

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет

информатики и радиоэлектроники

УДК517.977

Федоров

Антон Михайлович

Численные алгоритмы негладкой оптимизации

**АВТОРЕФЕРАТ**

на соискание степени магистра информатики и вычислительной техники

по специальности 1-40 80 04 Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Научный руководитель

Минченко Л.И.

д.ф.-м.н., профессор

Минск 2016

## **ВВЕДЕНИЕ**

Достаточно часто при оптимизации математических моделей в технике, экономике и производстве встречаются экстремальные задачи, решение которых (точное или приближенное) может дать значительный экономический эффект, но требует применения методов негладкой оптимизации. Однако до сих пор не существует универсального метода решения таких задач. Существующие пакетные методы оказываются эффективными лишь при решении задач малой и средней размерности. В случаях же больших экстремальных задач они требуют значительных вычислительных ресурсов. С другой стороны, субградиентные методы, которые на настоящий момент представляют единственную возможность оптимизации негладких задач высокой размерности, обладают рядом серьезных недостатков, вследствие чего они не являются лучшим средством решения экстремальных задач большой размерности.

Сказанное выше в полной мере относится к применению методов негладкой оптимизации к теории задач двухуровневого программирования, чрезвычайно актуальных в многочисленных технических и экономических моделях с наличием участников с несовпадающими интересами. Таким образом, наличие надежного и эффективного алгоритма решения задач двухуровневой оптимизации может представлять значительный интерес.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

В данной работе предлагается общая схема алгоритма решения линейных задач двухуровневой оптимизации с применением негладких методов.

Цель исследования – разработка метода негладкой оптимизации, эффективного для решения линейных задач двухуровневого программирования.

Задачи исследования:

1. изучение существующих методов гладкой и негладкой оптимизации;
2. разработка метода негладкой оптимизации для решения линейных задач двухуровневого программирования;

3. разработка программы для решения линейных задач двухуровневого программирования на основе разработанного метода;
4. анализ полученных результатов.

Объектом исследования являются линейные задачи двухуровневой оптимизации.

Предметом исследования выступают методы негладкой оптимизации в применении к задачам двухуровневого программирования.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, выводов, заключения и приложений. Работа изложена на 46 страницах и включает библиографический список из 24 наименований.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ**

В **первой** главе работы приводится краткий обзор существующих методов решения негладких экстремальных задач. Рассматриваются субградиентные методы и пакетные методы. Проводится анализ данных методов и их применимости к решению конкретных задач.

Основной идеей субградиентных методов является обобщение гладких методов оптимизации (градиентных методов) путем замены в них градиента произвольным субградиентом. Благодаря такой простой структуре субградиентные методы широко используются в негладкой оптимизации.

Основная идея пакетных методов состоит в аппроксимации субдифференциала (т.е. набора субградиентов) целевой функции путем сбора субградиентов от предыдущей итерации в “пакет”. Это дает возможность получить больше информации о локальном поведении функции, нежели в случае использования одного произвольного субградиента (как в субградиентных методах).

Во **второй** главе содержится описание задачи двухуровневой оптимизации и постановка задачи, предлагается разработка метода ее решения и его теоретическое обоснование. Показывается актуальность темы магистерской диссертации и доказываемая необходимость проведения дальнейших исследований.

Задачи двухуровневого программирования появились в связи с необходимостью управления сложными производственными, экономическими и социальными системами, в которых присутствуют участники с не совпадающими интересами и различными

возможностями контролировать процесс управления. Такого рода задачи естественно возникают при моделировании так называемых иерархических систем. Верхний уровень иерархической системы принимает решение первым, но его решение определяет поведение нижнего уровня только в определенной степени, не полностью. Получив решения верхнего уровня, нижний уровень в ответ принимает свое решение. Каждый уровень иерархии принимает свое решение, преследуя свои цели (цели разных уровней, как правило, не совпадают) и использует имеющиеся у него возможности и ресурсы. Деятельность всей системы направлена на достижение определенной глобальной цели. Задача заключается в том, чтобы найти такое решение верхнего уровня, которое приводит систему к достижению глобальной цели.

В литературе часто приводится следующая наглядная интерпретация, способствующая пониманию сути двухуровневой задачи: верхний уровень иерархии - центральное правительство, нижний уровень - региональные органы власти, обладающие определенной степенью автономии и местными ресурсами, которые могут быть использованы как для поддержки решения правительства, так и в известной степени для сопротивления этому решению.

Задачи двухуровневого программирования (bilevel programming) являются инструментом моделирования достаточно сложных иерархических систем в промышленности, технике и экономике. Управление такого рода системами представляет собой задачу математического программирования (задача верхнего уровня)

$$F(x, y) \rightarrow \min \quad (\text{или } F(x, y) \rightarrow \max),$$

в качестве ограничений которой наряду со стандартными ограничениями

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, l,$$

выступают и ограничения, определяемые множеством решений некоторой другой задачи (так называемой задачи нижнего уровня):

$$f(x, y) \rightarrow \min_y,$$

$$y \in K(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0 \quad i = 1, \dots, s\}.$$

В **третьей** главе проводится тестирование разработанного алгоритма и анализ результатов тестирования. Рассматривается решение тестовых примеров. Задача двухуровневого программирования

рассматривается в данных примерах в оптимистической постановке, как и в оригинальных работах, откуда взяты примеры.

В заключении дается оценка полученных результатов и решённых задач.

Завершают работу список использованных источников и приложения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены методы негладкой оптимизации. Были рассмотрены и проанализированы существующие методы решения негладких экстремальных задач (субградиентные и пакетные) с целью применения их для решения задач двухуровневой оптимизации. Нам не удалось найти универсальных алгоритмов негладкой оптимизации, которые бы позволяли эффективно решать задачи задач двухуровневой оптимизации. В результате во второй главе диссертации нами предложена идея метода решения линейных двухуровневых задач программирования на основе обобщения и модификации метода Розена-Стрекаловского.

Разработанный метод базируется на предложенном Стрекаловским подходе к решению обратно выпуклых задач оптимизации. Оптимальное решение ищется итерационным способом, приводящим к стационарной точке. При этом на каждой итерации поиск направления спуска осуществляется путем поиска направления наискорейшего спуска определяемого посредством решения задачи линейного программирования. Данный метод является релаксационным и на каждой итерации улучшает значение целевой функции. Проведенное предварительное тестирование предложенного метода на численных тестовых примерах, а также проверка работоспособности метода на задачах двухуровневой оптимизации произвольного вида показали, что дальнейшие его исследования могут привести к достаточно неплохим результатам.

## РЕЗЮМЕ

Федоров Антон Михайлович

Численные методы негладкой оптимизации

**Ключевые слова:** численные методы, двухуровневое программирование, негладкая оптимизация.

**Цель исследования** – разработка метода негладкой оптимизации, эффективного для решения линейных задач двухуровневого программирования.

**Полученные результаты и их новизна.** Предложена идея метода решения линейных двухуровневых задач программирования на основе обобщения и модификации метода Розена-Стрекаловского. Разработанный метод базируется на предложенном Стрекаловским подходе к решению обратных выпуклых задач оптимизации. Оптимальное решение ищется итерационным способом, приводящим к стационарной точке. При этом на каждой итерации поиск направления спуска осуществляется путем поиска направления наискорейшего спуска определяемого посредством решения задачи линейного программирования. Данный метод является релаксационным и на каждой итерации улучшает значение целевой функции.

**Область применения.** Применению метода к теории задач двухуровневого программирования, актуальных в многочисленных технических и экономических моделях с наличием участников с несовпадающими интересами.

## SUMMARY

Fyodorov Anton Mikhailovich

Numerical methods for non-smooth optimization

**Keywords:** numerical methods, bilevel programming, nonsmooth optimization.

**The purpose of research** - to develop a method of nonsmooth optimization, effective for solving linear bilevel programming.

**The results and their novelty.** It proposed the idea of two-level methods of solving linear programming problems based on generalizations and modifications of the Rosen-Strekalovsky. The developed method is based on the proposed approach to solving Strekalovsky back convex optimization problems. The optimal solution is sought in an iterative manner, leading to a stationary point. At the same time on each iteration descent direction of search performed by the search direction of steepest descent is determined by solving a linear programming problem. This method is the relaxation and improves in each iteration the value of the objective function.

**Application area.** Application of the method to the theory of two-level programming that is relevant to many of the technical and economic models to the presence of participants with distinct interests.