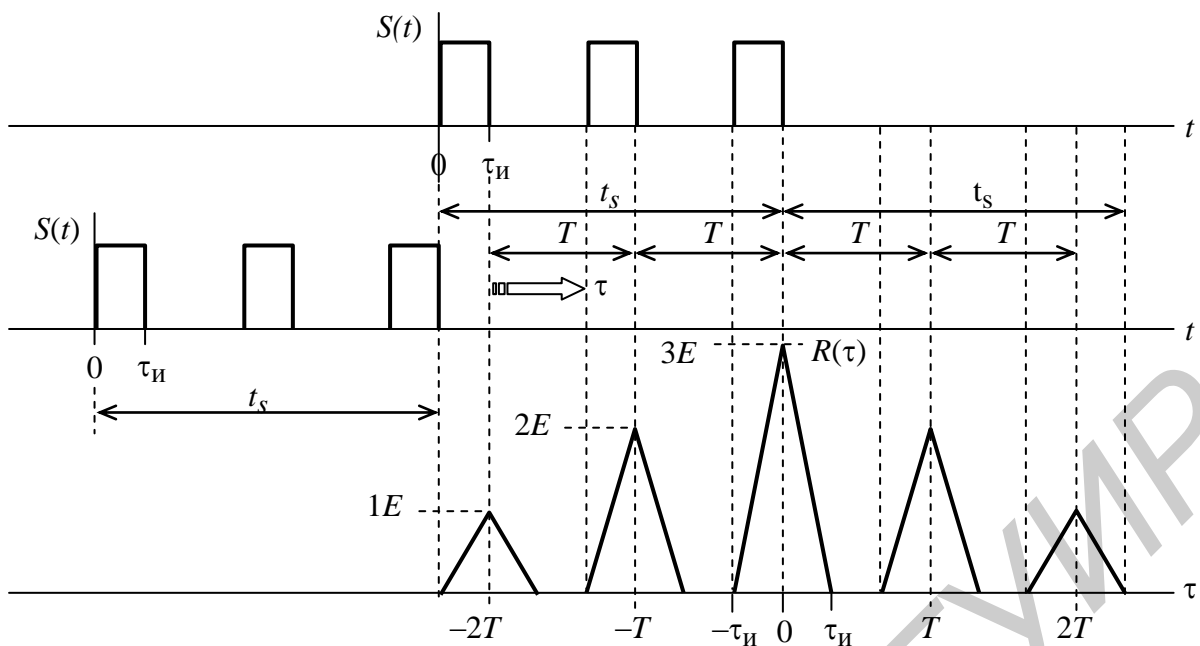


Рисунок 1.25

Таким образом, АКФ периодического сигнала является периодической функцией (рисунок 1.26) с периодом, равным периоду T сигнала, и не даёт представления о времени появления сигнала.

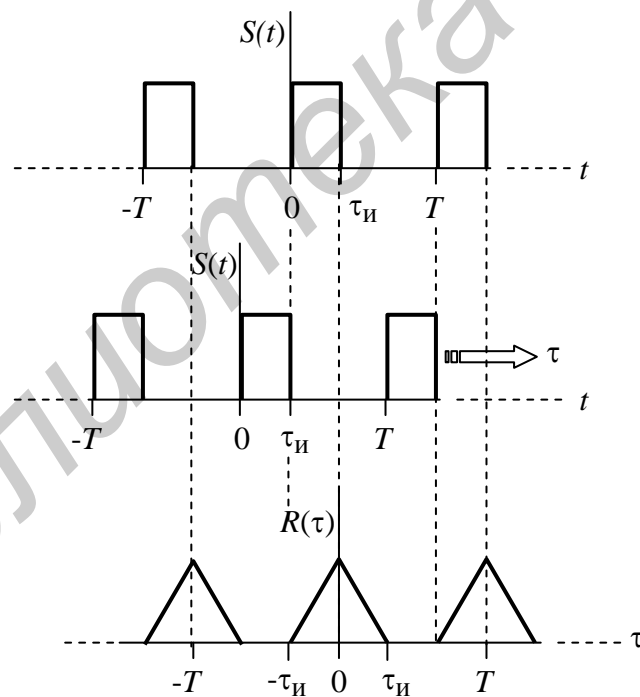


Рисунок 1.26

1.3.3.3 АКФ неограниченно протяжённых сигналов

Для неограниченно протяжённых сигналов считают, что они получаются из некоторого импульсного сигнала, когда его длительность τ_u стремится к бесконечности. Тогда АКФ определяется средней взаимной мощностью сигнала и его копии:

$$R(\tau) = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} S(t)S(t-\tau)dt. \quad (1.114)$$

1.3.3.4 АКФ дискретного во времени сигнала

Сигналы с дискретной во времени структурой широко используются для кодирования измерительной информации. Дискретный во времени сигнал представляется целым числом « m » равных интервалов дискретизации его длительности, на которых сигнал S_m может принимать фиксированные значения. В этом случае для АКФ операцию интегрирования можно заменить операцией суммирования, а переменную τ изменять дискретно на величину интервала дискретизации сигнала, тогда АКФ принимает вид

$$R(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (S_m S_{m-n}), \quad (1.115)$$

где n – целое число, указывающее, на сколько интервалов дискретизации сдвинута копия сигнала.

АКФ дискретного сигнала при $n = 0$ равна энергии сигнала.

Примером дискретного во времени сигнала являются сигналы Баркера, которые принимают фиксированные значения, кодируемые, например, числами 1 и -1 (рисунок 1.27).

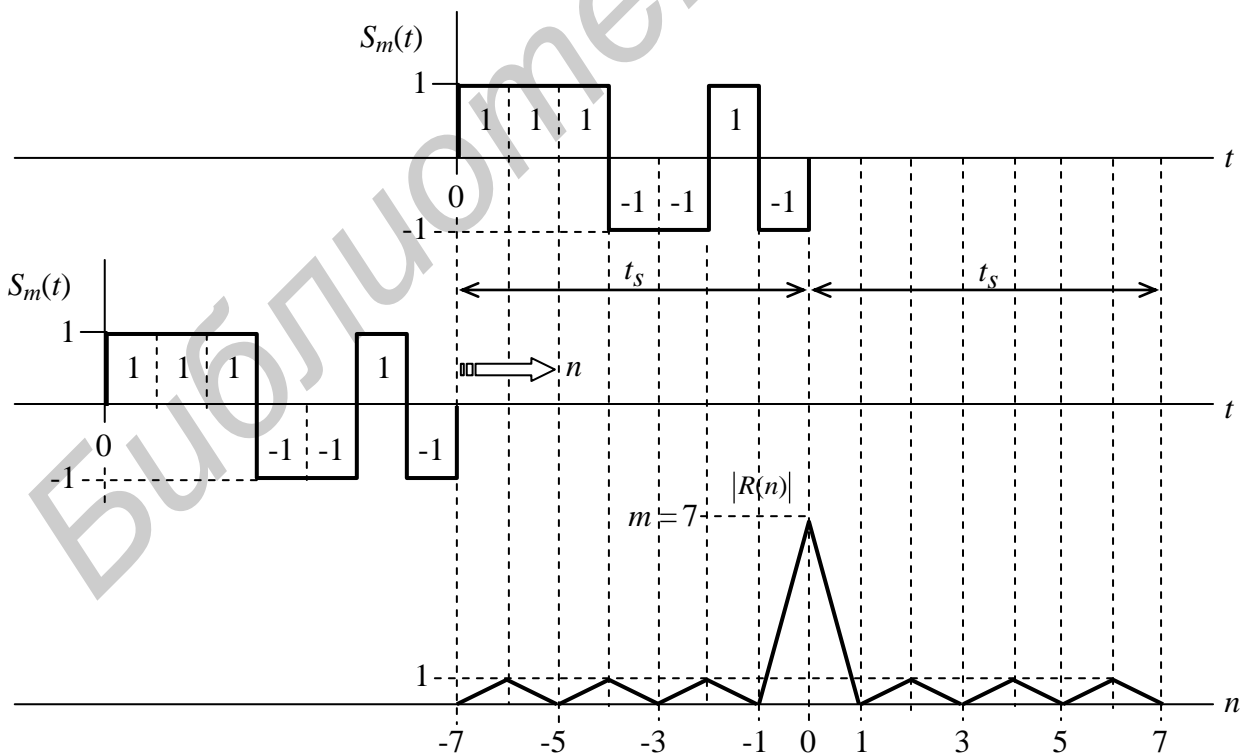


Рисунок 1.27

Сигналы Баркера можно реализовать при числе интервалов дискретизации $m = 2, 3, 4, 5, 7; 11$ и 13 . АКФ таких сигналов обладают следующим уникальным свойством: их значения при всех $n \neq 0$ равны некоторому уровню (принимаемому за единицу), а при $n = 0$ в « m » раз превышают этот единичный уровень (см. рисунок 1.27), что позволяет улучшить обработку сигнала на фоне помех.

1.3.4 Обобщённая структурная схема коррелометра

Схема содержит переменную линию задержки (ЛЗ) сигнала во времени, перемножитель и интегратор (рисунок 1.28). Коррелируемые сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ соответственно подаются на вход перемножителя и ЛЗ. Сигнал $S_2(t)$, задержанный в ЛЗ на время τ , перемножается с сигналом $S_1(t)$, и полученный результат поступает на интегратор. Сигнал на выходе интегратора является функцией корреляции $R_{12}(\tau)$.

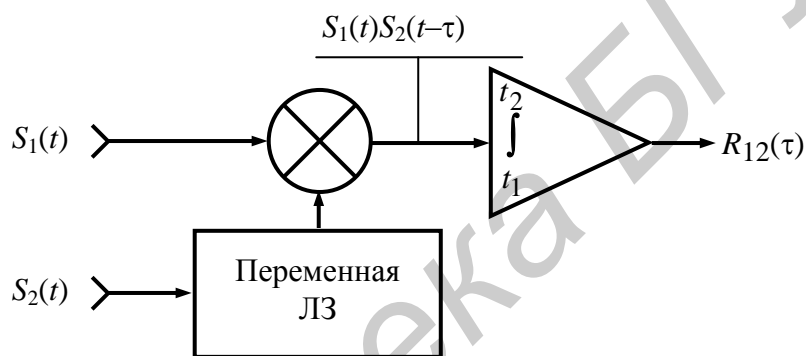


Рисунок 1.28

1.4 Математическое описание детерминированных измерительных радиосигналов

1.4.1 Необходимость преобразования видеосигналов в радиосигналы

Как правило, у видеосигналов спектр содержит низкие частоты и отношение $\Delta f_c / f_0 \gg 1$, где Δf_c – ширина его спектра, а f_0 – средняя частота спектра. Такой спектр частот передать на большое расстояние непосредственно с помощью радиоволн невозможно из-за относительной узкополосности ($2\Delta f_{0,7} / f_0 \ll 1$) передающих и приёмных устройств, а также их антенн и особенностей распространения различных длин радиоволн.

Чтобы сделать спектр видеосигнала относительно узкополосным $\Delta f_c f_0 \ll 1$, необходимо повысить его среднюю частоту f_0 , т. е. перенести спектр видеосигнала из низкочастотной области в диапазон достаточно высоких частот. Такое преобразование спектра видеосигналов может быть получено с помощью процедуры управления (модуляции) одним или несколькими параметрами вспомогательного высокочастотного сигнала-переносчика, называемого

несущим. При этом частота несущего сигнала $f_H \gg f_B$, где f_B – верхняя частота спектра видеосигнала. Поэтому, чем выше требуемая скорость передачи информации и, следовательно, шире спектр сообщения (больше f_B), тем выше должна быть несущая частота радиосигнала.

В качестве несущего сигнала чаще всего используется высокочастотный гармонический сигнал. В зависимости от того, какой из трёх его параметров модулируется: амплитуда, частота или фаза, – различают, соответственно, АМ-, ЧМ- и ФМ-радиосигналы. ЧМ- и ФМ-сигнал рассматривают как радиосигнал с УМ.

Тогда в самом общем случае радиосигнал можно представить в виде

$$U(t) = U_m(t)\cos[\Theta(t)], \quad (1.116)$$

где амплитуда $U_m(t)$ или фаза $\Theta(t)$ изменяются по закону передаваемого видеосигнала.

При любом виде модуляции амплитуда, частота и фаза радиосигнала должны изменяться в пределах одного периода настолько медленно, чтобы можно было считать несущее колебание гармоническим.

При дальнейшем рассмотрении свойств радиосигналов и их спектров будем полагать, что выполняется условие «медленности» функции $U_m(t)$ и $\Theta(t)$, задаваемое как

$$\left| \frac{dU_m}{dt} \right| \frac{1}{U_m} \ll f_0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{d^2\Theta}{dt^2} \right| \ll 2\pi f_0^2. \quad (1.117)$$

1.4.2 Временные и спектральные характеристики однотонового АМ-радиосигнала

При АМ в высокочастотном (ВЧ) несущем колебании $U_H(t) = U_{mH} \cos(\omega_H t + \varphi_0)$ (рисунок 1.29, а) остаются неизменными частота ω_H и начальная фаза φ_0 , а изменяется только его амплитуда U_{mH} по закону измерительного видеосигнала $U_M(t)$, т. е. $U_{mH}(t) = f[U_M(t)]$ и

$$U_{AM}(t) = U_{mH}(t) \cos(\omega_H t + \varphi_0). \quad (1.118)$$

Изменение $U_{AM}(t)$ «вниз» не может быть больше U_{mH} , а изменение «вверх» может быть больше U_{mH} .

Рассмотрим случай, когда амплитуда $U_{mH}(t)$ изменяется по закону модулирующего низкочастотного (НЧ) гармонического видеосигнала $U_M(t) = U_{mM} \cos(\Omega_M t - \psi_0)$, где U_{mM} – амплитуда; Ω_M – частота; ψ_0 – начальная фаза (рисунок 1.29, б). Тогда амплитуду ВЧ-колебания можно записать в виде

$$U_{mH}(t) = U_{mH} [1 + m \cos(\Omega_M t - \psi_0)] , \quad (1.119)$$

где U_{mH} – амплитуда немодулированного (несущего) ВЧ-колебания;

$$m = b \frac{U_{mM}}{U_{mH}} , \quad (1.120)$$

где m – коэффициент модуляции;

b – коэффициент пропорциональности.

Тогда АМ-сигнал получим в виде (рисунок 1.29, в)

$$U_{AM}(t) = U_{mH} [1 + m \cos(\Omega_M t - \Psi_0)] \cos(\omega_H t + \varphi_0) . \quad (1.121)$$

Коэффициент модуляции m можно определить формуле

$$m = (U_{AMmax} - U_{AMmin}) / (U_{AMmax} + U_{AMmin}) = \Delta U_{AM} / U_{mH} . \quad (1.122)$$

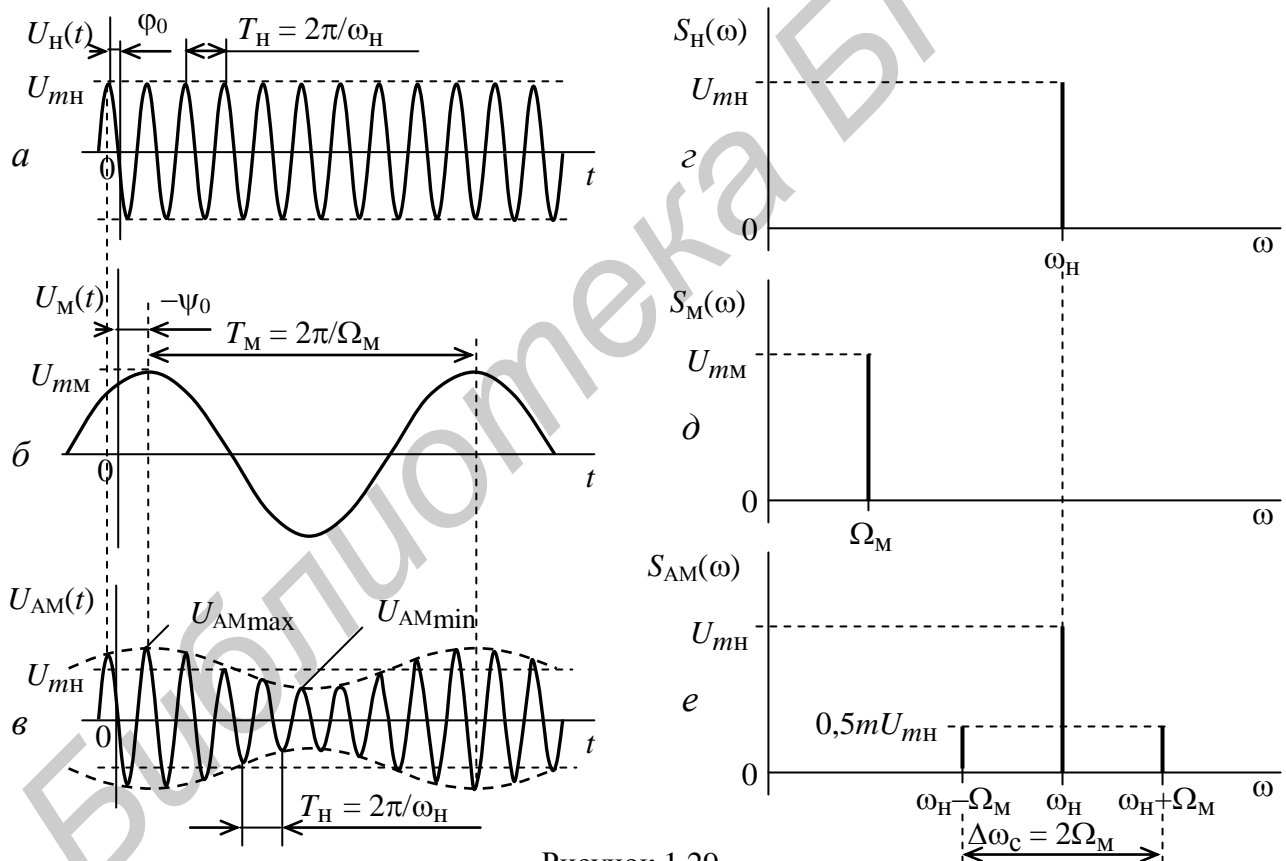


Рисунок 1.29

Так как максимальное изменение ΔU_{AM} не должно по абсолютной величине превышать U_{mH} , коэффициент m не должен превышать 1 (100 %). Максимальное значение амплитуды $U_{AMmax} = U_{mH}(1 + m)$ и минимальное $U_{AMmin} = U_{mH}(1 - m)$.

Для нахождения спектра АМ-сигнала преобразуем (1.121), используя тригонометрические формулы, к виду

$$U_{AM}(t) = U_{mH} \cos(\omega_H t + \varphi_0) + 0,5mU_{mH} \cos[(\omega_H + \Omega_M)t + \varphi_0 - \psi_0] + \\ + 0,5mU_{mH} \cos[(\omega_H - \Omega_M)t + \varphi_0 + \psi_0]. \quad (1.123)$$

Первое слагаемое в (1.123) представляет собой немодулированное ВЧ-колебание с частотой ω_H . Второе и третье слагаемые с частотами $(\omega_H + \Omega_M)$ и $(\omega_H - \Omega_M)$ называются, соответственно, **верхней** и **нижней** боковыми составляющими, амплитуды которых одинаковы и равны

$$U_{mБ} = 0,5mU_{mH}. \quad (1.124)$$

Спектры ВЧ-колебания, модулирующего сигнала и АМ-сигнала соответственно показаны на рисунке 1.29, *г*, *д*, *е*. Из спектрограммы видно, что ширина спектра АМ-сигнала равна **удвоенной** частоте модулирующего сигнала:

$$\Delta\omega_c = 2\Omega_M. \quad (1.125)$$

АМ-сигнал можно представить в виде векторной диаграммы, ось времени которой вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω_H (рисунок 1.30).

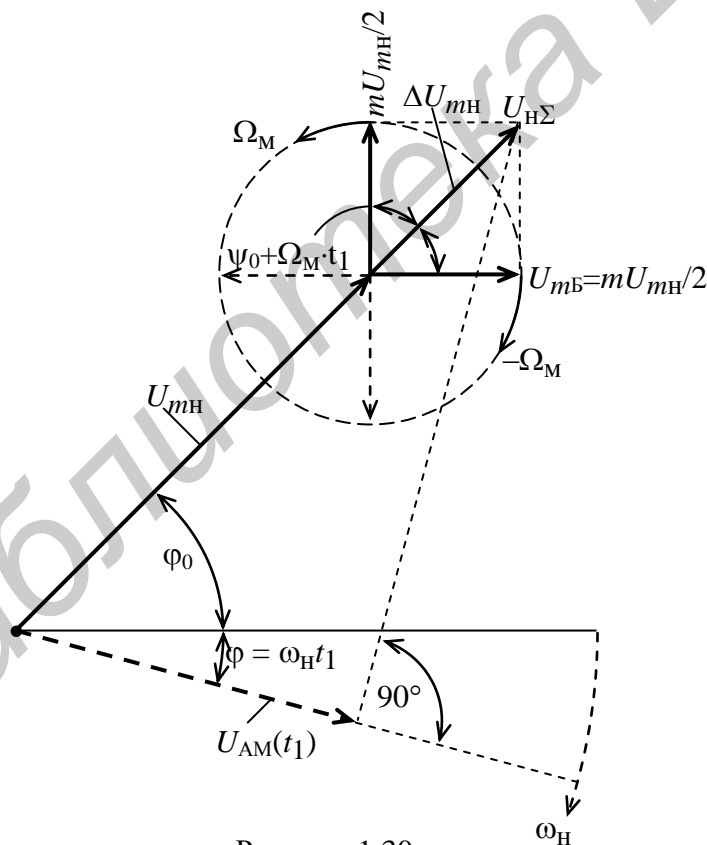


Рисунок 1.30

Для соотношения (1.123) она состоит из трёх векторов: ВЧ-колебание изображается **неподвижным** вектором длиной U_{mH} под углом φ_0 от начала отсчёта; боковые составляющие образуют два вектора длиной $0,5mU_{mH}$, которые

вращаются навстречу друг другу с угловой скоростью Ω_M . Сумма трёх векторов образует вектор, проекция которого на ось времени даёт мгновенное значение напряжения АМ-сигнала в фиксированный момент времени, которое будет меняться вследствие вращения векторов напряжения боковых составляющих.

1.4.3 Энергетические свойства АМ-сигнала

Максимальная (пиковая) мощность

$$P_{\max} = P_H(1 + m)^2$$

и минимальная

$$P_{\min} = P_H(1 - m)^2,$$

где $P_H = U_{mH}^2 / 2R$ – мощность несущей;

$$P_{\text{б}} = m^2 P_H / 4.$$

При $m = 1$ $P_{\max} = 4P_H$ и $P_{\min} = 0$. Средняя мощность равна сумме мощностей всех составляющих спектра:

$$P_{\text{ср}\Sigma} = P_H + 2P_{\text{б}} = \frac{U_{mH}^2}{2R} + \frac{m^2 U_{mH}^2}{4R} = \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) P_H, \quad (1.126)$$

при $m = 1$, $P_{\text{ср}} = 1,5P_H$ и $P_{\text{б}} = 0,25P_H$.

Поскольку **информация о передаваемом сигнале содержится только в боковых составляющих** и их суммарная мощность вдвое меньше P_H , такой вид АМ-сигнала энергетически неэффективен.

Более эффективен АМ-сигнал с подавленной несущей:

$$U_{\text{АМ}}(t) = 0,5mU_{mH} \cos[(\omega_H + \Omega_M)t + \varphi_0 - \psi_0] + \\ + 0,5mU_{mH} \cos[(\omega_H - \Omega_M)t + \varphi_0 + \psi_0]. \quad (1.127)$$

Его спектр содержит только две боковые составляющие (рисунок 1.31, а) с амплитудой $U_{m\text{б}} = 0,5mU_{mH}$, и форма сигнала имеет вид биений двух гармонических колебаний (рисунок 1.31, б). Однако при демодуляции этого сигнала необходимо восстановить несущее колебание.

$$U_{\text{АМ}}(t) = 0,5mU_{mH} \cos[(\omega_H + \text{или} - \Omega_M)t + \varphi_0 - \text{или} + \psi_0]. \quad (1.128)$$

Так как информация о передаваемом сигнале содержится в каждой боковой составляющей, для уменьшения ширины спектра в два раза используется АМ-сигнал с подавленной верхней или нижней боковой (ОБП- или SSB-сигналы – от английского single-side band) составляющей:

$$U_{\text{АМ}}(t) = U_{mH} \cos(\omega_H t + \varphi_0) + 0,5mU_{mH} \times \\ \times \cos[(\omega_H + \text{или} - \Omega_M)t + \varphi_0 - \text{или} + \psi_0]. \quad (1.129)$$

Спектр сигнала с ОБП содержит несущую и боковую составляющую (рисунок 1.31, в) с амплитудой $U_{mб} = 0,5mU_{mH}$, и форма сигнала имеет вид, показанный на рисунке 1.31, з.

Используют сигнал с ОБП и полным (рисунок 1.31, д и е) или частичным подавлением несущего колебания.

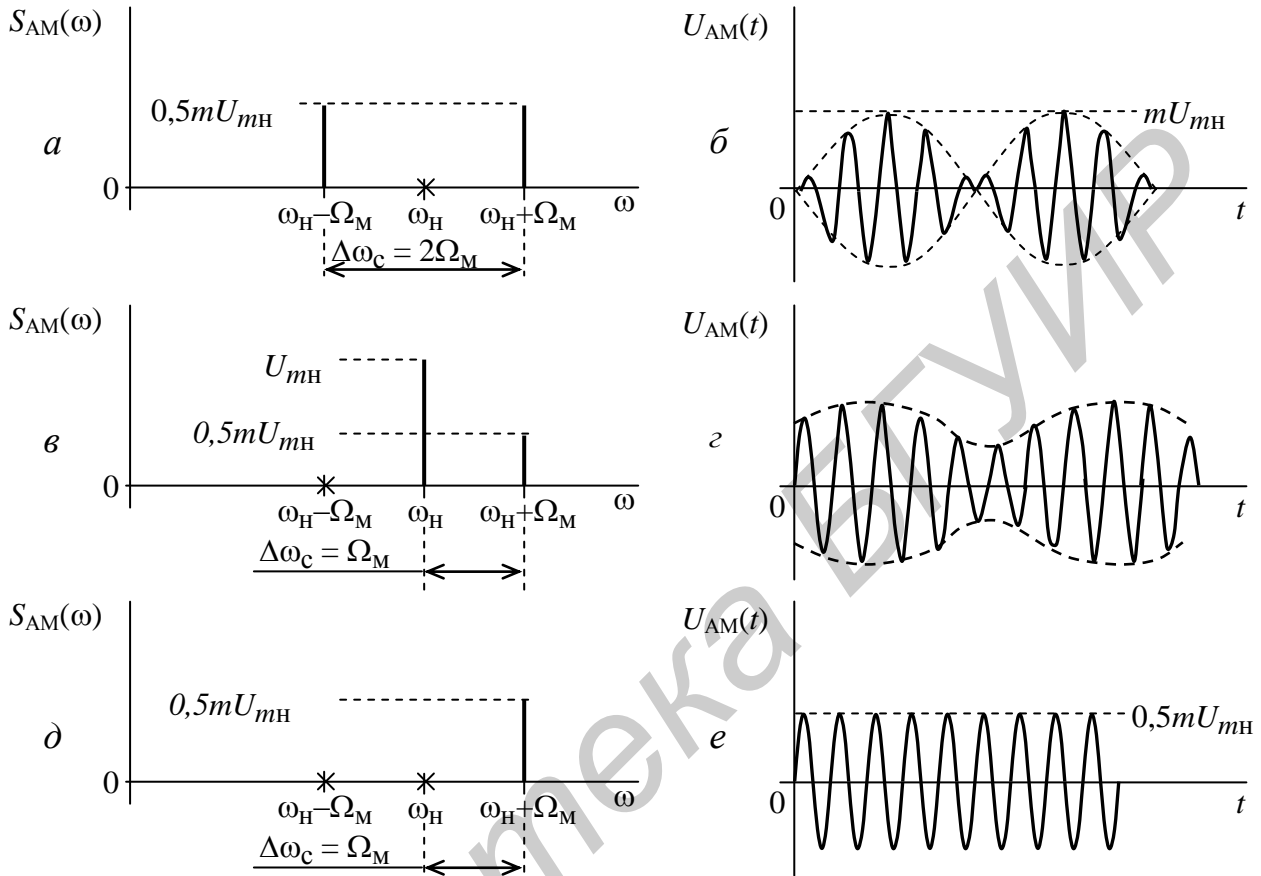


Рисунок 1.31

Если спектр модулирующего сигнала $S_M(\omega)$ содержит ряд гармонических составляющих с различными частотами (рисунок 1.32, а), то каждое из них в спектре АМ-сигнала создаёт, соответственно, верхнюю и нижнюю боковые составляющие, образующие нижнюю и верхнюю (рисунок 1.32, б) боковые полосы.

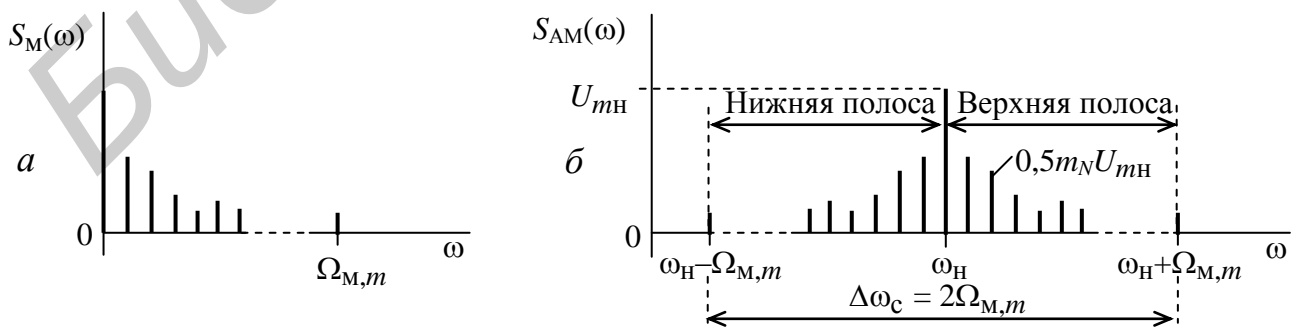


Рисунок 1.32

Из рисунка 1.32, б видно, что ширина спектра АМ-сигнала $S_{AM}(\omega)$ зависит от **максимального** значения частоты $\Omega_{m,m}$ составляющей в спектре модулирующего сигнала и равна

$$\Delta\omega_c = 2\Omega_{m,m} . \quad (1.130)$$

Амплитуды боковых составляющих многотонального АМ-сигнала определяются как

$$U_{\delta N} = 0,5m_N U_{mN} , \quad (1.131)$$

где m_N – парциальный коэффициент модуляции, который, согласно (1.120), зависит от амплитуды N -й составляющей модулирующего сигнала.

1.4.4 Импульсные АМ-сигналы и их АКФ

При $m = 100\%$ осциллограмма АИМ-сигнала имеет вид, показанный на рисунке 1.33. В нём начальная фаза в радиоимпульсах с длительностью $\tau_{и}$ совпадает с текущей фазой несущего колебания. Если это условие не выполняется, такой АИМ-сигнал называется манипулированным и его спектр отличается от модулированного.

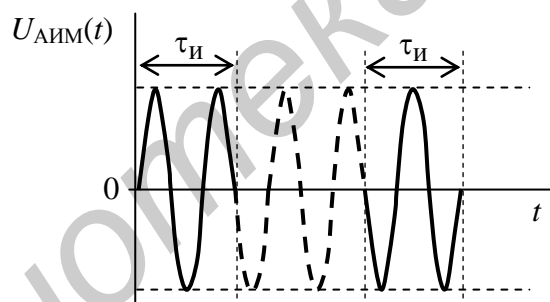


Рисунок 1.33

В случае АМ-сигнала, когда $S(t) = A(t)\cos(\omega_H t + \Theta_0)$, его АКФ определяется

$$R_{AM}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(\omega_H \tau) \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau)A(\tau - \tau)dt = \frac{1}{2} \cos(\omega_H \tau)R_A(\tau) , \quad (1.132)$$

т. е. равна произведению АКФ огибающей $R_A(\tau)$ и ВЧ заполнения (рисунок 1.34).

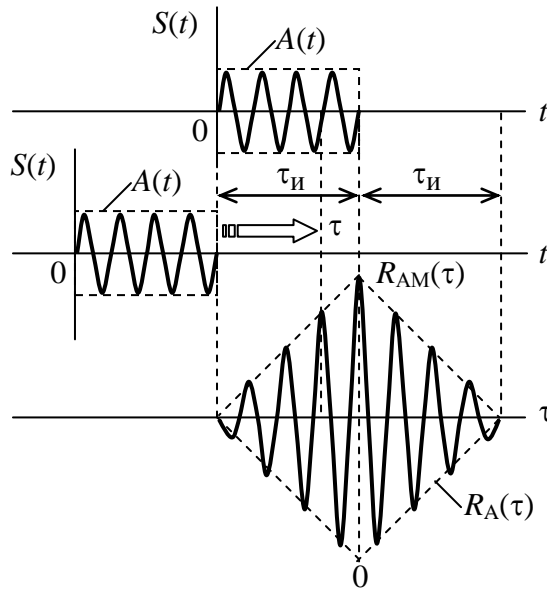


Рисунок 1.34

1.4.5 Временные и спектральные характеристики однотонального радиосигнала с УМ

Фазо- и частотно-модулированные сигналы (ФМ и ЧМ) характеризуются тем, что в несущем ВЧ-колебании $U_H(t) = U_{mH} \cos(\omega_H t + \varphi)$ при постоянной амплитуде U_{mH} соответственно **изменяется текущая фаза φ либо мгновенная частота ω_H** (рисунок 1.35, а).

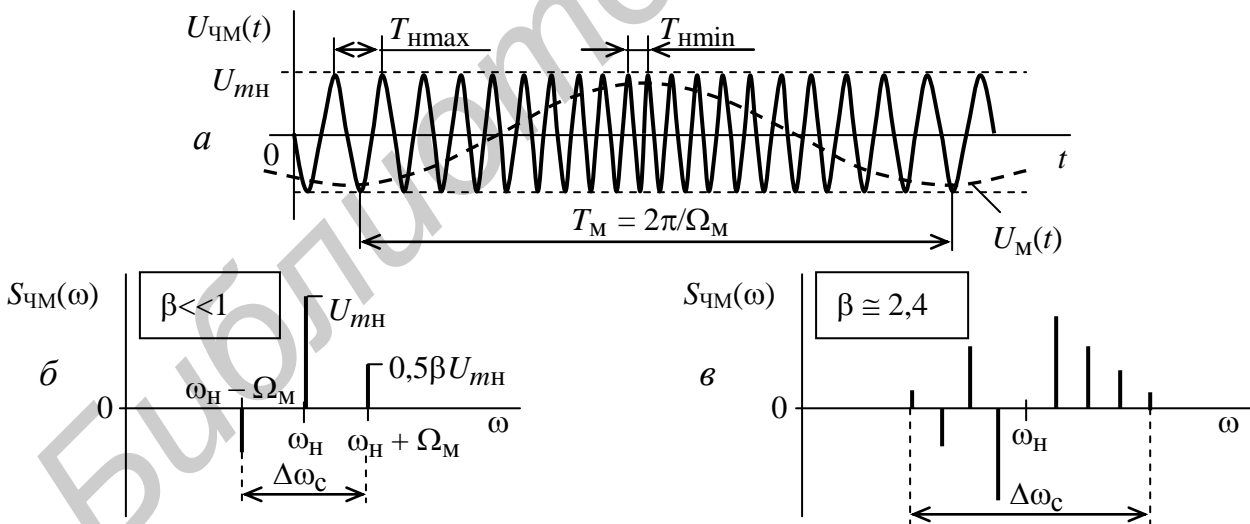


Рисунок 1.35

Поскольку $\Psi(t) = \omega_H t + \varphi$ определяет текущее значение фазового угла, называемое полной фазой, то оба вида модуляции называются **угловой** модуляцией (УМ), т. е.

$$U_{УМ}(t) = U_{mH} \cos[\psi(t)] . \quad (1.133)$$

При ФМ

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_{m\text{H}} \cos[\omega_{\text{H}}t + k_{\text{ф}}U_{\text{M}}(t)] , \quad (1.134)$$

где $k_{\text{ф}}$ [рад / В] – коэффициент пропорциональности для ФМ;
 ω_{H} – частота ВЧ-колебания без модуляции.

Предельное значение $\pm\varphi_{\text{д}} = \pm U_{\text{Mmax}}(t)k_{\text{ф}}$ называется **девиацией фазы**.

При ЧМ изменяется **мгновенная частота** как $\omega(t) = \omega_{\text{H}} + k_{\text{ч}}U_{\text{M}}(t)$, и её предельное значение, равное $\pm\Delta\omega_{\text{д}} = \pm U_{\text{Mmax}}(t)k_{\text{ч}}$, называется **девиацией частоты** ($k_{\text{ч}}$ [рад / (В·с)] – коэффициент пропорциональности для ЧМ). Так как мгновенная частота УМ-сигнала $\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}$, то текущая фаза

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t)dt + \text{const} . \quad (1.135)$$

Если $U_{\text{M}}(t)$ плавно изменяющийся сигнал, то нет внешних различий между сигналами ФМ и ЧМ.

В случае однотонового модулирующего видеосигнала мгновенная частота ЧМ-сигнала изменяется по гармоническому закону (рисунок 1.35, а):

$$\omega(t) = \omega_{\text{H}} + \Delta\omega_{\text{д}} \cos(\Omega_{\text{M}}t) . \quad (1.136)$$

Подставив (1.136) в (1.135), получим

$$\psi(t) = \omega_{\text{H}}t + \beta \sin(\Omega_{\text{M}}t + \psi_0) , \quad (1.137)$$

где $\beta = \Delta\omega_{\text{д}} / \Omega_{\text{M}}$ – индекс частотной модуляции;

ψ_0 – начальная фаза (константа интегрирования).

Подставив (1.137) в (1.133), получим выражение для ЧМ-сигнала вида

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_{m\text{H}} \cos[\omega_{\text{H}}t + \beta \sin(\Omega_{\text{M}}t) + \psi_0] . \quad (1.138)$$

Представим (1.138) при $\psi_0 = 0$ в виде суммы гармонических составляющих

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_{m\text{H}} \cos[\beta \sin(\Omega_{\text{M}}t)] \cos(\omega_{\text{H}}t) - U_{m\text{H}} \sin[\beta \sin(\Omega_{\text{M}}t)] \sin(\omega_{\text{H}}t) , \quad (1.139)$$

$$U_{m\text{H}} \sin[\beta \sin(\Omega_{\text{M}}t)] \sin(\omega_{\text{H}}t) .$$

В случае $\beta \ll 1$ можно считать, что $\cos[\beta \sin(\Omega_{\text{M}}t)] \cong 1$ и $\sin[\beta \sin(\Omega_{\text{M}}t)] \cong \beta \sin(\Omega_{\text{M}}t)$, тогда

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_{m\text{H}} \cos(\omega_{\text{H}}t) - \beta U_{m\text{H}} \sin(\Omega_{\text{M}}t) \sin(\omega_{\text{H}}t) = U_{m\text{H}} \cos(\omega_{\text{H}}t) + 0,5\beta U_{m\text{H}} \cos(\omega_{\text{H}} + \Omega_{\text{M}})t - 0,5\beta U_{m\text{H}} \cos(\omega_{\text{H}} - \Omega_{\text{M}})t . \quad (1.140)$$

Следовательно, при $\beta \ll 1$ спектр ЧМ-сигнала содержит колебание с частотой ω_H и две боковые составляющие на частотах $(\omega_H + \Omega_M)$ и $(\omega_H - \Omega_M)$, т. е. ширина спектра равна

$$\Delta\omega_c = 2\Omega_M. \quad (1.141)$$

Сравнение спектров однотонального сигнала $U_{\text{ЧМ}}(t)$ (1.140) с $U_{\text{АМ}}(t)$ (1.123) показывает, что ЧМ-сигнал отличается только фазой -180° нижней боковой составляющей (рисунок 1.35, б). Индекс β играет ту же роль, что и коэффициент m .

При $\beta > 1$ необходимо пользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \cos[\beta \sin(\Omega_M t)] &= J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos(2\Omega_M t) + 2J_4(\beta) \cos(4\Omega_M t) + \dots \\ \sin[\beta \sin(\Omega_M t)] &= \\ &= 2J_1(\beta) \cos(\Omega_M t) + 2J_3(\beta) \cos(3\Omega_M t) + \dots, \end{aligned} \quad (1.142)$$

где $J_n(\beta)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка от аргумента β .

С учётом (1.142) соотношение (1.139) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} U_{\text{ЧМ}}(t) &= U_{mH} J_0(\beta) \cos(\omega_H t) + U_{mH} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_H + n\Omega_M)t + \\ &+ U_{mH} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(\beta) \cos(\omega_H - n\Omega_M)t. \end{aligned} \quad (1.143)$$

Следовательно, при $\beta > 1$ спектр однотонального ЧМ-сигнала содержит **бесконечное** число гармонических составляющих (ширина спектра бесконечна) с частотами $(\omega_H + n\Omega_M)$ и $(\omega_H - n\Omega_M)$, симметрично расположенных относительно частоты несущего колебания ω_H и для нечётной n -й нижней боковой полосы имеющих фазу минус 180° . Амплитуда n -й боковой составляющей равна

$$U_n = J_n(\beta) U_{mH}, \quad (1.144)$$

однако начиная с $n = \beta + 1$ боковые составляющие можно не учитывать, т. к. их амплитуды становятся весьма малыми и ими можно пренебречь. Поэтому можно считать, что однотональный ЧМ-сигнал занимает полосу частот

$$\Delta\omega_c = 2\Omega_M (\beta + 1), \quad (1.145)$$

а если $\beta \gg 1$, можно допустить, что

$$\Delta\omega_c \cong 2\Omega_M \beta = 2\Delta\omega_d, \quad (1.146)$$

т. е. ширина спектра приблизительно равна удвоенной девиации частоты.

На рисунке 1.35, б, в, показаны спектры ЧМ-сигналов при различных индексах β . Графики функций Бесселя различного порядка « n » приведены на рисунке 1.36.

Из графиков(см. рисунок 1.36) функций Бесселя видно, что при $\beta \cong 2,4$ функция $J_0(\beta)$ проходит через нуль и **отсутствует** несущее колебание, а при $\beta \cong 3,83$ функция $J_1(\beta)$ равна нулю, что указывает на **отсутствие** в спектре первой пары боковых составляющих.

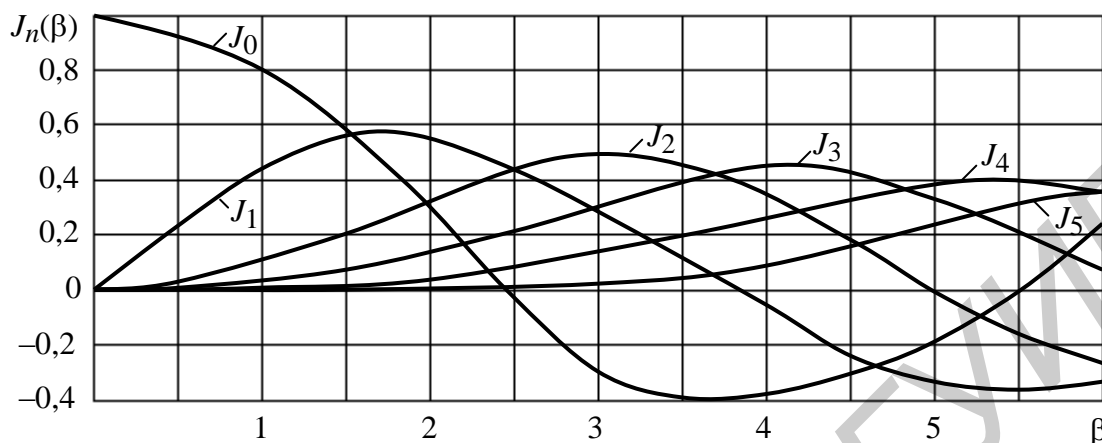


Рисунок 1.36

При дальнейшем увеличении индекса β в спектре будут **появляться** и **исчезать** соответствующие гармонические составляющие, что связано с перераспределением энергии между ними. **Чем выше порядок** функции Бесселя, **тем протяжённее** участок увеличения β , где она имеет малые значения.

Следовательно, при одинаковом однотональном модулирующем сигнале спектр ЧМ- и ФМ-сигналов сложнее спектра АМ-сигнала.

1.4.6 Векторная диаграмма однотонального ЧМ-сигнала и различие между ЧМ- и ФМ-сигналами

На рисунке 1.37 изображена векторная диаграмма однотонального ЧМ-сигнала при $\beta \ll 1$. Так как в спектре нижняя боковая гармоника имеет фазовый сдвиг -180° , то суммарный вектор боковых составляющих $U_{\Sigma\delta}$ всегда **перпендикулярен** вектору несущего колебания $U_{тн}$.

Во времени **результатирующий** вектор сигнала $U_{\Sigma p}$ будет **отклоняться** относительно центрального положения, и при этом незначительно будет изменяться и его длина, что связано с допущенным приближением.

По внешнему виду сигнала с УМ невозможно определить, какой вид модуляции был осуществлён: ФМ или ЧМ. Различия между ними состоят в том, что при ЧМ f_d прямо пропорциональна U_m и не зависит от F_m (рисунок 1.38, а); при ФМ β прямо пропорционален U_m и не зависит от F_m (рисунок 1.38, б).

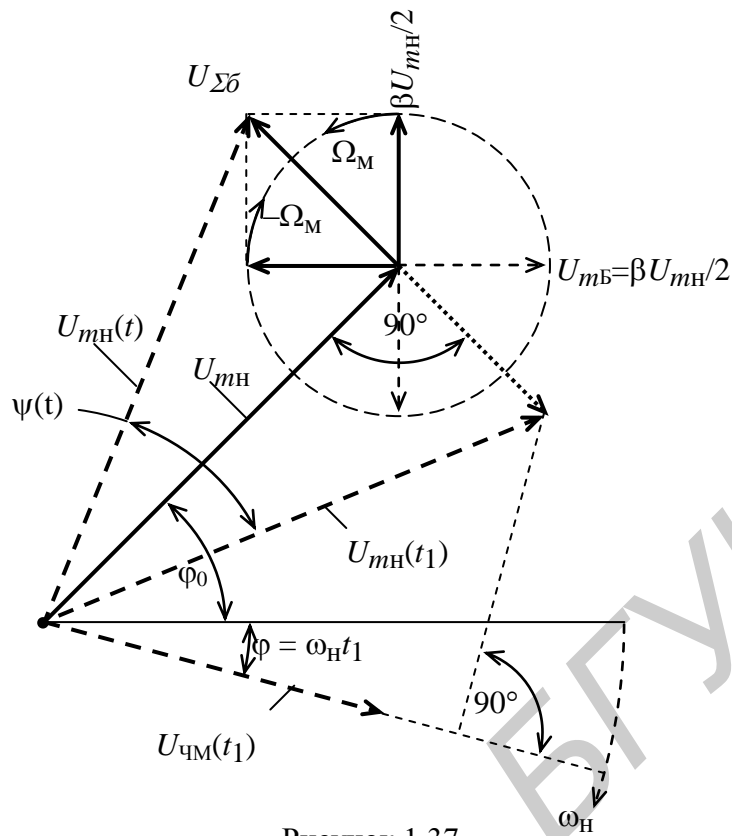


Рисунок 1.37

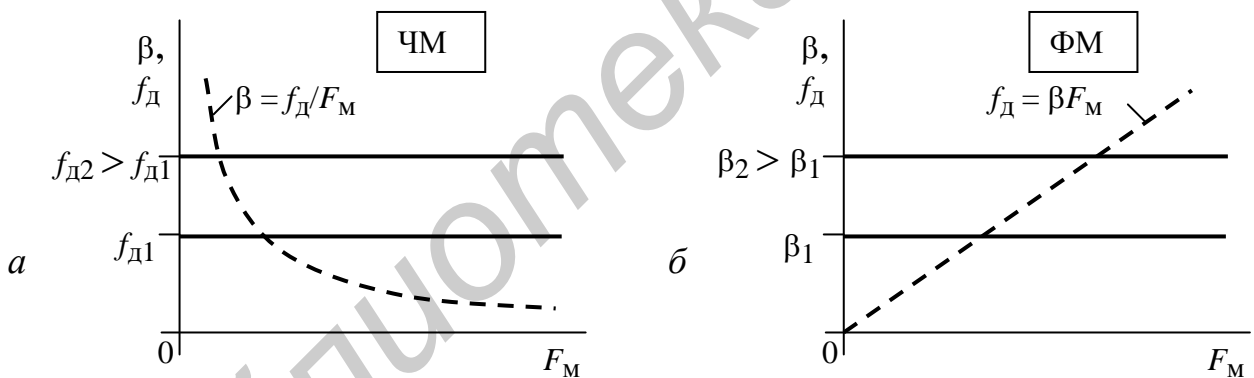


Рисунок 1.38

Особенностью многотонального ЧМ- и ФМ-сигналов является то, что кроме частот $(\omega_H \pm n\Omega_{MN})$ в их спектрах присутствуют составляющие с **комбинационными** частотами вида $(\omega_H \pm \Omega_{1M} \pm \Omega_{2M})$, амплитуды которых $(U_K = U_{mH} \beta_1 \beta_2 / 2)$ зависят от произведения парциальных индексов модуляции β_1 и β_2 соответствующих гармоник модулирующего сигнала. Следовательно, в спектре возможны составляющие с частотами $(\omega_H \pm n_1 \Omega_{1M} \pm \dots \pm n_N \Omega_{MN})$, где n_1, \dots, n_N – целые числа, включая нуль.

В этом случае ЧМ- и ФМ-сигналы различаются по характеру изменения частоты $\omega_H(t)$. Покажем это на примере пилообразного модулирующего сигнала

$U_M(t)$ (рисунок 1.39, а). Для ЧМ-сигнала угловая частота изменяется монотонно (рисунок 1.39, б) в соответствии с $U_M(t)$, тогда как частота ФМ-сигнала изменяется скачками (рисунок 1.39, в).

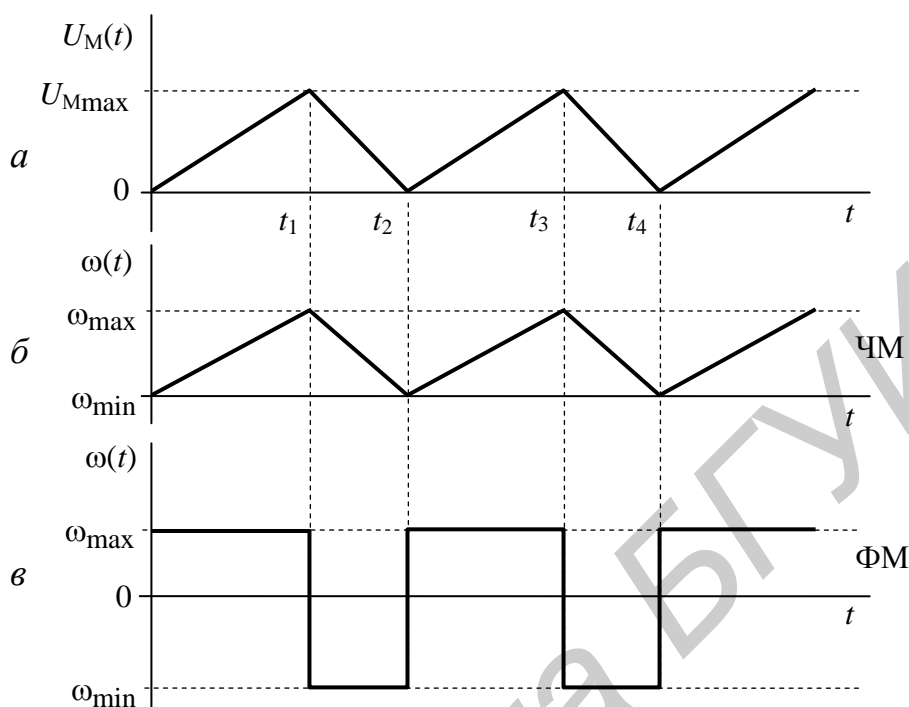


Рисунок 1.39

Таким образом, при одинаковом многотональном модулирующем сигнале спектр ЧМ- и ФМ-сигналов **значительно** сложнее спектра АМ-сигнала.

1.4.7 Сравнительная оценка радиосигналов с АМ и УМ

Сравнение проще провести для случая однотональной модуляции.

1 Отношение мощностей P_{\max} / P_{\min} АМ-сигнала за период управляющего сигнала изменяется в широких пределах (при $m \rightarrow 1$ оно устремляется к бесконечности), и значительная доля мощности приходится на несущее колебание.

Мощность сигнала с УМ постоянна во времени и при $\beta > 1$ в основном приходится на боковые частоты, а при некоторых значениях β (например при $\beta \cong 2,4$) вообще отсутствует несущее колебание.

Следовательно, сигнал с УМ по энергетическим показателям превосходит АМ-сигнал.

2 Ширина спектра АМ-сигнала значительно меньше или равна ширине спектра сигнала с УМ. Причём ЧМ-сигнал предпочтительнее, так как ширина его спектра меньше, чем у ФМ-сигнала.

3 АМ-сигнал больше подвержен воздействию амплитудных помех, которые при приёме сигнала с УМ легко устраняются амплитудным ограничителем.

1.4.8 Манипулированный сигнал с УМ

При передаче дискретной и в том числе цифровой кодированной информации применяется частотная или фазовая манипуляция, заключающаяся, соответственно, в скачкообразном изменении частоты или фазы несущего колебания согласно логическим уровням «1» и «0» двоичных сигналов. Устройства, реализующие данный процесс, называются манипуляторами. Причём в качестве ФМ обычно используют её разновидность – относительную фазовую модуляцию (ОФМ), называемую также фазоразностной. При ОФМ в процессе передачи логической «1» фаза несущего колебания скачком изменяется на $\Delta\varphi$, например, на π (рисунок 1.40), по отношению к фазе предыдущего бита, а при передаче логического «0» фаза остаётся той же, что и у предыдущего бита.

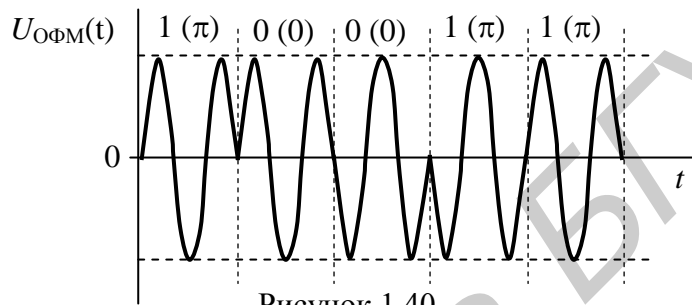


Рисунок 1.40

1.4.9 Радиосигнал с внутриимпульсной ЛЧМ и его АКФ

Рассмотрим радиоимпульс с огибающей прямоугольной формы и высокочастотным заполнением, частота которого линейно нарастает во времени, называемый ЛЧМ-импульсом (рисунок 1.41, а).

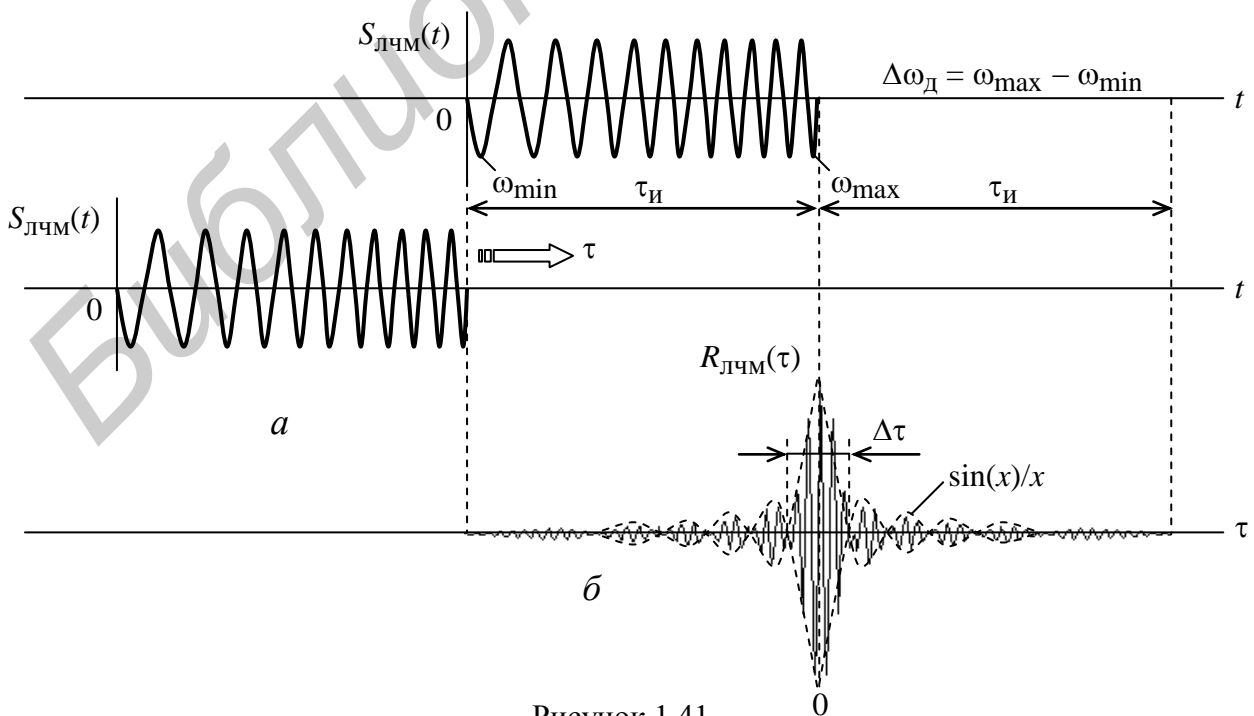


Рисунок 1.41

Математически он записывается как

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_H \cos(\omega_H t + \mu t^2 / 2), & 0 \leq t \leq \tau_H, \\ 0, & t > \tau_H, \end{cases} \quad (1.147)$$

где μ – параметр с размерностью $1/c^2$.

Спектральная плотность ЛЧМ-импульса зависит от безразмерного числа $B = \mu \tau_H^2 = \Delta \omega_D \tau_H$ – называемого базой сигнала. Модуль спектральной плотности ЛЧМ-импульса с большой базой практически постоянен в пределах полосы частот $\Delta \omega_D$ с центром в точке ω_H и приблизительно описывается как

$$U(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < (\omega_H - \Delta \omega_D / 2), \\ U_H \sqrt{\pi / 2\mu}, & (\omega_H - \Delta \omega_D / 2) < \omega < (\omega_H + \Delta \omega_D / 2), \\ 0, & \omega > (\omega_H + \Delta \omega_D / 2). \end{cases} \quad (1.148)$$

АКФ для импульсного ЛЧМ-сигнала с большой базой $B = \Delta \omega_D \tau_H$ определяется как

$$R_{\text{ЛЧМ}}(\tau) = \frac{U_H^2 \tau_H}{2} \left[\frac{\sin(\Delta \omega_D \tau / 2)}{\Delta \omega_D \tau / 2} \right] \cos(\omega_H \tau), \quad (1.149)$$

где U_H и ω_H – амплитуда и частота несущего колебания;

$\Delta \omega_D$ и τ_H – девиация и длительность импульса.

АКФ имеет огибающую «лепестковой» структуры вида $\sin(x) / x$ (рисунок 1.41, б). Ширина центрального «лепестка» обратно пропорциональна девиации частоты в импульсе $\Delta \tau = 2\pi / \Delta \omega_D$.

Практическая значимость применения ЛЧМ-импульсов состоит в том, что можно добиться существенного их «сжатия» во времени, при этом амплитуда сигнала АКФ будет больше U_H и может значительно превысить уровень шумов.

Из рассмотренных ранее сигналов следует, что радиосигналы имеют спектр, структура которого зависит как от спектра передаваемого видеосигнала и сигнала-переносчика, так и от вида модуляции.

1.4.10 Математическая модель представления узкополосных сигналов

Все радиосигналы являются узкополосными, потому что у них $\Delta f_c \ll f_H$.

В настоящее время всё шире используются радиосигналы (рисунок 1.42, а) с одновременной модуляцией амплитуды и частоты (или фазы) несущего колебания:

$$S(t) = A(t) \cos[\psi(t)], \quad (1.150)$$

где $\psi(t) = \omega_H t + \Theta(t) + \Theta_0$.

Задачу детектирования такого вида радиосигнала можно заменить задачей на нахождение огибающей, частоты и (или) фазы узкополосного сигнала.

Представление радиосигнала в виде (1.150) является в общем случае неоднозначным, так как в некоторый момент времени $t = t_0$ можно подобрать множество произведений значений $A(t_0)$ и $\cos[\psi(t_0)]$, которые равны значению $S(t_0)$. Избавиться от указанной неоднозначности и привести в соответствие математическую модель сигнала и реальную огибающую $A(t)$ можно путём представления $A(t)$ в виде

$$A(t) = \sqrt{S^2(t) + S_1^2(t)}, \quad (1.151)$$

где $S_1(t)$ – функция, сопряжённая и взаимосвязанная преобразованиями Гильберта с сигналом $S(t)$:

$$S_1(t) = S(t) \otimes \frac{1}{\pi t} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad S(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (1.152)$$

При этом фазу $\psi(t)$ представляют как

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \left[\frac{S_1(t)}{S(t)} \right], \quad (1.153)$$

а мгновенную частоту $\omega(t)$ вычисляют по формуле

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d \left[\operatorname{arctg} \frac{S_1(t)}{S(t)} \right]}{dt} = \frac{S(t)S_1'(t) - S_1(t)S'(t)}{S^2(t)S_1^2(t)}. \quad (1.154)$$

Следовательно, рассматриваемая функция сигнала $S(t)$ (рисунок 1.42 а) представлена в виде проекции вектора $A(t)$ на ось абсцисс, относительно которой отсчитывается угол $\psi(t)$ (рисунок 1.42, б).

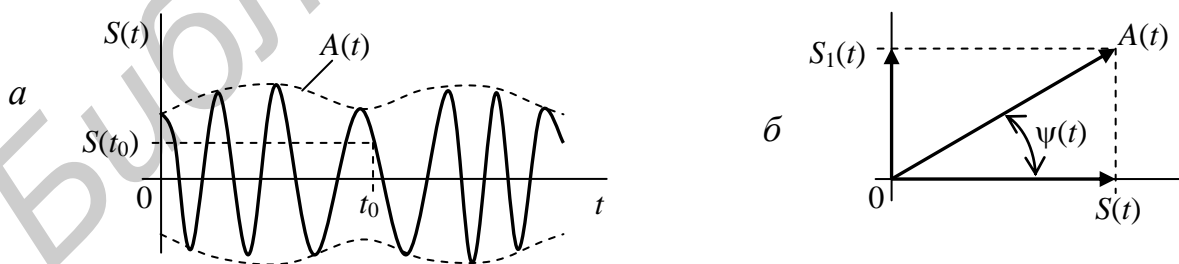


Рисунок 1.42

Основные свойства аналитической огибающей:

- 1) если $S_1(t) = 0$, то $A(t) = S(t)$ (рисунок 1.42, б);
- 2) продифференцируем выражение $A^2(t) = S^2(t) + S_1^2(t)$:

$$A \frac{dA}{dt} = S \frac{dS}{dt} + S_1 \frac{dS_1}{dt},$$

тогда если $S_1(t) = 0$, то $A \frac{dA}{dt} = S \frac{dS}{dt}$.

Следовательно, аналитическая огибающая $A(t)$ касается сигнала в точках, где он имеет максимумы или близкие к ним значения, причём эти точки соединяются кратчайшим или близким к нему путём, и в них производные сигнала и огибающей совпадают. Эти свойства преобразований Гильберта нагляднее всего иллюстрируются на примере гармонического сигнала $S(t) = \cos(\omega_H t)$, которому соответствует сопряжённый по Гильберту

$$S_1(t) = \sin(\omega_H t) \text{ и } A(t) = \sqrt{\cos^2(\omega_H t) + \sin^2(\omega_H t)} = 1. \quad (1.155)$$

Для гармонической функции сопряжённой по Гильберту является также гармоническая функция, отстающая от исходной на угол $\pi / 2$. Так как при преобразовании гармонического колебания по Гильберту его амплитуда остаётся неизменной, то очевидно, что по модулю спектральная плотность $S_1(\omega)$ сопряжённого сигнала $S_1(t)$ не отличается от $S(\omega)$ исходного $S(t)$. Фаза же спектральных составляющих $S_1(\omega)$ отстаёт на 90° от соответствующих составляющих $S(\omega)$. Следовательно, при $\omega > 0$ $S_1(\omega) = -jS(\omega)$, а при $\omega < 0$ $S_1(\omega) = jS(\omega)$ и $S_1(t)$ по форме может сильно отличаться от $S(t)$.

1.4.11 Реализация сигналов, сопряжённых по Гильберту

Способ получения сопряжённого (по Гильберту) сигнала $S_1(t)$ можно представить как поворот фаз всех спектральных составляющих $S(\omega)$ сигнала $S(t)$ в области $\omega \geq 0$ на угол минус 90° и на угол плюс 90° в области $\omega < 0$ без изменения их амплитуд. Систему, обладающую такими свойствами, называют квадратурным фильтром. Его АЧХ – $K(\omega)$ и ФЧХ – $\varphi(\omega)$ показаны на рисунке 1.43, а и б.

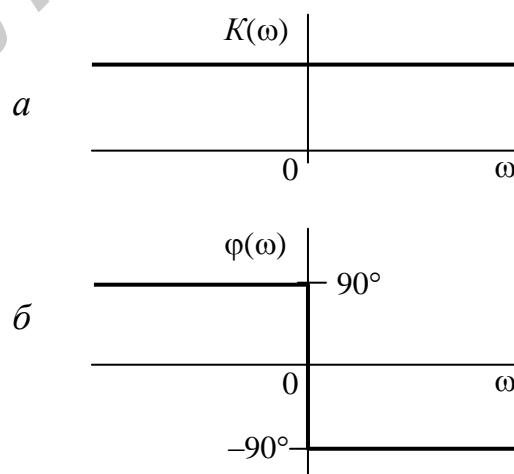


Рисунок 1.43

1.4.12 Аналитический сигнал

Если задан «физический» сигнал в виде действительной функции $S(t)$, то соответствующий ему комплексный сигнал (рисунок 1.44, а) будет представлен в форме

$$\dot{Z}_S(t) = S(t) + jS_1(t), \quad (1.156)$$

где $S_1(t)$ – функция, сопряжённая по Гильберту сигналу $S(t)$ (рисунок 1.44, б), называется комплексным или аналитическим сигналом.

Аналитический сигнал может быть записан следующим образом:

$$\dot{Z}_S(t) = \dot{A}(t)e^{j[\Theta(t)+\Theta_0]}, \quad (1.157)$$

где $\dot{A}(t) = A(t)e^{j[\Theta(t)+\Theta_0]}$ – комплексная огибающая $S(t)$, а так же как

$$\dot{Z}_S(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.158)$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность $S(t)$, или как

$$\dot{Z}_S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_S(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.159)$$

где $Z_S(\omega) = S(\omega) + jS_1(\omega)$ – спектральная плотность $Z_S(t)$.

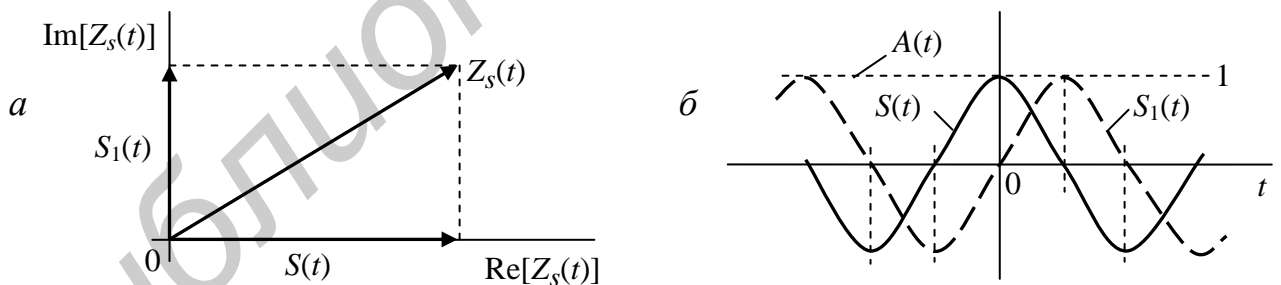


Рисунок 1.44

Основные свойства аналитического сигнала:

$$1) Z(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0, \end{cases} \text{ и, следовательно, спектр содержит только}$$

положительные частоты;

$$2) \text{ модуль } |\dot{Z}(t)| = A(t);$$

3) энергия E_z аналитического сигнала $\dot{Z}(t)$ равна удвоенной энергии E_s физического сигнала $S(t)$.

4) комплексная огибающая $\dot{A}(t)$ не является аналитическим сигналом, так как её действительная и мнимая части не сопряжены по Гильберту.

1.5 Математическое описание случайных измерительных сигналов

1.5.1 Измерительный сигнал как случайный процесс и его классификация

Так как информация, содержащаяся в измерительном сигнале об измеряемом явлении (объекте), обусловлена очень большим количеством причин, которые не могут быть точно учтены, а также заранее не известна и может быть предсказана с вероятностью меньше 1, такой сигнал следует рассматривать как случайный процесс (СП).

СП – это процесс, описываемый случайной функцией времени $x(t)$, которая при всех или некоторых фиксированных значениях времени t_n , называемых сечениями СП, является случайной величиной $x(t_n)$. Следовательно, СП можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин $x(t_n)$, т. е. СП совмещает в себе черты случайной функции $x(t)$ и случайной величины $x(t_n)$.

Одна из этих случайных функций $x_j(t)$, после её измерения ставшая известной функцией времени (детерминированной), называется реализацией СП. Это значит, что СП характеризуется ансамблем (совокупностью) случайных функций времени $x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t)$ (рисунок 1.45).

Многочисленные наблюдения СП в виде случайных функций не означает, что он не подчиняется никаким математическим закономерностям. Оказывается, что средние результаты, найденные по большому числу наблюдений (статистики) очень устойчивы. Поэтому СП характеризуются усреднёнными характеристиками, которые определяются методами теории вероятности.

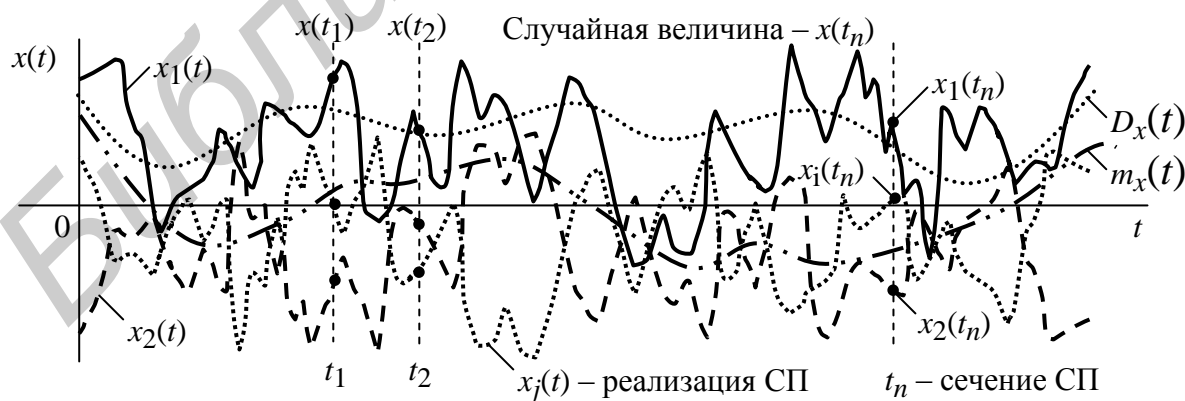


Рисунок 1.45

В зависимости от того, непрерывно или дискретно множество значений, принимаемых случайным процессом $x(t)$ в области его определения, различают непрерывные, дискретные и смешанные (непрерывно-дискретные) СП.

СП подразделяются на **стационарные и нестационарные**. **Стационарными** называются СП, статистические характеристики которых не изменяются во времени. В качестве нестационарного СП (сигнала) можно назвать электрический шум удаляющегося источника помехи, статистические характеристики которого изменяются во времени.

Стационарные СП подразделяются на **эргодические и неэргодические**. **Эргодическими** называются такие СП, вероятностные характеристики которых можно определить по одной из реализаций $x_j(t)$, производя усреднение по достаточно длинному интервалу времени T , и полученный результат усреднения по времени будет совпадать (с вероятностью, близкой к 1) с результатом усреднения по ансамблю реализаций. Большинство СП (сигналов) обладает свойством эргодичности.

1.5.2 Статистические характеристики случайного сигнала и их свойства

Случайная величина X полностью описывается **законом распределения вероятности**, устанавливающим связь между возможными текущими её значениями x и соответствующими им вероятностями $P(x)$. Очевидно, что подобный закон распределения существует только для случайной дискретной величины. Так как случайная непрерывная величина X имеет бесчисленное множество возможных значений x , вероятность $P(x)$ для каждого из них **равна нулю**. В этом случае можно оценить только вероятность нахождения случайной непрерывной величины X в различных областях возможных значений. СП описываются всевозможными многомерными распределениями вероятностей мгновенных значений.

Основной характеристикой стационарного СП является одномерный закон распределения вероятности $F(x)$ мгновенного значения x случайной функции или её плотности $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, полученный в какой-либо фиксированный момент времени (в сечении) СП. Функция $p(x)$ является более удобной, так как её значения пропорциональны вероятностям принятия значений x .

Для количественной характеристики вероятности распределения случайной непрерывной величины X принимается функция

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (1.160)$$

где $P(X \leq x)$ – вероятность того, что случайная величина X не превосходит текущего значения x .

Функция $F(x)$ является законом распределения вероятности случайной величины X , которая называется **интегральным законом распределения**, или **функцией распределения**.

Свойства функции $F(x)$:

$$1) F(-\infty) = 0 ; F(\infty) = 1 ;$$

2) функция распределения $F(x)$ безразмерна и в общем случае является неубывающей, её значения находятся в пределах от 0 до 1 (рисунок 1.46, а).

$$3) F(x_1) < F(x_2) \text{ при } x_2 > x_1;$$

$$4 - F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2) .$$

Для случайной дискретной величины X , имеющей n возможных значений x_1, x_2, \dots, x_n , которые принимаются с вероятностями, соответственно, P_1, P_2, \dots, P_n , функция распределения записывается следующим образом:

$$F(x) = \sum_{k=1}^n P_k \sigma(x - x_k) , \quad P_k = P(X = x_k) , \quad (1.161)$$

где $\sigma(x - x_k)$ – единичная функция (функция Хевисайда), равная

$$\sigma(x - x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq x_k ; \\ 0 & \text{при } x < x_k . \end{cases} \quad (1.162)$$

Функция распределения случайной дискретной величины представляется ступенчатой кривой со скачками (рисунок 1.46, б), равными P_k в точках x_k , и постоянными значениями на интервале (x_{k-1}, x_k) . Закон смешанной величины X имеет вид, показанный на рисунке 1.46, в.

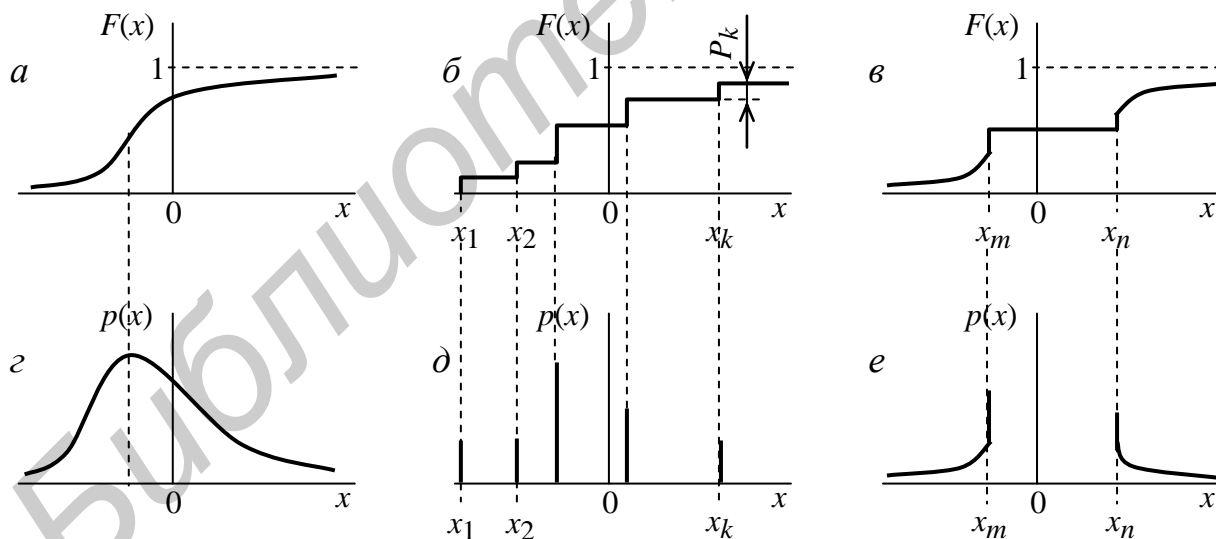


Рисунок 1.46

Функция распределения в интегральной форме мало наглядна, и данный закон неоднозначно определяет случайную величину, т. е. может существовать несколько разных случайных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения. Поэтому более широко применяется **дифференциальный закон распределения**, называемый функцией плотности распределения вероятности, или плотности распределения (рисунок 1.46, з, д, е), определяемый как

$$p(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \left[\frac{1}{x} \right], \quad (1.163)$$

где $F(x + \Delta x) - F(x) = P[x \leq X < (x + \Delta x)] = p(x)dx$ – вероятность того, что случайная величина X принимает значения в интервале от x до $(x + \Delta x)$.

Плотность распределения имеет размерность, обратную случайной величине X , а её значения пропорциональны вероятностям $P(x)$.

Свойства функции $p(x)$:

1) $p(x) > 0$ – функция положительная;

2) $P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$ – вероятность попадания величины X в заданный интервал;

3) $\int_{-\infty}^x p(x)dx = F(x)$ – вероятность нахождения величины X в заданной области;

4) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ – условие нормировки.

Для случайной дискретной величины плотность распределения равна

$$p(x) = F'(x) = \sum_{k=1}^n P_k \frac{d\sigma(x - x_k)}{dx} = \sum_{k=1}^n P_k \delta(x - x_k), \quad (1.164)$$

где $\delta(x - x_k)$ – дельта-функция (функция Дирака), равная

$$\delta(x - x_k) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_k; \\ 0 & \text{при } x \neq x_k. \end{cases} \quad (1.165)$$

Таким образом, для случайной дискретной величины плотность $p(x)$ **равна нулю** для всех x , кроме $x = x_k$ (см. рисунок 1.46, д). С учётом условия нормировки $\sum_{k=1}^n P_k = 1$.

Исчерпывающими вероятностными характеристиками системы n случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n являются **n -мерные законы распределения**, которые определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n); \\ p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{d^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dx_1 dx_2 \dots dx_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.166)$$

Оперировать n -мерным законом распределения практически невозможно. Поэтому при анализе СП рассматривают, как правило, одномерную $p_1(x_1; t_1)$ и двумерную $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ плотности вероятности.

Многомерная функция распределения и плотность вероятности системы случайных величин обладают свойствами, аналогичными свойствам соответствующих законов для одной случайной величины.

Одномерная плотность вероятности $p_1(x_1; t_1)$ определяет характер распределения значений случайной функции, описывающей СП, в произвольно заданный момент времени t_1 и не позволяет выявить взаимосвязь значений, принимаемых случайной функцией в различные моменты времени.

Одномерный закон распределения стационарного СП не зависит от времени, т. е. $p_1(x_1; t_1) = p_1(x; t + \tau) = p_1(x)$.

Двумерная плотность вероятности $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ определяет характер распределения случайной функции в произвольно выбранные моменты времени t_1 и t_2 с учётом взаимосвязи значений, принимаемых случайной функцией в эти моменты времени.

Двумерный закон распределения стационарного СП зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$, т. е. $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; \tau)$.

1.5.3 Числовые характеристики СП

Для описания СП широко применяются особые числовые характеристики, называемые **моментными**.

Начальными моментными являются функции

$$\bar{x}^n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x, t) dx, \quad (1.167)$$

которые есть среднее значение n -й степени случайной величины.

Математическое ожидание (МО) – это начальная моментная функция первого порядка (одномерная), характеризующая изменение среднего значения случайной величины или СП от времени.

МО определяется:

1) для случайных нестационарных сигналов

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t) dx, \quad [B]; \quad (1.168)$$

2) для случайных стационарных сигналов характеризует **постоянную составляющую сигнала** (значение постоянного напряжения в сигнале):
для непрерывной величины

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx, \quad [B]; \quad (1.169)$$

для дискретной величины x

$$m_x = \sum_{k=1}^N x_k p(x_k), [B]; \quad (1.170)$$

3) для случайных стационарных эргодических сигналов

$$m_x = \bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, [B]. \quad (1.171)$$

Ковариационная функция – это начальная моментная функция второго порядка (двумерная), характеризующая зависимость МО произведений двух СП X и Y , взятых в различные моменты времени t_1 и t_2 :

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p_2(x, y; t_1, t_2) dx dy. \quad (1.172)$$

Центральными моментными являются функции

$$\bar{\mu}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}(t))^n p(x, t) dx, \quad (1.173)$$

которые есть среднее значение n -й степени возможного отклонения величины случайного СП от его среднего значения.

Дисперсия – это центральная моментная функция второго порядка, характеризующая изменение средней величины возможных отклонений от времени значений случайных СП относительно МО.

Дисперсия определяется:

1) для случайных нестационарных сигналов

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 p(x, t) dx, [B^2]. \quad (1.174)$$

Квадратный корень из дисперсии есть **среднеквадратичное отклонение** (СКО), равное

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}, [B]; \quad (1.175)$$

2) для случайных стационарных сигналов характеризует **среднюю мощность переменной составляющей**:

$$\text{для непрерывной величины } x - D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx, [B^2]; \quad (1.176)$$

$$\text{для дискретной величины } x - D_x = \sum_{k=1}^N (x_k - m_x)^2 p(x_k), [B^2]; \quad (1.177)$$

СКО характеризует среднее значение переменной составляющей сигнала

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, [B]; \quad (1.178)$$

3) для случайных стационарных эргодических сигналов

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt, [B^2]. \quad (1.179)$$

Корреляционная функция – это центральная двумерная (второго порядка) моментная функция, характеризующая степень статистической связи между двумя случайными ИС X и Y , взятыми в различные моменты времени t_1 и t_2 ($t_2 - t_1 = \tau$), которая называется **взаимной корреляционной функцией** (ВКФ):

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(y_2 - m_y) p_2(x, y; t_1, t_2) dx_1 dy_2. \quad (1.180)$$

В случае одинаковых сигналов X и Y ВКФ называется **автокорреляционной функцией** (АКФ)

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)] p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (1.181)$$

и при $t_1 = t_2$ очевидно, что её значение **равно дисперсии** $R_x(t_1, t_1) = D_x(t_1)$.

Если реализация эргодического сигнала $S(t)$, а её спектральная плотность

$$S(j\omega) = \int_{-T}^T S(t) e^{-j\omega t} dt, [B / \Gamma_{\Pi}], \quad (1.182)$$

то **спектральная плотность мощности** $N(\omega)$, называемая **энергетическим спектром** сигнала,

$$N(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{2T}, [B^2 / \Gamma_{\Pi}]. \quad (1.183)$$

Для случайных стационарных сигналов функции спектральной плотности мощности $N_{xy}(j\omega)$ и $N_x(\omega)$ взаимно связаны с корреляционными функциями $R_{xy}(\tau)$ и $R_x(\tau)$ парой преобразований Фурье (теорема Винера–Хинчина):
для ВКФ –

$$N_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.184)$$

для АКФ –

$$N_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} N_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (1.185)$$

Если реализация эргодического СП $S(t)$ представляет собой напряжение или ток, то средняя мощность, характеризующая энергетический уровень сигнала

$$P_s = m_s^2 + \sigma_s^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S^2(t) dt \quad \left[\text{В}^2, \text{А}^2 \right], \quad (1.186)$$

а её спектральная плотность

$$S(j\omega) = \int_{-T}^T S(t) e^{-j\omega t} dt \quad \left[\frac{\text{В}}{\text{Гц}}, \frac{\text{А}}{\text{Гц}} \right]. \quad (1.187)$$

Тогда энергия реализации, расходуемая в активном сопротивлении 1 Ом за время $2T$, с учётом равенства Парсеваля

$$W_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-T}^T [S(t)]^2 dt \quad \left[\text{В}^2 \cdot \text{с}, \text{А}^2 \cdot \text{с} \right]. \quad (1.188)$$

Следовательно, её средняя мощность

$$\bar{P}_s = \frac{W_s}{2T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{2T} d\omega = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [S(t)]^2 dt \quad \left[\text{В}^2, \text{А}^2 \right]. \quad (1.189)$$

1.5.4 Эффективная ширина спектральной плотности и интервал корреляции

Пусть исследуемый СП характеризуется односторонним энергетическим спектром $N_s(\omega)$, причём N_{\max} – его экстремальное значение (рисунок 1.47). Можно заменить данный СП другим СП, у которого спектральная плотность мощности постоянна и равна N_{\max} в пределах полосы частот $\Delta\omega_{\text{эф}}$, выбираемой из условия равенства средних мощностей обоих СП:

$$N_{\max} \Delta\omega_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} N_s(\omega) d\omega. \quad (1.190)$$

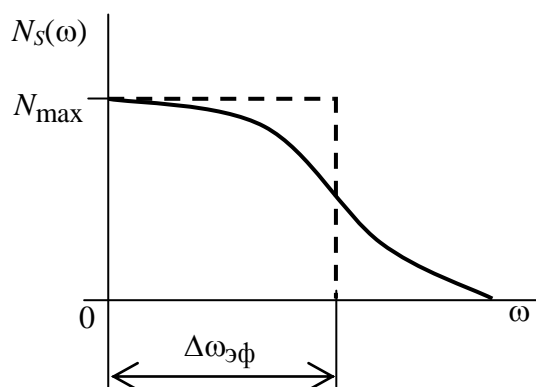


Рисунок 1.47

Отсюда эффективная ширина спектра СП

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{N_{\text{max}}} \int_0^{\infty} N_s(\omega) d\omega . \quad (1.191)$$

Эта числовая характеристика позволяет легко находить дисперсию СП:

$$\sigma^2 = N_{\text{max}} \Delta\omega_{\text{эф}} . \quad (1.192)$$

Автокорреляционная функция для реализации $S(t)$ эргодического СП

$$R_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S(t)S(t-\tau)dt \quad [B^2, A^2] , \quad (1.193)$$

где τ – временной сдвиг (задержка).

Введём понятие интервала корреляции τ_k из условия, что если в его пределах величина $R_s(\tau) = R_s(\tau = 0) = \sigma^2$, то справедливо равенство

$$\tau_k R_s(\tau = 0) = \int_0^{\infty} R_s(\tau) d\tau \quad \text{или} \quad \tau_k = \frac{1}{R_s(\tau = 0)} \int_0^{\infty} R_s(\tau) d\tau . \quad (1.194)$$

Интервал корреляции физически характеризует интервал временного сдвига (рисунок 1.48), через который предыдущие и последующие мгновенные значения реализации СП в среднем некоррелированы, или степень быстроты (хаотичности) изменения случайной функции.

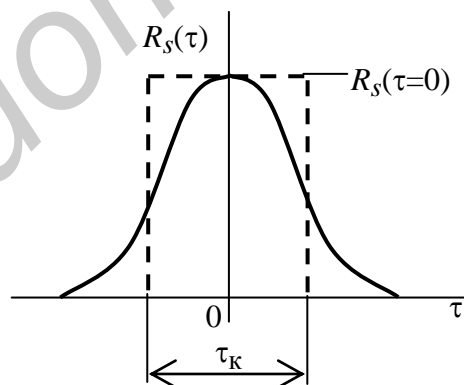


Рисунок 1.48

Используя теорему Винера–Хинчина, можно установить связь между $\Delta\omega_{\text{эф}}$ и τ_k . Так как

$$R_s(\tau = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} N_s(\omega) d\omega ; \quad N_{s \text{ max}}(\omega = 0) = 2 \int_0^{\infty} R_s(\tau) d\tau , \quad (1.195)$$

подставляя (1.195) в выражения (1.191) и (1.194), для $\Delta\omega_{\text{эф}}$ и τ_k получим

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{R_s(\tau=0)}{N_{s \max}(\omega=0)} \pi ; \quad \tau(\kappa) = \frac{N_{s \max}(\omega=0)}{2R_s(\tau=0)} . \quad (1.196)$$

Откуда следует, что

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \tau_{\kappa} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57. \quad (1.197)$$

Таким образом, чем шире энергетический спектр случайного сигнала, тем хаотичнее изменяются во времени его реализации и меньше интервал корреляции.

1.5.5 Примеры случайных сигналов

1.5.5.1 Случайный сигнал с нормальным законом распределения

В измерительной технике для оценки погрешностей измерения широко используются случайные сигналы с нормальным (гауссовым) законом распределения плотности вероятности. Для таких сигналов (процессов) плотность вероятности определяется двумя числовыми характеристиками (параметрами): математическим ожиданием m_x и дисперсией σ_x^2 .

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} , \quad (1.198)$$

Корень квадратный из дисперсии называется средним квадратическим отклонением (СКО): $\text{СКО} = \sqrt{\sigma_x^2}$ – служит мерой разброса результатов случайных измерений x относительно выбранного среднего m_x . График нормального закона распределения $p(x)$ показан на рисунке 1.49, б для некоторого случайного сигнала $x(t)$ (рисунок 1.49, в) в случае, когда $m_x = 0$.

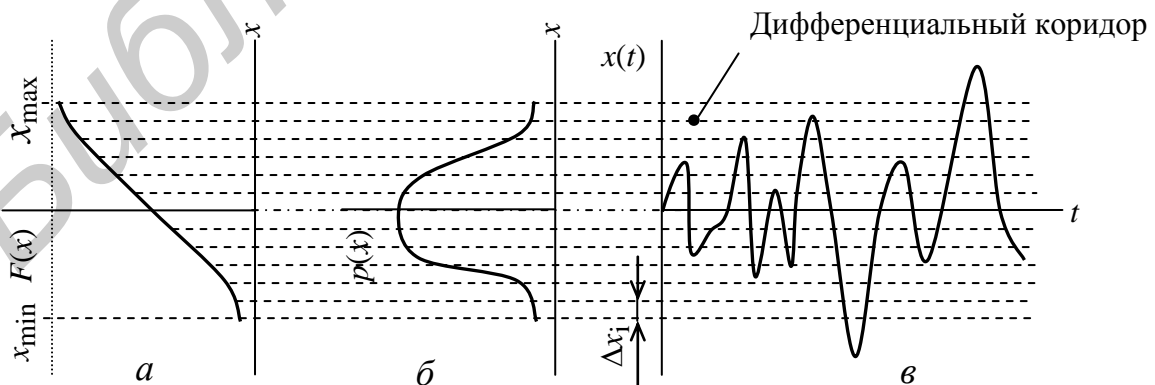


Рисунок 1.49

1.5.5.2 Случайный «клиппированный» сигнал

Случайный «клиппированный» сигнал представляет собой импульсный сигнал со случайной длительностью τ_i и периодом повторения (рисунок 1.50, а).

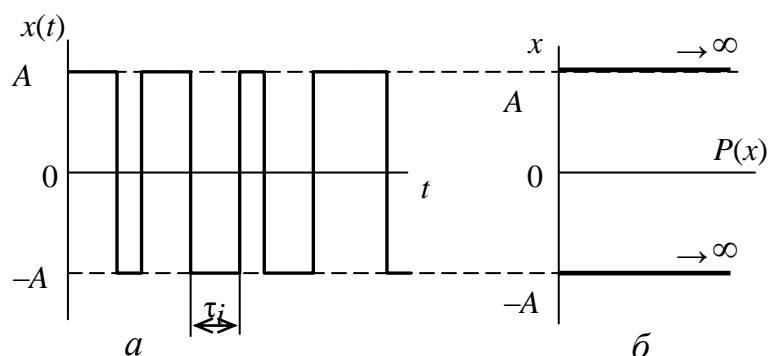


Рисунок 1.50

Такой случайный сигнал можно рассматривать как случайную импульсную последовательность с фиксированными амплитудами A и $-A$, определяемые математическое ожидание на этих уровнях $m_x = A$ и $m_x = -A$, при этом дисперсия $\sigma_x = 0$. Тогда плотность вероятности $p(x)$, согласно (1.198), будет преобразовываться в две δ -функции, стремящиеся в бесконечность (рисунок 1.50, б).

1.6 Передача измерительных сигналов

1.6.1 Назначение дискретизации и ее классификация

Все первичные природные сигналы макромира непрерывны по времени и размеру. В сущности, любой дискретный или цифровой сигнал как физический процесс является сигналом аналоговым.

Преобразование непрерывных ИС в дискретные позволяет **уплотнить** канал передачи, разделяя ИС по времени. Цифровые сигналы, являясь разновидностью кодированных дискретных сигналов, позволяют **расширить** возможности их обработки.

Процедура превращения непрерывных ИС в дискретные состоит из **двух этапов: дискретизации и квантования**. В результате первого этапа непрерывный сигнал заменяется дискретными отсчётными значениями, взятыми через определённые интервалы времени, а второго – отсчётные значения заменяются на дискретные уровни с определённым интервалом (квантом).

Дискретизация – преобразование непрерывного во времени ИС $S(t)$ в последовательность мгновенных значений этого сигнала (отсчётов) $S_d(t_n) = S(t_n)$, соответствующих моментам времени $t_n = n\Delta t$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$, Δt – интервал времени, называемый **шагом дискретизации**, а обратная ему величина $f_d = 1 / \Delta t$ – **частотой дискретизации**.

Процесс дискретизации непрерывного сигнала показан на рисунке 1.51. Математически он описывается с помощью дельта-функции $\delta(t - t_n)$, которая обладает стробирующим действием. **Идеальный** дискретизированный сигнал $S_d(t_n)$ является **последовательностью дельта-импульсов $\delta(t - t_n)$ нулевой длительности, модулированных по амплитуде**, т. е. имеем **АИМ-сигнал** (рисунок 1.51, в). Аналитически он может быть записан в виде

$$S_d(t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(t)\delta(t - t_n) . \quad (1.199)$$

Дискретизация бывает **равномерной** ($\Delta t = \text{const}$) и **неравномерной** (Δt – переменная величина). Частота дискретизации выбирается на основе сведений о характеристиках дискретизируемого сигнала. На практике наибольшее распространение получила равномерная дискретизация, т. к. в этом случае алгоритмы дискретизации и последующего восстановления сигнала, а также соответствующая аппаратура относительно просты.

По способу получения дискретных значений различают **аналитическую** и **физическую** дискретизации.

Дискретизация, используемая в расчётах, называется **аналитической** (математической, расчётной, условной), т. к. в ней **длительность импульса выборки** (длительность стробирующих импульсов отсчёта) τ_B **принимается равной нулю** (рисунок 1.51, б) и дискретизированное значение $S_d(t_n)$ (см. рисунок 1.51, в) определяется **мгновенным** значением сигнала $S(t_n)$ (рисунок 1.51, а), следовательно, **погрешность** датирования отсчёта принципиально **отсутствует**.

При физической дискретизации, осуществляемой аппаратными средствами, содержащими перемножитель сигналов (рисунок 1.52) и генератор функции выборки, дискретизация осуществляется с помощью импульса выборки отсчёта конечной длительности $\tau_B \neq 0$ (рисунок 1.53), называемого функцией выборки $q(t_n)$. Поэтому значение датирования отсчёта может находиться в диапазоне от $S(t_n)$ до $S(t_n + \tau_B)$.

Поскольку дискретизированное значение $S(t_n + \tau_B)$ относят, как правило, к моменту времени t_n , то возникает погрешность датирования отсчёта $\Delta_d = S(t_n) - S_{cp}$, максимальное значение которой $\Delta_{dm} = S(t_n + \tau_B) - S(t_n)$, где S_{cp} – некоторое значение сигнала $S_{cp} \in [S(t_n); S(t_n + \tau_B)]$, зависящее от длительности τ_B и реализации устройств, дискретизирующих сигнал.

Длительность импульса выборки τ_B , исходя из допустимой неравномерности $\Delta q(f)$ его спектра $q(kf_d)$ в пределах полосы частот от 0 до f_B (рисунок 1.54, з), выбирается как

$$\tau_B \ll 2\Delta t . \quad (1.200)$$

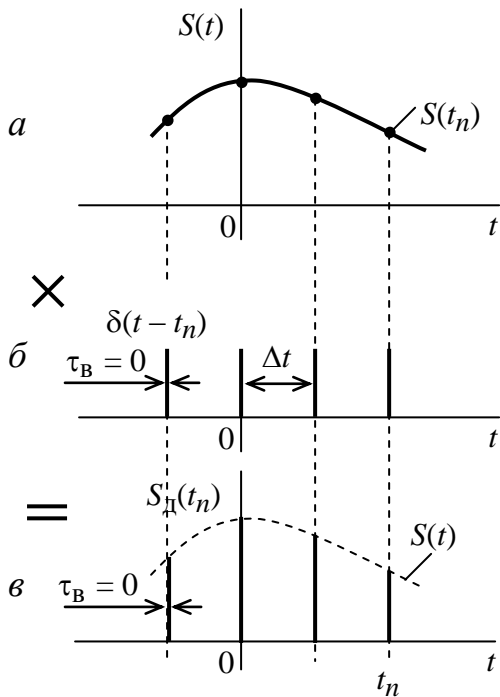


Рисунок 1.51

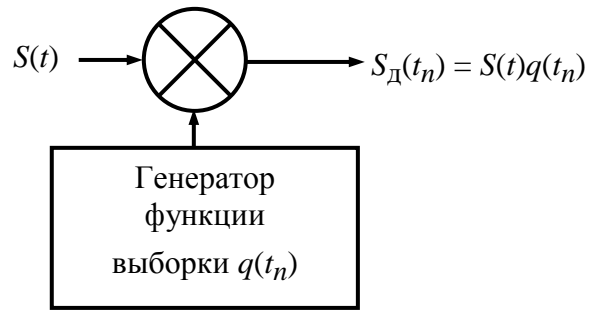


Рисунок 1.52

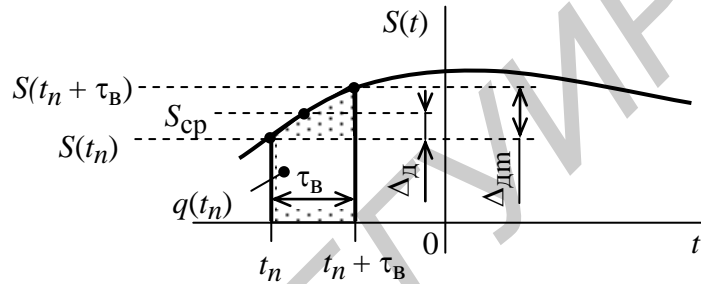


Рисунок 1.53

1.6.2 Восстановление исходного сигнала. Теорема Котельникова

Задача восстановления дискретизированных сигналов в общем случае аналогична задаче интерполирования функций. При восстановлении исходного сигнала $S(t)$ по совокупности выборок $S_d(t_n) = S(t_n)$ формируется обобщённый многочлен

$$S(t) = \sum_{n=1}^N a_n C_n(t) , \quad (1.201)$$

где $C_n(t)$ – система базисных (восстанавливающих) функций (БФ), которая обычно является ортогональной или ортонормированной;

a_n – коэффициенты ряда, значения которых совпадают со значениями $S_d(t_n)$.

В ряде случаев при формировании восстанавливающего многочлена накладывается условие совпадения производных до заданного порядка.

Восстановление сигнала $S(t)$ должно проводиться с возможно меньшей заданной погрешностью, которая зависит от выбора коэффициентов a_n и БФ. БФ и a_n могут выбираться на основе различных критериев. В измерительной технике широко используется критерий совпадения значений $S(t)$ с мгновенными значениями дискретизированного сигнала $S_d(t_n)$, т. к. он удобен для аналитического восстановления ИС с помощью компьютера и отличается простотой реализации и достаточно высокой точностью. В этом случае дискретизация и восстановление сигнала осуществляется согласно **теореме Котельникова**.

Теорема Котельникова – если сигнал $S(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле (кусочно-непрерывен, имеет конечное число экстремумов), обладает конечным спектром с граничной частотой f_B и дискретизирован равномерно с интервалом $\Delta t \leq 1 / (2f_B)$, т. е. $f_d \geq 2f_B$, то он может быть восстановлен по всей совокупности его дискретных значений $S_d(t_n)$ без погрешности.

Если теорема Котельникова выполняется, то непрерывный сигнал $S(t)$ может быть восстановлен в виде суммы произведений отсчётных значений $S_d(t_n)$ (коэффициентов ряда Котельникова) на ортонормированный базис функций (БФ) $\varphi_n(t)$, называемой рядом Котельникова, который является одним из видов обобщённого ряда Фурье:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_d(t_n) \varphi_n(t), \text{ где } \varphi_n(t) = \frac{\sin[2\pi f_B(t-t_n)]}{2\pi f_B(t-t_n)}. \quad (1.202)$$

Коэффициенты ряда Котельникова равны мгновенным значениям сигнала $S(t_n)$ и, следовательно, определяются наиболее простым способом.

Функции $\varphi_n(t)$ являются **неограниченными** во времени и **ортгоналъными** на интервале времени t от $-\infty$ до ∞ , т. е.

$$\varphi_n(k\Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n \text{ или } t = n\Delta t; \\ 0 & \text{при } k \neq n \text{ или } t = k\Delta t, \end{cases} \quad (1.203)$$

а их **спектральная плотность конечна** и отвечает условиям: амплитудная –

$$\varphi_n(f) = \begin{cases} \varphi_0 = \text{const} & \text{при } |f| < f_B; \\ 0 & \text{при } |f| \geq f_B; \end{cases} \quad (1.204)$$

фазовая –

$$\psi_n(f) = -2\pi f t_0, \quad (1.205)$$

где $t_0 = t - t_n$ – временной сдвиг.

Следовательно, ширина спектра Δf_c сигнала $S(t)$ и функций $\varphi_n(t)$ одинакова и равна f_B .

Квадрат нормы (энергия) базисной функции $\varphi_n(t)$ равен $\|\varphi_n(t)\|^2 = \Delta t$.

1.6.3 Дискретизация исходного ИС и преобразование его временной функции и спектра. Понятие числа степеней свободы сигнала

Допустим, что непрерывный сигнал $S(t)$ (рисунок 1.54, а) имеет спектр конечной ширины (рисунок 1.54, б) и выбран интервал дискретизации Δt , удовлетворяющий условию $\Delta t = 1 / (2f_B)$. Функция **сигнала-выборки** $q(t_n)$ представля-

ет **прямоугольный импульс единичной амплитуды** длительностью τ_B с периодом повторения Δt или с частотой следования $f_D = 2f_B = 1 / \Delta t$ (рисунок 1.54, в). Тогда спектр модуля амплитуд гармоник $q(kf_D)$ функции выборки $q(t_n)$ описывается выражением

$$q(kf_D) = \tau_B f_D \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(k\pi f_D \tau_B)}{k\pi f_D \tau_B} \right) \quad (1.206)$$

и состоит из составляющих с частотами kf_D ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$), амплитуды которых изменяются по закону $\sin(x) / x$ (рисунок 1.54, з).

Дискретизированный сигнал получается в результате перемножения непрерывного сигнала $S(t)$ на последовательность сигнала-выборки $q(t_n)$ и записывается как

$$S_D(t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(t)q(t_n). \quad (1.207)$$

Такой сигнал является АИМ-сигналом (рисунок 1.54, д).

На основании теоремы о произведении двух сигналов $S(t)$ и $q(t_n)$ спектр дискретного сигнала $S_D(t_n)$ определяется свёрткой их спектров

$$S_D(f) = S(f) \otimes q(kf_D), \quad (1.208)$$

и представляет собой **периодическое повторение спектра** непрерывного (исходного) сигнала $S(t)$ с интервалом, равным f_D (рисунок 1.54, е).

Все реальные сигналы имеют конечную длительность t_S и **бесконечно широкий спектр**, т. е. невозможно указать значение частоты f_B , выше которого спектр тождественно равен нулю. Поэтому при дискретизации реальных сигналов соседние области спектра $S_D(f)$ дискретного сигнала будут перекрываться, что приведёт при восстановлении сигнала к погрешности.

Для её уменьшения перед дискретизацией можно сделать спектр сигнала ограниченным, пропустив его через фильтр нижних частот (ФНЧ) с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) $K(f)$, близкой к прямоугольной и верхней граничной частоте f_B (рисунок 1.55, а).

На практике всегда можно условно определить граничную частоту f_B спектра, выше которой суммарная энергия всех составляющих спектра мала по сравнению с полной энергией сигнала. При этом сигнал исказится, но в этом случае результирующая ошибка при восстановлении получается приблизительно в 2 раза меньше, чем при непосредственной дискретизации сигнала. Кроме того, при наличии широкополосного шума на входе ФНЧ дисперсия шума на его выходе уменьшится.

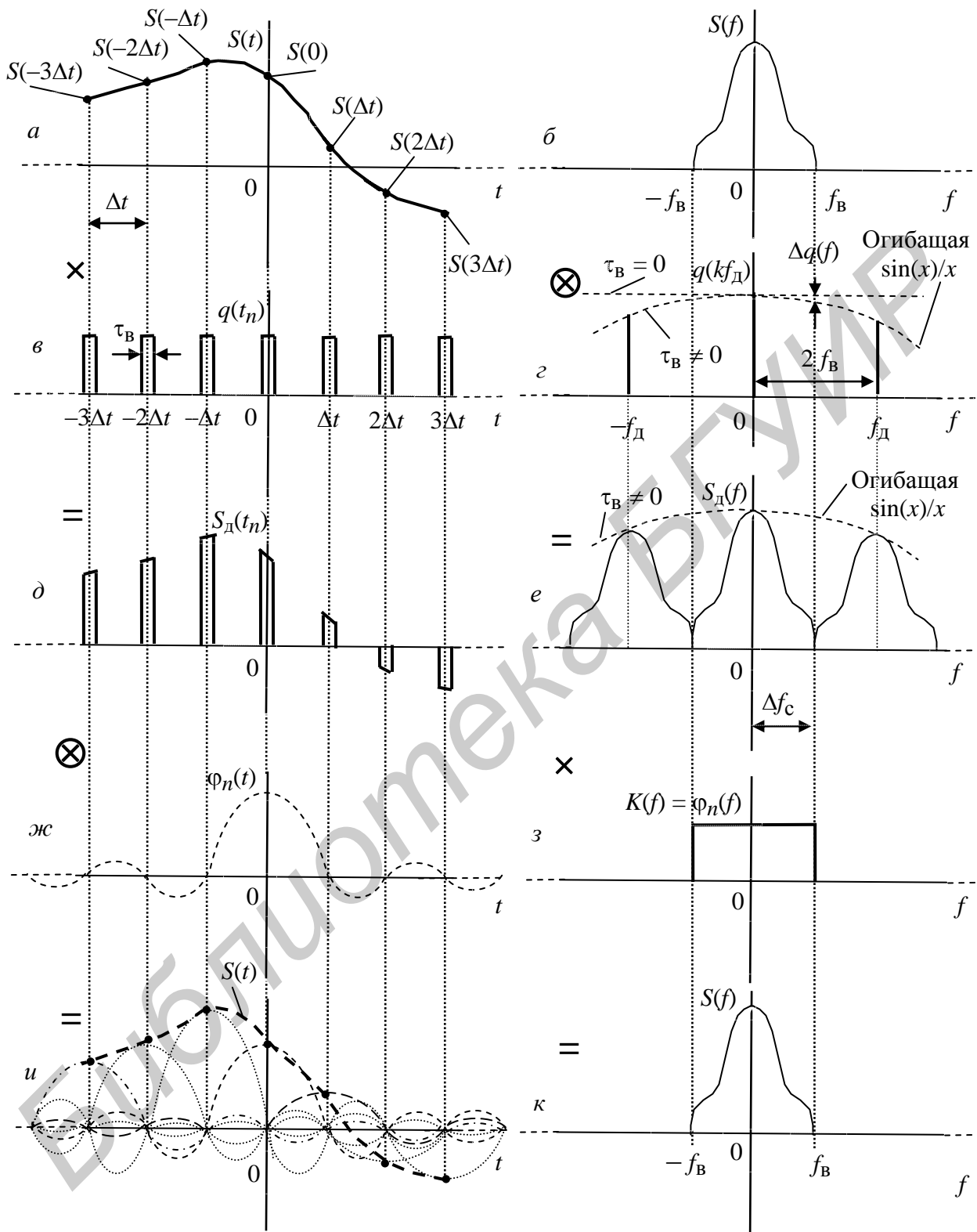


Рисунок 1.54

Сигнал длительностью t_s приближённо можно определить некоторым числом N выборок с шагом $\Delta t = 1 / (2f_B)$, причём

$$N \geq 1 + (t_s / \Delta t) = 1 + 2f_B t_s . \quad (1.209)$$

Число N называют числом **степеней свободы, или базой** сигнала.

Сигнал конечной длительности аппроксимируется рядом Котельникова с **конечным числом членов**:

$$S(t) = \sum_{n=-N}^N \left[S_d(t_n) \frac{\sin[2\pi f_B(t-t_n)]}{2\pi f_B(t-t_n)} \right]. \quad (1.210)$$

Сигнал $S(t)$, представленный в виде такого ряда, **воспроизводится точно только в точках отсчётов** $t_n = n\Delta t$. В промежутках между отсчётами возникает ошибка аппроксимации, которая возрастает у краёв интервала времени t_s .

С увеличением частоты f_B возрастает база сигнала N и сигнал аппроксимируется точнее.

Согласно теореме обратимости частоты и времени, перемножение спектров $S_d(f)$ и $\varphi_n(f)$ соответствует свёртке временных функций сигналов $S_d(t_n)$ и $\varphi_n(t)$ (см. рисунок 1.54, *д* и *ж*), т. е. восстановленный сигнал (рисунок 1.54, *и*)

$$S(t) = S_d(t_n) \otimes \varphi_n(t). \quad (1.211)$$

Из (1.202, 1.209 и 1.210) следует, что точное значение функции $S(t)$ в определённый момент времени t_i зависит от всех выборок, взятых из $S(t)$ как до этого момента, так и после него. На выходе же реального ФНЧ напряжение в момент t_i является суммой напряжений от всех выборок, поступивших только в моменты времени, предшествующие t_i .

Суммарный сигнал на выходе ФНЧ, создаваемый всеми выборками,

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = K_0 \tau_B 2f_B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[S_d(t_n) \frac{\sin[2\pi f_B(t-t_n-t_0)]}{2\pi f_B(t-t_n-t_0)} \right]. \quad (1.212)$$

Таким образом, выходной сигнал отличается от исходного постоянным коэффициентом ($K_0 \tau_B 2f_B$) и задержкой во времени на величину t_0 , где K_0 – постоянный коэффициент передачи ФНЧ в полосе частот от 0 до f_B , t_0 – определяется крутизной фазочастотной характеристики (ФЧХ) фильтра.

1.6.4 Погрешности восстановления исходного ИС

Если спектр непрерывного сигнала $S(t)$ ограничен частотой f_B и интервал дискретизации Δt удовлетворяет условию $\Delta t = 1 / (2f_B)$, то период повторения спектра $S_d(f)$ дискретизированного сигнала равен $f_d = 2f_B$. При этом соседние части его спектра не перекрываются (рисунок 1.55, б). В этом случае ошибка восстановления сигнала возникает из-за неидеальной формы $K(f)$ ФНЧ, которая имеет монотонно спадающий вид (см. рисунок 1.55, б), и вследствие этого наблюдается неполное подавление соседних частей спектра. Поэтому восстановленный сигнал будет отличаться по форме от исходного непрерывного сигнала.

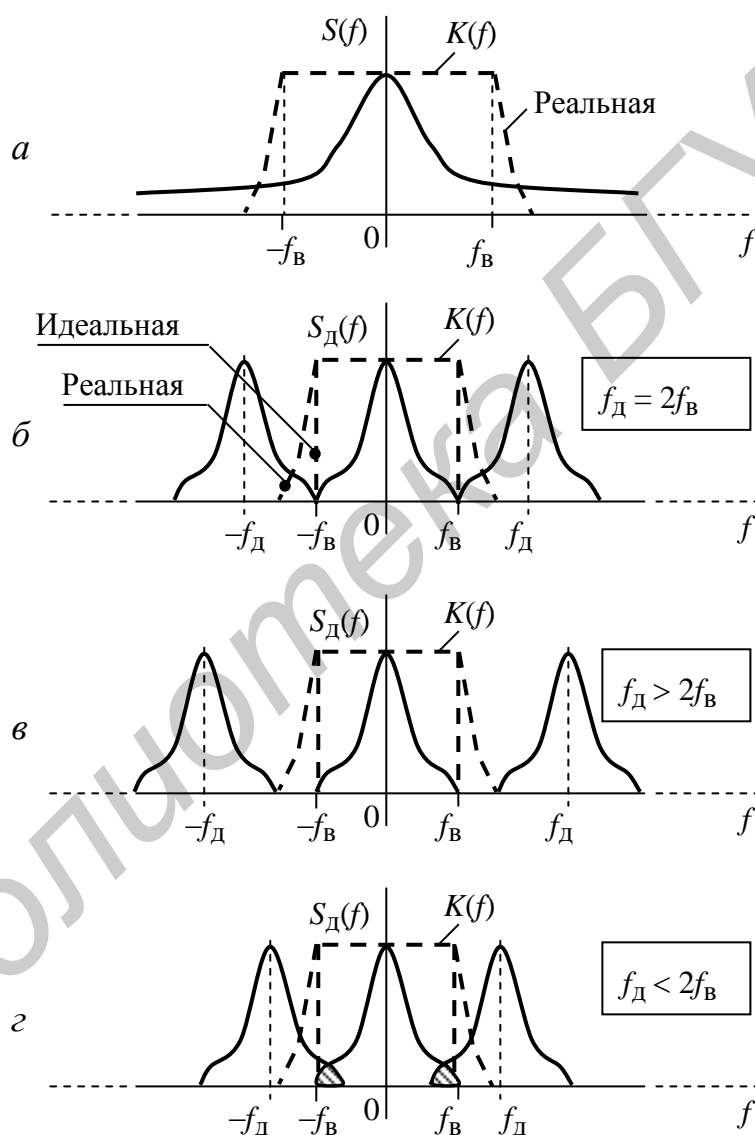


Рисунок 1.55

Интервал между выборками Δt при дискретизации сигнала $S(t)$ можно взять меньше, чем $\Delta t < 1 / (2f_B)$. Тогда частота f_d и период повторения спектра $S_d(f)$ увеличатся, что при идеальной форме $K(f)$ не должно привести к повышению точности воспроизведения сигнала. С учётом реальной формы $K(f)$ ошибка

восстановления сигнала уменьшится, так как подавление соседних частей спектра увеличится за счёт большего интервала между ними (рисунок 1.55, в).

Таким образом, уменьшение интервала между выборками при дискретизации сигнала с ограниченным спектром по сравнению с $\Delta t = 1 / (2f_B)$ допустимо. При практическом применении дискретизации сигнала выбирают интервал дискретизации Δt в 2 ... 5 раз меньше необходимой величины $\Delta t = 1 / (2f_B)$. В случае выбора $\Delta t > 1 / (2f_B)$ или $f_d < 2f_B$ при восстановлении сигнала $S(t)$ возникает погрешность, обусловленная частичным перекрытием соседних частей спектра $S_d(f)$, а также неидеальной формой $K(f)$ ФНЧ (рисунок 1.55, г).

Простой и очевидный способ уменьшения ошибки восстановления – это повышение частоты дискретизации f_d и её стабильности, что значительно усложняет и удорожает устройства обработки сигналов. Поэтому приходится искать компромиссное решение исходя из характера сигнала, требуемой точности его восстановления, характеристик применяемого ФНЧ и других факторов, что приводит к реальному выбору частоты дискретизации $f_d > 2f_B$.

1.6.5 Дискретизация узкополосных сигналов (радиосигналов с АМ и ЧМ) и спектров сигналов

Пусть задан сигнал

$$S(t) = A(t) \cos[\psi(t)], \quad (1.213)$$

спектр которого находится в узкой полосе частот от f_1 до f_2 , причём в пределах полосы $\Delta f = f_2 - f_1$ он необязательно симметричен относительно центральной частоты $f_0 = (f_1 + f_2) / 2$, и выполняется условие $(\Delta f / f_0) \ll 1$.

К такому узкополосному сигналу относится амплитудно-модулированный (АМ) сигнал

$$S(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t), \quad (1.214)$$

где $A(t)$ – огибающая АМ-сигнала;

f_0 – частота несущего колебания.

Так как фаза несущего колебания при чистой АМ постоянна, то передавать её нет необходимости. Следовательно, АМ-сигнал вполне определяется значениями своих амплитуд, взятыми через интервал

$$\Delta t = 1 / (2F_B), \quad (1.215)$$

где F_B – верхняя частота в спектре модулирующей функции $A(t)$, т. е. в спектре передаваемого сообщения.

В случае частотно-модулированного (ЧМ) сигнала

$$S(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \Theta(t)] \quad (1.216)$$

его мгновенная частота изменяется как

$$f(t) = f_0 + \left(\frac{\Theta(t)}{dt} \right) / (2\pi). \quad (1.217)$$

Если девиация частоты f_d (максимальное отклонение частоты $f(t)$ от f_0) велика по сравнению с F_B , то ширину спектра ЧМ-сигнала можно считать равной $2f_d$. Следовательно, для дискретизации ЧМ-сигнала достаточно задавать его фазу $\Theta(t_n)$ в отсчётных точках с интервалом времени $\Delta t = 1 / (2f_d)$.

При смешанной АМ и ЧМ в каждой отсчётной точке нужно брать выборку амплитуды и фазы.

Из симметрии преобразований Фурье (теоремы обратимости частоты и времени) для сигналов с конечной длительностью (рисунок 1.56, а) можно сформулировать теорему, аналогичную теореме Котельникова, но не для временных выборок, а для спектральных (рисунок 1.56, б).

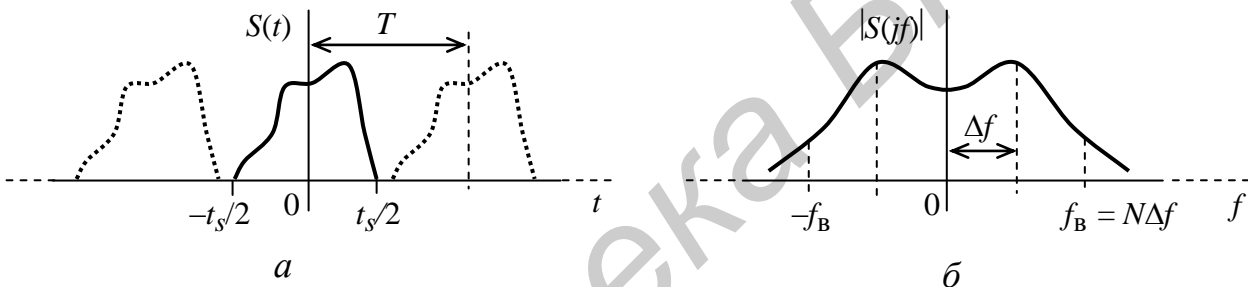


Рисунок 1.56

Заменяв t на f и наоборот, а также $2f_B$ на длительность сигнала t_s , получим

$$S(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[S(jk\Delta f) \frac{\sin \left[t_s \pi (f - k\Delta f) \right]}{t_s \pi (f - k\Delta f)} \right], \quad (1.218)$$

где $\Delta f = 1 / t_s$ – интервал выборки спектра.

Таким образом, спектр сигнала с конечной длительностью полностью определяется выборками, взятыми с интервалом Δf .

Если ограничивать спектр частотой $f_B = N\Delta f$ ($k = N$), то общее число спектральных выборок (степеней свободы) $N \geq 1 + (2f_B / \Delta f) = 1 + 2f_B t_s$, т. е. совпадет с числом N (1.209) при временной дискретизации сигнала.

Так как спектральная плотность $S(jf)$ – величина комплексная, то фактическое количество выборок оказывается вдвое больше. Однако, учитывая, что действительная часть $\text{Re}[S(jf)]$ – чётная функция частоты, а мнимая часть $\text{Im}[S(jf)]$ – нечётная функция, число независимых отсчётных значений спектра сокращается вдвое и равно N .

При дискретизации спектров сигналов, по аналогии с дискретизацией сигналов во времени, исходный сигнал $S(t)$ преобразуется в периодически повторяющийся с периодом $T \geq t_s$ (см. рисунок 1.56, а).

1.6.6 Преобразование дискретного сигнала в амплитудно-модулированный

Преобразование сигнала $S_d(t_n)$ в АМ-сигнал $S_{AM}(t) = A(t)\cos(2\pi f_H t)$ можно осуществить путём выделения части периодического спектра $S_d(f)$ с помощью полосового фильтра с формой АЧХ $K_{\Pi}(f)$, близкой к прямоугольной, и средней частотой $f_0 = n f_d$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) (рисунки 1.57, а, б). Частота несущего колебания АМ-сигнала будет равна $f_H = n f_d$, а его огибающая $A(t)$ будет соответствовать непрерывному сигналу $S(t)$ (рисунок 1.57, в).

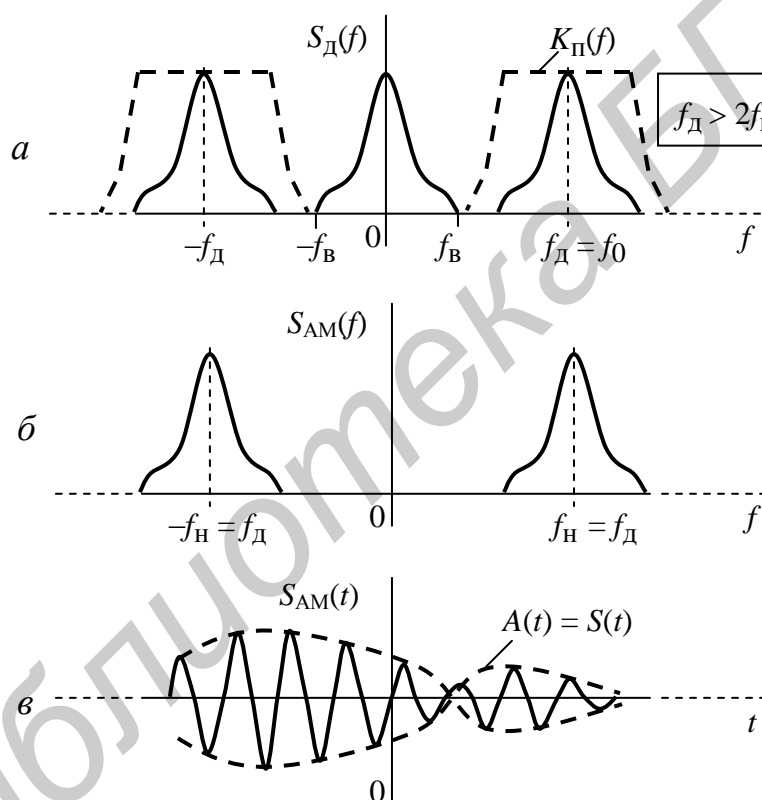


Рисунок 1.57

1.6.7 Равномерное и неравномерное квантование ИС

Квантование – это дискретизация сигналов по уровню с заданным интервалом (квантом или шагом) q , которая необходима для осуществления обработки сигнала цифровым устройством, количество разрядов которого всегда конечно, что равноценно округлению значений сигнала с точностью до единицы младшего разряда.

При квантовании непрерывного по времени сигнала $S_H(t)$ он преобразуется в ступенчато изменяющийся $S_K(t)$ (рисунок 1.58, а) с заданным квантом q . В результате квантования дискретизированного сигнала $S_D(t_n)$ его значения округляются до ближайшего квантованного уровня (рисунок 1.58, б). Квантование сигналов описывается графически характеристикой квантования, где по оси абсцисс отложены значения $S_H(t)$ или $S_D(t)$, а по оси ординат – значения $S_K(t)$ (рисунок 1.59). Квантование бывает равномерным $q = \text{const}$ (рисунок 1.59, а) и неравномерным – q изменяется (рисунок 1.59, б). Неравномерное применяется в специфических случаях, например, при большом динамическом диапазоне квантуемого сигнала.

Квантованные значения сигнала S_K отличаются от исходных значений на величину α – погрешность квантования (рисунок 1.58, б), максимальное значение которой

$$\alpha_m = q / 2. \quad (1.219)$$

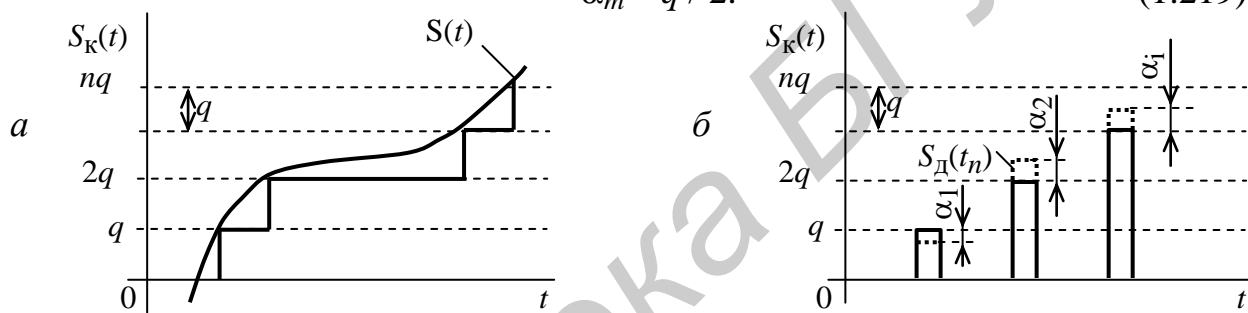


Рисунок 1.58

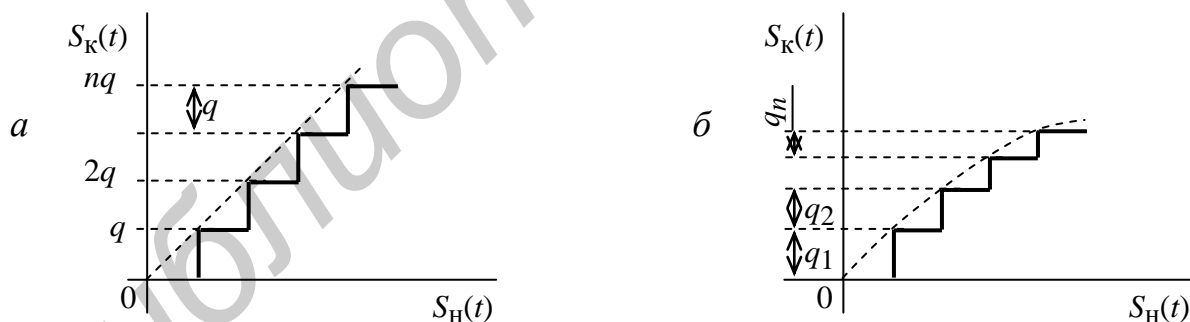


Рисунок 1.59

Значения α_i являются случайной дискретной величиной и вызывают так называемый шум квантования, т. е. квантованный сигнал можно представить как сумму значений неквантованного сигнала и шума квантования.

При малом шаге квантования q распределение величины α_i близко к равномерному и её среднее значение равно нулю, а дисперсия (мощность шума)

$$\sigma^2 = P_{ш.к} = q^2 / 12 \text{ или СКО } \sigma \approx 0,29 \cdot q. \quad (1.220)$$

Если сигнал S_H квантуется на m градаций и с равной вероятностью принимает любое значение от 0 до $m \cdot q$, то его мощность

$$P_s = P_{к.с} + P_{ш.к} = m^2 q^2 / 12, \quad (1.221)$$

где $P_{к.с}$ – мощность квантованного сигнала;

$P_{ш.к}$ – мощность шума квантования.

Из (1.221) следует

$$P_{к.с} / P_{ш.к} = m^2 - 1, \quad (1.222)$$

и для его увеличения значение m берут большим.

Цифровой сигнал $S_{ц}(t)$ получают из непрерывного (аналогового) $S(t)$ в результате аналого-цифрового преобразования (АЦП), включающего временную дискретизацию, квантование по уровню и кодирование значений уровней числами в двоичной системе (см. рисунок 1.4). Сигнал в таком виде может быть непосредственно введен в ЭВМ.

Восстановление аналогового сигнала $S(t)$ по цифровому осуществляется на основе цифроаналогового преобразования (ЦАП), включающего преобразование (декодирование) $S_{ц}(t)$ в дискретный сигнал $S_{д}(t_n)$, и путём интерполирования и низкочастотной фильтрации (ФНЧ) в аналоговый $S(t)$.

1.6.8 Информационный объём ИС

Поток информации P по одному изменяемому параметру ИС можно определить по формуле

$$P = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{S_m''(t)}{\Delta}}, \quad (1.223)$$

где $S_m''(t)$ – максимальное значение второй производной сигнала $S(t)$;

Δ – допустимая погрешность сигнала.

Таким образом, чем быстрее изменяется сигнал и меньше допустимая погрешность его передачи, тем больше объём потока передаваемой информации.

Рассмотрим импульсную последовательность ИС при двоичном коде (рисунок 1.60, а), которая по оси времени передаётся импульсом и паузой, причём оба исхода равновероятны ($P = 0,5$), независимы от предыдущих и равны одной двоичной единице (1 бит).

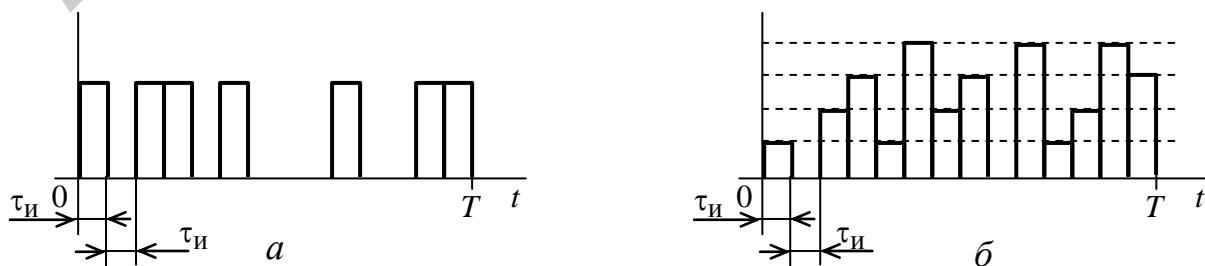


Рисунок 1.60

При длительности импульса $\tau_{\text{и}}$ количество информации в ИС, делящееся на время T , равно $T / \tau_{\text{и}}$ бит. При заданной ширине спектра сигнала $\Delta f_{\text{с}}$ длительность $\tau_{\text{и}}$ не может быть меньше чем

$$\tau_{\text{и}} = k / \Delta f_{\text{с}}, \quad (1.224)$$

где k – коэффициент, зависящий от формы импульса.

Следовательно, максимально возможное количество информации в рассматриваемом ИС не может превышать

$$V = T / \tau_{\text{и}} = T \Delta f_{\text{с}} / k \text{ (бит)}, \quad (1.225)$$

а предельная скорость передачи

$$c = 1 / \tau_{\text{и}} = \Delta f_{\text{с}} / k \text{ (бит/с)}. \quad (1.226)$$

Для случайного дискретного сигнала (рисунок 60, б), при числе возможных равновероятных уровней импульса L вероятность появления одного из них равна $1 / L$ и объём передаваемой информации равен $\log_2 L$ бит.

Следовательно, информационный объём такого ИС длительностью T

$$V = \frac{T}{\tau_{\text{и}}} \log_2 L = \frac{T \Delta f_{\text{с}}}{k} \log_2 L \text{ (бит)}, \quad (1.227)$$

а предельная скорость передачи информации

$$c = \frac{\Delta f_{\text{с}}}{k} \log_2 L \text{ (бит/с)}. \quad (1.228)$$

Согласно теореме Котельникова, по своему информационному объёму непрерывный сигнал может быть приравнен к дискретному во времени, представленному последовательностью выборок, каждая из которых может принимать одно из конечного числа дискретных значений.

Если заданы параметры сигнала $f_{\text{в}}$ ($\Delta f_{\text{с}}$), T , $P_{\text{с}}$ и $P_{\text{п}}$ – средние мощности сигнала и помехи, то при $2f_{\text{в}}T \gg 1$ информационный объём непрерывного сигнала равен

$$V = \frac{T}{\Delta t} \log_2 L = \Delta f_{\text{с}} T \log_2 \left(\frac{P_{\text{с}} + P_{\text{п}}}{P_{\text{п}}} \right) \text{ (бит)}, \quad (1.229)$$

а предельная скорость безошибочной его передачи по каналу с «белым» шумом и при использовании оптимальных методов обработки сигналов определяется по формуле Шеннона:

$$c = \Delta f_c \log_2 \left(\frac{P_c + P_{\Pi}}{P_{\Pi}} \right) \text{ (бит/с)}, \quad (1.230)$$

и для её реализации сигнал должен иметь **шумоподобный** характер.

Следовательно, информативные возможности сигнала возрастают с расширением его спектра и с превышением его уровня над уровнем помехи. В связи с этим собственные шумы устройств, предназначенных для передачи и обработки сигналов, следует рассматривать как одну из основных их характеристик.

1.6.9 Числовые характеристики для описания передачи ИС

Напряжения и мощности сигналов и помех, с которыми приходится иметь дело в измерительной технике, имеют значения от долей пиковольта и пиковатта до сотен вольт и ватт. В связи с очень большим диапазоном изменения уровней ИС и с тем, что слух и зрение человека имеют логарифмические характеристики, для удобства используют логарифмические единицы измерения.

Для сравнения мощностей широко применяется логарифмическая единица десятичного логарифма, называемая **бел** ($1\text{Б} = \lg 10$), а на практике **децибел** ($\text{дБ} = \text{Б} / 10 = 10 \lg(P)$), которая в десять раз меньше бела.

Если мощность сигнала на входе устройства обозначить P_1 , а мощность на его выходе P_2 , то коэффициент передачи мощности, выраженный в децибелах,

$$K_p = 10 \lg(P_2 / P_1) \text{ дБ}. \quad (1.231)$$

Мощность пропорциональна квадрату напряжения или тока, поэтому на одинаковых сопротивлениях отношение двух мощностей в децибелах можно представить как

$$K_p = 10 \lg(U_2 / U_1)^2 = 20 \lg(U_2 / U_1) = 20 \lg(I_2 / I_1) \text{ дБ}, \quad (1.232)$$

где $20 \lg(U_2 / U_1) = K_u$ – коэффициент передачи напряжения;

$20 \lg(I_2 / I_1) = K_i$ – коэффициент передачи тока;

$$K_p = K_u K_i \text{ или } K_{p \text{ дБ}} = 0,5(K_u \text{ дБ} + K_i \text{ дБ}).$$

Величина коэффициента передачи может характеризовать как усиление, так и ослабление (затухание) сигнала; соответственно, перед числом децибел будет знак плюс или минус.

Кроме децибела применяется другая логарифмическая единица затухания – **непер** (Нп). В неперах принято измерять затухание сигнала в линии передачи. Если напряжение (ток) в начале (на входе) линии равно $U_1(I_1)$, а в конце (на выходе) линии $U_2(I_2)$, то затухание, выраженное в неперах,

$$\alpha = \ln(U_1 / U_2) = \ln(I_1 / I_2), \quad (1.233)$$

где $e = 2,71828\dots$ – основание логарифма.

Следовательно, если напряжения (токи) $U_1(I_1)$ и $U_2(I_2)$ отличаются друг от друга на 1 Нп, это означает, что они отличаются в e раз.

Учтем, что если $20\lg(e) = 20 \cdot 0,4343 = 8,686$ дБ, то 1 Нп = 8,686 дБ.

1.6.9.1 Абсолютные уровни напряжения и мощности

При сравнении уровней напряжения (тока) и мощности отсчёт принято осуществлять по логарифмам их отношения к условным значениям, принятым за нулевую отметку логарифмической шкалы. Полученное в результате значение называется уровнем сигнала. Если за «нулевую» (эталонную) отметку принимается рекомендованное МККТТ и регламентированное значение активной мощности $P_3 = 1$ мВт или полной (кажущейся) мощности $S_3 = 1$ мВА, то такие уровни называются абсолютными уровнями мощности:

$$p_0 = 10\lg\left(\frac{P}{P_3}\right) = 10\lg\left(\frac{P}{1 \text{ мВт}}\right) = 10\lg(P \text{ мВт}). \quad (1.234)$$

«Нулевое» значение напряжения определяется из условия, что «нулевая» мощность 1 мВт рассеивается в резисторе с сопротивлением R_3 , равным 600, 150 или 75 Ом. Таким образом, абсолютный уровень напряжения на $R_3 = 600$ Ом равен $U_3 = \sqrt{600 \cdot 10^{-3}} = 0,775$ В ($U_3 = \sqrt{P_3 R_3}$, $I_3 = \sqrt{P_3 / R_3}$), и, следовательно, по напряжению

$$p_{\text{он}} = 20\lg\left(\frac{U_{\text{ск}}}{0,775}\right), \quad (1.235)$$

где $U_{\text{ск}}$ – среднеквадратичное значение напряжения в вольтах.

Значение $U_3 = 0,775$ В считается универсальным и сохраняет свой смысл «нулевого» в цепях с различным значением характеристического сопротивления Z_c и при различных значениях сопротивления нагрузки R_H . Следовательно, в цепи с $R_H \neq 600$ Ом $p_{\text{он}}$ сохраняет своё значение, а абсолютный уровень мощности определяется соотношением

$$p_0 = p_{\text{он}} - 10\lg\left(\frac{R}{600}\right). \quad (1.236)$$

При $R_H = R_3$ имеем $p_{\text{он}} = p_0$, при $R_H > R_3$ и $p_{\text{он}} > p_0$.

Если уровни определяются относительно значения сигнала в некоторой точке схемы, то они называются относительными уровнями

$$p_{\text{н}} = 20 \lg \left(\frac{U_2}{U_1} \right) = 20 \lg \left(\frac{U_2}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_1} \right) = p_{\text{он}2} - p_{\text{он}1} , \quad (1.237)$$

где U_1, U_2 – значения напряжений в выбранных точках схемы.

Если же к входу устройства подведен сигнал с абсолютным уровнем 0 дБ, то относительные уровни, во всех точках определённые относительно входа, будут называться измерительными и совпадать по значению с абсолютными.

Наиболее часто для оценки используются абсолютные уровни по мощности в дБм и по напряжению в дБн. В последнем случае обязательно указывается, на каком сопротивлении нагрузки $R_{\text{н}}$ измеряется уровень напряжения $p_{\text{н}}$.

Например, значение мощности 2 Вт равно абсолютному уровню 33 дБм, а величина напряжения 2 мВ – абсолютному уровню минус 51 дБн.

Измерение уровней производится вольтметром, шкала которого проградуирована относительно одного из определённых значений U_3 ($U_3 = 0,775 \text{ В}; 0,3875 \text{ В}; 0,275 \text{ В}$).

1.6.9.2 Критерии качества передачи ИС

При передаче ИС в той или иной мере возникают изменения его исходных параметров, обусловленные совокупностью параметров передающего тракта.

Изменения исходных параметров ИС используются для оценки качества его передачи. Основными параметрами являются: пик-фактор; динамический диапазон; эффективная ширина энергетического спектра; перекрёстные искажения; параметры затухания; уровень вносимых помех; допустимые искажения ИС; диаграмма уровней.

Пик-фактор

Измерительные сигналы могут иметь случайные выбросы или пики напряжения (тока), вызванные как изменением измеряемой величины, так и другими причинами. Такие изменения в сигнале необходимо учитывать при его передаче и обработке конкретными устройствами. Для этого вводится параметр сигнала, называемый «пик-фактор» и определяемый отношением пиковой мощности сигнала ($P_{\text{пик}} = U_{\text{пик}}^2 / R = I_{\text{пик}}^2 R$) к средней ($P_{\text{ср}} = U_{\text{ср}}^2 / R = I_{\text{ср}}^2 R$)

$$\text{Пф} = 10 \lg(P_{\text{пик}} / P_{\text{ср}}). \quad (1.238)$$

Динамический диапазон – отношение максимального значения мгновенной мощности сигнала к минимальному значению, выраженное в децибелах:

$$D_s[\text{дБ}] = 10 \lg \left(\frac{P_{s.\text{max}}}{P_{s.\text{min}}} \right). \quad (1.239)$$

Эффективная ширина энергетического спектра

При прохождении сигнала по измерительному тракту важна также искажённая передача его формы и диапазона уровней. Одним из параметров, обеспечивающих эти условия, является амплитудная характеристика тракта, которая определяется на основной измерительной частоте f_0 :

$$P_{0\text{ВЫХ}} = f(P_{0\text{ВХ}}), \text{ или } \alpha_{\text{ост}} = P_{0\text{ВХ}} - P_{0\text{ВЫХ}}(P_{0\text{ВХ}}) = f(P_{0\text{ВХ}}), \quad (1.240)$$

где $P_{0\text{ВЫХ}}$ и $P_{0\text{ВХ}}$ – абсолютные уровни сигнала на выходе и входе;

$\alpha_{\text{ост}}$ – остаточное затухание.

Эффективная ширина энергетического спектра ИС – полоса частот, на границах которой $\alpha_{\text{ост}}$ имеет значение не больше, чем нормируемое.

Перекрёстные искажения

Это искажения, вызванные взаимным влиянием друг на друга отдельных сигналов с разнесёнными (не перекрывающимися) спектрами. Такой вид искажений возникает при прохождении нескольких сигналов через нелинейный или с изменяющимися во времени параметрами тракт передачи, когда у гармонических составляющих спектров с различными частотами появляются гармоники с высшими кратными и комбинационными частотами. Это приводит к расширению частотного диапазона исходных спектров сигналов, а следовательно, к их перекрытию и взаимным искажениям.

Параметры затухания

Затухание различных частот в ИС при его передаче по измерительному тракту характеризуется следующей совокупностью параметров:

- частотной характеристикой остаточного затухания $\alpha_{\text{ост}}(f)$ в пределах диапазона рабочих частот от нижней границы частоты $f_{\text{Н}}$ до верхней $f_{\text{В}}$;
- частотной характеристикой отклонения остаточного затухания от его значения на частоте f_0

$$\Delta\alpha_{\text{ост}}(f) = \alpha_{\text{ост}}(f) - \alpha_{\text{ост}}(f_0), \quad (1.241)$$

где f_0 – основная измерительная частота (обычно является средней частотой-рабочего диапазона частот), на которой измеряются и нормируются номинальные значения параметров.

Уровень вносимых помех

Оценивается разностью уровней помех в ИС на выходе и входе тракта передачи или изменением отношения сигнал/помеха на выходе относительно отношения сигнал/помеха на входе.

Допустимые искажения

Допустимые искажения – это отклонения отдельного параметра сигнала (длительности импульсов, амплитуды, несущей частоты, ширины спектра и т. п.) от его номинального значения с целью обеспечения возможности его обработки соответствующими устройствами без потери информации. Величина допустимых искажений выбирается в зависимости от характера сигнала, вида его обработки и характеристик применяемых для этого устройств.

Диаграмма уровней

Важной характеристикой качества передачи сигнала является график изменения относительного уровня измерительного гармонического сигнала частоты f_0 при его прохождении по тракту, представляемый в виде диаграммы уровней. Диаграмму уровней обычно строят на этапе проектирования измерительного тракта (такую диаграмму называют расчётной). Диаграмму уровней обычно помещают под упрощенной структурной схемой измерительного тракта (рисунок 1.61).

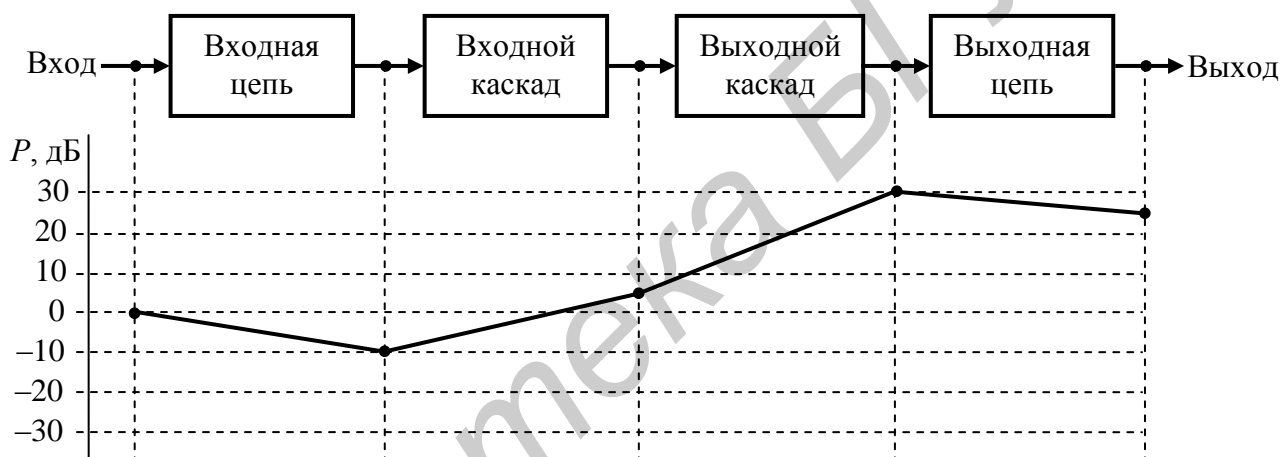


Рисунок 1.61

Значения уровней сигнала в каждой контролируемой точке тракта откладывают по вертикали. Данные, полученные в процессе построения диаграммы, позволяют правильно построить структурную схему тракта (расчёт усиления, регулировку затухания и др.).

Нормальным считается режим работы всех звеньев канала передачи, когда максимальные уровни сигнала достигают, но не превосходят номинальных значений. Иначе увеличиваются нелинейные искажения и появляются помехи.

Для определения динамического диапазона канала передачи применяют диаграмму уровня шума.

1.7 Испытательные и калибровочные измерительные сигналы

Для настройки и калибровки измерительной техники в качестве испытательных и калибровочных сигналов часто используются периодические сигналы, не содержащие постоянной составляющей и имеющие разнообразную фор-

му: прямоугольную, линейную знакопеременную, синусоидальную и т. д. до близкой к дельта-функции.

В качестве математической модели желательно использовать одну простую математическую функцию, которая при изменении одного-двух её параметров описывала бы с некоторой точностью перечисленные выше формы сигналов. Для данной цели подходит известная функция Иордана:

$$S(t) = \frac{A_m \sin(\omega t)}{\sqrt{1 + \varepsilon \cos^2(\omega t)}}, \quad (1.242)$$

где A_m – амплитуда сигнала;

$\omega = 2\pi f$ – круговая частота;

ε – параметр формы, изменяющийся от $-0,999$ до бесконечности.

В зависимости от выбора значения ε получаем форму сигнала (рисунок 1.62):

$\varepsilon \rightarrow -1$ – практически прямоугольную (кривая 1);

$\varepsilon = 0$ – гармоническую (кривая 2);

$\varepsilon = 1,5$ – почти пилообразную (кривая 3);

$\varepsilon \rightarrow \infty$ – близкую к дельта-функции (кривая 4).

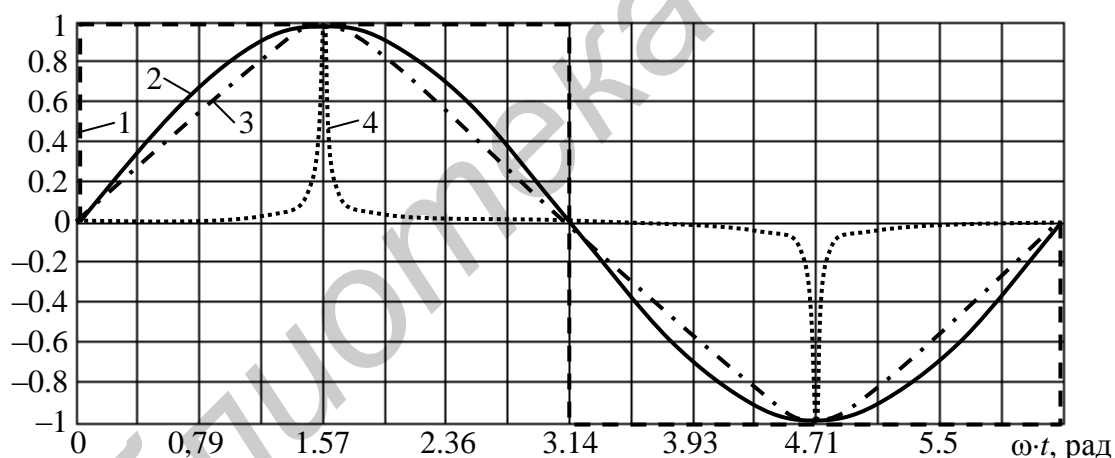


Рисунок 1.62

Среднеквадратичное и средневывпрямленное значения сигнала, описываемого функцией Иордана, могут быть определены по формулам

$$S_{\text{СК}} = \begin{cases} A_m \sqrt{(\sqrt{1 + \varepsilon} - 1) / \varepsilon}, & \varepsilon \in (-1; \infty), \quad \varepsilon \neq 0; \\ A_m / \sqrt{2}, & \varepsilon = 0. \end{cases} \quad (1.243)$$

$$S_{CB} = \begin{cases} \frac{2A_m}{\pi\sqrt{|\varepsilon|}} \arcsin(\sqrt{|\varepsilon|}), & \varepsilon \in (-1; 0); \\ 2A_m / \pi, & \varepsilon = 0; \\ \frac{2A_m}{\pi\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arsh}(\sqrt{\varepsilon}), & \varepsilon \in (0; \infty). \end{cases} \quad (1.244)$$

Эти выражения позволяют найти значения коэффициентов формы – $k_\Phi(\varepsilon)$, амплитуды – $k_a(\varepsilon)$ и гармоник – $k_\Gamma(\varepsilon)$ функции Иордана при различных значениях ε (таблица 1.1).

Таблица 1.1

ε	-0,999	-0,9	0	2	20	60	100	500	1000	5000
k_Φ	1,00	1,04	1,11	1,15	1,35	1,50	1,58	1,91	2,10	2,65
k_a	1,02	1,15	1,41	1,65	2,36	2,97	3,32	4,84	5,71	8,47
k_Γ	0,447	0,242	0	0,146	0,446	0,643	0,730	1,076	1,25	1,73

Изменяя в функции параметр ε , можно описывать сигнал с различным спектральным составом: коэффициент гармоник меняется от 0 при $\varepsilon = 0$ до 173 % при $\varepsilon = 5000$.

Функцию Иордана удобно использовать для формирования напряжения требуемой формы при реализации калибраторов – прецизионных источников переменного напряжения, выполненных на основе цифроаналоговых преобразователей, управляемых микропроцессорами.

2 ПРОХОЖДЕНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ ЦЕПИ

2.1 Классификация радиоэлектронных цепей

По различным признакам радиотехнические измерительные цепи подразделяются на следующие основные виды:

– **аналоговые, цифровые и аналого-цифровые**

Предназначены для обработки аналоговых, цифровых и аналого-цифровых сигналов;

– **двухполюсники, четырёхполюсники и многополюсники**

Имеют для подключения два вывода, четыре и более;

– **активные и пассивные**

Активные цепи включают в свой состав активные элементы, требующие источника питания. В этих цепях мощность выходного сигнала может превышать мощность входного сигнала за счёт расходуемой энергии источника питания:

– **инерционные и безынерционные**

Если в состав цепи входит хотя бы один энергоёмкий элемент (ёмкость или индуктивность), то такая цепь относится к инерционной. Строго говоря, за счёт наличия паразитных емкостей и индуктивностей все радиоэлектронные цепи являются инерционными. Если переходные процессы в цепи протекают настолько быстро, что не оказывают заметного влияния на скорость изменения действующего в цепи сигнала, то такую цепь допустимо считать безынерционной. Следовательно, в зависимости от динамических свойств обрабатываемого сигнала цепь может быть отнесена как к инерционной, так и к безынерционной. Например, апериодический усилитель, выполненный на среднечастотном транзисторе, можно считать безынерционным для сигналов низких частот и инерционным по отношению к высокочастотным сигналам;

– **с сосредоточенными и распределёнными параметрами**

Цепи, для которых допустимо пренебречь паразитными параметрами составляющих их элементов и в которых сопротивления, ёмкости и индуктивности отнесены к определённым участкам, называются цепями с сосредоточенными параметрами. Если параметры распределены вдоль цепей, их считают цепями с распределёнными параметрами. Типичным примером такой цепи является длинная соединительная линия.

Одна и та же цепь в зависимости от соотношения геометрических размеров её элементов ℓ и длины распространяющейся в ней электромагнитной волны λ может рассматриваться как с сосредоточенными ($\ell \gg \lambda$), так и с распределёнными параметрами ($\ell \approx \lambda$).

В практических приложениях приходится учитывать промежуточный диапазон частот, в котором некоторые параметры цепей можно считать сосредоточенными, а другие – распределёнными. Начиная с частот порядка несколь-

ких сотен мегагерц распределённые параметры приходится обязательно учитывать во всех без исключения цепях;

– **линейные цепи (ЛЦ)**

К линейным относятся цепи, у которых связь между входными и выходными напряжениями и токами выражается линейной зависимостью. Их вольт-амперные характеристики (ВАХ) линейны, т. е. параметры составляющих их элементов (R , L , C и других) не зависят от изменения U и I воздействующего сигнала.

Для ЛЦ справедлив принцип суперпозиции: отклик на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие. Линейные цепи описываются линейными, алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

ЛЦ подразделяются на **стационарные** и **параметрические** (нестационарные), соответственно с **постоянными** и **переменными** во времени параметрами.

Линейные параметрические цепи (ЛПЦ) содержат R , L , C и другие элементы, параметры которых зависят от внешнего воздействия и являются функцией времени.

В ЛЦ с постоянными параметрами при любых сколь угодно сложных воздействиях не возникают колебания новых частот, а в параметрических возникают.

С помощью пассивных ЛЦ с постоянными параметрами осуществляется фильтрация сигналов, суммирование и деление их мощности, согласование и связь между собой различных каскадов и звеньев.

Активные ЛЦ применяются для усиления сигнала по мощности в пределах линейных участков характеристик электронных приборов.

ЛПЦ позволяют осуществить усиление и различные преобразования спектров сигналов за счёт энергии, затрачиваемой на изменение параметра элемента цепи;

– **нелинейные цепи (НЦ)**

К нелинейным относятся цепи, у которых связь между входными и выходными напряжениями и токами выражается нелинейной зависимостью. Их ВАХ нелинейные, то есть параметры составляющих их R , L , C и других элементов зависят от изменения U и I воздействующего сигнала.

Для НЦ несправедлив принцип суперпозиции. НЦ описываются нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

Если цепь содержит хотя бы один нелинейный элемент, то такая цепь в целом относится к нелинейной. Одна и та же цепь в зависимости от значения приложенного воздействия может рассматриваться как ЛЦ, так и НЦ. Например цепь, содержащая транзистор, проходная ВАХ которого, являясь в целом нелинейной, может считаться линейной в пределах малого входного воздействия.

Строго говоря, все физические цепи (системы) в той или иной степени нелинейные, и поэтому ЛЦ должна рассматриваться как квазилинейная.

Важным свойством НЦ является преобразование спектра сигнала. При воздействии на НЦ гармонического колебания в ней возникают постоянная и

переменные составляющие тока или напряжения с частотами, равными и кратными воздействию колебанию. При полигармоническом входном сигнале дополнительно возникают ещё и колебания с комбинационными частотами;

– **колебательные и апериодические цепи**

Колебательными являются RLC -цепи, содержащие одиночные или связанные резонансные контуры.

Апериодическими являются RC - и RL -цепи;

– **широкополосные и узкополосные цепи**

К широкополосным относятся цепи, полоса пропускания (прозрачности) которых $2\Delta f$ соизмерима со средней частотой полосы пропускания f_c ($2\Delta f \approx f_c$), а к узкополосным – у которых $2\Delta f$ существенно меньше f_c ($2\Delta f \ll f_c$). Цепи на различных участках частотного диапазона ведут себя по отношению к входному сигналу неодинаково. Поэтому их анализ желательно проводить отдельно для каждого участка. Практически достаточно выделить три области частот: нижних (НЧ), средних (СЧ) и верхних (ВЧ). Границы между этими областями устанавливаются условно по некоторым характерным частотам для каждой анализируемой цепи.

2.2 Физические цепи (системы) и их математическая модель

В структуре любой цепи можно выделить вход, предназначенный для подачи исходных сигналов, и выход преобразованного сигнала. Структурную схему цепи можно представить в виде «чёрного ящика» (рисунок 2.1).

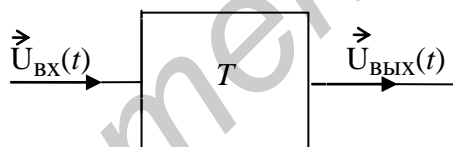


Рисунок 2.1

Общим случаем является представление входного и выходного сигналов, соответственно в виде m - и n -мерных векторов:

$$\left. \begin{aligned} \vec{U}_{\text{ВХ}}(t) &= \vec{U}_{\text{ВХ1}}(t) + \vec{U}_{\text{ВХ2}}(t) + \dots + \vec{U}_{\text{ВХ}m}(t), \\ \vec{U}_{\text{ВЫХ}}(t) &= \vec{U}_{\text{ВЫХ1}}(t) + \vec{U}_{\text{ВЫХ2}}(t) + \dots + \vec{U}_{\text{ВЫХ}n}(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Закон связи между сигналами $\vec{U}_{\text{ВХ}}(t)$ и $\vec{U}_{\text{ВЫХ}}(t)$ можно задать посредством системного оператора T , результатом действия которого на $\vec{U}_{\text{ВХ}}(t)$ служит сигнал $\vec{U}_{\text{ВЫХ}}(t)$:

$$\vec{U}_{\text{ВЫХ}}(t) = T[\vec{U}_{\text{ВХ}}(t)]. \quad (2.2)$$

Условия для линейной системы (цепи) представляют принцип суперпозиции

$$T[\alpha \vec{U}_{\text{ВХ}}] = \alpha T[\vec{U}_{\text{ВХ}}] \text{ и } T[\vec{U}_{\text{ВХ1}} + \vec{U}_{\text{ВХ2}}] = T[\vec{U}_{\text{ВХ1}}] + T[\vec{U}_{\text{ВХ2}}], \quad (2.3)$$

где α – произвольное число.

Для стационарной безынерционной ЛЦ

$$\vec{U}_{\text{ВЫХ}}(t \pm t_0) = T[\vec{U}_{\text{ВХ}}(t \pm t_0)]. \quad (2.4)$$

Для НЦ

$$\vec{U}_{\text{ВЫХ}}(t) = T\vec{U}_{\text{ВХ}}(t), \quad (2.5)$$

а для ЛПЦ

$$\vec{U}_{\text{ВЫХ}}(t) = T(t)[\vec{U}_{\text{ВХ}}(t)]. \quad (2.6)$$

2.3 Анализ прохождения измерительных сигналов через линейные цепи

2.3.1 Методы анализа прохождения детерминированных ИС через линейные цепи (ЛЦ) с постоянными параметрами

При прохождении любых сигналов через такие ЛЦ изменяется их форма за счёт ослабления или усиления составляющих их спектра в зависимости от частоты, что приводит к линейным частотным искажениям передаваемой информации. Количественная оценка таких изменений выполняется путём применения методов анализа, в принципе, пригодных для любого типа ЛЦ.

Существуют четыре основных метода: классический; временной; спектральный; операторный.

Исключая классический метод, остальные используют принцип суперпозиции, т. е.:

1 – входной сигнал разбивается на сумму элементарных сигналов: коротких импульсов – во временном методе; гармонических колебаний – в спектральном методе; гармонических колебаний, затухающих по экспоненте – в операторном методе;

2 – с помощью той или иной характеристики цепи находится отклик на каждый элементарный сигнал;

3 – определяется сумма откликов, представляющая собой выходной сигнал.

2.3.1.1 Классический (метод дифференциальных уравнений)

Основан на том, что по законам Кирхгофа составляется линейное дифференциальное уравнение n -й степени, связывающее известную функцию входного сигнала (воздействия) $U_{\text{ВХ}}(t)$ и искомую функцию выходного сигнала (реакции) $U_{\text{ВЫХ}}(t)$:

$$\begin{aligned}
 a_0 U_{\text{ВЫХ}}(t) + a_1 \frac{dU_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 U_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n U_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^n} = \\
 = b_0 U_{\text{ВХ}}(t) + b_1 \frac{dU_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 U_{\text{ВХ}}(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m U_{\text{ВХ}}(t)}{dt^m},
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

где a_0, a_1, \dots, a_n и b_0, b_1, \dots, b_m – для ЛЦ с постоянными параметрами являются постоянными вещественными коэффициентами. Искомая функция сигнала на выходе цепи $U_{\text{ВЫХ}}(t)$ определяется в виде суммы двух функций

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{\text{ВЫХ1}}(t) + U_{\text{ВЫХ2}}(t), \tag{2.8}$$

где $U_{\text{ВЫХ1}}(t)$ – частное решение дифференциального уравнения, которое непосредственно зависит от вида входного воздействия и описывает вынужденный режим;

$U_{\text{ВЫХ2}}(t)$ – общее решение уравнения при $U_{\text{ВХ}}(t) = 0$, которое описывает переходные процессы в цепи.

Решение дифференциального уравнения можно найти путём использования формализованных процедур преобразования Лапласа (операторного метода). Этот метод используется для анализа простейших цепей, описываемых дифференциальными уравнениями не выше 2-го порядка.

2.3.1.2 Временной (метод интеграла Дюамеля)

Базируется на использовании импульсной (ИХ) или переходной (ПХ) характеристик цепи и разбиении сигнала на короткие импульсы. Используется чаще всего для анализа переходного режима цепи.

ИХ обозначается $h(t)$ и является функцией реакции цепи на входное воздействие в виде единичной дельта-функции:

$$U_{\text{ВХ}}(t) = \delta(t) \text{ и } U_{\text{ВЫХ}}(t) = h(t) = T[\delta(t)], \tag{2.9}$$

где T – оператор цепи.

ПХ обозначается $g(t)$ и является функцией реакции цепи на входное воздействие в виде единичного скачка (функции Хевисайда):

$$U_{\text{ВХ}}(t) = \sigma(t) \text{ и } U_{\text{ВЫХ}}(t) = g(t) = T[\sigma(t)]. \tag{2.10}$$

Так как $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$, то

$$h(t) = T\left[\frac{d\sigma(t)}{dt}\right] = \frac{d(T[\sigma(t)])}{dt} = \frac{dg(t)}{dt}, \tag{2.11}$$

и

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt . \quad (2.12)$$

Учитывая, что спектр дельта-функции $\delta(t)$ равномерный и бесконечный, $h(t)$ и $K(j\omega)$ взаимосвязаны преобразованиями Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega , \quad \text{а} \quad K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt . \quad (2.13)$$

Если $h(t)$ – действительная функция, то $K(j\omega)$ – эрмитова функция. Для реальных цепей $h(t) = 0$ при $t < 0$ и $K(j\omega)$ является аналитической функцией, т. е. $K(j\omega) = K_{\text{Re}}(\omega) + jK_{\text{Im}}(\omega)$, причём для минимально-фазовых цепей функции $K_{\text{Re}}(\omega)$ и $K_{\text{Im}}(\omega)$ связаны между собой преобразованиями Гильберта, поэтому достаточно знать одну из них.

Так как $S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = K(j\omega) \cdot S_{\text{ВХ}}(j\omega)$, то

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}}(t) &= h(t) \otimes U_{\text{ВХ}}(t) = \int_0^t h(\tau) U_{\text{ВХ}}(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(t-\tau) U_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \left(g(t) \frac{dU_{\text{ВХ}}(t-\tau)}{d\tau} \right) d\tau = \int_0^t \left(g(t-\tau) \frac{dU_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau} \right) d\tau - \end{aligned} \quad (2.14)$$

четыре вида интегралов Дюамеля.

Недостатком метода являются существенные вычислительные трудности нахождения интегралов свёртки для сложных функций.

2.3.1.3 Спектральный (частотный метод)

Основан на использовании свойств передаточной частотной характеристики (ЧХ) цепи $K(j\omega)$ и известной спектральной плотности входного сигнала $S_{\text{ВХ}}(j\omega)$. Применяется для анализа цепей в установившемся режиме. Реализуется последовательностью действий:

- 1) определение ЧХ цепи $K(j\omega)$;
- 2) определение спектра входного сигнала с помощью прямого преобразования Фурье:

$$S_{\text{ВХ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{ВХ}}(t) e^{-j\omega t} dt ; \quad (2.15)$$

- 3) нахождение спектра выходного сигнала:

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(j\omega) K(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(\omega) K(\omega) e^{j[\varphi_{\text{ВХ}}(\omega) + \varphi_{\text{К}}(\omega)]} , \quad (2.16)$$

где $K(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);

$\varphi_K(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ) цепи;

$S_{ВХ}(\omega)$ и $\varphi_{ВХ}(\omega)$ – соответственно модуль и фаза спектра $U_{ВХ}(t)$;

4) определение выходного сигнала с помощью обратного преобразования Фурье:

$$U_{ВЫХ}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ВЫХ}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.17)$$

Этот метод широко применяется благодаря свойству гармонических сигналов не изменять свою форму при прохождении через ЛЦ и физической наглядности, когда достаточно найти спектр $U_{ВЫХ}(t)$, чтобы судить об искажениях $U_{ВХ}(t)$. На основе этого метода легко сформулировать требования к неискаженной передаче сигналов: АЧХ цепи должна быть постоянной, а ФЧХ – линейной в пределах эффективной ширины спектра входного сигнала.

2.3.1.4 Операторный (метод преобразований Лапласа)

Этот метод, как более общий, снимает ограничение спектрального метода в отношении абсолютной интегрируемости функций $U_{ВХ}(t)$.

Используется представление входного и выходного сигналов преобразованиями Лапласа:

прямое преобразование –

$$S_{ВХ}(p) = \int_0^{\infty} U_{ВХ}(t) e^{-pt} dt; \quad (2.18)$$

обратное преобразование –

$$U_{ВЫХ}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S_{ВЫХ}(p) e^{pt} dp; \quad (2.19)$$

где $U_{ВХ}(t)$, $U_{ВЫХ}(t)$ и $S_{ВХ}(p)$, $S_{ВЫХ}(p)$ – соответственно оригинал и изображение входного и выходного сигналов;

$p = \alpha + j\omega$ – оператор Лапласа.

Причём $S_{ВЫХ}(p) = S_{ВХ}(p)K(p)$,

где $K(p)$ – передаточная функция цепи, которая получается из выражения коэффициента передачи $K(j\omega)$ путём замены переменной $j\omega$ на p .

Нахождение $U_{ВЫХ}(t)$ при заданном $U_{ВХ}(t)$ и $K(p)$ содержит три процедуры:

- 1) преобразование $U_{ВХ}(t) \rightarrow U_{ВХ}(p)$;
- 2) определение $U_{ВЫХ}(p) = K(p)U_{ВХ}(p)$;

3) преобразование $U_{\text{ВЫХ}}(p) \rightarrow U_{\text{ВЫХ}}(t)$.

Практическое применение операторного метода упрощается благодаря наличию таблиц прямого и обратного преобразований Лапласа.

2.3.2 Прохождение детерминированных сигналов через аperiodические цепи, дифференцирование и интегрирование сигналов

2.3.2.1 Дифференцирование и интегрирование сигналов

При дифференцировании

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \tau_0 \frac{dU_{\text{ВХ}}(t)}{dt}, \quad (2.20)$$

а при интегрировании

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\infty} U_{\text{ВХ}}(t) \cdot dt, \quad (2.21)$$

где τ_0 – постоянная величина, имеющая размерность времени для сохранения размерности исходного сигнала.

Согласно теоремам о преобразовании спектров сигналов, имеем:

– для дифференцирующей цепи $S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(j\omega) \cdot \tau_0 j\omega$, т. е. $K(j\omega) = \tau_0 \cdot j\omega$ (рисунок 2.2, а и б);

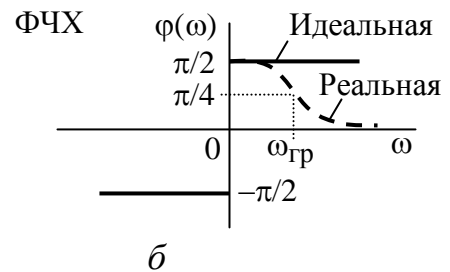
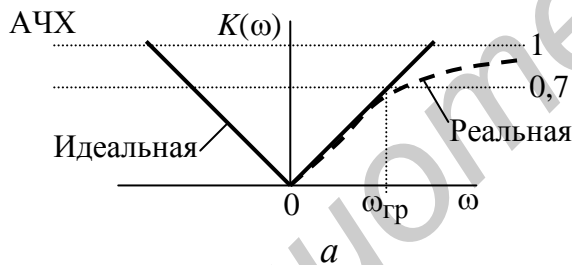


Рисунок 2.2

– для интегрирующей цепи $S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(j\omega) / (\tau_0 \cdot j\omega)$, т. е. $K(j\omega) = 1/(\tau_0 \cdot j\omega)$ (рисунок 2.3, а и б).

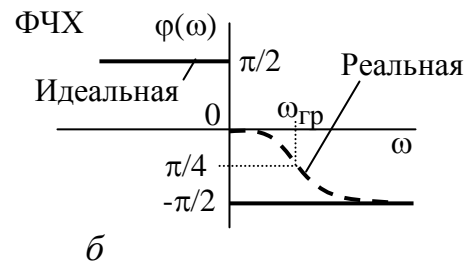
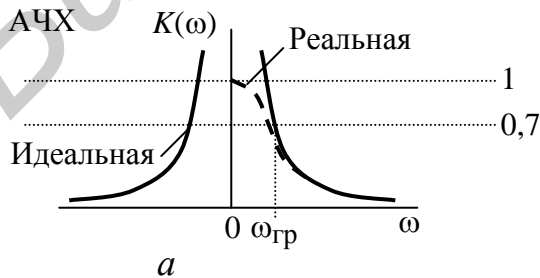


Рисунок 2.3

Реальные дифференцирующая и интегрирующая RC -цепи показаны на рисунке 2.4, *a* и *б* соответственно.

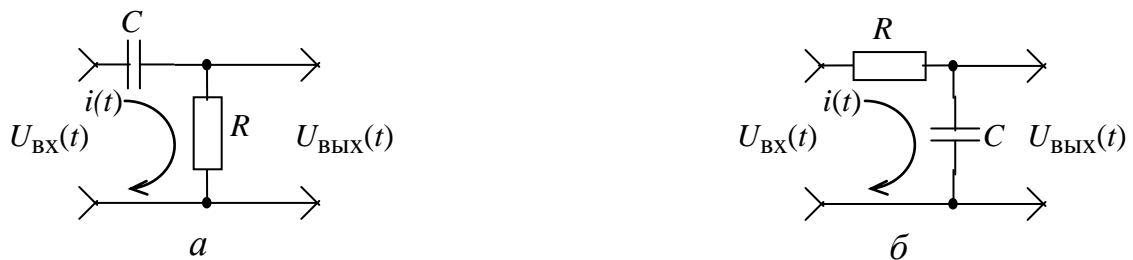


Рисунок 2.4

Для дифференцирующей цепи (рисунок 2.4, *a*) ЧХ определяется как

$$K(j\omega) = \frac{U_{ВЫХ}(j\omega)}{U_{ВХ}(j\omega)} = \frac{1}{1 + 1/(j\omega\tau_0)},$$

т. е.

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega\tau_0)^2}} \quad (2.22)$$

АЧХ (см. рисунок 2.2, *a*) и

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega\tau_0}\right) \quad (2.23)$$

ФЧХ (см. рисунок 2.2, *б*),

где $\tau_0 = RC$ – постоянная времени RC -цепи.

Граничная частота полосы пропускания RC -цепи $\omega_{гр}$ по уровню 0,707 равна $\omega_{гр} = 1 / \tau_0$.

Для интегрирующей цепи (рисунок 2.4, *б*):
 ЧХ определяется как

$$K(j\omega) = \frac{U_{ВЫХ}(j\omega)}{U_{ВХ}(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_0},$$

т. е.

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_0)^2}} \quad \text{– АЧХ (см. рисунок 2.3, a)} \quad (2.24)$$

и

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau_0) \quad \text{– ФЧХ (см. рисунок 2.3, б)}. \quad (2.25)$$

Таким образом, цепи, изображенные на рисунке 2.4, могут осуществлять процесс приближенного дифференцирования входного сигнала при условии $f_{в} \ll f_{гр}$ ($f_{в}$ – верхняя частота в спектре сигнала, $f_{гр} = 1/2\pi\tau_0$) и интегрирования при $f_{в} \gg f_{гр}$.

2.3.2.2 Прохождение прямоугольного импульса через дифференцирующую и интегрирующую RC-цепи

Напряжения на элементах RC-цепи изменяются как $U_R(t) = Ee^{-t/\tau_0}$, $U_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau_0})$ и показаны на рисунке 2.5.

Время нарастания – $t_H = 2,3\tau_0$.

Представим входной прямоугольный импульс в виде (рисунок 2.6, а)

$$U(t) = E[1(t) - 1(t - t_H)] . \quad (2.26)$$

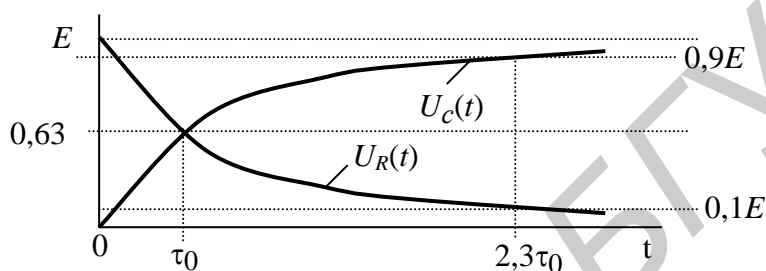


Рисунок 2.5

Из теории цепей известно, что ИХ для дифференцирующей RC-цепи

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0} 1(t) . \quad (2.27)$$

Тогда, в соответствии с методом интеграла Дюамеля, выходной сигнал

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(t) &= \int_0^t U_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = E \int_0^t [1(\tau) - 1(\tau - \tau_H)] \left[\delta(t - \tau) - \frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0} \right] d\tau = \\ &= Ee^{-t/\tau_0} 1(t) - Ee^{-(t-\tau_H)/\tau_0} 1(t - \tau_H) . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Напряжение на $U_R(t)$ определится как

$$U_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ Ee^{-t/\tau_0}, & 0 < t < \tau_H; \\ Ee^{-t/\tau_0} - Ee^{-(t-\tau_H)/\tau_0}, & t > \tau_H. \end{cases} \quad (2.29)$$

Результаты для трёх значений τ_0 показывают (рисунок 2.6, б), что форма сигнала на выходе дифференцирующей RC-цепи тем ближе к производной от входного сигнала, чем меньше значение τ_0 в сравнении с τ_H или (когда $f_B = 1/\tau_H$) $\tau_0 \ll 1/(2\pi f_B)$. Эта цепь как бы «укорачивает» импульсный сигнал. При $f_B \gg f_{гр}$ цепь не оказывает влияния на сигнал за исключением устранения постоянной составляющей и используется в качестве разделительной цепи по постоянному току.

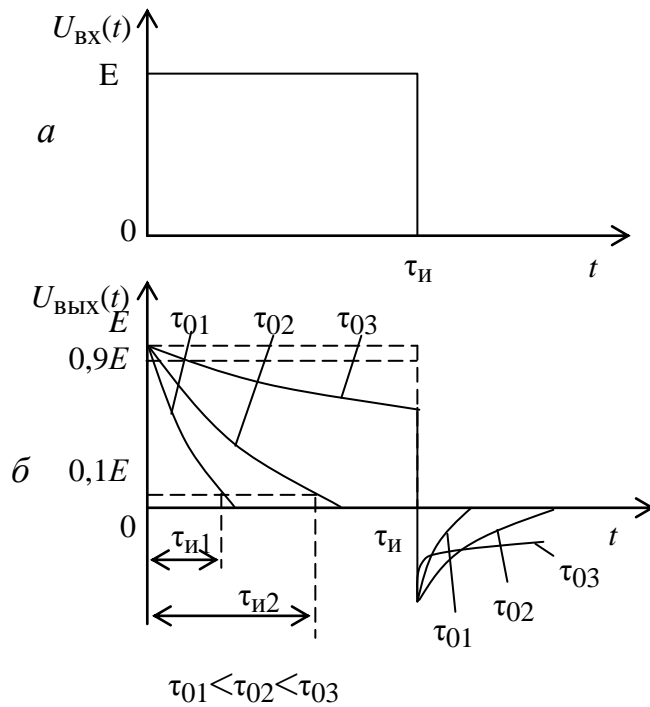


Рисунок 2.6

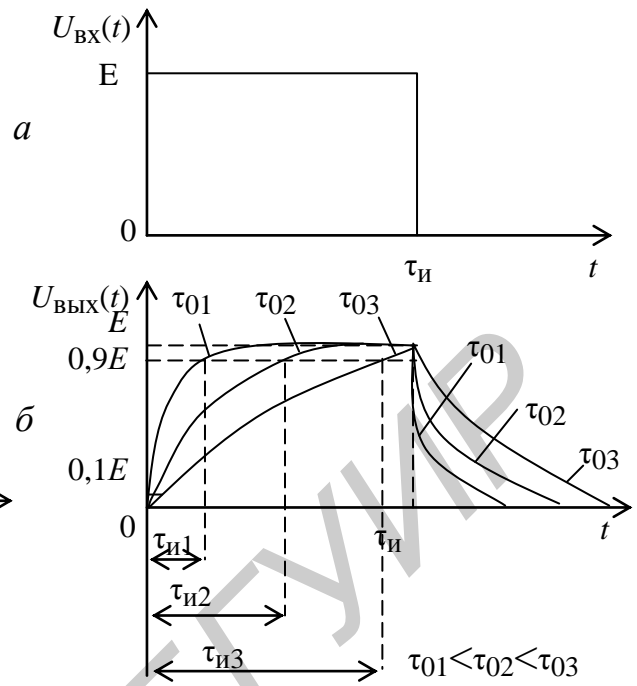


Рисунок 2.7

Для интегрирующей RC-цепи ИХ равна

$$h(t) = \frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0} 1(t), \quad (2.30)$$

а выходной сигнал

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = E \int_0^t [1(\tau) - 1(\tau - \tau_{и})] \left[\frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0} \right] d\tau = \quad (2.31)$$

$$= E \left(1 - e^{-t/\tau_0} \right) 1(t) - E \left(1 - e^{-(t-\tau_{и})/\tau_0} \right) 1(t - \tau_{и}).$$

и

$$U_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ E(1 - e^{-t/\tau_0}), & 0 < t < \tau_{и}; \\ E(1 - e^{-t/\tau_0}) - E(1 - e^{-(t-\tau_{и})/\tau_0}), & t > \tau_{и}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Результаты для трёх значений τ_0 показывают (рисунок 2.7, б), что форма сигнала на выходе интегрирующей RC-цепи тем ближе к интегралу от входного сигнала, чем больше значение τ_0 в сравнении с $\tau_{и}$ или (когда $f_B = 1/\tau_{и}$) $\tau_0 \gg 1/(2\pi f_B)$. Эта цепь как бы «удлиняет» импульсный сигнал. При $f_B \ll f_{ГР}$ ($\tau_0/\tau_{и} < 0,03$) выходной сигнал близок к входному.

Аналогичные результаты можно получить, используя RL -цепи. Так, заменяя C на L (см. рисунок 2.4, a и b), соответственно получим интегрирующую и дифференцирующую RL -цепи.

2.3.2.3 Прохождение радиосигналов через избирательные узкополосные цепи

Цепь считается узкополосной, если полоса пропускания $2\Delta\omega_{0,7} \ll \omega_p$ (ω_p – средняя или резонансная частота АЧХ).

АЧХ узкополосной (резонансной) цепи имеет вид, показанный на рисунке 2.8, a .

Существуют несколько приближённых методов для анализа прохождения сигналов через узкополосную цепь:

- 1) метод огибающей;
- 2) метод «мгновенной» частоты;
- 3) приближённый спектральный метод.

Метод огибающей используется для анализа прохождения АМ-сигналов.

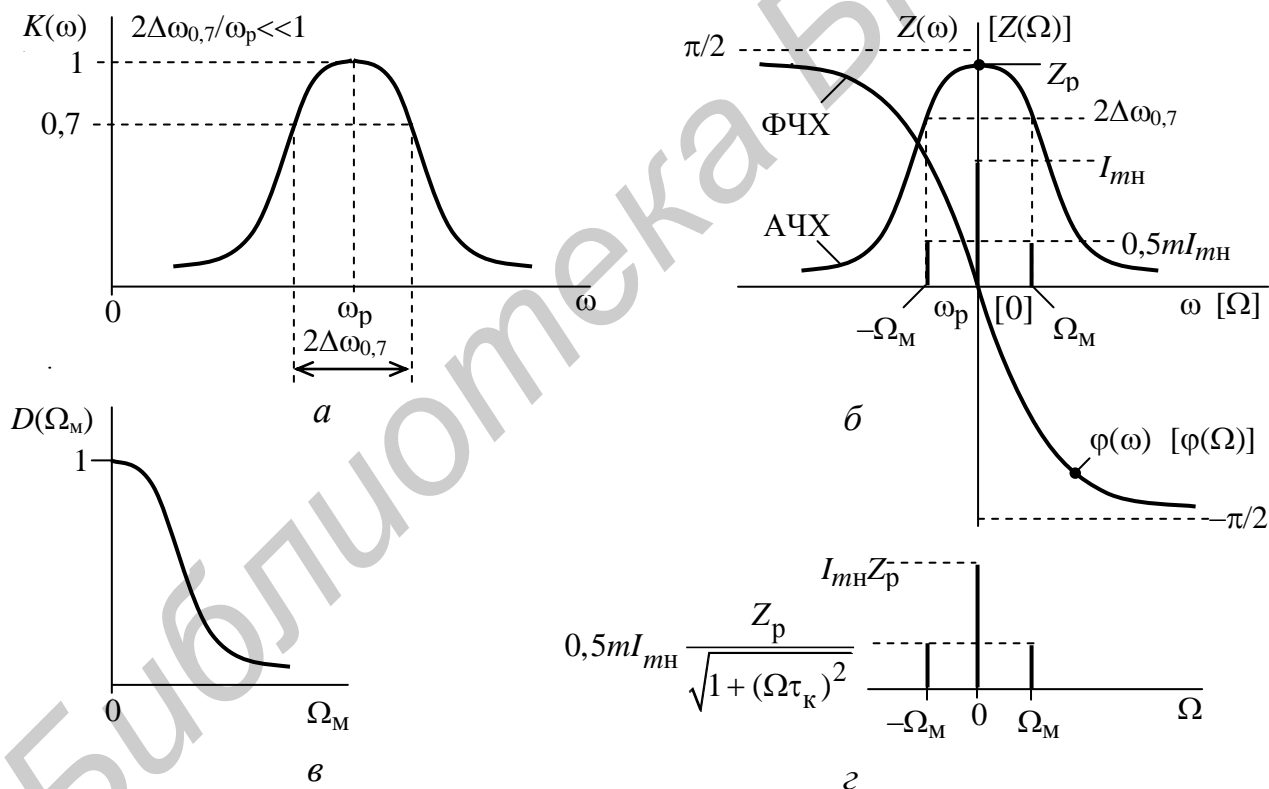


Рисунок 2.8

Рассмотрим узкополосную резонансную цепь в виде параллельного LC -контура с сопротивлением потерь R_{Π} (рисунок 2.9, a).

Его сопротивление

$$Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{i(j\omega)} = \frac{Z_p}{1 + j(\omega - \omega_p)\tau_K} - \text{ЧХ}, \quad (2.33)$$

где $Z_p = \frac{L}{R_{\Pi} C}$ – активное резонансное сопротивление;

$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота;

$\tau_K = 2Q / \omega_p = 2CZ_p$ – постоянная времени контура;

$Q = \omega_p L / R_{\Pi} = \omega_p / 2\Delta\omega_{0,7}$ – добротность колебательного контура;

$\varphi(\omega) = -\arctg(\xi Q)$ – ФЧХ;

$\xi = \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}$ – обобщённая расстройка.

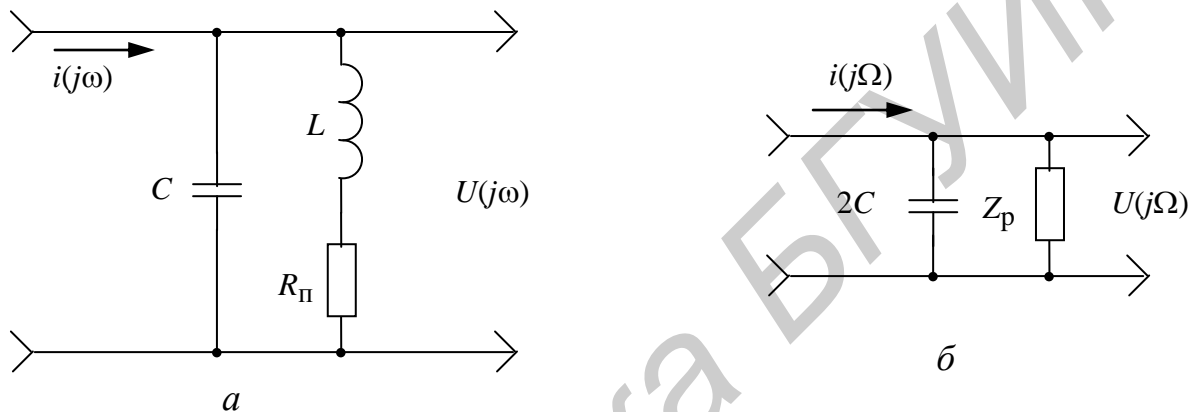


Рисунок 2.9

Обозначая $\omega - \omega_p = \Omega$, можно записать $Z(j\Omega) = \frac{Z_p}{1 + j\Omega\tau_K}$. Тогда (рисунок 2.8, б)

$$\text{АЧХ} - Z(\Omega) = \frac{Z_p}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_K)^2}}, \quad (2.34)$$

$$\text{а ФЧХ} - \varphi(\Omega) = -\arctg(\Omega\tau_K). \quad (2.35)$$

Видно, что низкочастотным аналогом LC -контура является RC -цепь ФНЧ (рисунок 2.9, б) с постоянной времени $\tau_0 = \tau_K$.

Следовательно, анализ прохождения АМ радиосигнала через узкополосную резонансную цепь можно заменить приближённым анализом прохождения его комплексной огибающей через эквивалентную НЧ – RC -цепь. Чем уже спектр входного сигнала, тем точнее анализ.

2.3.2.4 Прохождение АМ-сигнала через узкополосную резонансную цепь (метод огибающей)

Представим входной АМ-сигнал как

$$i(t) = I_{mH} [1 + m \cos(\Omega_M t)] \cos(\omega_H t) = I_{mH} \cos(\omega_H t) + 0,5mI_{mH} \cos[(\omega_H + \Omega_M)t] + 0,5mI_{mH} \cos[(\omega_H - \Omega_M)t], \quad (2.36)$$

где I_{mH} – амплитуда тока несущего колебания;

m – коэффициент модуляции;

ω_H и Ω_M – соответственно частоты несущего колебания и модулирующего сигнала.

Для анализа применим метод огибающей используя НЧ-аналог LC-контура в виде RC-цепи (рисунок 2.9, б). Примем $\omega_H = \omega_p$, т. е. контур настроен точно на несущую частоту АМ-сигнала (см. рисунок 2.8, б).

Для выходного АМ-сигнала получим значения несущей $U_{mH} = I_{mH} Z_p$ и боковых составляющих (рисунок 2.8, в):

$$U_{m\delta}(\Omega_M) = 0,5mI_{mH} \frac{Z_p}{\sqrt{1 + (\Omega_M \tau_K)^2}}. \quad (2.37)$$

Глубина модуляции выходного сигнала

$$m_{\text{ВЫХ}}(\Omega_M) = \frac{m}{\sqrt{1 + (\Omega_M \tau_K)^2}} \quad (2.38)$$

меньше, чем на входе. Относительное уменьшение глубины модуляции

$$D(\Omega_M) = \frac{m_{\text{ВЫХ}}(\Omega_M)}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega_M \tau_K)^2}} \quad (2.39)$$

называется коэффициентом демодуляции, повторяет правую ветвь кривой АЧХ сопротивления LC-контура и определяет частотные искажения АМ-сигнала (рисунок 2.8, в).

Огибающая амплитуды несущей частоты на выходе отстаёт по фазе от огибающей на входе на угол $\varphi(\Omega) = -\arctg(\Omega \tau_K)$, т. е. имеет место время задержки выходного сигнала:

$$t_3 = \left| \frac{d\varphi}{d\Omega} \right| = \left| \frac{d(\arctg(2\Omega Q / \omega_p))}{d\Omega} \right| = \frac{1}{1 + (2\Omega Q / \omega_p)^2} (2Q / \omega_p), \quad (2.40)$$

которая в пределах полосы пропускания контура $2\Delta\omega_{0,7}$ (где $\varphi(\Omega)$ близка к линейной и производная берётся в точке $\Omega = 0$):

$$t_3 = 2Q / \omega_p = \tau_K. \quad (2.41)$$

В случае неточной настройки $\omega_H \neq \omega_p$ на выходе дополнительно возникает асимметрия значений амплитуд и фаз боковых составляющих (рисунок 2.10), что приводит к паразитной фазовой модуляции и изменению закона огибающей (перемодуляции), а при детектировании АМ-сигнала – к нелинейным искажениям.

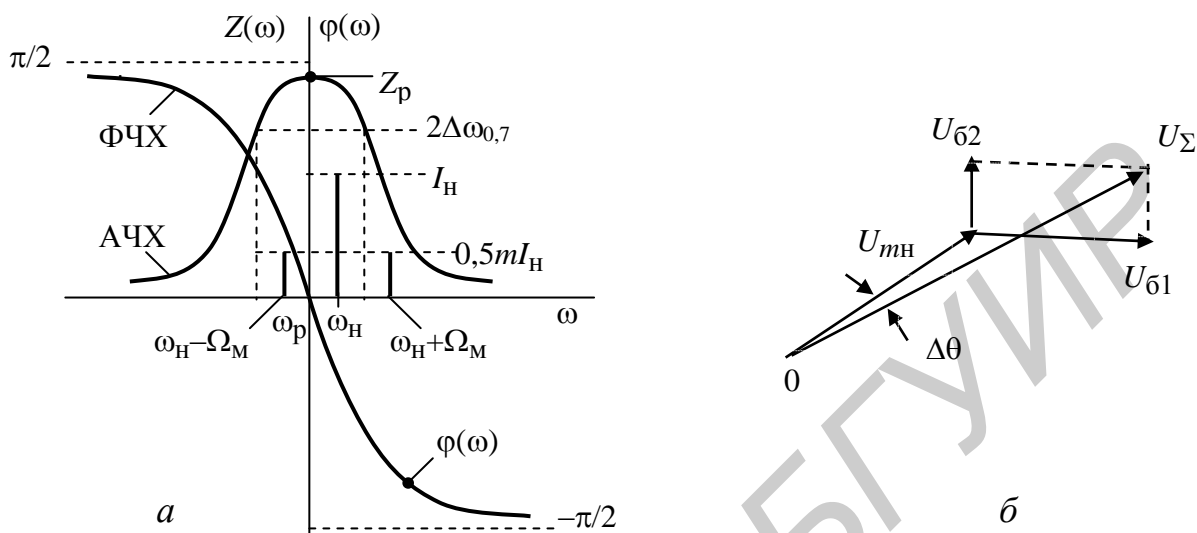


Рисунок 2.10

При прохождении АМ-сигнала с прямоугольной огибающей форма его огибающей на выходе изменяется в соответствии с формой прямоугольного видеоимпульса при его прохождении через интегрирующую RC -цепь (см. рисунок 2.7, б).

2.3.2.5 Метод «мгновенной» частоты

Для анализа прохождения ЧМ-сигнала необходимо учесть влияние переходного процесса в ЛЦ на изменение частоты. Для существенного упрощения анализа разработан приближённый метод, основанный на допущении, что установление стационарного режима в цепи происходит практически одновременно (мгновенно) с изменением частоты ЧМ-сигнала, и названный методом «мгновенной» частоты.

Такое допущение накладывает условия на применимость метода:

1 – период T_M для максимальной частоты спектра F_M должен быть значительно больше постоянной времени контура $T_M \gg \tau_k$;

2 – девиация частоты Δf_d должна удовлетворять условию $2\Delta f_d \ll 2\Delta f_{0,7}$.

Результат прохождения ЧМ-сигнала при $\beta \ll 1$ можно легко получить спектральным методом, как и для АМ-сигнала.

При $\beta > 1$ в спектре ЧМ-сигнала (рисунок 2.11) учитывается $(\beta + 1)$ пара боковых составляющих, и в этом случае используется метод «мгновенной» частоты.

Тогда

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{mH} K_{\omega(t)} \cos[\omega_H t + \beta \sin(\Omega_M t) + \varphi_{\omega(t)}], \quad (2.42)$$

где $K_{\omega(t)}$ – частотный коэффициент передачи цепи;

$\beta = 2\Delta\omega_D / \Omega_M$ – индекс модуляции;

$\varphi_{\omega(t)}$ – текущая фаза.

Откуда следует, что амплитуда выходного сигнала

$$U_{mH \text{ Вых}}(t) = U_{mH} K_{\omega(t)} = U_{mH} K_{[(\omega_H + \Delta\omega_D \cos(\Omega_M t))]} \quad \text{изменяется в соответствии с законом изменения } K_{\omega(t)},$$

а мгновенная частота

$$\begin{aligned} \omega_{H \text{ Вых}}(t) &= \frac{d[\omega_H t + \beta \sin(\Omega_M t)]}{dt} + \frac{d[\varphi_{\omega(t)}]}{dt} = \\ &= \omega_{H \text{ Вых}}(t) + \Delta\omega_D \cos(\Omega_M t) + \frac{d[\varphi_{\omega(t)}]}{dt}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

При $\omega_H = \omega_p$, $U_{mH}(t)$ изменяется с удвоенной частотой $2\Omega_M$ (рисунок 2.12),

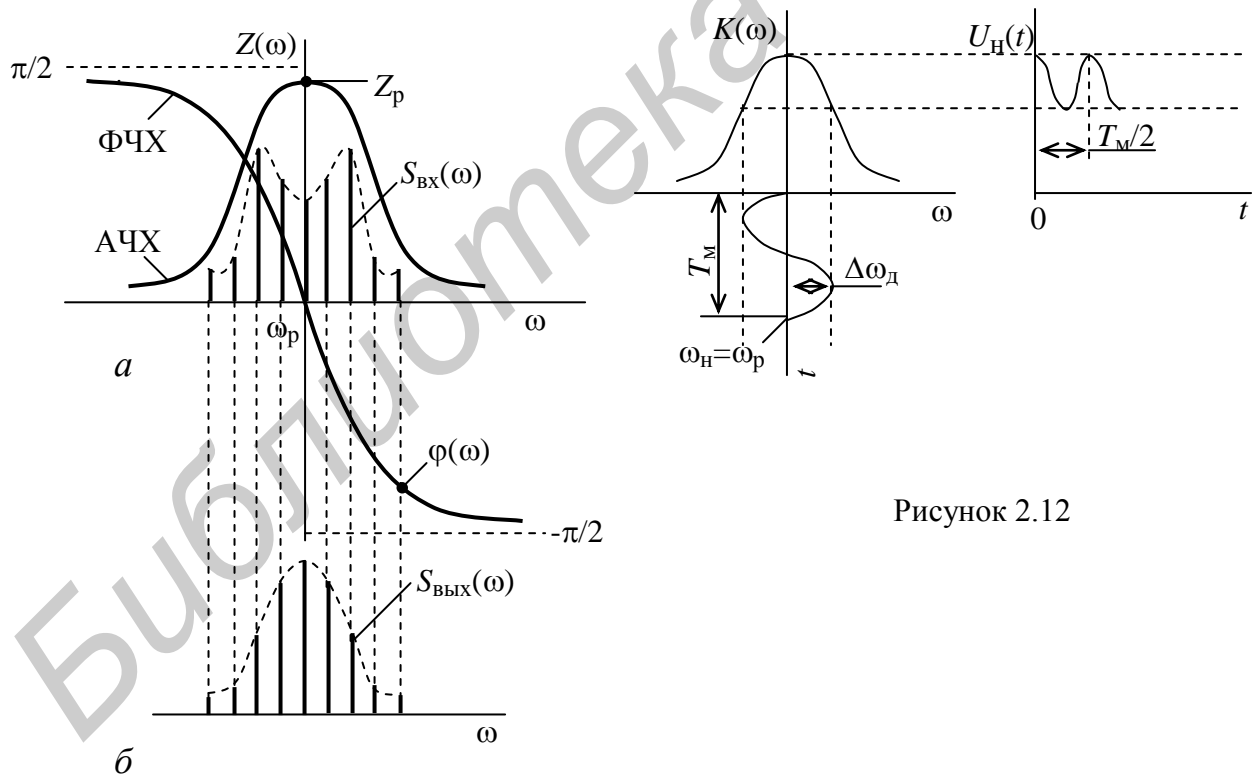


Рисунок 2.12

$$\beta_{\text{ВЫХ}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 + (\Omega_M \tau_K)^2}}, \quad \Delta\omega_{D \text{ Вых}} = \frac{\Delta\omega_D}{\sqrt{1 + (\Omega_M \tau_K)^2}}. \quad (2.44)$$

Таким образом, входной ЧМ-сигнал претерпевает следующие изменения:

- 1) нарушается исходный закон изменения частоты за счёт влияния ФЧХ цепи;
- 2) появляется дополнительная (паразитная) амплитудная модуляция сигнала вследствие неравномерности АЧХ цепи;
- 3) уменьшается девиация частоты за счёт уменьшения индекса модуляции β .

Из рассмотренного выше можно сделать следующий вывод:

для уменьшения искажений при передаче АМ- и ЧМ-сигналов необходимо использовать цепи с возможно более постоянной АЧХ и линейной ФЧХ в пределах эффективной ширины спектра $\Delta f_{эф}$ сигнала.

2.3.2.6 Приближённый спектральный метод

Используется для анализа прохождения широкополосных сигналов. Входной сигнал $U_{вх}(t)$ со спектром $S_{вх}(j\omega)$ считается широкополосным применительно к данной цепи, если можно считать, что зависимость модуля $S_{вх}(\omega)$ имеет постоянное значение $S_{вх}$ в пределах используемой полосы частот АЧХ $K(\omega)$ (рисунок 2.13). Тогда

$$U_{вых}(t) \cong \frac{S_{вх}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \cong S_{вх} h(t), \quad (2.45)$$

т. е. уровень выходного сигнала $U_{вых}(t)$ зависит от значения $S_{вх}$, а его форма определяется $K(\omega)$ в заданной полосе частот $2\Delta\omega$ и имеет вид $h(t)$ – ИХ цепи.

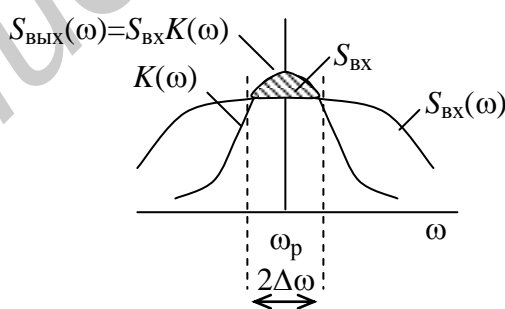


Рисунок 2.13

ЛИТЕРАТУРА

- 1 РГМ 29-99 Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения.
- 2 СТБП 8021-2003. Система обеспечения единства измерений Республики Беларусь. Метрология. Основные термины и определения.
- 3 Основные термины метрологии : русско-белорусский словарь-справочник = Асноўныя тэрміны метралогіі: руска-беларускі слоўнік-даведнік / Ю. М. Плескачевский [и др.] ; под общ. ред. Ю. М. Плескачевского. – Минск : БелГиМ, 2007. – 256 с.
- 4 МИ 1999 – 89 Системы измерительные информационные. Общие требования к метрологическому обеспечению.
- 5 Денисенко, А. Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника: справочное пособие / А. Н. Денисенко. – М. : Горячая линия – Телеком, 2005. – 704 с.
- 6 Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. пособие для вузов / Д. В. Васильев [и др.] ; под ред. К. А. Самойло. – М. : Радио и связь, 1982.
- 7 Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. пособие / И. С. Гоноровский; 5-е изд. М. : Дрофа, 2006.
- 8 Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник / С. И. Баскаков ; 5-е изд. стереотип. – М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.
- 9 Стеценко, О. А. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник / О. А. Стеценко. – М. : Высш. шк., 2007. – 432 с.
- 10 Бабич, Н. П. Основы цифровой схемотехники / Н. П. Бабич, И. А. Жуков. – М.; Киев : Додэка – XXI; МК – Пресс, 2007. – 480 с.
- 11 Бакалов, В. П. Основы теории цепей : учебник для вузов / В. П. Бакалов, В. Ф. Дмитриков, Б. И. Крук ; под ред. В. П. Бакалова. – 3-е изд. перераб. и доп. – М. : Горячая линия – Телеком, 2009. – 596 с.
- 12 Котоусов, А. С. Оптимальная фильтрация сигналов и компенсация помех / А. С. Котоусов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2008 – 166 с.
- 13 Тихонов, В. И. Случайные процессы. Примеры и задачи. Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации: учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. 5 / В. И. Тихонов, Б. И. Шахтарин, В. В. Сизых. – М. : Горячая линия – Телеком, 2009. – 400 с.
- 14 Марченко, А. Л. Основы преобразования информационных сигналов : учеб. пособие для вузов / А. Л. Марченко, Е. А. Марченко. – М. : Горячая линия – Телеком, 2010, – 286 с.
- 15 Харкевич, А. А. Основы радиотехники / А. А. Харкевич. – 3-е изд. стереотип. – М. : Физматлит, 2007. – 512 с.

Учебное издание

Басов Владимир Георгиевич

**ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА ИХ ОБРАБОТКИ**

В 3-х частях

Часть 1

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *И. П. Острикова*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная вёрстка *А. В. Бас*

Подписано в печать 16.01.2013. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 7,09. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ 213.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6