

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра метрологии и стандартизации

М. Ю. Дерябина

***ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА  
И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ***

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
вузов Республики Беларусь по образованию  
в области информатики и радиоэлектроники  
в качестве учебно-методического пособия  
для студентов учреждений, обеспечивающих получение  
высшего образования по специальности  
«Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей»*

Минск БГУИР 2007

УДК 389.1 (075.8)  
ББК 30.10 я 73  
Д 36

Рецензенты:

кафедра естественнонаучных дисциплин  
Минского государственного высшего авиационного колледжа;  
зав. лабораторией «Научно-практический центр НАН Республики Беларусь  
по механизации сельского хозяйства»,  
д-р техн. наук В. В. Кузьмич

**Дерябина, М. Ю.**

Д 36 Планирование измерительного эксперимента и обработка результатов измерений : учебно-метод. пособие / М. Ю. Дерябина. – Минск : БГУИР, 2007. – 96 с.

ISBN 978-985-488-168-3

Пособие освещает вопросы, связанные с основными принципами моделирования измерительного процесса, выбора средств измерений, основ планирования измерительного эксперимента, методов оценки погрешностей и расчетов полос неопределенностей, определения эффективности эксперимента и экономики экспериментирования.

Предназначено для подготовки инженеров-метрологов в БГУИР.

Может быть полезно студентам других специальностей, а также аспирантам и специалистам инженерно-технического профиля.

УДК 389.1 (075.8)  
ББК 30.10 я 73

ISBN 978-985-488-168-3

© Дерябина М. Ю., 2007  
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2007

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	5
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.....	14
2.1 Общие сведения о планировании измерений.....	14
2.2 Математические модели величин.....	17
2.2.1 Детерминированные величины.....	17
2.2.2 Математическая модель детерминированной величины в форме последовательности.....	21
2.2.3 Математическая модель случайного вектора.....	22
2.2.4 Математическая модель случайной функции.....	23
2.2.5 Математическая модель случайной последовательности.....	24
2.3 Математические модели средств измерений.....	26
2.3.1 Математическая модель средства измерений в форме статической характеристики.....	26
2.3.2 Динамические математические модели аналогового средства измерений.....	29
2.3.3 Динамическая математическая модель средства измерений в форме передаточной функции.....	30
2.3.4 Комплексная частотная характеристика средства измерений.....	32
2.3.5 Динамическая математическая модель средства измерений в форме весовой функции.....	33
2.3.6 Динамическая математическая модель средства измерений в виде переходной функции.....	34
2.3.7 Математическая модель цифрового средства измерений.....	35
2.4 Математические модели формирования результата измерения количественной величины.....	37
2.4.1 Статическая математическая модель с учетом аддитивного случайного возмущения, действующего на входе средства измерений, и эффекта квантования.....	37
2.4.2 Математическая модель формирования результата измерения с использованием динамической модели средства измерений.....	39
2.4.3 Учет в математической модели формирования результата измерения влияния среды (условий измерения).....	40
2.4.4 Учет в математической модели формирования результата измерения эффекта взаимодействия средства измерений с объектом измерения.....	42
2.4.5 Структурная схема математической модели формирования результата измерения для аналогового средства измерений.....	42
2.4.6 Структурная схема формирования результата измерения для цифрового средства измерений.....	44
3 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА.....	45
3.1 Факторный эксперимент.....	45
3.1.1 Основные термины и определения.....	45

3.1.2 Рандомизованный блок-план.....	48
3.1.3 Планы на латинских квадратах .....	49
3.1.4 Греко-латинские квадраты .....	50
3.1.5 Гипергреко-латинские квадраты.....	50
3.1.6 Дробные реплики и смешанные планы.....	51
3.1.7 Планы с расщепленными участками.....	55
<b>4 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ОДНОФАКТОРНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ .....</b>	<b>55</b>
4.1 Выбор вида математической модели и погрешность адекватности .....	55
4.2 Подбор аппроксимирующей функции.....	60
4.3 Расчет по экспериментальным данным параметров выбранной аппроксимирующей функции .....	61
4.4 Аналитические методы аппроксимации.....	63
4.5 Регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов.....	63
4.6 Расчет параметров полос неопределенности исходных экспериментальных данных.....	67
4.7 Оценка рассеяния экспериментальных данных значением коэффициента корреляции .....	68
4.8 Расчет параметров полосы неопределенности усредненной однофакторной модели .....	71
<b>5 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ МНОГОФАКТОРНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ .....</b>	<b>73</b>
5.1 Математические модели многофакторных зависимостей.....	73
5.2 Методы определения вида и параметров математической модели многофакторной зависимости по экспериментальным данным.....	76
5.3 Методы отбора наиболее значимых факторов и наиболее значимых членов аддитивной модели.....	80
5.4 Оценка параметров области неопределенности исходных данных многофакторной зависимости .....	82
5.5 Расчет параметров многомерного слоя полосы неопределенности усредненной модели многофакторной зависимости .....	84
<b>6 ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.....</b>	<b>87</b>
6.1 Оптимальный выбор точности СИ в зависимости от соотношения диффузности объекта и погрешности измерений.....	87
6.2 Зависимость точности достигаемого результата от времени измерения...	89
6.3 Оптимальная эффективность эксперимента с учетом выбора уровня факторов .....	90
6.4 Оптимальная эффективность эксперимента с учетом затрат времени на его подготовку.....	91
<b>7 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ.....</b>	<b>94</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>96</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Для хорошего планирования необходимы и хорошая статистическая теория, и статистическая практика. Для исследователя важно иметь сведения о наложении ограничений, при которых необходимо проводить эксперимент, и о наиболее эффективной схеме проведения эксперимента, включающей в себя, в частности, и порядок размещения способов обработки по объектам. Большой интерес у экспериментатора должны вызывать комбинаторные задачи планирования, а также техника анализа результатов. Существенную часть процесса интерпретации экспериментов составляет дисперсионный анализ, являющийся, по существу, разновидностью метода наименьших квадратов, так хорошо знакомого инженерам из теории вероятностей и математической статистики.

Во многих областях экспериментирования можно столкнуться со следующей ситуацией: результаты повторных наблюдений одних и тех же или сходных событий, одних и тех же или аналогичных физических величин в точности не согласуются друг с другом, причем экспериментатор не в состоянии сделать согласование точным, какие бы меры по обеспечению сохранения условий наблюдения постоянными он бы ни предпринимал. Например, последовательные детали, производимые станком, не являются идентичными, и как бы тщательно мы ни регулировали станок, колебания в качестве продукции не могут быть уменьшены ниже некоторого предела. Однако в ряде случаев, хотя абсолютная характеристика меняется непредсказуемо, относительная характеристика двух способов обработки (процессов, разновидностей) оказывается довольно устойчивой. В этом случае с определенной долей достоверности можно утверждать, что один способ обработки дает лучшие результаты, чем другой, даже если невозможно установить, какие именно результаты дал каждый. В таких сравнительных экспериментах абсолютные характеристики имеют лишь второстепенное значение.

## 1 ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Процесс измерения какой-либо физической величины заключается в сравнении измеряемой величины с некоторым ее значением, принятым за единицу. В общем случае измерение определяется как получение информации. Но само по себе получение информации можно рассматривать с трех сторон. С одной стороны, измерения проводятся для того, чтобы что-то узнать об объекте измерений, т.е. об измеряемой величине. При этом экспериментатор проводит **сбор информации**. Результат измерения должен описывать изучаемое состояние или явление с помощью соотношения, называемого математической моделью. Однако сбор информации является необходимым, но не достаточным условием измерения. С другой стороны, измерение дает сведения только о том, что необходимо измерить (например об измеряемой величине), но ничего не говорит ни об одном из многих других состояний или явлений. Следовательно, измерение должно быть **избирательным**. И наконец, измерение должно быть **объективным**,

т.е. не зависеть от наблюдателя; любой наблюдатель должен получить в результате измерения одну и ту же информацию и прийти к одним и тем же выводам.

Кроме того, в результате измерения можно получить два типа информации: так называемую **структурную** (информацию о состоянии, структуре и природе определенной характеристики) и **метрическую** (информацию о величине исследуемой характеристики). Структурную информацию получают в результате **качественного** измерения, а метрическую – в результате **количественного** измерения.

Качественное измерение проводится для определения природы характеристики, которая должна быть измерена, и только после этого можно проводить количественные измерения величины соответствующей характеристики. Качественное измерение обеспечивает экспериментатора информацией, необходимой для того, чтобы выбрать приборы и методы для количественного измерения величины.

Таким образом, измерение является звеном между реальным миром и представлением о нем в фундаментальных и прикладных науках.

**Измерение** определяют как совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения в явном или неявном виде, измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

**Опыт** – это воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результата.

**Эксперимент** – это система операций, воздействий или наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.

**План эксперимента** – это совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опыта.

**Методика измерения** – это установленная совокупность операций и правил при измерении, выполнение которых обеспечивает получение результатов измерений с гарантированной точностью в соответствии с принятым методом.

**Метод измерений** – это прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей в соответствии с реализуемым принципом измерений.

Для проведения измерений необходимо выполнение следующих условий:

- подлежащая измерению физическая величина должна быть однозначно определена;

- единицы измерений должны быть установлены соглашением или законом (ГОСТ 8.417-81 «Единицы физических величин»).

Кроме того, должно выполняться требование **единства измерений** – такого состояния измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах и погрешности известны с заданной вероятностью.

Сущность процесса измерения и его цель выражает **основное уравнение измерений**:

$$X = x[X],$$

где  $X$  – измеряемая величина;

$x$  – числовое значение физической величины;

$[X]$  – размерность физической величины;

$x[X]$  – значение физической величины.

В общем случае для получения результата измерения требуется не одна, а несколько известных величин, так называемая **шкала величин**.

Принципиальным отличием измерений физических величин от измерений нефизических величин является применение при измерении физических величин средств измерений и указание в конечной записи погрешности результата измерения.

**Структура измерения** включает в себя следующие основные элементы:

- априорная информация об измеряемой физической величине и об объекте измерения, позволяющая сформулировать цель измерения;
- модель объекта измерения, в состав которой входят модель измеряемой величины и сама измеряемая величина;
- объект измерения (в частности, физическая величина, подлежащая измерению);
- средство измерения, на которое воздействует входной сигнал и на выходе которого получается отклик;
- модель средства измерения с его метрологическими характеристиками;
- метод измерения, являющийся связующим звеном между объектом (физической величиной) и средством измерения;
- условия измерения, влияющие на объект измерения и на средство измерения (а в результате на отклик);
- оператор, проводящий измерения и воздействующий на средство измерения. Условие объективности измерения требует, чтобы воздействие оператора на результат измерения сводилось к минимуму;
- результаты наблюдений;
- модель результата наблюдения;
- алгоритм обработки данных, строящийся на основании априорной информации об объекте и выбранных моделях;
- обработка полученных в результате наблюдений данных, включающая вычислительное средство и оценку результата измерения и погрешностей;
- анализ результатов наблюдений на основании априорной информации об объекте и полученных экспериментальных результатов.

**Цель измерения** определяется совокупностью требований к измерению, вызванных содержанием деятельности, в рамках которой проводят измерения. Цель измерения конкретизирует объект измерения, выделяет в нем интересующую экспериментатора физическую величину и определяет требуемую точность измерения.

**Априорная информация** определяет достижимую точность измерений и их эффективность и представляет совокупность сведений о возможных значениях измеряемой величины или об ее свойствах.

**Объект измерения** – это тело (физическая система, процесс, явление и т.д.), которое характеризуется одной или несколькими физическими величинами. Он обладает многими свойствами и находится в различных связях с другими объектами. Для исследований объекта или его отдельных сторон создаются **модели объекта**.

**Модель объекта** – это теоретико-физическая и математическая конструкция, которая отражает свойства объекта, существенные для данной задачи, в частности измерительной. Модель строится в соответствии с целью измерения до его выполнения на основе априорной информации об объекте и условиях измерения.

На основании модели в объекте измерения выделяют измеряемые физические величины. Непосредственно наблюдаемой физической величиной является измерительный сигнал, который связан с измеряемыми физическими величинами.

**Физическая величина** представляет собой постоянный параметр модели объекта измерения, количественную оценку которого необходимо получить в результате измерения.

**Модель средства измерения** представляется совокупностью его метрологических характеристик, т.е. характеристик тех свойств, которые оказывают влияние на результаты и погрешности измерений.

**Метод измерения** обусловлен целью измерения и определяет организацию взаимодействия средства измерений с объектом измерений, а также способ получения результата из исходных и опытных данных. Следовательно, алгоритм обработки можно рассматривать как часть метода измерений.

**Условия измерений** определяют состояние объекта измерения и качество использования средства измерений. Они влияют на измеряемую величину и на свойства средства измерений.

**Модель результата измерения (или уравнение измерения)** – это формализованное описание измерения. Она выражает связь между исходными и опытными данными, с одной стороны, и результатами измерения – с другой.

**Результат измерения** – это значение физической величины, полученное путем ее измерения. Он выражается в форме именованного числа, ряда чисел или в виде аналитической зависимости.

Качество результата измерения характеризуется его точностью и погрешностью.

Близость друг к другу результатов измерений одной и той же физической величины, выполненных повторно одними и теми же средствами измерений, одним и тем же методом измерений в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью, отражает **сходимость измерения**. Расхождение результатов определяет случайную составляющую погрешности измерения. Требуемую точность для всех измерений обеспечивают за счет системы передачи единиц физических величин (поверки, метрологической аттестации и калибровки),



применения методов измерения, уменьшающих погрешность, разработки новых средств измерений и т.д.

**Воспроизводимость результатов измерений** характеризует близость результатов измерений одной и той же физической величины, полученных в разных местах различными средствами измерений, методами, операторами в разное время, но приведенных к одним и тем же условиям измерений (температуре, влажности, давлению). Воспроизводимость характеризуется среднеквадратическим отклонением (СКО) сравниваемых рядов измерений.

Исходя из вышесказанного, измерения можно рассматривать как систему, состоящую из параллельных рядов элементов. Первый ряд относится к реальным объектам (реальный ряд), куда можно отнести объект измерения, физическую величину, метод и средство измерений, входной сигнал, выходной сигнал (отклик), вычислительные средства; второй – к моделям (модельный ряд, включающий в себя цель измерения, модели объекта измерения, измеряемой физической величины, средства измерений, данные о влияющих величинах и помехах, модель результатов наблюдений и алгоритм обработки).

Соответствие (адекватность) реального и модельного рядов устанавливаются по результатам измерительного эксперимента при оценке погрешностей измерения. При условии адекватности моделей алгоритмы получения результата измерения в обоих рядах тождественны. Превышение оценки погрешности после проведения измерений над рассчитанной до измерения указывает на неадекватность модели измерения. Связующим звеном между модельным и реальным рядами измерения служит математическая обработка данных и разница между модельным и реальным рядом, характеризующая несовершенство измерений. Источниками погрешностей будут неполнота и неадекватность модели измерений.

Измерение как процесс можно разделить на четыре этапа. Эти этапы различаются по виду операций и по трудоемкости. Для каждого конкретного измерения объем, значимость и соотношение этапов между собой могут изменяться. Порядок выполнения операций регламентирует МИ 2091–90 «ГСИ. Измерения физических величин. Общие требования».

**1-й этап.** Постановка измерительной задачи и построение математической модели объекта измерения. Он включает:

- постановку цели, для которой необходим анализ априорной информации;
- формирование модели объекта;
- определение измеряемой физической величины (или нескольких физических величин);
- формирование основных уравнений измерений, причем параметры модели должны соответствовать свойствам объекта;
- оценку предполагаемой погрешности измерения и формы ее представления.

При постановке измерительной задачи следует выбрать модель, измеряемые параметры которой соответствуют свойствам объекта, информацию о которых следует получить в результате измерения, и оценить предполагаемую точность результата измерения и формы его представления.

При проведении анализа правильности постановки измерительной задачи необходимо уточнить принятую модель объекта измерения (процесса, явления) и проверить ее соответствие объекту измерения; оценить, удовлетворяет ли предполагаемая точность результата измерений и форма его представления цели измерительной задачи.

В модели объекта необходимо уточнить величины, которые подлежат измерению, и проверить их на соответствие объекту измерения. Модель объекта должна удовлетворять следующим требованиям:

- погрешность, обусловленная несоответствием модели и реального объекта, не должна превышать 10 % от предела допускаемой погрешности измерений;

- составляющая погрешности измерений, обусловленная нестабильностью измеряемых физических величин в течение времени, необходимого для проведения измерения, также не должна превышать 10 % от предела допускаемой погрешности измерений.

Если выбранная модель не удовлетворяет данным требованиям, то необходимо перейти к другой модели объекта измерения или спланировать измерительный процесс по-другому.

**2-й этап.** Составление плана измерений:

- выбор метода измерения;
- выбор средства измерений;
- предварительный выбор алгоритма обработки данных;
- априорная оценка погрешности измерения;
- выбор параметров эксперимента.

В зависимости от требований измерительной задачи измерения могут выполняться как в нормальных, так и в рабочих условиях.

**Нормальные условия** – это условия измерений, характеризуемые совокупностью значений или областей значений влияющих величин, при которых изменением результата измерений пренебрегают вследствие малости. Нормальные условия измерений регламентируют ГОСТ «Нормальные условия измерения при поверке. Общие требования», МИ 18888–88 «Нормальные условия измерения в государственных поверочных схемах. Общие положения».

Чтобы обеспечить измерения в нормальных условиях, необходимо выделить рабочее пространство, действием влияющих величин внутри которого можно пренебречь.

Если действием внешних влияющих величин внутри рабочего пространства невозможно пренебречь, следует их фиксировать с целью расчета и последующего введения соответствующих поправок или с целью расчета дополнительных погрешностей. Погрешность средств измерений, применяемых для контроля внешних условий, должна составлять не более 25 % от изменения влияющей величины.

Если необходимо сопоставить результаты измерений, проводимых в различных условиях, то в расчетах необходимо привести их к одинаковым условиям (чаще всего нормальным).

Метод и средства измерений должны обеспечить выполнение измерительной задачи (нахождение физической величины и оценку погрешности ее измерения) в заданных условиях измерений.

При выборе средства измерений следует учитывать принцип действия; способы применения; метрологические и технические характеристики; характеристики надежности; устойчивость ко внешним воздействиям.

Метод измерения должен по возможности обеспечивать минимальную погрешность и способствовать минимизации систематических погрешностей или переводу их в разряд случайных. При выборе методов и средств измерений руководствуются МИ 1967–89 «Выбор методов и средств измерений при разработке методик выполнения измерений».

По выбранному методу и средству измерений необходимо предварительно определить погрешность измерения  $\Delta_{\Sigma}$ , включающую погрешность предполагаемых средств измерений, метода измерения, погрешность оператора, погрешности, обусловленные внешними воздействиями, и сравнить ее с допустимой погрешностью  $\Delta_{д}$ .

Если  $\Delta_{\Sigma} > \Delta_{д}$ , то необходимо уточнить правильность выбранного метода, условий выполнения измерений или выбрать более точное средство измерений (СИ).

Если  $\Delta_{\Sigma} \leq \Delta_{д}$ , то выбранные метод и средство измерений обеспечивают получение результата с требуемой точностью. Если не удастся обеспечить данное условие, то следует проанализировать требования задачи к погрешности средства измерений.

При выборе методов и средств измерений для контроля следует учитывать влияние погрешности измерения на брак контроля. Функциональные зависимости между пределами допустимой погрешности измерения и показателями брака контроля приведены в ГОСТ 8.051–81 «Погрешности, допустимые при измерении линейных размеров до 500 мм», в приложении 5 к МИ 1317–86 «Результаты и характеристики погрешностей измерений, формы представления. Способы использования при испытании образцов продукции и контроле их параметров».

Для выполнения однократных измерений следует выбирать средства измерений с возможно меньшей случайной погрешностью.

При выборе средства измерений следует учитывать, что в нормальных условиях их применения допустимо изменение их погрешности до 35 % (ГОСТ 8.395–80). В этом случае рекомендуется выбирать средство измерений с погрешностью, меньшей допустимой в 1,35 раза:

$$\Delta_{СИ} = \Delta_{д} / 1,35 = 0,74\Delta_{д}. \quad (1.1)$$

Требования к погрешности результата измерений должны соответствовать цели измерительной задачи. Эту погрешность целесообразно оценить предварительно с учетом ее предполагаемых источников. Если предварительная оценка погрешности не соответствует требованиям точности,

следует проанализировать предполагаемые источники погрешности и предпринять меры по их уменьшению (например, выбрать более точное средство измерений, изменить метод измерений, поручить измерения более квалифицированному оператору, уточнить влияющие величины, уменьшить их воздействие и т.д.).

Число измерений  $n$  зависит как от требований к точности измерений, так и от реальной возможности повторения этих измерений. Оно определяется значимостью случайных погрешностей по сравнению с пределом допускаемой погрешности.

**Уровень значимости** – это вероятность ошибки первого рода, т.е. когда отвергается верная гипотеза из-за ошибки принятия решения при анализе опытных данных. Если принимается неверная гипотеза, то можно говорить об ошибке первого рода. Требования к числу измерений  $n$  определяют из выражения

$$n \geq \frac{t^2(q, n) \cdot S^2}{\Delta_d^2}, \quad (1.2)$$

где  $t(q, n)$  – квантильное распределение;

$q$  – уровень значимости;

$S$  – среднеквадратическое отклонение группы результатов измерений.

Число измерений увеличивают при наличии существенных систематических погрешностей с целью их перевода в разряд случайных погрешностей. При наличии и неисключенных систематических, и случайных погрешностей  $n$  будет определяться следующим соотношением между ними:

$$\frac{S_{\text{сист}}}{S_{\text{случ}}} = \gamma, \quad (1.3)$$

а также требованием к точности результата измерения.

Оператор должен изучить методику и последовательность выполнения измерений, убедиться перед измерением, что основные и вспомогательные средства измерений имеют действующие свидетельства о поверке (поверительные клейма) или свидетельства о метрологической аттестации.

При проведении измерений с помощью автоматизированных средств измерений необходимо протестировать измерительную систему и сопоставить полученный результат с ожидаемым.

Чтобы уменьшить субъективную составляющую погрешности, наиболее ответственные и высокоточные измерения допускается проводить несколькими операторами, а результаты измерений усреднять. Исключить или, по крайней мере, уменьшить возможность появления подобных погрешностей позволяет автоматизация процесса измерений.

Погрешность округления  $\Delta_0$  не должна влиять на последнюю значащую цифру погрешности окончательного результата измерения. Она не должна превышать 10 % от предела допускаемой погрешности результата измерения:

$$\Delta_0 \leq 0,1\Delta_d. \quad (1.4)$$

Если данное условие не выполняется, то число отсчетов необходимо увеличить настолько, чтобы погрешность округления удовлетворяла неравенству, либо (если это невозможно) изменить требования к допустимой погрешности, либо учитывать эту составляющую.

**3-й этап.** Измерительный эксперимент (выполнение экспериментальных операций и получение экспериментальных данных) содержит следующие элементы:

- взаимодействие средства измерений с объектом измерения;
- преобразование сигнала измерительной информации;
- воспроизведение сигнала заданного размера;
- сравнение сигналов на выходе средства измерений (откликов) и регистрация результата.

**4-й этап.** Обработка экспериментальных данных включает:

- анализ исходных данных и выбор алгоритма обработки;
- вычисление результата измерений и показателей его погрешности;
- анализ и интерпретацию полученных результатов в рамках сформулированной цели измерений.

Если при анализе процесса измерений удалось установить источник появления промахов, то их исключают перед обработкой результатов измерений. Если причины промахов неизвестны, то для решения вопроса, является это промахом или нет и можно ли исключить выявленные промахи, используют статистические критерии:

- предварительно проверяют, какому виду распределения соответствует распределение результатов измерений. Если результаты принадлежат к нормальному распределению, то результат измерения можно считать промахом в случае, когда

$$\max \frac{|x_i - \bar{x}|}{S^*} \geq t(q, n), \quad (1.5)$$

где  $S^*$  – среднеквадратическое отклонение результатов наблюдений;

$x_i$  – результат каждого измерения;

$\bar{x}$  – среднее арифметическое значение группы результатов измерений;

$t(q, n)$  – квантиль распределения, зависящий от уровня значимости  $q$  и количества наблюдений  $n$  в группе.

Обнаруженные и вычисленные систематические погрешности измерения вносят в результаты измерений в виде поправок или поправочных множителей,

таким образом исключая их, а неисключенные систематические и случайные погрешности составляют погрешность результата измерения.

Результаты измерений в зависимости от цели измерительной задачи могут быть представлены числом, в виде таблицы, графика или в другом виде.

Формы представления результатов измерений и их погрешностей должны соответствовать МИ 1317-86.

Погрешность результата измерений, как правило, выражают одной значащей цифрой (МИ 2091-90). Две значащие цифры сохраняют:

- при точных измерениях;
- если первая значащая цифра не более трех;
- если предел допускаемой погрешности задан двумя значащими цифрами.

## **2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

### **2.1 Общие сведения о планировании измерений**

В ходе планирования измерений перед экспериментатором стоит задача выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для описания поведения исследуемого объекта с требуемой точностью.

Измерения всегда базируются на априорной информации. На основе априорных данных строят или выбирают физическую или математическую модель объекта измерения. Это важный этап, так как ошибки, допущенные на этом этапе, в дальнейшем невозможно исправить. В ходе измерения модель объекта можно лишь уточнить, например путем анализа предварительно проведенных измерений. Несоответствие реального объекта приписываемой ему модели служит источником методической погрешности.

Одной из основных задач планирования измерений является поиск и идентификация взаимосвязей между входными и выходными параметрами объекта и представление их в количественной форме в виде математической модели.

Сложность объекта измерения определяется количеством его различных возможных состояний. На практике достаточно выделить конечное число наиболее существенных параметров, интересующих исследователя в данной измерительной задаче, значения которых будут с приемлемой точностью определять состояние объекта.

Объект измерения представляет собой систему, на которую воздействуют входные параметры  $X_k$ , внешние воздействия  $\omega_p$ , а в результате получается реакция системы  $Y_n$ , по которой судят об измеряемой величине (рисунок 2.1).

Величины  $X_k$  характеризуют внешнее воздействие на объект измерения и носят название **факторов**.

**Фактор** – это переменная величина, по предположению влияющая на ход эксперимента.

Они являются входными величинами для объекта и могут быть измерены.

Фиксированное значение фактора относительно начала отсчета носит название **уровня фактора**. **Основным уровнем фактора** будет натуральное значение фактора, соответствующее нулю в безразмерной шкале.

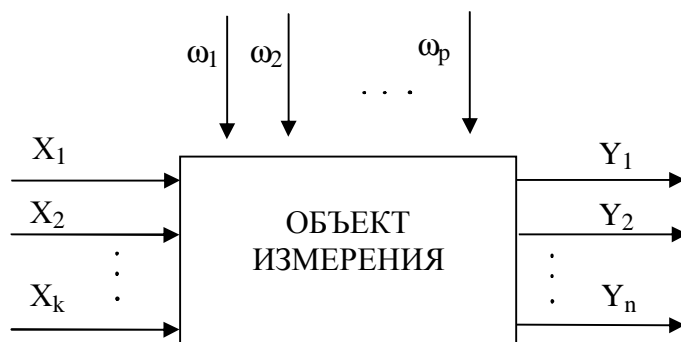


Рисунок 2.1 – Структурная схема объекта измерения

Величины  $Y_n$  характеризуют реакцию системы и носят название **откликов**.

**Отклик** – это наблюдаемая случайная переменная, по предположению зависящая от факторов.

Зависимость математического ожидания отклика от факторов носит название **функции отклика**, а зависимость, получаемая при подстановке в функцию отклика оценок значений ее параметров, – **оценки функции отклика**. От значений откликов зависит возможность и интенсивность использования полезных свойств объекта.

$\omega_p$  – возмущающие воздействия, которые носят случайный характер и случайным образом влияют на величину отклика и не зависят от факторов.

Такое представление реального объекта является упрощенным, следовательно, его можно назвать моделью. И хотя свойства исследуемого реального объекта известны далеко не полностью, такого представления достаточно для оптимального управления таким объектом.

Для построения модели объекта измерения необходимо определить, какие параметры объекта следует принять в качестве факторов, откликов и возмущающих воздействий, и выявить зависимости между ними. На основании этого можно составить конкретный план эксперимента.

Все эксперименты можно классифицировать как активные и пассивные.

При **пассивном эксперименте** исследователь не имеет возможности воздействовать на объект измерения, поэтому задача определения наилучшего плана эксперимента сводится к оптимальной организации пассивного сбора информации. Он включает в себя выбор интервалов времени между моментами измерения, задание числа выполняемых измерений, определение количества точек в диапазоне измерения, определение методов обработки результатов измерения и т.д. При этом экспериментатор никак не влияет на значения факторов, откликов и внешних воздействий и использует известные методы обработки результатов. Недостатком пассивного эксперимента является необходимость проведения большого количества опытов.

**Активный эксперимент** связан с воздействием экспериментатора на ход процессов в изучаемом объекте и возможностью выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют для него интерес. Активные эксперименты позволяют значительно уменьшить количество опытов, однако их проведение не всегда возможно по техническим или экономическим причинам.

«Коварность» активного эксперимента заключается в том, что если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным, то это может привести к значительному повышению погрешности эксперимента. С другой стороны, увеличение числа рассматриваемых факторов приводит к значительному возрастанию числа опытов, что сводит на нет преимущества активного эксперимента, поэтому на практике следует воспользоваться методами отсеивания несущественных факторов.

В соответствии с вышесказанным процесс планирования эксперимента заключается в оптимизации числа опытов при заданном числе факторов и внешних воздействий.

Первым этапом планирования эксперимента в большинстве случаев является выбор параметров объекта, используемых в качестве факторов, откликов и внешних воздействий. Простейшим случаем является однофакторное планирование.

При проведении многофакторного эксперимента необходимо учитывать влияние многих независимых переменных. Методы планирования такого эксперимента предполагают изменение всех факторов сразу. Это планирование более эффективно, чем традиционные способы, в которых изучается влияние каждого фактора в отдельности, что позволяет значительно уменьшить погрешности определения интересующих экспериментатора величин.

Построение плана эксперимента сводится к выбору симметричных относительно основного уровня экспериментальных точек. При этом для каждого фактора выбирают два крайних уровня, между которыми они будут варьироваться в ходе эксперимента.

Обозначим через  $x_{j0}$  основной уровень фактора  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Величина фактора  $x_j$  будет варьироваться от  $x_{jn}$  до  $x_{jв}$ . Уровень  $j$ -фактора, соответствующего большему значению ( $x_{jв}$ ), называют **верхним**, а нижнему ( $x_{jn}$ ) – **нижним**. Разность между максимальным и минимальным натуральными значениями факторов в данном плане называется **размахом варьирования**. Половина размаха варьирования факторов называется **интервалом варьирования факторов**.

В некоторых случаях бывает удобно перевести факторы в разряд безразмерных кодированных факторов:

$$\bar{x}_j = \frac{x_j - x_{j0}}{\lambda_j},$$



где  $\bar{X}_j$  – кодированное значение  $j$ -фактора;

$x_j$  – натуральное значение  $j$ -фактора;

$x_{j0}$  – натуральное значение нулевого уровня  $j$ -фактора;

$\lambda_j$  – интервал варьирования.

На практике стремятся выбирать уровни варьирования так, чтобы  $x_j = \pm 1$ .

После выделения параметров и характеристик объекта выбирают виды их измерений в зависимости от возможности реализации, а также от требуемой точности.

Далее необходимо учесть влияние объекта измерения и средства измерений друг на друга.

## 2.2 Математические модели величин

Теория измерений занимается изучением закономерностей измерений и строится с использованием математических моделей тех компонентов, которые участвуют в процессе измерения и оказывают влияние на результат измерения (факторы и отклики).

**Математической моделью** называется зависимость между факторами и откликами, выраженная в виде математических формул.

Следовательно, закономерность измерений можно выявить, получив уравнение измерений в аналитическом виде и проанализировав его.

### 2.2.1 Детерминированные величины

**Детерминированной величиной** называется такая величина, поведение которой однозначно определяется ее причинно-следственными связями с другими величинами. В измерениях это свойство величины проявляется в том, что при повторении измерений ее поведение остается неизменным. К детерминированным величинам можно отнести постоянные величины, функции, последовательности.

**Постоянной** называется такая величина, значение которой в интервале измерения  $[0, t]$  остается неизменным.

Математическая модель такой величины представляет собой выражение

$$x = c = \text{const.} \quad (2.1)$$

**Функцией** называется переменная величина, зависящая от другой переменной величины.

Поскольку измерение является экспериментальной процедурой, реализуемой во времени, то в качестве аргумента переменной величины чаще всего выступает время.

Наиболее универсальной математической моделью функции является обобщенный ряд Фурье с конечным числом членов ряда:

$$\eta(t; c_1, \dots, c_l) = \sum_{i=1}^l c_i \Phi_i(t) = \bar{\Phi}^T(t) \times \bar{c} = \eta(t; \bar{c}), \quad (2.2)$$

где  $c_i, i = \overline{1, l}$  – постоянные коэффициенты;

$\bar{c} = (c_1, \dots, c_l)^T$  – вектор-столбец коэффициентов;

$\Phi_i(t), i = \overline{1, l}$  – система базисных функций;

$\bar{\Phi}(t) = [\Phi_1(t), \dots, \Phi_l(t)]^T$  – вектор-столбец базисных функций,

$T$  – знак транспонирования матрицы.

Все базисные функции  $\Phi_i(t)$  являются известными функциями аргумента  $t$ .

Выражение (2.2), являющееся математической моделью величины  $x(t)$ , представляет ее лишь приближенно. Точность приближения определяется системой базисных функций  $\Phi_i(t), i = \overline{1, l}$ , значениями коэффициентов  $c_i, i = \overline{1, l}$  и числом членов ряда  $l$ .

При выборе базисных функций следует руководствоваться следующими соображениями:

1) математическая модель должна обеспечить максимально точное в определенном смысле приближение к истинной величине  $x(t)$ ;

2) выбор должен способствовать, по возможности, снижению количества вычислительных операций при определении значений коэффициентов  $c_i$ .

#### **Частные случаи обобщенного ряда Фурье**

1 *Ряд Тейлора.* Система базисных функций представляет собой следующее выражение:

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{(i-1)!} t^{i-1}, i = \overline{1, l}, \quad (2.3)$$

а базисные коэффициенты имеют вид

$$c_i = \left. \frac{d^{i-1} x(t)}{dt^{i-1}} \right|_{t=0}, i = \overline{1, l}. \quad (2.4)$$

Физический смысл коэффициентов предельно ясен:  $c_1$  – начальное значение величины;  $c_2$  – начальная скорость;  $c_3$  – начальное ускорение и т.д.

Математическая модель в форме ряда Тейлора используется для описания плавно изменяющихся величин, например при описании уравнения движения тела.

2 *Комплексный ряд Фурье.* Базисные функции определяются следующим образом:

$$\Phi_i(t) = e^{ji\omega_0 t}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad (2.5)$$

где  $\omega_0$  – частота основной гармоники.

Базисные коэффициенты являются комплексными величинами:

$$\Phi_k = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) e^{-ji\omega_0 t} dt, \quad k = \overline{0, \pm 1}. \quad (2.6)$$

В этом случае математическая модель будет иметь вид

$$\eta(t, \bar{c}) = \sum_{i=-l}^l \dot{a}_k \Phi_k e^{ji\omega_0 t}. \quad (2.7)$$

В тригонометрической форме:

$$\eta(t, \bar{c}) = \frac{c_0}{2} + \sum_{i=1}^l c(i\omega_0) \text{Cos}[i\omega_0 t + \alpha(i\omega_0)], \quad (2.8)$$

где  $c_0/2$  – среднее значение величины на интервале  $[0, T]$ ,

$c(i\omega_0)$  – амплитуда  $i$ -гармоники;

$i\omega_0$  – частота  $i$ -гармоники;

$\alpha(i\omega_0)$  – фаза  $i$ -гармоники.

Последовательность  $c(i\omega_0)$  имеет смысл амплитудного спектра физической величины,  $\alpha(i\omega_0)$  – фазового спектра, интервал частот  $[0, l\omega_0]$  – ширины спектра.

3 *Интегральное преобразование Фурье.* Для одиночного импульса оно будет иметь вид

$$x(t) = \begin{cases} \dot{x}^*(t), & t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0, & t \notin [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Математической моделью будет обратное преобразование Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.10)$$

где  $\dot{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$  – прямое (интегральное) преобразование Фурье.

Обозначив  $U_X(\omega)$  действительную часть комплексной величины  $X(j\omega)$ , а  $V_X(\omega)$  – мнимую часть  $X(j\omega)$ , получим

$$X(j\omega) = U_x(\omega) + jV_x(\omega). \quad (2.11)$$

Это будет точка с координатами  $U_x(\omega)$  и  $V_x(\omega)$  (рисунок 2.2).

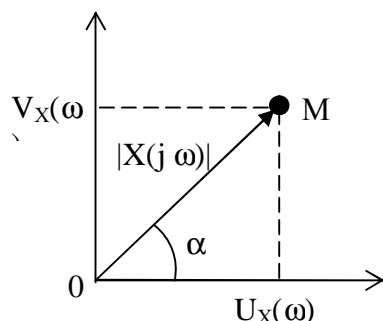


Рисунок 2.2 – Графическое изображение математической модели в форме интегрального ряда Фурье

Положение этой же точки можно задать вектором определенной длины (модулем) и направления (фазой):

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\alpha_x(\omega)}, \quad (2.12)$$

где  $|X(j\omega)| = \sqrt{U_x^2(\omega) + V_x^2(\omega)}$  – модуль вектора, характеризующий его длину (амплитудно-частотная характеристика);

$\alpha_x(\omega) = \arctg \frac{V_x(\omega)}{U_x(\omega)}$  – угол, характеризующий направление вектора (фаза-частотная характеристика).

Выражение (2.12) можно рассматривать как математическую модель физической величины в частотной области. Математические модели подобного вида применяются при анализе спектра сигнала.

4 *Преобразование Лапласа.* Используется для формирования математической модели величины в области комплексной переменной, определяемой следующим выражением:

$$p = \sigma + j\omega,$$

где  $\sigma$  – действительная часть,

$\omega$  – круговая частота.

Преобразование Лапласа представляет собой выражение

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt = L\{x(t)\}. \quad (2.13)$$

Обратный переход от изображения  $X(p)$  к оригиналу  $x(t)$  осуществляется на основе уравнения

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(p)e^{pt} dp. \quad (2.14)$$

5 Ряд Котельникова. Базисные функции этого ряда имеют следующий вид:

$$\varphi_{\kappa}(t) = \frac{\text{Sin}\omega_m(t - t_i)}{\omega_m(t - t_i)} = \text{Sinc}\omega_m(t - t_i), \quad i = \overline{1, I}, \quad (2.15)$$

где  $\omega_m$  – верхняя граница частотного спектра величины  $x(t)$ ;

$$t_i = (i - 1)\Delta t, \quad i = \overline{1, I};$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_m} = \text{const} \quad \text{– шаг дискретизации по величине } t.$$

Базисные коэффициенты определяются следующим образом:

$$c_i = x(t_i), \quad i = \overline{1, I}.$$

Функция  $\text{sin}[\omega_m(t - t_i)]$  называется **функцией отсчетов**. Ее графическое изображение представлено на рисунке 2.3.

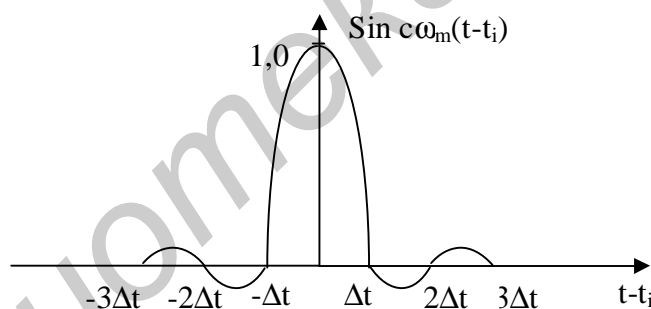


Рисунок 2.3 – Графическое изображение функции отсчетов

В этом случае выражение ряда Котельникова примет вид

$$\eta(t, \bar{c}) = \sum_{i=1}^I x(t_i) \text{Sinc}\omega_m(t - t_i). \quad (2.16)$$

При  $t = t_i = \overline{1, I}$  получим

$$\sum_{i=1}^I x(t_i) \text{Sinc}\omega_m(t - t_i) \Big|_{t=t_i} = x(t_i), \quad (2.17)$$

т.е. этот ряд представляет величину  $x(t)$  в точке  $t = t_i$  без погрешности.

Ряд Котельникова целесообразно использовать для построения математической модели аналоговой величины, заданной в дискретных равноотстоящих значениях аргумента.

### 2.2.2 Математическая модель детерминированной величины в форме последовательности

Если измерение величины  $y$  производится в дискретных точках  $x_1, x_2, \dots, x_i$ , причем  $x_i > x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, I}$ , то совокупность значений  $x_i$  будет последовательностью. В этом случае и выходной сигнал  $y(x_i)$  в соответствующих дискретных точках аргумента также будет последовательностью.

Последовательность  $\eta(x_i, \bar{c}) = c x_i$ ,  $i = \overline{1, I}$  представляет собой описание аналоговой величины  $y(x)$  при дискретных значениях аргумента  $x$ .

Математическая модель в форме последовательности является менее информативной, чем аналоговая величина.

Если аналоговая математическая модель величины имеет вид

$$\eta(t, \bar{c}) = \sum_{i=1}^I c_i \varphi_i(t),$$

то соответствующая ей математическая модель в форме последовательности запишется следующим образом:

$$\eta(t_k, \bar{c}) = \sum_{i=1}^I c_i \varphi_i(t_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Последовательность  $\varphi_i(t_k)$  будет иметь конечное число членов  $k = \overline{1, N}$  на конечном интервале времени  $[0, T]$ . Тогда совокупность членов конечной последовательности можно представить в форме  $N$ -мерного вектор-столбца:

$$\eta(t, \bar{c}) = \begin{bmatrix} \eta(t_1, \bar{c}) \\ \dots \\ \eta(t_N, \bar{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^I c_i \varphi_i(t_1) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^I c_i \varphi_i(t_N) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Векторное представление конечной последовательности удобно использовать при построении оптимальных алгоритмов обработки многократных измерений.

При построении **математической модели скалярной случайной величины** используют понятия теории вероятностей, поскольку случайная величина связывается с многократно повторяющимися опытами,

экспериментами, измерениями. При этом минимальную совокупность числовых характеристик случайной величины составляют математическое ожидание и дисперсия, что и принимают в качестве моделей.

### 2.2.3 Математическая модель случайного вектора

Запишем две случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  в форме случайного вектор-столбца:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Каждая величина  $X_i$  характеризуется значением математического ожидания и дисперсии.

Вектор-столбец математического ожидания случайного вектора имеет вид

$$\bar{m}_X = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Если обозначить через  $X_i^* = X_i - m_i$ ,  $i = 1, 2$  центрированный случайный вектор, у которого вектор математического ожидания равен нулю, и сформировать возможные парные произведения  $X_i^* X_j^*$ , получим матрицу

$$\begin{bmatrix} X_1^* X_1^* & X_1^* X_2^* \\ X_2^* X_1^* & X_2^* X_2^* \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Матрица математического ожидания представляет собой следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} M[X_1^* X_1^*] & M[X_1^* X_2^*] \\ M[X_2^* X_1^*] & M[X_2^* X_2^*] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = k_X, \quad (2.23)$$

где  $k_{11} = M[X_1^* X_1^*] = D_1$  – дисперсия случайных величин  $X_1$ ,  $X_2$ ;

$$k_{22} = M[X_2^* X_2^*] = D_2$$

$$k_{12} = k_{21} = M[X_1^* X_2^*] = k_{21} \text{ – ковариационный момент.} \quad (2.25)$$

Ковариационный момент (2.25) характеризует вероятностную связь между случайными величинами  $X_1$  и  $X_2$ .

Если  $k_{12}, k_{21} = 0$ , то величины  $X_1$  и  $X_2$  являются некоррелированными, если  $k_{12}, k_{21} \neq 0$ , – то коррелированными.

Квадратная матрица  $k_X$  называется **ковариационной матрицей случайного вектора  $\bar{X}$** .

Следовательно, минимальную совокупность числовых характеристик случайного вектора составляют вектор математического ожидания и ковариационная матрица.

#### 2.2.4 Математическая модель случайной функции

Случайная величина является **случайной функцией**, если свойство объекта измерения или среды выражается случайной величиной, зависящей от другой переменной величины. Если в качестве переменной величины фигурирует время, то соответствующая случайная функция будет называться **случайным процессом**.

При фиксированном значении аргумента  $t$  случайную величину можно выразить следующим уравнением:

$$X_t = m_{X_t} + \bar{X}_t, \quad (2.26)$$

где  $m_{X_t} = M[X_t]$  – математическое ожидание случайной величины,

$\bar{X}_t = X_t - m_{X_t}$  – центрированная случайная величина.

Если аргументом является время, то величины, входящие в выражение (2.26), также будут функциями времени:

$$X(t) = m_X(t) + \bar{X}(t), \quad (2.27)$$

где  $m_X(t) = M[X(t)]$  – математическое ожидание случайной функции,

$\bar{X}(t) = X(t) - m_X(t)$  – центрированная случайная функция.

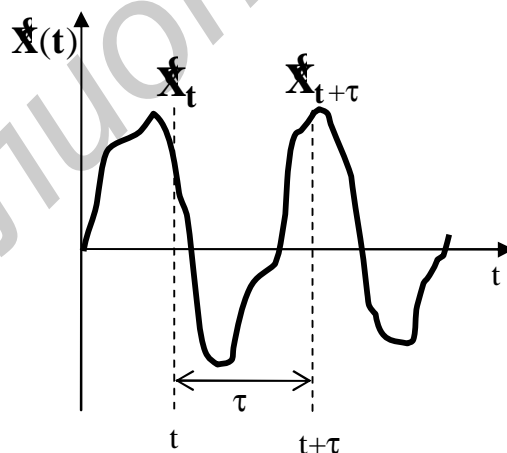


Рисунок 2.4 – Графическое изображение случайной функции

Числовой характеристикой такой случайной функции будет **ковариационная матрица**



$$\mathbf{k}_{\mathbf{x}t,\tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{x}t,t} & \mathbf{k}_{\mathbf{x}t,t+\tau} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{x}t+\tau,t} & \mathbf{k}_{\mathbf{x}t+\tau,t+\tau} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

где  $\mathbf{k}_{\mathbf{x},t} = M[\bar{X}_t^2] = \mathbf{D}_{\mathbf{x}t}$  – дисперсия случайной величины  $X_t$ ;  
 $\mathbf{k}_{\mathbf{x},t+\tau} = M[\bar{X}_{t+\tau}^2] = \mathbf{D}_{\mathbf{x}t+\tau}$  – дисперсия случайной величины  $X_{t+\tau}$ ;  
 $\mathbf{k}_{\mathbf{x}t,t+\tau} = \mathbf{k}_{\mathbf{x}t+\tau,t} = M[\bar{X}_t \bar{X}_{t+\tau}]$  – ковариационный момент случайных величин  $X_t, X_{t+\tau}$ .

### 2.2.5 Математическая модель случайной последовательности

**Случайной последовательностью** называется такая последовательность, у которой каждый ее член является случайной величиной. Ее можно представить либо в форме случайного вектора, либо в форме случайной функции дискретного аргумента.

*Случайная последовательность в форме случайного вектора*  
 Случайный вектор можно представить в форме матрицы

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \dots \\ X(t_N) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Его числовые характеристики представляются вектором математического ожидания

$$\bar{\mathbf{m}}_{\mathbf{x}} = M[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \bar{m}_{\mathbf{x}}(t_1) \\ \dots \\ \bar{m}_{\mathbf{x}}(t_N) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

и ковариационной матрицей размером  $N \times N$

$$\mathbf{k}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} k_{\mathbf{x}11} & k_{\mathbf{x}12} & \dots & k_{\mathbf{x}1N} \\ k_{\mathbf{x}21} & k_{\mathbf{x}22} & \dots & k_{\mathbf{x}2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{\mathbf{x}N1} & k_{\mathbf{x}N2} & \dots & k_{\mathbf{x}NN} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

где  $\bar{m}_{\mathbf{x}}(t_i) = M[X(t_i)], \quad i = \overline{1, N};$   
 $k_{\mathbf{x}ij} = M[X(t_i)X(t_j)], \quad i, j = \overline{1, N}.$

*Случайная последовательность в форме случайной функции дискретного аргумента*

Дискретному аргументу  $t_i$  соответствует случайная величина  $X_{t_i}$  с математическим ожиданием  $M[X_{t_i}] = \bar{m}_X t_i$  и дисперсией  $M[X_{t_i}^2] = D_{X t_i}$ . В этом случае последовательность математического ожидания будет иметь вид

$$\bar{m}_X(t_i) = M[X(t_i)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

а последовательность дисперсии –

$$D_X(t_i) = M[X(t_i)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Двум значениям дискретного аргумента  $t_i$  и  $t_{i+j} = t_i + \tau_j$  соответствуют две случайные величины  $X_{t_i}$  и  $X_{t(i+j)}$ .

Их ковариационной функцией будет следующее выражение:

$$k_X(t_i, t_i + \tau_j) = M[X(t_i)X(t_i + \tau_j)] = k_X(t_i, \tau_j) \quad (2.34)$$

Графическое изображение ковариационной функции для равноотстоящих значений аргумента приведено на рисунке 2.5.

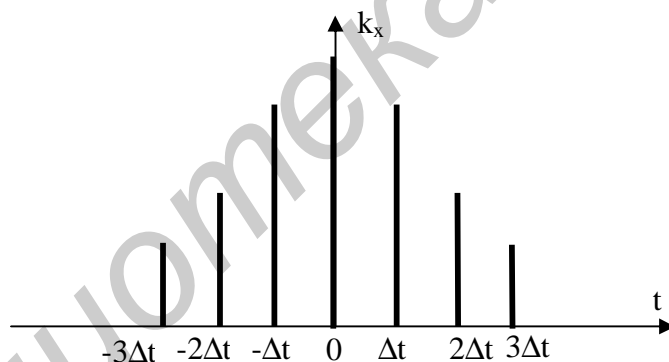


Рисунок 2.5 – Графическое изображение ковариационной функции

### 2.3 Математические модели средств измерений

Поскольку физические величины, подлежащие измерению, могут иметь как статический, так и динамический характер, то и характеристики средства измерений также могут принимать свойства статические или динамические.

#### 2.3.1 Математическая модель средства измерений в форме статической характеристики

Случайный результат измерения как функцию случайной величины  $x$  можно записать в виде

$$Y(x) = \hat{m}_y(x) + E, \quad (2.35)$$

где  $\hat{m}_y(x) = M[Y(x)]$  – математическое ожидание случайной функции  $Y(x)$ ;  
 $E$  – центрированная составляющая;  
 $x \in [x_0, x_{01}]$ , где  $[x_0, x_{01}]$  – диапазон измерений средства измерения.

Функция  $\hat{m}_y(x)$  называется статической характеристикой средства измерений. Следовательно, она является математическим ожиданием результата измерения как функцией измеряемой величины.

С другой стороны, если учесть систематическую составляющую погрешности измерения, результат измерения будет иметь следующий вид:

$$Y(x) = x + \hat{m}_1(x) + E, \quad (2.36)$$

где  $\hat{m}_1(x)$  – систематическая погрешность.

Приравняв выражения (2.35) и (2.36), получим

$$\hat{m}_y(x) = \hat{m}_1(x) + x. \quad (2.37)$$

Проанализировав выражение (2.37), можно сделать вывод, что статическая характеристика определяет систематическую погрешность результата измерения.

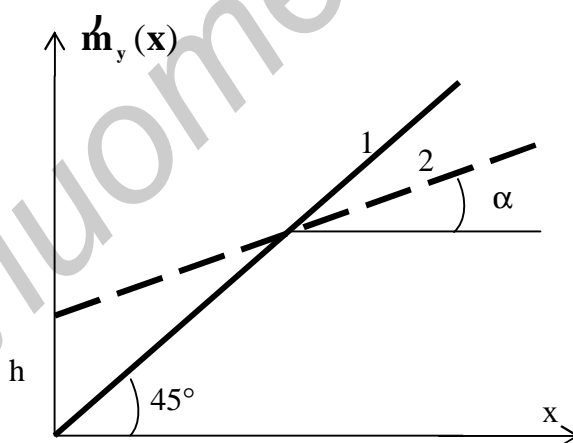


Рисунок 2.6 – Статические характеристики идеального (1) и реального (2) средства измерений

Систематическая погрешность может отсутствовать только при условии  $\hat{m}_y(x) = x$ , то есть когда статическая характеристика представляет собой идеальную прямую, проходящую под углом  $45^\circ$  через начало координат (рисунок 2.6).

Таким образом, уравнение прямой (1), характеризующей средство измерений в отсутствие систематических погрешностей, имеет вид

$$\dot{m}_y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad (2.38)$$

т.е. статическая характеристика такого средства измерений представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат под углом  $45^\circ$ .

В свою очередь, статическая характеристика реального средства измерений имеет вид (прямая 2)

$$\dot{m}_y(\mathbf{x}) = \mathbf{kx} + \mathbf{h}, \quad (2.39)$$

где  $\mathbf{h}$  – величина смещения вдоль оси  $y$ ;

$\mathbf{k}$  – тангенс угла наклона прямой (2) к оси абсцисс ( $\text{tg } \alpha$ ).

Следовательно, чем меньше систематическая погрешность в диапазоне измерения  $[x_0, x_{01}]$ , тем ближе статическая характеристика средства измерений к идеальной прямолинейной характеристике.

С другой стороны, при формировании количественного значения измеряемой величины

$$Y(x) = \mathbf{kx} + \mathbf{h}, \quad (2.40)$$

где  $\mathbf{k} = 1/Q$  – чувствительность средства измерения;

$\mathbf{h}$  – смещение нуля;

$Q = [x] / [x_0]$  – размер единицы величины, воспроизводимой средством измерений.

Для идеального средства измерений  $\mathbf{k} = 1$  и  $\mathbf{h} = 0$ . Но поскольку в каждом конкретном средстве измерений реализовать эти условия невозможно, то линейная статическая характеристика всегда будет отличаться от идеальной, что и будет являться источником систематической погрешности.

Таким образом, основной задачей при планировании измерительного эксперимента будет минимизация систематической погрешности и стабилизация размера единицы величины, воспроизводимой средством измерений, в диапазоне измерения, а также смещения нуля.

Поэтому наиболее обоснованной математической моделью статической характеристики средства измерения будет линейная модель

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{x} = \overline{\boldsymbol{\Phi}}^E(\mathbf{x}) \overline{\mathbf{c}}, \quad (2.41)$$

где  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{h}$  – коэффициент, характеризующий смещение нуля;

$\mathbf{c}_2 = \mathbf{k}$  – чувствительность средства измерений;

$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2)^T$  – вектор-столбец базисных коэффициентов;

$\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{x}) \ \boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{x})]^T$  – вектор базисных функций;  $\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{x}) = 1$ ;  $\boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Для идеальной статической характеристики вектор базисных коэффициентов принимает вид  $\bar{c}_0 = (0,1)^T$ .

Преимущества линейной математической модели статической характеристики средства измерения очевидны. Во-первых, базисные коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  имеют ясный физический смысл (смещение нуля и чувствительность средства измерений), их легко можно привязать к конструктивным параметрам средства измерений. Во-вторых, если известны оценки базисных коэффициентов  $c_i$ , то достаточно просто производится корректировка результата измерения (исключение систематической погрешности). В-третьих, обеспечивается возможность легко трансформировать требования к систематической погрешности непосредственно в требования к конструктивным параметрам средства измерений. И в-четвертых, линейная модель статической характеристики обладает таким важным свойством, как свойство суперпозиции, приводящим к тому, что результат измерения суммы величин с точностью до смещения нуля равен сумме результатов измерения каждого из слагаемых. Это дает возможность суммировать погрешности, обусловленные различными возмущающими факторами, упрощает проведение поверки средства измерений, планирование измерений при оценке коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$  и многие другие операции.

На основании предыдущих рассуждений можно ввести понятие **статического режима измерений** – такого режима, при котором имеет место функциональное преобразование измеряемой величины в результат измерения. Условием, обеспечивающим существование такого режима, является пренебрежимо малая инерционность средства измерений.

### 2.3.2 *Динамические математические модели аналогового средства измерений*

Измерение – это процесс, протекающий во времени. Следовательно, и измеряемая величина, и результат измерения (его аддитивная составляющая) являются также функциями времени:

$$Y(t) = kx(t) + h(t). \quad (2.42)$$

Данное выражение, записанное без учета центрированной составляющей, будет справедливо только при условии, что для данной переменной величины  $x(t)$  влияние инерционности средства измерения на результат измерения пренебрежимо мало.

Если же рассматривать измерение как временной процесс, то на результате измерения будут сказываться инерционные свойства средства измерений. Когда они становятся существенными, результат измерения в данный конкретный момент времени будет зависеть не только от значения измеряемой величины в этот момент времени, но и от ее значения в предшествующие моменты времени. В этом случае мы имеем дело с

преобразованием измеряемой величины как функции времени в результат измерения как функцию времени. Такой вид преобразования называется **операторным**:

$$Y(t) = A[x(t)] + h(t), \quad (2.43)$$

где  $A$  – оператор преобразования.

Режим измерения, при котором имеет место операторное преобразование измеряемой величины в результат измерения, называется **динамическим режимом измерения**.

Его отличием от режима измерения, при котором измеряемая величина изменяется с течением времени, является такое влияние на результат измерения инерционных средств измерений, пренебречь которым в данных условиях нельзя.

Рассмотрим линейные операторы.

Применив к выражению (2.43) операторное преобразование и исключив из рассмотрения аддитивную составляющую  $h(t)$ , получим математическую модель такого средства измерений в виде линейного дифференциального уравнения (с учетом принципа суперпозиции):

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^ny}{dt^n} = \\ = k \hat{x}(t) + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^mx}{dt^m}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где  $k$  – чувствительность средства измерений.

Результат измерения будет определяться решением этого уравнения.

Для линейных средств измерений можно выделить шесть видов математических моделей:

- 1) статическая характеристика;
- 2) дифференциальное уравнение;
- 3) весовая функция;
- 4) переходная функция;
- 5)  $p$ -передаточная функция;
- 6) комплексная частотная характеристика.

Дифференциальное уравнение, весовая и переходная функции являются моделями во временной области,  $p$ -передаточная функция – в области комплексной переменной, комплексная частотная характеристика – в частотной области.

Первые две модели уже были рассмотрены ранее, поэтому проанализируем остальные четыре.

2.3.3 *Динамическая математическая модель средства измерений в форме передаточной функции*

Перейдем в уравнениях (2.43) и (2.44) от функций времени  $Y(t)$ ,  $x(t)$  и их производных к соответствующим функциям комплексного аргумента

$$p = \sigma + j\omega,$$

где  $\sigma = \text{const}$ ,  
 $\omega = 2\pi f$  – круговая частота.

Такой переход осуществляется на основе прямого преобразования Лапласа:

$$L\{x(t)\} = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt. \quad (2.45)$$

Применив операцию преобразования Лапласа к правой и левой частям уравнения (2.44), получим (с учетом линейности)

$$Y(p)(1 + a_1p + a_2p^2 + K + a_np^m) = k(1 + b_1p + b_2p^2 + K + b_np^n)X(p). \quad (2.46)$$

Определив из формулы (2.46) отношение  $Y(p)/X(p)$  и обозначив его  $W(p)$ , получим

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k(1 + b_1p + b_2p^2 + K + b_np^n)}{1 + a_1p + a_2p^2 + K + a_np^m}, \quad (2.47)$$

где  $W(p)$  – передаточная функция средства измерений, определяемая как отношение изображения результата измерения  $Y(p)$  к изображению измеряемой величины  $X(p)$ .

Запишем передаточную функцию (2.47) в виде

$$W(p) = \frac{\sum_{j=0}^n k b_j p^j}{\sum_{i=0}^m a_i p^i} = k \frac{M(p)}{N(p)} = k \times W_0(p), \quad (2.48)$$

где  $W_0(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$  – нормированная передаточная функция, отражающая

инерционные свойства средства измерений.

Для безынерционного средства измерений, что в сущности является недостижимым, нормированная передаточная функция  $W_0(p) = 1$ ; следовательно, для него передаточная функция будет равняться  $W(p) = k$ .

Из уравнения (2.47) следует, что

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p), \quad (2.49)$$

что означает более простую связь между изображениями результата измерения и измеряемой величины.

Учитывая вышесказанное, можно сформулировать порядок измерения при использовании понятия «передаточная функция». Первым делом переходят к изображению измеряемой величины  $X(p)$ , пользуясь таблицами преобразования Лапласа. Далее из выражения (2.49) находят изображение результата измерения  $Y(p)$ . И наконец, пользуясь теми же таблицами, переходят от изображения измеряемой величины  $Y(p)$  к оригиналу  $Y(t)$ .

Однако на практике, проводя подобные операции, сталкиваются с тем фактом, что передаточную функцию очень трудно определить экспериментально. Поэтому чаще всего используются другие динамические модели: комплексная частотная характеристика, переходная функция, импульсная переходная функция и весовая функция. Их можно рассматривать как решения дифференциального уравнения (2.44) при определенных типовых воздействиях и начальных условиях.

#### 2.3.4 Комплексная частотная характеристика средства измерений

Положим  $p = j\omega$ , перейдя от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье:

$$\Phi\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.50)$$

Комплексной частотной характеристикой средства измерения будет отношение

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = kW_0(j\omega), \quad (2.51)$$

где  $Y(j\omega)$  – изображение Фурье результата измерения;

$X(j\omega)$  – изображение Фурье измеряемой величины;

$W_0(j\omega)$  – нормированная комплексная частотная характеристика средства измерений.

В этом случае связь между изображением Фурье результата измерения и изображением Фурье измеряемой величины будет иметь вид



$$Y(j\omega) = W(j\omega) \cdot X(j\omega) = k \cdot W_0(j\omega) \cdot X(j\omega) . \quad (2.52)$$

Представляя нормированную комплексную частотную характеристику в форме

$$W_0(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = |W_0(j\omega)| \cdot e^{-j\alpha(\omega)} , \quad (2.53)$$

получим  $|W_0(j\omega)|$  – нормированную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) средства измерений,  $\alpha(\omega)$  – фазочастотную характеристику (ФЧХ) средства измерений.

Амплитудно-частотная характеристика выражает отношение амплитуды гармонического колебания на выходе средства измерений к амплитуде гармонического колебания на входе средства измерений как функцию частоты, а фазочастотная характеристика – разность фаз гармонического колебания на выходе и входе средства измерения как функцию частоты.

Следовательно, для определения АЧХ и ФЧХ средства измерений необходимо подать на его вход изменяющуюся по гармоническому закону величину и определить отношение амплитуды результата измерения к амплитуде входной величины и сдвиг фаз во всем частотном диапазоне средства измерений.

Поскольку комплексная частотная характеристика является математической моделью средства измерений в области аргумента  $\omega$ , а передаточная функция – в области аргумента  $p$ , то, зная связь между аргументами  $p$  и  $\omega$ , можно восстановить дифференциальное уравнение средства измерений (2.44) на основе экспериментальных АЧХ и ФЧХ, применив обратное преобразование Фурье.

### 2.3.5 Динамическая математическая модель средства измерений в форме весовой функции

Применив к уравнению (2.49) обратное преобразование Лапласа, получим

$$L^{-1}\{Y(p)\} = y(t) = \int_0^t w(\tau)x(t - \tau)d\tau , \quad (2.54)$$

где функция  $w(\tau) = L^{-1}\{W(p)\} = k \cdot L^{-1}\{W_0(p)\} = k \cdot w_0(\tau)$  есть весовая функция средства измерений, а  $w_0(\tau)$  – нормированная весовая функция средства измерений. Следовательно, весовая функция есть оригинал передаточной функции.

На рисунке 2.7 представлен график нормированной весовой функции.

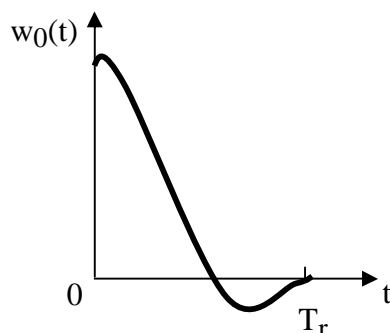


Рисунок 2.7 – График нормированной весовой функции

Значение параметра  $T_r$  определяет величину интервала предшествующих моментов времени, в которых значения измеряемой величины участвуют в формировании результата измерения для момента времени  $t$ , и определяет степень инерционности средства измерений. Чем меньше  $T_r$ , тем менее инерционным является средство измерений.

### 2.3.6 Динамическая математическая модель средства измерений в виде переходной функции

Нормированная переходная функция средства измерений в динамическом режиме измерения (при  $t < T_r$ ) будет иметь вид

$$h_0(t) = \int_0^t w_0(\tau) d\tau. \quad (2.55)$$

При  $t > T_r$  имеет место статический режим измерения, и нормированная переходная функция обращается в единицу:

$$h_0(t) = 1.$$

Следовательно, определение режимов измерения только на основе характера измеряемой величины (постоянная она или переменная) является некорректным, поскольку они определяются еще видом передаточной (весовой) функции и параметром  $T_r$ , характеризующим инерционные свойства средства измерений.

Связь между рассмотренными моделями средств измерений можно проиллюстрировать рисунком 2.8.

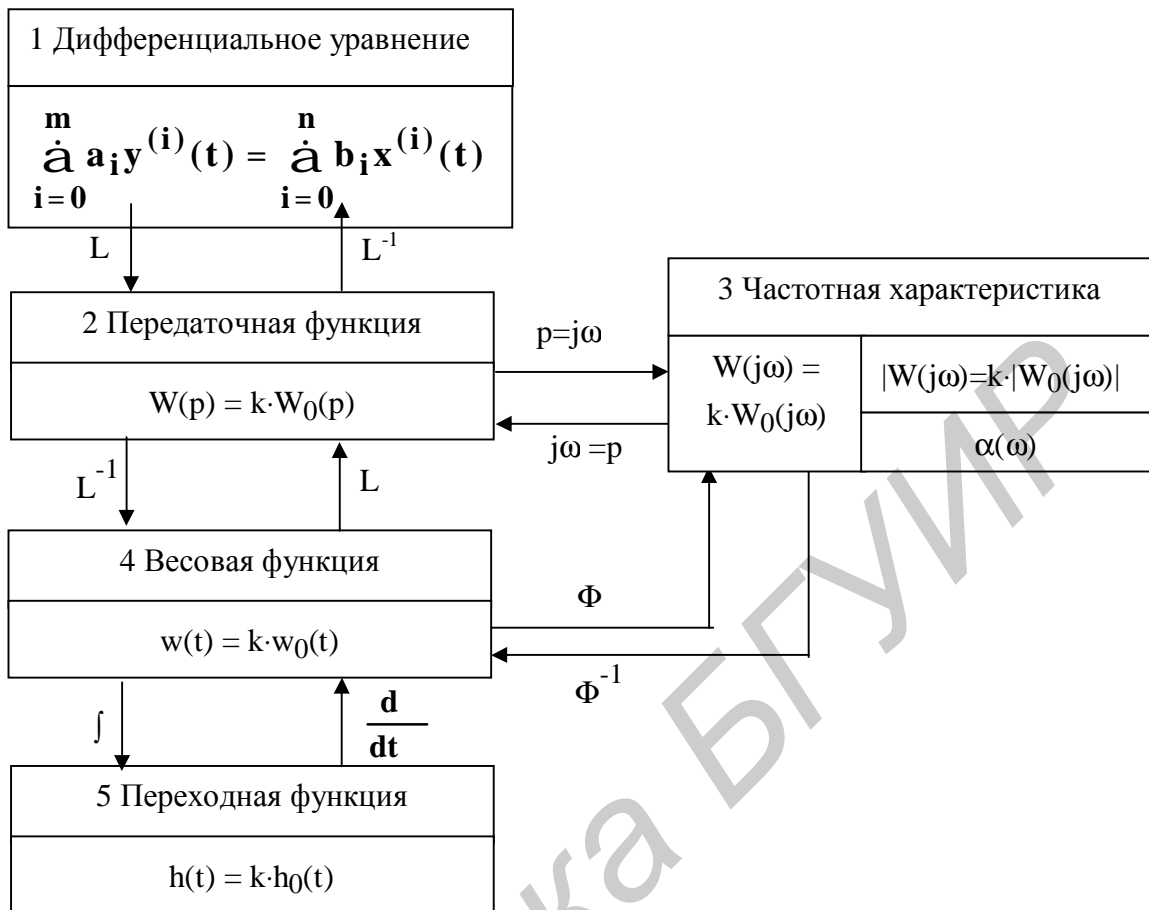


Рисунок 2.8 – Взаимосвязь между динамическими математическими моделями средств измерений

### 2.3.7 Математическая модель цифрового средства измерений

Цифровое средство измерений (ЦСИ) имеет в своем составе цифровое вычислительное устройство, выполняющее преобразования и вычисления величин, представленных в цифровой форме. Наличие цифрового вычислительного устройства позволяет увеличить надежность, расширить функциональные возможности (например, ввести функции самоконтроля, выдачи результатов обработки информации в виде, удовлетворяющем различные требования потребителей).

Выполнение аналого-цифровых преобразований и вычислительных операций занимает некоторый промежуток времени  $\Delta t$ . Как следствие этого, цифровое средство измерений представляет результаты измерений лишь в дискретные моменты времени, а в силу ограниченности разрядной сетки представления чисел эти результаты будут также иметь дискретный (квантованный) вид.

Структурная схема цифрового средства измерений показана на рисунке 2.9 и представляет собой сочетание аналоговой и цифровой части, взаимодействие между которыми осуществляется с помощью аналого-цифрового (АЦП) и цифроаналогового (ЦАП) преобразователей.

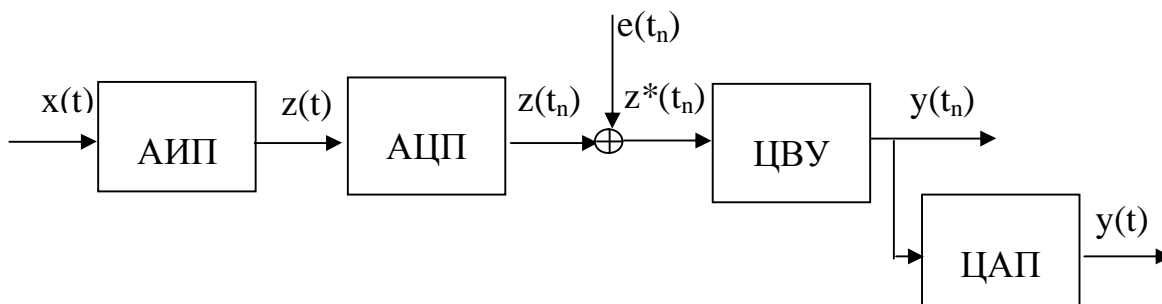


Рисунок 2.9 – Структурная схема цифрового средства измерений

Аналоговый измерительный преобразователь (АИП) составляет аналоговую часть цифрового средства измерений. Тип АИП определяется назначением и конкретной реализацией средства измерений. Для линейного ЦСИ математическая модель АИП представляется дифференциальным уравнением следующего вида (без учета аддитивной составляющей погрешности):

$$\sum_{i=1}^n \dot{a}_i \frac{d^i z(t)}{dt^i} = k_1 \sum_{j=1}^m \dot{b}_j \frac{d^j x}{dt^j}, \quad (2.56)$$

где  $a_i, i = \overline{0, n}; b_j, j = \overline{0, m}$  – постоянные коэффициенты, причем  $a_0 = b_0 = 1$ ;  
 $k_1$  – чувствительность АИП;  
 $z(t)$  – выходная величина АИП.

АЦП преобразует аналоговую величину  $z(t)$  в последовательность  $z^*(t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где каждый член последовательности  $z^*(t_n)$  есть не что иное, как результат измерения, представленный в цифровой форме:

$$z^*(t_n) = k_2 z(t_n) + h_2, \quad (2.57)$$

где  $k_2 = 1/q_z$  – чувствительность АЦП;  
 $q_z = [z]/[z]_0 \neq 1$  – размер единицы величины  $z$ , воспроизводимой АЦП;  
 $[z]_0$  – единица величины  $z$ , воспроизводимая эталоном;  
 $h_2$  – составляющая, обусловленная округлением числа за счет ограниченной длины разрядной сетки АЦП, внутренними шумами АЦП и возмущениями, действующими на величину  $z(t_n)$ .

Кроме того, ограниченность разрядной сетки АЦП приведет к тому, что возникнет погрешность квантования (округления) результата измерения, проявляющаяся как результат воздействия внешнего возмущения  $e(t)$  на выходе

АЦП, и последовательность величин на выходе АЦП  $z(t_n)$  преобразуется в последовательность  $z^*(t_n)$ .

Цифровое вычислительное устройство (ЦВУ) выполняет роль цифрового измерительного преобразователя, преобразующего последовательность  $z^*(t_n)$  в последовательность результатов измерений  $y(t_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ :

$$y(t_n) = k_3 \sum_{v=0}^{r_3-1} w_{30v} z^*(t_n - v), \quad (2.58)$$

где  $k_3$  – чувствительность ЦВУ;

$w_{30v}$ ,  $v = \overline{0, r_3 - 1}$  – нормированная дискретная весовая функция ЦВУ;

$r_3 = T_{r3}/\Delta t$  – параметр, определяющий инерционность ЦСИ и, следовательно, значения измеряемой величины в предшествующие интервалы времени.

Объединив выражения (2.56), (2.57), (2.58), получим математическую модель ЦСИ:

$$y(t_n) = k \times \sum_{v=0}^{r-1} w_{0v} x(t_n - v), \quad (2.59)$$

где  $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$  – чувствительность ЦСИ;

$$w_{0v} = \sum_{\mu=0}^{r_1-1} w_{30(v-\mu)} w_{10\mu}, \quad v = \overline{0, r-1}, \quad r = r_1 + r_3 - 1. \quad (2.60)$$

Здесь  $w_{30(v-\mu)}$  – нормированная весовая функция ЦВУ.

Соотношение (2.59) выражает операторное преобразование измеряемой величины, являющейся последовательностью, в результат измерения, также являющийся последовательностью.

Коэффициенты  $w_{0v}$ ,  $v = \overline{0, r-1}$  называются **нормированными весовыми коэффициентами ЦСИ**, а их упорядоченная совокупность – **нормированной весовой функцией**. Она совместно с коэффициентами чувствительности представляет математическую модель ЦСИ в форме дискретной весовой функции  $kw_{0v}$ ,  $v = \overline{0, r-1}$ . Её графическое изображение представлено на рисунке 2.10.

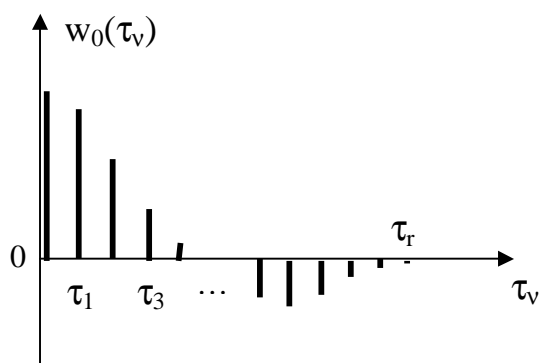


Рисунок 2.10 – Графическое изображение математической модели ЦСИ в форме дискретной весовой функции

## 2.4 Математические модели формирования результата измерения количественной величины

### 2.4.1 Статическая математическая модель с учетом аддитивного случайного возмущения, действующего на входе средства измерений, и эффекта квантования

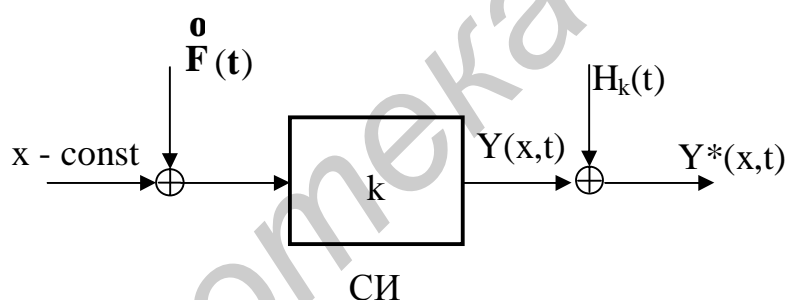


Рисунок 2.11 – Модель получения результата измерения

Результат измерения для аналогового средства измерений можно представить следующим выражением:

$$Y(x, t) = k \hat{x} + \overset{\circ}{F}(t) \hat{u}, \quad (2.61)$$

где  $\overset{\circ}{F}(t)$  – центрированная стационарная случайная функция, характеризующая величину аддитивного возмущения.

Погрешность квантования (обусловленная округлением) является случайной функцией

$$H_k(t) = Y^*(x, t) - Y(x, t).$$

Здесь  $Y^*(x,t)$  – квантованный результат измерения, являющийся случайной функцией с квантованными возможными значениями.

Тогда

$$Y^*(x,t) = Y(x,t) + N_k(t) = k \begin{matrix} \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \end{matrix} x + F(t) \begin{matrix} \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \end{matrix} + N_k(t). \quad (2.62)$$

В фиксированный момент времени аналоговый результат измерения примет вид

$$Y_t(x) = Y^*_t(x) - N_{kt}. \quad (2.63)$$

Если измеряемая величина лежит в интервале  $x_{i-1} < x < x_i$ , где  $x_i = i \cdot 10^{-m}[x]_0$ , а вероятность появления результата измерения  $x_{i+1-1} < Y_t < x_{i+1}$  в заданный момент времени не равна нулю ( $1 = \overline{0,1_0}$ ), то случайная величина  $Y_t(x)$  будет иметь следующие числовые характеристики: математическое ожидание  $M[Y_t(x)] =$

$$x^*_{i+1} \text{ и дисперсию } M[Y_t(x)] = \frac{\sigma^2 (10^{-m}[x]_0)^2}{12}.$$

Значение этих характеристик не зависит от времени, следовательно, случайная погрешность квантования как функция аргумента  $t$  является центрированной и стационарной.

Для результата измерения, представленного выражением (2.62), математическое ожидание будет равно

$$M[Y^*(x,t)] = M[Y(x,t)] + M[N_k(t)] = M[Y(x,t)] = kx. \quad (2.64)$$

#### 2.4.2 Математическая модель формирования результата измерения с использованием динамической модели средства измерений

Если инерционные, диссипативные или иные свойства средства измерений оказывают существенное влияние на результат измерения, то математическая модель формирования результата измерения основана на динамической модели средства измерений.

Структурная схема модели процесса измерения представлена на рисунке 2.12.

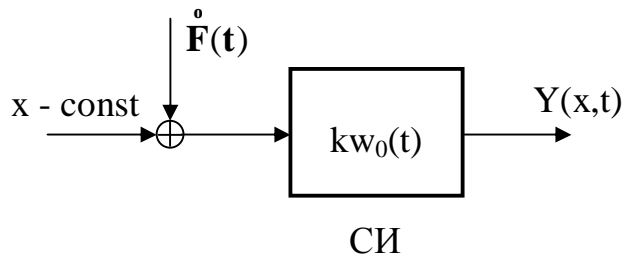


Рисунок 2.12 – Структурная схема динамической модели процесса измерения

В качестве динамической модели удобно взять весовую функцию

$$w(t) = kw_0(t), \quad (2.65)$$

где  $k = 1/q$  – чувствительность средства измерений;  
 $q$  – размер единицы величины, воспроизводимой средством измерений;  
 $w_0(t)$  – нормированная весовая функция, учитывающая динамические свойства средства измерений.

На входе средства измерений действует аддитивное возмущение, являющееся случайной функцией времени:

$$F(t) = m_f(t) + \overset{0}{F}(t), \quad (2.66)$$

где  $m_f(t)$  – функция математического ожидания;  
 $\overset{0}{F}(t)$  – центрированная случайная функция.

Математическую модель формирования результата измерения представим в виде ряда Тейлора:

$$Y(t) = k \int_0^t \overset{0}{w}_0(\tau) \overset{e}{\hat{x}}(t - \tau) + m_f(t - \tau) + \overset{0}{F}(t - \tau) \overset{u}{\hat{u}} d\tau = y_x(t) + Y_f(t), \quad (2.67)$$

где  $y_x(t) = k \int_0^t \overset{0}{w}_0(\tau) \overset{e}{\hat{x}}(t - \tau) d\tau$  – мультипликативная составляющая

результата измерения;

$$Y_f(t) = k \int_0^t \overset{0}{w}_0(\tau) m_f(t - \tau) d\tau + k \int_0^t \overset{0}{w}_0(\tau) \overset{0}{F}(t - \tau) d\tau = m_{yf}(t) + \overset{0}{Y}_f(t) -$$

аддитивная составляющая результата измерения;

$m_{yf}(t) = k \int_0^t \overset{0}{w}_0(\tau) m_f(t - \tau) d\tau$  – математическое ожидание аддитивной составляющей  $Y_f(t)$ ;



$$\overset{0}{Y}_f(t) = \int_0^t \overset{0}{k} \overset{0}{w}_0(\tau) \overset{0}{F}(t - \tau) d\tau$$
 – центрированная составляющая случайной функции  $\overset{0}{Y}_f(t)$ .

Учитывая вышеприведенные обозначения, уравнение (2.67) можно записать в виде

$$\overset{0}{Y}(t) = \overset{0}{m}_y(t) + \overset{0}{Y}(t) = \overset{0}{y}_x(t) + \overset{0}{m}_{yf}(t) + \overset{0}{Y}_f(t), \quad (2.68)$$

где  $\overset{0}{m}_{yf}(t)$  – математическое ожидание результата измерения.

### 2.4.3 Учет в математической модели формирования результата измерения влияния среды (условий измерения)

Совокупность величин, характеризующих рабочие условия измерения, можно разделить на 4 группы:

- 1) климатические условия, определяемые температурой окружающей среды, влажностью воздуха, атмосферным давлением;
- 2) электрические и магнитные величины (постоянный и переменный электрический ток, постоянные и переменные магнитные поля);
- 3) величины, характеризующие механические воздействия на объект измерения (вибрации, ударные нагрузки);
- 4) величины, характеризующие газовый состав атмосферы (химический состав, излучения и т.д.).

Поскольку для всех рабочих условий невозможно обеспечить единство измерений, то они устанавливаются для конкретных видов измеряемых величин (так называемые нормальные условия измерений). В некоторых случаях устанавливаются допустимые пределы изменения влияющих величин, которые не должны составлять более 35 % от нормальных.

В процессе измерения наиболее подвержены воздействию среды объект измерения и средство измерений.

Окружающая среда может оказывать влияние на инерционные свойства средства измерений и на его чувствительность. В статическом режиме измерения влияние инерционных свойств средства измерений пренебрежимо мало и первостепенное значение представляет влияние среды на его чувствительность. В динамическом режиме измерения, как показывает опыт технических измерений, при не очень больших отклонениях величин, характеризующих рабочие условия измерения, от номинальных значений влияние на параметры нормированной весовой функции невелико, и им можно пренебречь. Следовательно, определяющим становится влияние окружающей среды на чувствительность средства измерений.

Предположим, что чувствительность средства измерений есть некоторая дифференцируемая функция коэффициентов чувствительности

преобразователей, входящих в состав средства измерений и участвующих в формировании результата измерения:

$$k = f(k_1, k_2, \dots, k_m),$$

где  $k_i, i = \overline{1, m}$  – коэффициенты чувствительности  $i$ -преобразователя.

Вид этой функции будет зависеть от способа соединения преобразователей.

При отклонении коэффициента чувствительности каждого преобразователя от номинального значения на  $\Delta k_i$  чувствительность средства измерений изменится на  $\Delta k$ , и тогда

$$k = f(k_{10} + \Delta k_1, \dots, k_{m0} + \Delta k_m) = k_0 + \Delta k, \quad (2.69)$$

где  $k_0$  – номинальное значение чувствительности средства измерений.

Чтобы определить, как изменится чувствительность средства измерений при изменении внешних условий, представим функцию  $k$  рядом Тейлора относительно номинальных значений аргумента:

$$\Delta k = \sum_{i=1}^m \frac{\partial k}{\partial k_i} \Delta k_i. \quad (2.70)$$

В данном случае отклонение коэффициента чувствительности от номинального значения обусловлено двумя группами факторов:

1) производственно-технологическими факторами, т.е. погрешностями технологии изготовления преобразователей (обозначим их результирующее влияние через  $\Delta k_{i \text{ п}}$ );

2) отклонениями величин, характеризующих рабочие условия измерений, от номинальных значений ( $\Delta k_{i \text{ с}}$ ).

Суммарное воздействие этих факторов дает результирующее отклонение коэффициента чувствительности преобразователей от номинальных значений:

$$\Delta k_i = \Delta k_{i \text{ п}} + \Delta k_{i \text{ с}}. \quad (2.71)$$

Что касается объекта измерения, то влияние среды на него проявляется в изменении измеряемой величины, характеризующей этот объект. В конечном счете влияние среды на объект измерения сводится к аддитивному возмущению, действующему на входе средства измерений [ $\overset{\circ}{F}(t)$ ].

#### 2.4.4 Учет в математической модели формирования результата измерения эффекта взаимодействия средства измерений с объектом измерения

Влияние взаимодействия средства измерений с объектом измерения устанавливается с учетом специфики измерительной задачи и элементов, участвующих в измерении. Это взаимодействие может проявляться как аддитивное возмущение, действующее на измеряемую величину, на чувствительность средства измерений, а также на выходной параметр средства измерений. Следовательно, особенности взаимодействия средства измерений с объектом измерения можно учесть введением возмущений, приложенных ко входу и выходу средства измерений, или приращений чувствительности средства измерений.

#### 2.4.5 Структурная схема математической модели формирования результата измерения для аналогового средства измерений

«Носителем» измеряемой величины является объект измерения, который представляется математической моделью самой измеряемой величины.

Результат взаимодействия объекта измерения со средой и со средством измерений приводит к изменению измеряемой величины, вызванному возмущением на входе средства измерений  $\dot{F}(t)$  и отклонением размера единицы величины, воспроизводимой средством измерений (изменением чувствительности  $\Delta k$ ).

В измерительном процессе представляет интерес только такое взаимодействие со средой, определяющей условия измерений, которое приводит к изменению измеряемой величины.

Структурная схема такой модели процесса измерений представлена на рисунке 2.13.

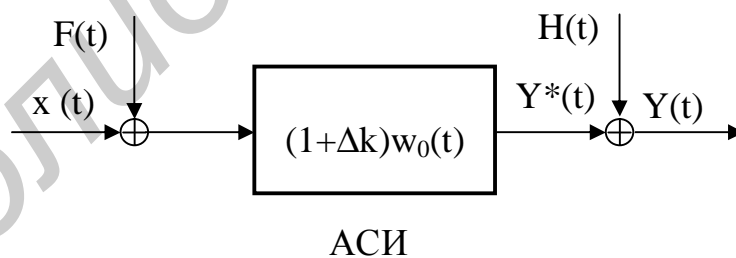


Рисунок 2.13 – Структурная схема модели взаимодействия аналогового средства измерений со средой

Изменение чувствительности, вызванное взаимодействием среды и средства измерений, можно представить в виде

$$\Delta k = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Delta \rho_j, \quad (2.72)$$

где  $\rho$  – величины, влияющие на чувствительность преобразователей;

$$\alpha_j = \frac{\partial k_j}{\partial \rho_j}; \quad \mathbf{k}_k = \mathbf{f}(\rho_1, \dots, \rho_n), \quad \mathbf{j} = \overline{1, n}.$$

Помехи и возмущения, которые аддитивно воздействуют непосредственно на измеряемую величину и результат измерения (электромагнитные помехи, особенности оператора и т.п.), будут проявляться в виде аддитивного возмущения  $H(t)$  на выходе средства измерений.

Наиболее полной математической моделью средства измерений в данном случае будет динамическая модель и, в частности, весовая функция  $w(t) = kw_0(t)$ . Воздействие среды на нормированную весовую функцию  $w_0(t)$ , как правило, мало, и им можно пренебречь. Отклонение чувствительности  $\Delta k$  будет зависеть от отклонения влияющих величин от номинальных значений.

В этом случае систему уравнений, соответствующую данной схеме формирования результата измерения, можно записать в виде

$$Y(t) = y_x(t) + Y_f(t) + Y_h(t), \quad (2.73)$$

где  $y_x(t) = (1 + \Delta k) \int_0^t w_0(\tau) x(t - \tau) d\tau$  – мультипликативная составляющая результата измерения;

$Y_f(t) = (1 + \Delta k) \int_0^t w_0(\tau) F(t - \tau) d\tau$  – аддитивная составляющая результата измерения, обусловленная обобщенным возмущением  $F(t)$ , действующим на входе средства измерений;

$Y_h(t) = (1 + \Delta k) \int_0^t w_0(\tau) H(t - \tau) d\tau$  – аддитивная составляющая результата измерения, обусловленная обобщенным возмущением  $H(t)$ , действующим на выходе средства измерений.

Это и будут три характерные составляющие результата измерения для аналогового средства измерений.

#### 2.4.6 Структурная схема формирования результата измерения для цифрового средства измерений

Динамическая математическая модель цифрового средства измерений представляется дискретной весовой функцией

$$w(\tau_v) = k \cdot w_0(\tau_v), \quad k = 1 + \Delta k, \quad v = \overline{0, r - 1}. \quad (2.74)$$

Поскольку цифровое средство измерений измеряет значения аналоговой величины в дискретные равноотстоящие моменты времени  $t_n$ , то и результаты измерения также будут представлять собой дискретные величины, а влияние возмущений на входе и выходе средства измерений определяется значениями, которые они имеют в эти моменты времени. Следовательно, в математической модели формирования результата измерения и измеряемая величина, и результат измерения, и возмущения будут представлены в форме последовательностей.

Связь между результатом измерения и измеряемой величиной без учета возмущений, действующих на входе и выходе средства измерений, можно представить следующим выражением:

$$y(t_n) = (1 + \Delta k) \sum_{v=0}^{u-1} w_0(\tau_v) x(t_n - \tau_v), \quad (2.75)$$

где  $x(t_n)$  – модель аналоговой измеряемой величины в форме последовательности;

$y(t_n)$  – последовательность результатов измерения.

С учетом этого структурная схема формирования результата измерения для цифрового СИ будет иметь вид, представленный на рисунке 2.14.

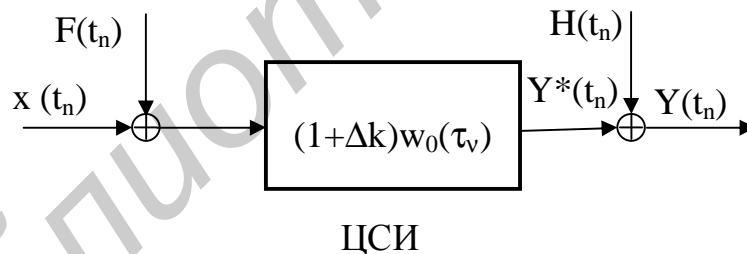


Рисунок 2.14 – Структурная схема формирования результата измерения для цифрового средства измерений

Математическую модель в данном случае можно представить следующим образом:

$$Y(t_n) = Y_x(t_n) + Y_f(t_n) + Y_h(t_n), \quad (2.76)$$

где  $Y_x(t_n) = (1 + \Delta k) \sum_{v=0}^{r-1} w_0(\tau_v) x(t_n - \tau_v)$  – мультипликативная

составляющая результата измерения;

$Y_f(t_n) = (1 + \Delta k) \sum_{v=0}^{r-1} w_0(\tau_v) F(t_n - \tau_v)$  – аддитивная составляющая

результата измерения, обусловленная случайной последовательностью  $F(t_n)$ , действующей на входе средства измерений;

$Y_h(t_n) = (1 + \Delta k) \sum_{v=0}^{r-1} w_0(\tau_v) H(t_n - \tau_v)$  – аддитивная составляющая

результата измерения, обусловленная случайной последовательностью  $H(t_n)$ , действующей на выходе средства измерений.

### 3 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

#### 3.1 Факторный эксперимент

##### 3.1.1 Основные термины и определения

Независимо от цели эксперимента его планирование необходимо осуществлять с учетом набора комбинаций уровней всех факторов, воздействующих на измеряемую величину и участвующих в формировании результата измерения.

В первую очередь необходимо определить номенклатуру терминов, используемых в теории планирования измерений, во избежание разночтений при определении того или иного понятия. Термины и определения стандартизованы и регламентированы ГОСТ 24026-80 «Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения».

Под **планом эксперимента** понимают совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов. В соответствии с этим **планирование эксперимента** – это выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

Фиксированную величину, по предположению влияющую на ход эксперимента, называют **фактором**, а наблюдаемую случайную переменную, по предположению зависящую от факторов, – **откликом**. Показатель зависимости изменения эффекта одного фактора от уровней других факторов будет **эффектом взаимодействия факторов**.

Результаты эксперимента расположены в области факторного пространства. **Факторное пространство** – это пространство, координатные оси которого соответствуют значениям факторов. Область факторного пространства, где могут размещаться точки, отвечающие условиям проведения опытов, определяют как **область экспериментирования (область планирования)**. Область факторного пространства в окрестности точки, в которой функция отклика достигает экстремального значения, называется **областью оптимума**.

Поскольку основной целью эксперимента кроме нахождения собственно значения измеряемой величины является также оценка погрешности измерений, а чем меньше погрешность измерений, тем выше точность, то в задачу экспериментатора входит и минимизация как систематической, так и случайной погрешности измерений. Минимизировать случайную погрешность можно, используя многократные измерения и затем усредняя их результаты. Сложнее обстоит дело с систематической составляющей погрешности, поскольку основную трудность здесь представляет ее обнаружение. В ряде экспериментов она никак себя не проявляет, и результаты могут получиться недостоверными. Поэтому следует попытаться перевести ее в разряд случайных на этапе планирования измерений. Такая операция получила название **рандомизации плана**. Это один из приемов планирования эксперимента, имеющий целью свести эффект некоторого неслучайного фактора к случайной ошибке. Самый простой случай рандомизации плана – это проведение параллельных опытов. **Параллельные опыты** – рандомизованные во времени опыты, в которых уровни всех факторов сохраняются неизменными. При этом можно свести на нет **временной дрейф** – случайное или неслучайное изменение функции отклика во времени.

План, содержащий все возможные комбинации всех факторов на определенном числе уровней равное число раз, получил название **полного факторного плана**. План, содержащий часть комбинаций полного факторного плана, называется **дробным факторным планом (дробной репликой полного факторного плана)**.

**Блоком плана** называется часть плана, включающая опыты, условия проведения которых однородны с точки зрения значений одного или нескольких мешающих факторов. Упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта, называется **точкой плана**. При этом **центральная точка плана (центр плана)** – это точка плана, соответствующая нулям нормализованной (безразмерной) шкалы по всем факторам.

Условия проведения эксперимента удобно записать в форме таблицы, которая получила название матрицы плана. **Матрица плана** – стандартная форма записи условий проведения экспериментов в виде прямоугольной таблицы, строки которой отвечают опытам, а столбцы – факторам. **Матрица спектра плана** – матрица, составленная из всех строк матрицы плана, отличающихся уровнями хотя бы одного фактора.

Во многих случаях при построении плана эксперимента бывает достаточным рассмотреть всего два уровня факторов, влияющих на производственный процесс или эксперимент. Необходимо установить, влияют ли какие-либо изменения уровней факторов на результат эксперимента. Наиболее очевидным является осуществление полного перебора комбинаций интересующих нас уровней факторов. Но число этих комбинаций бывает настолько большим даже при малом числе двухуровневых факторов, что провести такой эксперимент становится проблематичным. Например, если имеется 10 двухуровневых факторов, то для осуществления полного набора комбинаций необходимо провести  $2^{10} = 1024$  опыта. В связи с этим при планировании обычно используют дробные планы, отбрасывающие взаимодействия более высокого порядка и уделяющие внимание **главным эффектам**.

**Главным эффектом фактора А** называется средняя разница в значениях между всеми способами, содержащими уровень  $a$ , и всеми способами, не содержащими уровень  $a$ .

Дополнительно к главным эффектам можно определить и измерить много типов взаимодействия между эффектами факторов (двухфакторное взаимодействие, трехфакторное взаимодействие и т.д.).

**Двухфакторное взаимодействие АВ** равно половине разности между главным эффектом фактора А при верхнем уровне фактора В и при нижнем уровне фактора В:

$$AB = \frac{A_{\text{гл}}(b^+) - A_{\text{гл}}(b^-)}{2}, \quad (3.1)$$

где А, В – факторы,  
b – уровень фактора В.

**Трехфакторное взаимодействие ABC** – половина разности между АВ при верхнем уровне фактора С и АВ при нижнем уровне фактора С.

Учитывая, что все способы обработки (измерения) одинаково повторимы, если имеется  $n$  главных эффектов, то двухфакторных взаимодействий будет  $n(n-1)/2$ , трехфакторных –  $n(n-1)(n-2)/2$  и т.д. Следовательно, все эти взаимодействия будут образовывать  $2^{n-1}$  степени свободы между всеми способами обработки (измерения).

Эксперимент, в котором способы обработки (измерения) состоят из комбинаций уровней двух или более различных факторов, и его очевидные обобщения называется **факторным**. Этот факторный набор способов обработки представляется в виде блок-плана, разновидностями которого являются латинские и греко-латинские квадраты, рандомизованные блок-планы и т.д.).

Следует отметить, что терминология, применяемая в теории планирования эксперимента, сформировалась в то время, когда ее начали



применять в сельском хозяйстве, поэтому в ней используются термины, на первый взгляд, кажется, не имеющие отношения к другим областям науки, но тем не менее отражающие суть теории.

Единицу материала (или физическую величину), подвергаемую обработке (измерению), будем называть **участком (объектом)**. Это может быть участок, на котором созревает урожай, пациент больницы, одна из ряда однотипных машин, физическая величина. **Цель эксперимента** состоит в сравнении эффектов различных способов обработки (измерения), каждый из которых применяется к одному или более объектам, с помощью количественной оценки результатов наблюдений отдельных объектов (участков).

Результатом (урожаем) будем называть любую количественную меру, полученную от объекта (участка). Иногда на практике испытываемые способы измерения (обработки) объединяют в несколько факторов.

В этом случае в задачу составления плана эксперимента входят:

- множество способов измерения (обработки), выбираемых для сравнения;
- спецификация измеряемых (обрабатываемых) объектов (участков);
- правила, по которым способы измерения (обработки) следует применять к объектам (участкам);
- спецификация результатов измерения или других данных, которые должны быть получены для каждого объекта (участка).

Основные моменты, которые необходимо при этом учитывать, – это пригодность, осуществимость, точность, экономическая эффективность.

Эксперимент, проведенный при комбинации всех возможных факторов и уровней, называется **репликой**.

### *3.1.2 Рандомизованный блок-план*

Полностью рандомизованный блок-план предусматривает сравнение любого числа способов измерений (обработки) при репликах из каждого способа измерений (обработки), полностью зависящих от выбора потребителя. Он всегда представляет собой обоснованный выбор, однако этот выбор не всегда бывает хорошим.

Предположим, что необходимо провести эксперимент для сравнения  $t$  способов измерения (обработки). Пусть  $r$  – количество объектов для каждого способа измерения (обработки),  $N$  – число имеющихся объектов для каждого способа. Тогда  $N = r \cdot t$ .

Разделим объекты на  $r$  блоков, состоящих из  $t$  объектов каждый. Способы измерения (обработки) обозначим  $A, B, C, \dots$ . Они разделяются по объектам таким образом, что каждый из них применяется только один раз в каждом блоке. Блок-план в этом случае будет выглядеть следующим образом:

	Блоки (r) →					
Объект внутри блока (t)	I	II	III	IV	V	VI
1	A	B	C	D	A	B
2	B	C	D	A	C	D
3	C	D	A	B	D	C
4	D	A	B	C	B	A

Если в каждом блоке произвести случайный выбор одного объекта для первого способа измерения (обработки), другого – для второго и т.д. и установить новый порядок в каждом блоке, то можно получить новый блок-план:

	Блоки (r) →					
Объект внутри блока (t)	I	II	III	IV	V	VI
1	B	C	D	A	C	D
2	C	D	A	B	D	C
3	D	A	B	C	B	A
4	A	B	C	D	A	B

Это дает рандомизованный блок-план, поскольку перестановка объектов в плане производится случайным образом. Это план используют наиболее часто из-за легкости, с которой он может быть модифицирован. Он может быть построен для любых значений  $r$  и  $t$  и является основой для других планов, в которых используется принцип расположения в блоки с повторениями.

### 3.1.3 Планы на латинских квадратах

**Латинский квадрат** – план дисперсионного анализа, задаваемый расположением некоторого числа символов в ячейках, сгруппированных в строки и столбцы так, что каждый символ встречается один раз в каждой строке и каждом столбце.

Планы латинских квадратов используются в тех случаях, когда интересующие нас факторы имеют более двух уровней и заранее известно, что между факторами нет взаимодействий (или этими взаимодействиями можно пренебречь).

Латинский квадрат является расположением, позволяющим учитывать два множества блоковых ограничений (обычно называемых строками или столбцами), которые должны быть использованы одновременно. Его можно применить для любого числа  $t$  способов измерения (обработки), для которого  $N = at^2$ , где  $a$  – целое число, причем в основной ситуации  $a = 1$  (количество квадратов).

Но при  $a = 1$  у латинских квадратов нет преимуществ. Их можно сохранить, используя одновременно два или более квадратов.

Случайная перестановка строк, столбцов или буквенных символов преобразует любой латинский квадрат в другой латинский квадрат.

#### 3.1.4 Греко-латинские квадраты

Можно построить два латинских квадрата:

<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
<b>b</b>	<b>c</b>	<b>a</b>	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$
<b>c</b>	<b>a</b>	<b>b</b>	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$

Наложив эти два квадрата друг на друга, получим греко-латинский квадрат:

<b>aa</b>	<b>b<math>\beta</math></b>	<b>c<math>\gamma</math></b>
<b>b<math>\gamma</math></b>	<b>ca</b>	<b>a<math>\beta</math></b>
<b>c<math>\beta</math></b>	<b>a<math>\gamma</math></b>	<b>ba</b>

Греко-латинские квадраты применяются, если надо провести одновременно измерения разными способами. Здесь можно оценить главные эффекты четырех трехуровневых факторов (фактора строк, столбцов, латинских и греческих букв), проведя только 9 опытов.

#### 3.1.5 Гипергреко-латинские квадраты

Их можно применить, если для некоторого числа уровней имеется более двух возможных расположений в латинские квадраты. Например существует три различных латинских квадрата на четырех уровнях. С помощью гипергреко-латинского квадрата можно оценить главные эффекты всех пяти четырехуровневых факторов, проведя эксперимент только с 16 опытами.

Одно из свойств хорошо спланированного факторного эксперимента состоит в том, что часто простое усреднение результатов и систематизация их в табличной форме может выявить глубокие особенности результатов без вычисления дисперсий и стандартных погрешностей. Расположение в виде квадратов и является наиболее наглядной формой этих таблиц.

Однако на практике получается, что даже при небольшом числе факторов полное число комбинаций всех уровней всех факторов достаточно велико. Часто основным лимитирующим обстоятельством планирования экспериментов является полное число объектов, которые можно использовать, поскольку их количество может быть пропорциональным или цене, или времени, затрачиваемому на эксперимент, или усилиям. Желательно сохранять блоки «разумно» небольшими и однородными. «Разумность» может зависеть как от числа циклов полной последовательности операций и измерений, которые может выполнить, например, за один день один человек, так и от количества измерительных каналов или от каких-либо других обстоятельств.

Кроме методов, использующих планы на латинских квадратах, существует еще несколько методов, которые также позволяют проводить

анализ очень больших планов, например, планов с более чем 200 уровнями в совокупности, или когда уровни имеют другие уровни внутри факторов. В этом случае применяются методы **дисперсионного анализа**.

### *3.1.6 Дробные реплики и смешанные планы*

Свойства оптимальных планов могут быть использованы для «подправления» планов в случае, если некоторые данные невозможно идентифицировать, например вследствие неисправности оборудования. Наиболее простой путь исправления результатов измерения – это повторить эксперимент. Но гораздо эффективнее построить список подходящих точек из экспериментальной области, добавить к этому списку все точки, для которых уже проделаны опыты, и всегда включать эти точки в окончательный план (и никогда их не исключать). Теперь можно исключать из плана лишь те точки, в которых пока не ставили опытов. Следовательно, можно найти таким способом единственный опыт, добавив который к эксперименту, можно оптимизировать соответствующий критерий.

Рассмотрим возможность проведения экспериментов над многими факторами при умеренном числе объектов и без введения блоковых ограничений. Здесь, как правило, применяют так называемые **дробные реплики**.

**Дробная реплика полного факторного плана (дробный факторный план)** – это план, содержащий часть комбинаций полного факторного плана.

Первым шагом при таком планировании будет рассмотрение возможности объединения экспериментов, проводимых в единичной реплике, вторым – рассмотрение дробной реплики для уменьшения полного числа объектов и **смешивание** для уменьшения размеров блока.

Преимуществом обладает такое распределение экспериментального материала на блоки, при котором объекты, принадлежащие к одному блоку, были бы более схожи, чем объекты в различных блоках. В этом случае точность экспериментальных результатов будет зависеть только от внутриблоковой дисперсии.

Использование факторного плана означает, что полное число способов измерения (обработки) может быть очень большим и значительно превосходить число объектов в наиболее удобном по размеру блоке. Например, при  $3^3$ -взаимодействии будут создаваться блоки по 27 объектов, однако каждый такой большой блок может оказаться неосуществимым.

Общего правила деления на блоки при смешивании нет. Блоки, например, из 27 участков могут быть удовлетворительными и при этом совершенно разнородными (если это, к примеру, 27 последовательных недель работы завода, в течение которых должны были исследоваться различные комбинации сырья).

Чтобы воспользоваться преимуществами небольших блоков без серьезных ограничений на использование факторных схем, необходимо применить следующий механизм смешивания:

- пожертвовать некоторыми взаимодействиями, имеющими небольшое значение;

- не экстраполировать погрешность из-за больших и неоднородных блоков на все контрасты способов обработки;

- сконцентрировать погрешность на этих смешанных взаимодействиях таким образом, чтобы для оставшихся контрастов получалась такая же точность, как и в случае меньших блоков.

Простой смешанный план может представлять собой следующее. Предположим, необходимо составить план  $2^3$ , но в каждом блоке может быть по 4 объекта. Если обозначить через А, В, С факторы, то можно организовать эксперимент таким образом, чтобы имелось равное число блоков двух типов:

1) 1, АВ, АС, ВС;

2) А, В, С, АВС.

На однофакторные А, В, С и двухфакторные АВ, АС, ВС взаимодействия влияет только внутриблоковая дисперсия. Трехфакторное взаимодействие АВС совпадает с разностью между обоими блоками 1 и 2. В этом случае говорят, что взаимодействие АВС смешано с блоками. Если число блоков невелико, то информация, которую можно получить в этом взаимодействии, мала, и ею можно пожертвовать ради возможности исследования остальных 6 степеней свободы с заданной точностью.

Если блоков каждого типа (1, 2) больше, чем по одному (допустим N), то

- N блоков типа 1 выбираются случайным образом из 2N блоков;

- (2N-1) степеней свободы между блоками разлагаются затем на одну степень свободы для смешанного взаимодействия и (2N-2) степеней свободы между блоками одного типа. Средний квадрат компоненты в блоках одного типа является оценкой межблоковой погрешности, используемой при проверке значимости или других утверждений, касающихся взаимодействия АВС. В этом случае, если N не очень мало, используется рандомизованный блок-план для АВС.

В практических приложениях факторного планирования число блоков редко оказывается достаточным для того, чтобы дисперсии имели ценность, и поэтому при использовании смешанного плана в качестве взаимодействий рекомендуется выбирать те, которыми можно полностью пожертвовать.

С точки зрения построения планов смешивание можно рассматривать как тип дробной реплики, в котором блоки играют роль добавочных факторов.

Введем квазифактор X, представляющий собой разность между двумя типами блоков. Этот квазифактор можно считать дополнительным фактором, введенным в план эксперимента. В этом случае план типа  $2^3$  преобразуется в план типа  $2^4$  с подгруппой переименований 1, АВСX. Тогда способы будут организованы следующим образом:

1, ab, ac, ax, bc, bx, cx, abcx.

Если план с отсутствием  $x$  отнести к блоку I, а при наличии  $x$  – к блоку II, то можно получить смешанную схему для плана типа  $2^3$ :  $ABC \equiv X$ . Следовательно, трехфакторное взаимодействие будет аналогично контрасту между типами блоков  $AB \equiv CX$ ,  $AC \equiv BX$  и т.д. Другими словами, взаимодействие между любой парой факторов A, B, C измеряется с помощью того же самого контраста, который проверяет, меняется ли третий главный эффект от блока к блоку. Однако осознанное отнесение к блоку типа I может привести к проявлению ложного взаимодействия AB, поэтому предпочтительным будет здесь элемент случайности.

Если ввести два квазифактора X и Y и взять  $\frac{1}{4}$  реплики плана с переименованиями типа  $2^5$  (т.к. в этом случае уже будет 5 факторов), в котором эти переименования определяются из соотношений  $ABX \equiv ACY \equiv BCXY \equiv 1$ , то план  $2^5$  можно разбить на 4 типа блоков:

	I	1	abc
(x)	II	b	ac
(y)	III	c	ab
(xy)	IV	a	dc

Это будет план  $2^3$  по 2 элемента в блоках с числом блоков, кратным четырем. Он одновременно смешивает AB, AC и BC.

Применение дробной реплики позволяет уменьшить число объектов, требуемых для эксперимента. Рассмотренная схема смешивания применяется для уменьшения размеров блока.

Общая схема смешивания планов типа  $2^n$  следующая:

- чтобы смешивать в блоки по  $2^p$  элементов, следует выбрать дополнительно  $(n - p)$  квазифакторов X, Y, ... , главными эффектами и взаимодействиями среди которых должны быть согласования с  $(2^{n-p} - 1)$  степенями свободы между блоками. В этом случае любая  $1/2^{n-p}$ -реплика плана типа  $2^{2n-p}$  дает возможную схему смешивания при условии, что никакие элементы подгруппы переименований не состоят только из квазифакторов.

Квазифакторы необходимы лишь для того, чтобы показать связь с дробными репликами. Следовательно, из плана типа  $2^n$  можно путем смешивания получить блоки по  $2^p$  элементов с помощью выбора смешивающей подгруппы порядка  $2^{n-p}$ , элементами которой кроме 1 должны быть смешанные эффекты.

#### *Частичное смешивание*

Если в эксперименте должно быть использовано несколько полных реплик всех комбинаций способов измерения (обработки), нет необходимости жертвовать некоторыми взаимодействиями при смешивании, за исключением информации, получаемой из межблоковых сравнений. В качестве альтернативы можно получать внутривидовую информацию обо всех эффектах, смешивая

различные взаимодействия в различных репликах. Такое частичное смешивание дает возможность изучать каждое смешанное взаимодействие в репликах, в которых они не смешаны. В данном случае каждая реплика образуется так, будто она получена от смешивания взаимодействий в единичной реплике, причем в каждом блоке порядок измерения (обработки) объектов рандомизируется.

Статистический анализ эксперимента с частичным смешиванием сложнее и более трудоемок, чем в случае полного смешивания.

#### Смешивание планов $R^n$

Все предыдущие положения, как уже указывалось ранее, рассматривались для случая двухуровневых факторов. В общем случае, если количество уровней больше двух, важно знать, насколько можно уменьшить размер блоков с помощью смешивания без потери информации о существенных контрастах. Когда число факторов велико (предположим  $R$ ), можно без смешивания важных эффектов использовать блоки много меньше, чем блок из  $R^n$  объектов, необходимый для полной реплики. Размер и количество блоков определяется исходя из **теоремы Фишера о минимальном смешивании**:

$R^n$ -факторная схема может быть расположена в  $R^{n-p}$  блоках по  $R^p$  объектов в каждом без смешивания главных эффектов или двухфакторных взаимодействий при условии, что

$$n \leq \frac{R^p - 1}{R - 1}. \quad (3.2)$$

В качестве примера рассмотрим эксперимент с четырьмя факторами (a, b, c, d) на трех уровнях ( $3^4$ -факторная схема). План эксперимента в данном случае будет выглядеть следующим образом:

Группа способов	Квазифакторы →				Внутри-блочная конструкция
	Подгруппы эффектов				
	X	Y	XY	XY <sup>2</sup>	
1	0	0	0	0	1
x	1	0	1	1	acd
x <sup>2</sup>	2	0	2	2	a <sup>2</sup> c <sup>2</sup> d <sup>2</sup>
y	0	1	1	2	bcd <sup>2</sup>
xy	1	1	2	0	abc <sup>2</sup>
x <sup>2</sup> y	2	1	0	1	a <sup>2</sup> bd
y <sup>2</sup>	0	2	2	1	b <sup>2</sup> c <sup>2</sup> d
xy <sup>2</sup>	1	2	0	2	ab <sup>2</sup> d <sup>2</sup>
x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	2	2	1	0	a <sup>2</sup> b <sup>2</sup> c

### *3.1.7 Планы с расщепленными участками*

Иногда даже для некоторых факторов требуются экспериментальные единицы меньшего размера, чем для прочих.

Эксперименты, в которых некоторые факторы или комбинации факторов используются на основных объектах, а другие факторы сравниваются на их частях, называют **планами с расщепленными участками**.

Можно сформулировать три причины, по которым используются расщепленные участки:

- непрактичность или невозможность дифференциации (выделения) основных экспериментальных единиц для некоторых факторов;
- необходимость включения дополнительных факторов в уже проводящийся эксперимент;
- желание более точно оценить эффекты факторов частей объектов и их взаимодействий с факторами основных объектов при некоторой потере точности на факторах основных объектов.

При этом неправильным будет использование рандомизованной блоковой схемы для одного из нескольких факторов с последующим расщеплением каждого объекта для уровней второго фактора, дальнейшим расщеплением этих полученных подобъектов для уровней третьего фактора и т.д. Правильным будет использование одной и той же экспериментальной единицы, но при этом рассмотрение подобъектов в качестве объектов, а основных объектов к качеству блоков и в смешивании полученных структур ABC.

## **4 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ОДНОФАКТОРНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ**

### *4.1 Выбор вида математической модели и погрешность адекватности*

Эксперимент по определению функции вида  $y = f(x)$  называется **однофакторным**, а эксперимент по определению функции вида  $y = f(x_1, \dots, x_k)$  – **многофакторным**.

При однофакторном эксперименте искомая математическая модель функции  $y = f(x)$  может быть найдена лишь в результате совместной обработки всех полученных значений  $x$  и  $y$ .

Экспериментальные точки занимают некоторую полосу вокруг искомой кривой  $y = f(x)$ , ограниченную пунктирными линиями (рисунок 4.1).



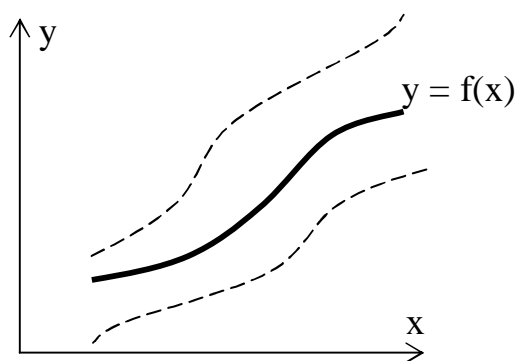


Рисунок 4.1 – Графическое изображение однофакторной зависимости (сплошная линия) и ее полосы неопределенности (пунктирные линии)

Отклонения экспериментальных точек от номинальной кривой могут быть вызваны рядом причин (например, неполнотой модели и учитываемых факторов, случайным характером самих исследуемых процессов и т.д.). При этом невозможно разделить отклонения, вызванные погрешностями измерения  $x$ , от погрешностей, вызванных неточностью измерения  $y$ . Поэтому описанием погрешности исходных данных может быть лишь указание ширины полосы их разброса вокруг найденной кривой  $y = f(x)$ . При этом полоса разброса не обязательно будет иметь постоянную ширину по всей своей длине и одинаковую конфигурацию (пунктирные линии на рисунке 4.1). Вопрос о форме полосы погрешностей должен анализироваться в каждом конкретном случае.

Сложно формализовать задачу выбора модели функциональной зависимости, так как одна и та же кривая с различной степенью приближения может быть аппроксимирована различными функциями (полиномом степени  $n$ , параболой, гиперболой, эллипсом и т.д.). Рациональный выбор того или иного аналитического выражения для искомой функции может быть обоснован лишь при учете определенного перечня требований.

**Первое требование к математической модели** – это удобство ее последующего использования, что требует компактности модели. Компактность модели достигается удачным выбором элементарных функций, обеспечивающих хорошее приближение при малом их числе.

**Второе требование** – содержательность, или интерпретируемость, модели. Выполнение этого требования желательно, но не обязательно и достигается путем придания определенного смысла контактам или функциям, входящим в найденную математическую модель. Более того, этого невозможно добиться, если подбирать математическую модель с помощью ЭВМ.

Основной помехой при установлении вида исследуемой зависимости является случайный разброс экспериментальных данных. Если случайный разброс исходных данных почти отсутствует (т.е. диффузность экспериментальных данных мала), то излишне использовать статистические

методы для их обработки. В данном случае кривая просто проводится через эти точки (рисунок 4.2).

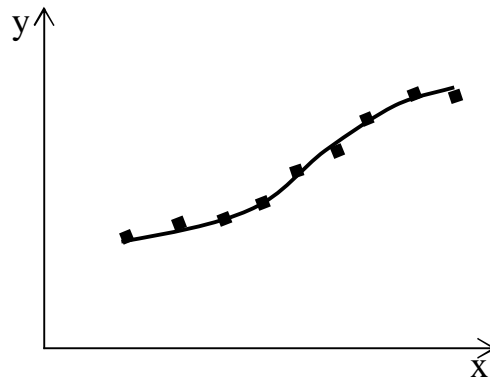


Рисунок 4.2 – Аппроксимирующая кривая в случае малой диффузности экспериментальных данных

При этом может оказаться, что одна или две точки все-таки не лежат на этой кривой. Их следует рассматривать как промахи.

Если диффузность экспериментальных данных значительна (рисунок 4.3), то для обработки таких данных привлекаются простейшие или более сложные статистические методы.

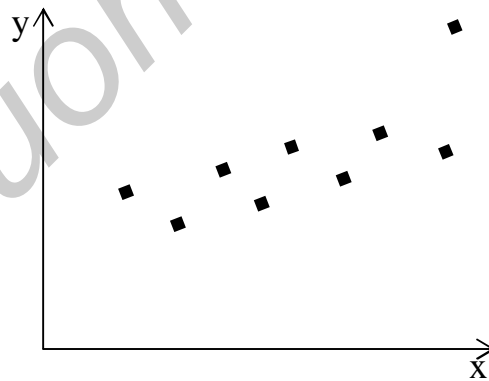


Рисунок 4.3 – Экспериментальные данные с большой диффузией

В этом случае можно применить так называемые быстрые методы установления вида однофакторных зависимостей.

## 1 Метод обведения контура (рисунок 4.4).

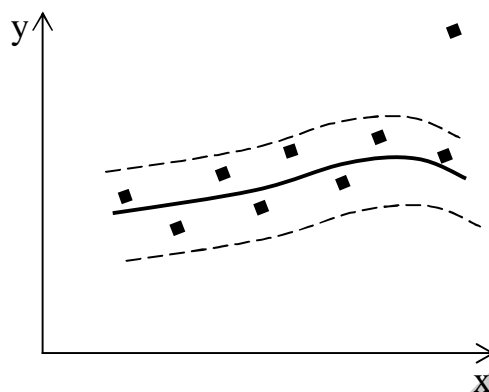


Рисунок 4.4 – Метод обведения контура

Плавной линией обводится контур, включающий все экспериментальные точки (пунктирные линии), а искомая кривая будет осевой линией контура (сплошная кривая). Если при этом для сохранения плавности границ контура какие-то точки необходимо оставить за пределами границ, то их следует рассматривать как промахи или как аномально большую случайную погрешность.

Однако при большом рассеянии результатов эксперимента форма контура может иметь случайные, бессмысленные очертания. В этом случае ограничиваются лишь установлением уровня и наклона искомой зависимости, полагая ее прямой линией, проходящей по центру обведенной контуром полосы точек.

**2 Метод медианных центров.** Применяется при очень большой диффузности экспериментальных точек (рисунок 4.5).

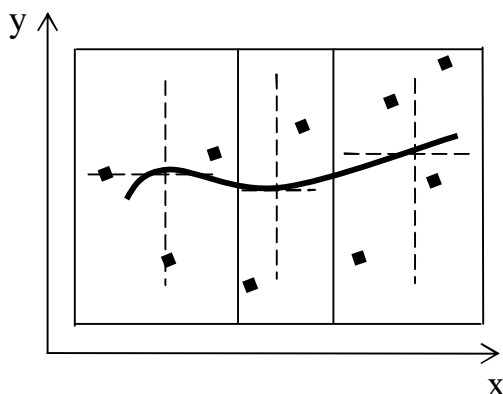


Рисунок 4.5 – Метод медианных центров

Обведенное контуром поле точек делят на несколько частей и в каждой из них находят медианный центр (пересечение горизонтали и вертикали, слева и справа и ниже и выше которых оказывается равное количество точек), а затем через эти медианные центры проводят плавную кривую. Если предполагается, что зависимость может быть прямой линией, то достаточно разделить поле на две области; если не прямой, – то от трех до пяти областей. Такой метод нечувствителен к промахам.

### 3 Метод выделения остатка.

Рассматриваемую функцию  $y = f(x)$  полагают состоящей из двух слагаемых:

$$y = f_0(x) + f_1(x).$$

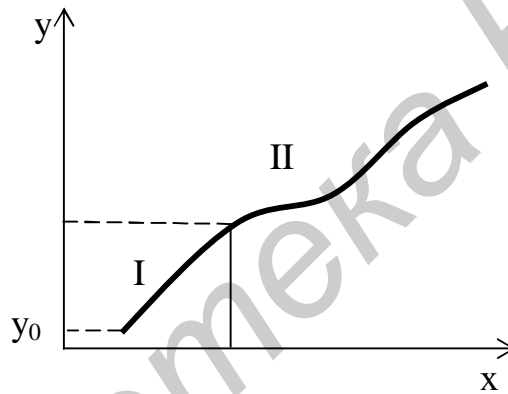


Рисунок 4.6 – Метод выделения остатка

На рисунке 4.6 участок I представляется в виде  $y = y_0 + f_1(x)$ . Затем выделяется функция  $f_1(x)$  как  $f_1(x) = y - y_0$ , и этот остаток полагается равным  $f_1(x) = f_2(x) + f_3(x)$ . Участок II полагается равным  $f_2(x) = a_1x^2$ . Теперь можно построить остаток  $f_3(x) = y_1 - y_0 - a_1x^2$  и найти его форму и т.д.

Полученный многочлен и будет аппроксимирующей функцией. При этом всегда аппроксимирующая функция будет определенным приближением реальной функции, следовательно, будет присутствовать погрешность, называемая **погрешностью адекватности**.

**Погрешность адекватности модели** – погрешность в описании данного явления, возникающая из-за недостаточного соответствия аппроксимирующей функции всем особенностям формы экспериментальной кривой.

Для достижения наилучшего соответствия модели описываемому явлению обычно приходится усложнять модель, что приводит к противоречию между компактностью модели и точностью описания

экспериментальных данных. Рациональным будет прекращение усложнения модели, когда она еще относительно проста и при этом имеет удовлетворительную погрешность адекватности. Ориентиром здесь может служить примерное равенство погрешности адекватности принятой модели и ширины полосы ее неопределенности вследствие случайного разброса исходных данных. Предпочтительнее пользоваться следующим критерием для прекращения уточнения модели: принимаемая модель не противоречит данному полю экспериментальных данных.

#### 4.2 Подбор аппроксимирующей функции

После того как вид графической зависимости установлен, стоит задача выбора ее математического описания. Обычно предпочтительнее использовать наиболее компактные выражения, представляющие собой элементарные функции (степенную, показательную, дробно-рациональную).

Для проверки того, является ли данная функция именно степенной вида  $y = ax^n$ , необходимо прологарифмировать правую и левую части и найти величины  $\lg x$  и  $\lg y$ . Это будет прямая в координатах  $\lg y - \lg x$  (рисунок 4.7).

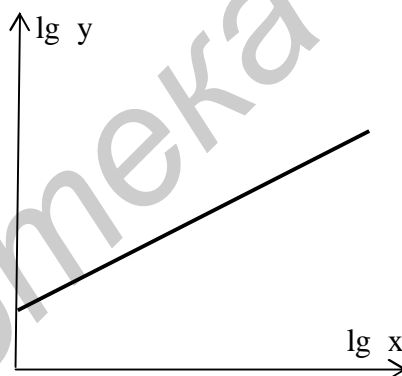


Рисунок 4.7 – Степенная функция в логарифмических координатах  
( $\lg y = \lg a + n \times \lg x$ )

Если поле экспериментальных точек группируется относительно прямой линии, то можно говорить о том, что модель в виде степенной функции не противоречит данному полю точек, и выбор данной функции может быть принят окончательно. Тогда точка пересечения прямой с осью  $\lg y$  будет определять величину  $a$ , а наклон прямой к оси  $x$  – величину  $n$ .

Если же экспериментальные точки не лежат вдоль прямой, то модель в виде степенной функции не является адекватной, и необходимо перейти к проверке, не является ли данная функция показательной ( $y = a \times e^{bx}$ ). Для проверки соответствия показательной функции экспериментальным данным пользуются полулогарифмическим масштабом, т.е. строят график в координатах  $\ln y - x$ :  $\lg ny = \ln a + b \times x$ . Если экспериментальные точки укладываются на прямую линию, то можно говорить о соответствии искомой

модели показательной функции, и точка пересечения прямой с осью  $\ln y$  будет определять параметр  $a$ , а наклон прямой к оси  $x$  – параметр  $b$ .

Для проверки, не является ли искомая функция дробно-рациональной ( $y = \frac{a \times x^m}{b + c \times x^n}$ ), строят график в координатах  $1/y - x$  (рисунок 4.8).

Замена координат  $x$  на  $1/x$  и  $y$  на  $1/y$  допустима лишь в том случае, если сдвиг по этой координате отсутствует. Если имеется сдвиг, то уравнение, например, гиперболы  $y - c + a/x$  в координатах  $1/y - 1/x$  не будет прямой. В этом случае используют метод последовательных приближений.

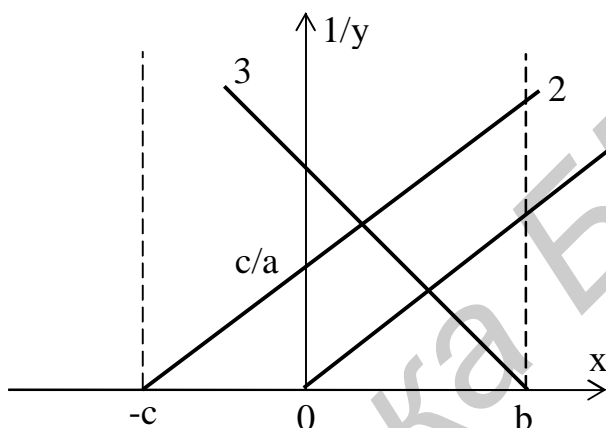


Рисунок 4.8 – Дробно-рациональная функция в координатах  $1/y - x$ :  
 прямая 1 – для функции  $y = a/x$ ; 2 –  $y = a/(c+x)$ ; 3 –  $y = a/(b-x)$

Например, предполагают, что  $y = \frac{ax}{b - cx} + d$ ; задают ряд возможных значений  $b$ ; вычисляют значения  $1/(x-b)$  и останавливаются на том значении  $b$ , при котором  $y = c + a/(x-b)$  в координатах  $y - 1/(x-b)$  даст расположение точек, наиболее близкое к прямой линии.

### 4.3 Расчет по экспериментальным данным параметров выбранной аппроксимирующей функции

В общем случае расчет сводится к решению системы нелинейных уравнений. При этом возможно несколько частных случаев.

1 Система уравнений, линейных относительно искомым параметрам. Обозначим искомые параметры  $a_k$ , известные координаты –  $x_1, \dots, x_m$  и  $y_1, \dots, y_m$  для  $m$  искомым точек, а в качестве аппроксимирующей примем модель в виде степенного многочлена:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k. \quad (4.1)$$

Расчет коэффициентов  $a_k$  сводится к решению системы уравнений, линейных относительно искомым  $a_0, \dots, a_k$ :

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_1^k, \\ \vdots \\ y_m = a_0 + a_1 x_m + \dots + a_k x_m^k. \end{cases} \quad (4.2)$$

2 В качестве аппроксимирующей функции принята модель, не приводящая к системе линейных уравнений:

$$y = \frac{ax}{b^2 + x^2}. \quad (4.3)$$

Путем преобразований  $yb^2 + yx^2 = ax$  и  $yx^2 = ax - yb^2$  и замены переменных  $yx^2 = Z$  и  $b^2 = c$  можно свести расчет  $a$  и  $c$  к решению системы уравнений

$$\begin{cases} Z_1 = ax_1 - cy_1, \\ Z_2 = ax_2 - cy_2, \\ \vdots \\ Z_n = ax_n - cy_n. \end{cases} \quad (4.4)$$

3 Могут быть случаи, когда уравнения системы не сводятся к системе линейных уравнений. Например, при аппроксимирующей функции вида

$$y = a \exp\left(-\frac{bx - b^2}{c}\right) \quad \text{после логарифмирования получаем } \ln y = \ln a - \frac{bx - b^2}{c},$$

т.е. после алгебраических преобразований получаем квадратное уравнение относительно искомого  $b$ . Вводя замену переменных  $c^2 \cdot \ln a - b^2 = A$  и  $c^2 = B$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} bx_1^2 = 2bx_1 = B \ln y_1 + A, \\ \vdots \\ bx_n^2 = 1bx_n - B \ln y_n + A, \end{cases} \quad (4.5)$$

из которой по найденным  $A, B$  можно найти  $a$  и  $c$ .

Используя замену переменных, следует иметь в виду, что при любой аппроксимации необходимо стремиться минимизировать абсолютные

погрешности. При этом относительные погрешности в начале и конце диапазона будут существенно отличаться. Если после этого производятся подстановки вида  $X = 1/x$  или  $Y = 1/y$ , то начало и конец диапазона меняются местами, а следовательно, меняются местами и погрешности. Эти преобразования следует контролировать; в противном случае они могут привести к существенным неточностям.

Рассмотренные графоаналитические методы аппроксимации достаточно просты и позволяют очень быстро получить приближенные значения параметров. Более того, если модель является неподходящей, то графическое построение наглядно показывает, как надо изменить модель или дополнить ее.

В общем случае при построении экспериментальных данных оси координат следует преобразовывать до тех пор, пока не получится прямая линия, по параметрам которой можно найти параметры модели.

#### **4.4 Аналитические методы аппроксимации**

Как видно из систем уравнений (4.2), (4.4), (4.5), число независимых уравнений системы равно числу поставленных опытов. С другой стороны, для определения  $k$  коэффициентов необходимо не менее  $k$  независимых уравнений. Если число поставленных опытов  $n$  равно числу искоемых коэффициентов  $k$ , то решение системы уравнений **единственно**, а следовательно, **случайно**, т.к. точно соответствует случайным значениям исходных данных.

Если  $n > k$ , то число уравнений будет избыточным. Из этих уравнений в различных комбинациях можно составить несколько систем уравнений, любая из которых даст свое решение. Но решения всех этих систем будут **несовместны**, т.к. любое даст свою аппроксимирующую функцию. Следовательно, кривых получится несколько. В этом случае имеется ряд преимуществ:

- 1) этот пучок кривых показывает форму и ширину полосы неопределенности проведенного эксперимента;
- 2) может быть произведено усреднение всех названных кривых, и полученная кривая будет достовернее описывать исследуемое явление, т.к. она будет свободна от случайных погрешностей, приводивших к разбросу отдельных экспериментальных точек.

#### **4.5 Регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов**

**Регрессионный анализ** – статистический метод анализа и обработки экспериментальных данных при воздействии на отклик только количественных факторов, основанный на сочетании аппарата метода наименьших квадратов и техники статистической проверки гипотез.

В результате регрессионного анализа получается **регрессионная модель**. **Регрессионная модель** (модель регрессионного анализа) – это зависимость отклика от количественных факторов и ошибок наблюдения отклика.



В этой модели функция отклика является линейной комбинацией базисных функций от фактора.

**Полиномиальная модель регрессионного анализа, линейная по параметрам**, – модель регрессионного анализа, линейная по параметрам, задаваемая полиномом по факторам.

Предположим, что после предварительного анализа была выбрана модель вида

$$y' = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (4.6)$$

Значения  $x_i, y_i$  известны. Сделаем подстановку  $x \circ x_1, x^2 \circ x_2$ . Тогда уравнение примет вид

$$y' = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad (4.7)$$

где  $y'$  – значение функции, рассчитанное по модели.

Отклонение между значением, рассчитанным по модели ( $y'_i$ ), и значением, полученным в эксперименте ( $y_i$ ) (погрешность аппроксимации), будет равно

$$\Delta y_i = y_i - y'_i. \quad (4.8)$$

**Метод наименьших квадратов (МНК)** позволяет найти такие значения искомых параметров  $a_0, a_1, a_2$ , при которых  $\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2$  минимальна.

$$\Delta y_i^2 = (y_i - y'_i)^2 = (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})^2; \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})^2. \quad (4.10)$$

Условие минимума суммы квадратов отклонений означает равенство нулю частных производных по коэффициентам  $a_i$ :

$$\frac{\partial (\sum \Delta y_i^2)}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0; \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial (\sum \Delta y_i^2)}{\partial a_1} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})x_{1i} = 0; \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial(\dot{a} \Delta y_i^2)}{\partial a_2} = -2\dot{a}(y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})x_{2i} = 0. \quad (4.13)$$

Тогда

$$a_0 n + a_1 \dot{a} x_{1i} + a_2 \dot{a} x_{2i} = \dot{a} y_i ; \quad (4.14)$$

$$a_0 \dot{a} x_{1i} + a_1 \dot{a} x_{1i}^2 + a_2 \dot{a} x_{1i} x_{2i} = \dot{a} x_{1i} y_i ; \quad (4.15)$$

$$a_0 \dot{a} x_{2i} + a_1 \dot{a} x_{1i} x_{2i} + a_2 \dot{a} x_{2i}^2 = \dot{a} x_{2i} y_i . \quad (4.16)$$

Из уравнений следуют свойства метода наименьших квадратов:

- 1) первое уравнение будет характеризовать тот факт, что линия регрессии проходит через центр тяжести поля экспериментальных точек (рисунок 4.9, прямая 1);
- 2) второе уравнение будет определять наклон искомой прямой к оси X.

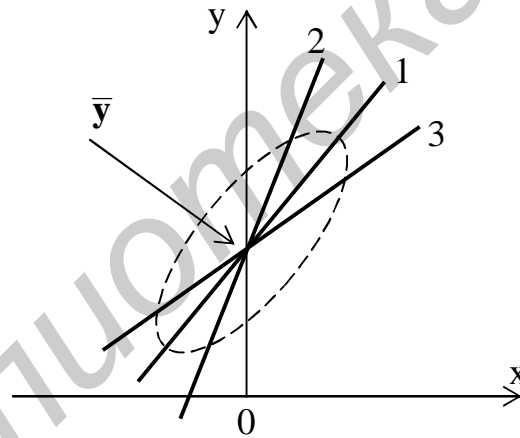


Рисунок 4.9 – Линии регрессии МНК. Пунктиром показано поле экспериментальных точек (для одной переменной x)

При большом количестве переменных  $x_i$  решение системы уравнений будет плоскостью в многомерном пространстве. При  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{y} = a_0$  первое уравнение системы (4.14) будет определять центр тяжести этой плоскости, а остальные уравнения будут характеризовать совместно коэффициенты регрессии.

Если до решения системы методом наименьших квадратов все исходные данные центрировать, то есть найти средние значения  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , и перенести

начало координат в центр тяжести поля экспериментальных точек, то в новых координатах  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = a_0 = 0$ , и из полной системы уравнений исключается и первое уравнение, и первый столбец коэффициентов, а следовательно, система уравнений упрощается.

Это приводит к следующему:

- если средние значения  $\bar{y} = a_0$  и  $x_{1i} = \bar{x}$  найти заранее, то число определяемых коэффициентов уменьшится на единицу;

- такая система удобна во всех тех случаях, когда заранее известно, через какую точку должна проходить поверхность отклика (например через начало координат).

Особенность метода наименьших квадратов состоит в том, что полученные этим методом решения необратимы. Это значит, что линии регрессии  $x$  по  $y$  и  $y$  по  $x$  не будут совпадать.

Например для регрессии  $y$  по  $x$  (для модели  $y' = y_0 + a_1x$ )  $a_1 = \frac{\dot{a}x_i y_i}{\dot{a}x_i x_i}$ .

Если обратная модель представляет собой выражение  $x' = x_0 + \frac{y}{a_2}$ , то

$$\frac{1}{a_2} = \frac{\dot{a}x_i y_i}{\dot{a}y_i y_i}$$

Обозначим

$$a_1 \times \frac{1}{a_2} = \frac{\dot{a}x_i y_i}{\dot{a}x_i x_i} \times \frac{\dot{a}x_i y_i}{\dot{a}y_i y_i} = \rho^2, \quad (4.17)$$

где  $\rho^2$  – коэффициент взаимной корреляции между значениями  $x_i$  и  $y_i$ .

Следствием является то, что линии регрессии  $y$  по  $x$  ( $y' = y_0 + a_1x$ , прямая 3 на рисунке 4.8) и  $x$  по  $y$  ( $x' = x_0 + \frac{1}{a_2}y$ , прямая 2 на рисунке 4.8) не совпадают с осью рассеяния экспериментальных точек.

При коэффициенте корреляции, близком к единице, т.е. при малом рассеянии экспериментальных точек и большой протяженности поля экспериментальных точек, линии регрессии  $x$  по  $y$  и  $y$  по  $x$  практически совпадают и будут близки к оси эллипса. Если  $\rho < 0,96$  (малое значение коэффициента корреляции), то различие между обеими линиями регрессии становится существенным, а сам метод наименьших квадратов – неэффективным. В таком случае переходят к методу ортогональной регрессии.

МНК чувствителен к неоднородности статистики. Если поле экспериментальных данных неоднородно (например, в результате небрежного проведения измерений, присутствия систематической погрешности, неверного ввода данных), то из-за формальности метода наименьших квадратов можно получить абсурдное решение, даже если

имеется всего один промах. Следовательно, метод наименьших квадратов применяется только к однородным, очищенным от промахов статическим данным. До начала расчета необходимо оценить порядок величин.

#### 4.6 Расчет параметров полос неопределенности исходных экспериментальных данных

Условно принято считать, что определение значения  $x_i$  производится без погрешности, а возникающую случайную погрешность необходимо относить к ординате  $y_i$ . Примем допущение, что случайная погрешность равна разности между  $y_i$  в экспериментальной точке и значением  $y'_i$ , найденным по усредненной модели:

$$y' = f(x), \quad \Delta_i = y_i - y'_i. \quad (4.18)$$

Аналитическое описание границ неопределенности, т.е. определение уравнения кривой, ограничивающей полосу неопределенности, дает **полную метрологическую аттестацию** получаемых результатов измерений.

Для получения характеристики полосы рассеивания экспериментальных точек после определения окончательного вида усредненной характеристики  $y' = f(x)$  надо найти частные значения погрешностей  $\Delta_i$  для каждой экспериментальной точки и построить их в координатах  $(x - \Delta_i)$  (рисунок 4.10).

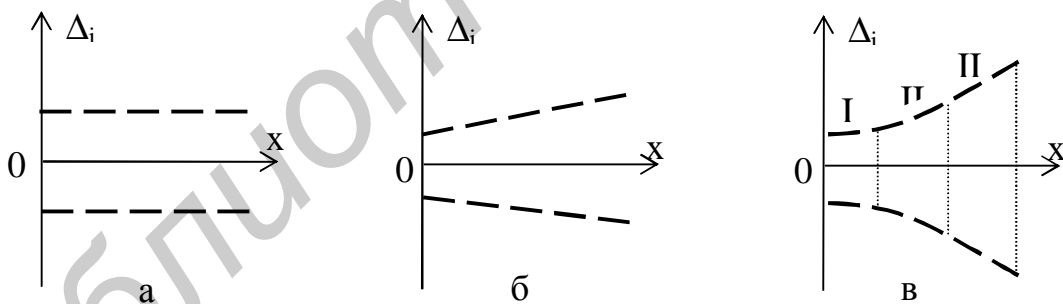


Рисунок 4.10 – Полоса неопределенности в координатах  $\Delta_i - x$

В зависимости от формы полосы неопределенности необходимо принять решение, какого вида формулой (одночленной, двухчленной или трехчленной) целесообразно описывать границы этой полосы.

Для получения такого описания все поле точек разбивается на участки (рисунок 4.10, в), в каждом из них вычисляются СКО и коэффициенты  $t$  (квантильный) или  $k$  (энтропийный):

$$\Delta_{\Sigma} = k \times \sigma, \quad (4.19)$$

$$\Delta_K = t \times \sigma . \quad (4.20)$$

Здесь  $\Delta_{\mathcal{E}}$  – энтропийное значение доверительных границ,  $\Delta_K$  – квантильное значение доверительных границ на каждом участке. Затем указывается ширина доверительного или энтропийного интервала неопределенности на каждом участке.

При малом числе проведенных измерений полная метрологическая аттестация полосы неопределенности невозможна.

В среднем для установления границ полосы неопределенности с использованием одночленной формулы рекомендуется проводить более 70 измерений, по двухчленной – более 140, по трехчленной – 210 и т.д. В этом случае погрешность определения доверительного интервала будет 10 %.

Если использовать энтропийный интервал  $\Delta_{\mathcal{E}}$ , то количество измерений уменьшится в 1,5–2 раза, а следовательно, и погрешность уменьшится в 2 раза.

Если  $P_d = 0,9$ , то нет необходимости определять значения квантильного и энтропийного коэффициентов.  $\Delta_{0,9} = 1,65 \times \sigma$  вне зависимости от закона распределения.

При отсутствии возможности оценить доверительные границы с вероятностью 0,9 необходимо упростить метрологическое описание, переходя последовательно от трехчленной формулы к двухчленной, а затем и к одночленной. Далее произвольно принимается тот или иной вид распределения и вычисляется одна усредненная оценка погрешности результатов эксперимента.

#### **4.7 Оценка рассеяния экспериментальных данных значением коэффициента корреляции**

Как известно из курса теоретической метрологии, погрешность измерения – показатель разброса экспериментальных данных, а коэффициент корреляции характеризует тесноту группирования результатов относительно принятой модели.

Коэффициент корреляции  $R_{xy}$  применительно к однофакторной зависимости будет характеризовать тесноту группирования точек возле некоторой прямой (рисунок 4.11).

Коэффициент корреляции оценивает тесноту точек относительно прямой 1. В данном случае можно получить очень мало сведений о тесноте их относительно кривой распределения экспериментальных данных. Следовательно, оценка разброса экспериментальных данных значением коэффициента корреляции может быть использована лишь для линейной однофакторной модели вида  $y' = a_0 + a_1x$  (рисунок 4.11, б). Однако можно ввести понятие **коэффициента множественной корреляции**. Его расчетная

оценка правомерна для любых многофакторных зависимостей, в том числе и для сложных нелинейных однофакторных зависимостей (см. рисунок 4.11, б).

Если в качестве модели используется функция  $y' = f(x)$ , являющаяся однозначной функцией  $x$ , то при отсутствии погрешностей зависимость  $y = y'$  в координатах  $y = f(y')$  будет биссектрисой прямого угла, как бы ни была сложна используемая модель (рисунок 4.12, б). Если погрешность не равна нулю, то экспериментальные значения  $y_i$  расположатся в некоторой полосе вокруг этой прямой (см. рисунок 4.12, б).

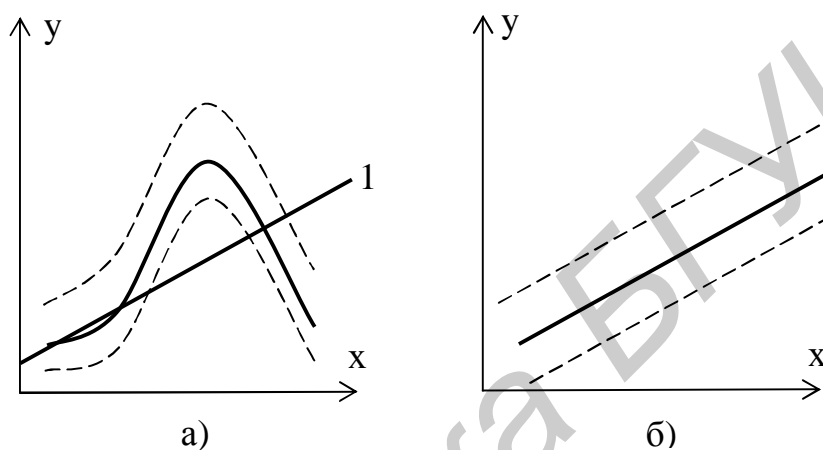


Рисунок 4.11 – К иллюстрации смысла коэффициента корреляции

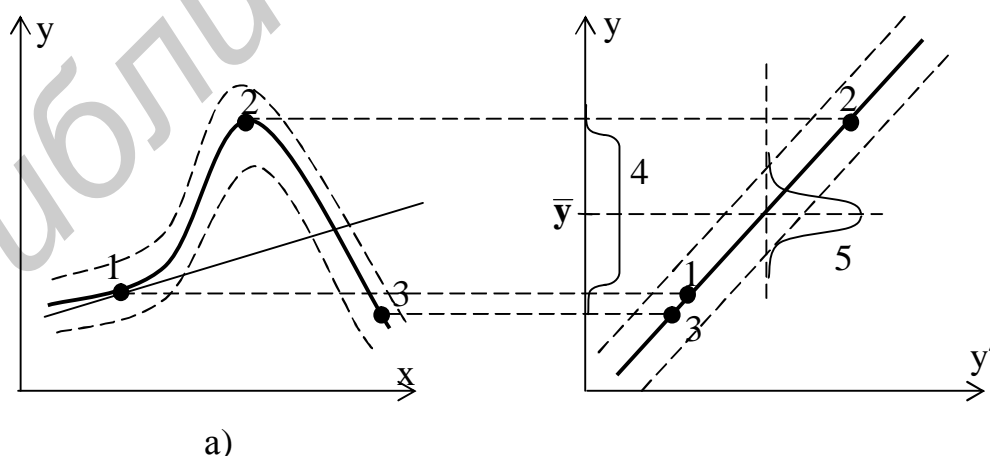


Рисунок 4.12 – К вопросу о коэффициенте множественной корреляции

Вид прямой не зависит от вида используемой модели, а коэффициент корреляции между экспериментальными значениями  $y_i$  и полученными по

модели  $y'$  при равных  $x$  называется **коэффициентом множественной корреляции**:

$$R_{yy'} = \sqrt{1 - \left( \frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_y} \right)^2} = \sqrt{1 - (2\gamma)^2}, \quad (4.21)$$

где  $\sigma_{\Delta}$  – СКО экспериментальных точек от прямой  $y = y'$ ,

$\sigma_y$  – СКО тех же точек от горизонтальной прямой на уровне  $\bar{y}$ .

$\sigma_{\Delta}$  характеризует ширину полосы разброса, а  $\sigma_y$  – диапазон изменения значений  $y_i$ .

Если провести аналогию с приведенной погрешностью ( $\gamma = \Delta y / y_{\text{пр}}$ ), то отношение  $\gamma = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_y}$  и будет характеризовать ее. Здесь  $\Delta_y$  – половина полосы неопределенности,  $y_{\text{пр}}$  – диапазон изменения  $y$  от  $y_{\text{min}}$  до  $y_{\text{max}}$ . Следовательно,

$$\frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_y} \gg 2\gamma, \text{ а } R_{yy'} \gg \sqrt{1 - (2\gamma)^2}. \text{ Отсюда } \gamma \gg \frac{\sqrt{1 - R_{yy'}^2}}{2}.$$

Соотношение между СКО и  $\Delta$  определяется законом распределения. Форма закона распределения, характеризующего  $\sigma_{\Delta}$  и  $\sigma_y$ , различна.

Распределение  $\sigma_y$  будет близко к равномерному (кривая 4 на рисунке 4.12, б). Для него  $\Delta_{\text{э}1} \gg \sqrt{3}\sigma_y$ .

$\sigma_{\Delta}$  определяется погрешностями экспериментальных точек. Это распределение близко к нормальному (кривая 5 на рисунке 4.12, б), следовательно,  $\Delta_{\text{э}2} \gg 2,066 \times \sigma_{\Delta}$ .

Энтропийное значение приведенной погрешности будет равно

$$\gamma_{\text{э}} = \frac{\Delta_{\text{э}2}}{2\Delta_{\text{э}1}} \gg \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{3}\sigma_y}, \text{ т.е. } \frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_y} = \sqrt{3}\gamma_{\text{э}}. \quad (4.22)$$

Тогда

$$R_{yy'} = \sqrt{1 - 3\gamma_{\text{э}}^2}; \quad (4.23)$$

$$\gamma_{\text{э}} = \sqrt{(1 - R_{yy'}^2)/3}. \quad (4.24)$$

Соотношение (4.24) справедливо при  $R > 0,9$ . При  $R < 0,9$  более точным будет соотношение  $\gamma_{\bar{y}} \approx \frac{1}{2} \sqrt{1 - R_{yyc}^2}$ .

Для экспериментального приближенного определения коэффициента множественной корреляции необходимо полуширину полосы неопределенности разделить на диапазон измерения  $y$  и по формуле (4.23) рассчитать  $R_{yyc}$ .

#### **4.8 Расчет параметров полосы неопределенности усредненной однофакторной модели**

При многократных измерениях в результате усреднения случайные погрешности устраняются не полностью, а лишь уменьшаются в определенное число раз. Следовательно, усредненная модель также имеет свою полосу неопределенности, хотя и более узкую, чем полоса разброса исходных экспериментальных данных. Рассмотрим ее на примере модели  $y^c = \bar{y} + ax$ .

Неопределенность такой модели будет определяться только неопределенностью определения  $\bar{y}$ .

СКО при использовании метода наименьших квадратов будет равно

$$\sigma_{\bar{y}} = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n-1}},$$

где  $\sigma_{\Delta}^2$  – дисперсия разброса исходных данных относительно линии регрессии;

$n$  – число усредняемых экспериментальных точек,

$l$  – число определяемых коэффициентов.

При  $x \neq 0$  погрешность определения коэффициента регрессии можно найти из выражения

$$\Delta_R = t \times \frac{\sigma_y \sqrt{1 - R_{xy}^2}}{\sigma_x \times \sqrt{n-1}}, \quad (4.25)$$

где  $t$  – коэффициент, определяемый числом степеней свободы ( $n-1$ ).

Погрешность  $\bar{y}$  имеет аддитивный характер, следовательно, она будет давать постоянную по ширине полосу возможных значений линии регрессии.

Если  $a$  изменить на величину  $\Delta a$ , наклон линии регрессии  $a$  изменится и создаст мультипликативную составляющую погрешности модели:



$$\sigma_{ax} = x \times \sigma_a = \frac{ax}{R_{xy}} \times \sqrt{\frac{1 - R_{xy}^2}{n - 1}}. \quad (4.26)$$

Если расположить начало координат в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ , то погрешности будут независимыми, а суммарная погрешность будет равна

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\bar{y}}^2 + \sigma_{ax}^2}. \quad (4.27)$$

Ширина полосы неопределенности линии регрессии определяется суммарной погрешностью

$$\Delta_{\Sigma_k} = t \times \sigma_{\Sigma_k} \text{ или } \Delta_{\Sigma_y} = k \times \sigma_{\Sigma_y}.$$

Таким образом, полоса неопределенности функциональной зависимости, найденная путем усреднения экспериментальных точек, будет иметь вид, показанный на рисунке 4.13.

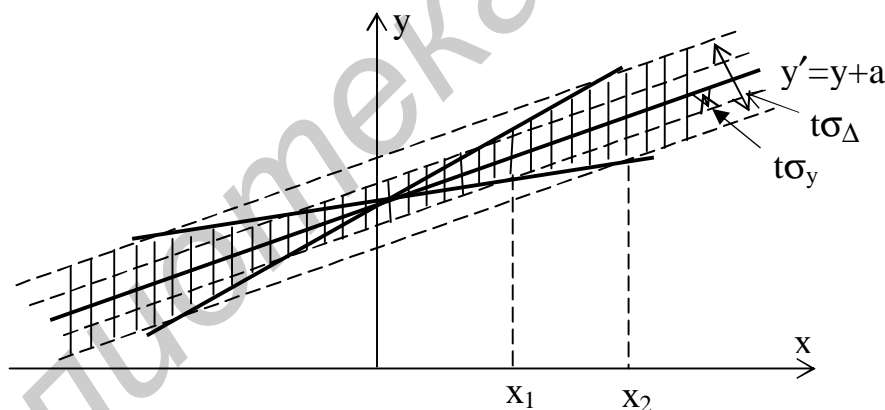


Рисунок 4.13 – Полоса неопределенности усредненной однофакторной модели (заштрихованная область)

На рисунке 4.13 величина  $t\sigma_{\Delta}$  характеризует ширину разброса экспериментальных точек,  $t\sigma_y$  – ширину полосы неопределенности, которая больше ширины разброса экспериментальных точек в  $\sqrt{n}$  раз. В этой области полоса неопределенности имеет аддитивный характер. На границах поля экспериментальных точек, например  $x_2$ , суммарная неопределенность будет зависеть от значения коэффициента корреляции поля экспериментальных точек, а следовательно, иметь мультипликативный характер.

Отсюда можно сделать вывод, что полоса неопределенности линии регрессии близка к аддитивной (независимо от результатов измерений) лишь в

центральной части линии регрессии. По мере удаления начинает проявляться мультипликативный характер. На границах поля экспериментальных точек суммарное СКО будет зависеть от значения коэффициента корреляции. Практически во всех экспериментальных задачах на границах поля экспериментальных точек ширина полосы линии регрессии в 2–2,2 раза больше, чем в центре.

При экстраполяции линии регрессии за пределы поля экспериментальных точек полоса неопределенности модели носит чисто мультипликативный характер и абсолютная погрешность возрастает по мере удаления от центра.

Аналогичным образом можно проанализировать более сложную модель вида  $y^c = \bar{y} + a_1x + a_2x^2 + \dots$ . В этом случае суммарное СКО будет иметь уже не два, а три и более слагаемых, а возрастание погрешности при экстраполяции будет еще более стремительным.

## 5 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ МНОГОФАКТОРНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

### 5.1 Математические модели многофакторных зависимостей

Принципиальное отличие многофакторной математической модели от однофакторной состоит в невозможности её графического изображения. Модель многофакторной зависимости можно построить лишь тогда, когда есть возможность разделить ее на ряд однофакторных. Если этого сделать не удастся, то можно проследить изменение погрешности адекватности путем построения графиков  $y_i = f(y')$  (рисунок 5.1).

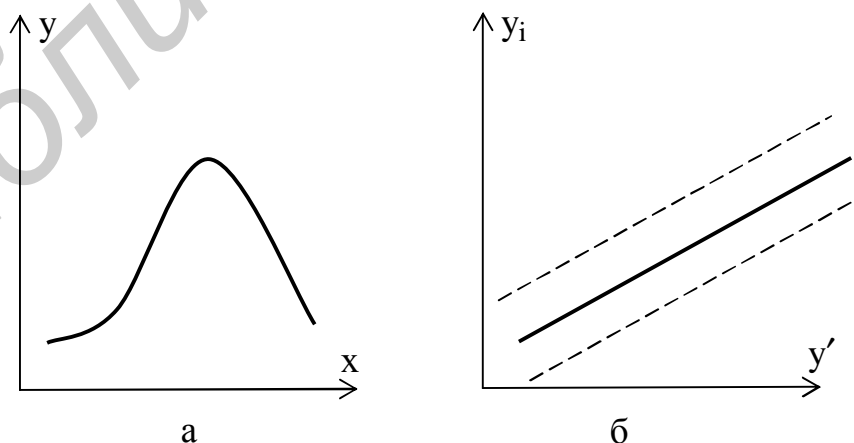


Рисунок 5.1 – Иллюстрация перехода от многофакторной модели к ряду однофакторных

По виду этого графика (рисунок 5.1, б) можно определить, что при одних значениях  $y$  принятая модель будет удовлетворительной (прямая линия), а при других  $y$  – нет (в том случае, если зависимость  $y_i = f(y')$  невозможно аппроксимировать прямой линией). Если модель получилась неудовлетворительной, то вопрос о том, как изменить модель, окажется без ответа. При этом практическим путем подбора многофакторной модели является метод проб и ошибок, так как выбирать то или иное решение приходится, не имея достаточной информации.

Если не планировать эксперимент, то решение, принимаемое без какого-либо обоснования, называется **просто необоснованным**. Принятие такого решения во многих случаях просто неизбежно.

Если для принятия таких решений нет никаких данных и его приходится принимать на свой страх и риск, то такой решение называется **волевым**.

Если для принятия решения есть хоть отдаленные аналогии, ассоциации либо косвенные соображения, наводящие на мысль о возможности такого решения, то такое решение называется **эвристическим**.

На практике поступают следующим образом: осуществляется волевое назначение вида математической модели, а затем проверяется его адекватность. Большая часть математических моделей, которые описывают разнообразные явления, имеют вид произведения величин в различных степенях:

$$y = a_0 \times x_1^{a_1} \times x_2^{a_2} \times \dots \times x_k^{a_{k+1}}, \quad (5.1)$$

где коэффициенты  $a_k$  могут быть целыми, дробными, положительными или отрицательными. В качестве проверки предположения, удовлетворяет ли исследуемая зависимость такой математической модели, можно применить операцию логарифмирования:

$$\lg y = \lg a_0 + a_1 \lg x_1 + a_2 \lg x_2 + \dots + a_k \lg x_k. \quad (5.2)$$

Введя замену переменных  $\lg y \equiv Y$ ,  $\lg a_0 \equiv A_0$ ,  $\lg x_k \equiv X_k$ , уравнение (5.2) можно записать в следующей форме:

$$Y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_k X_k. \quad (5.3)$$

В логарифмических координатах модель (5.3) будет представлять собой гиперплоскость в многомерном  $k$ -факторном пространстве.

Модель (5.1) в виде произведения всех факторов как в положительных, так и в отрицательных степенях, называется **мультипликативной моделью**, а модель гиперплоскости (5.3) – **аддитивной моделью**. Это оправдано тем, что как бы ни была сложна поверхность отклика многофакторного эксперимента, её малые участки, не содержащие экспериментальных точек, с достаточным

приближением могут быть заменены участками плоскости, касательными к кривой поверхности в центре этого участка (рисунок 5.2).

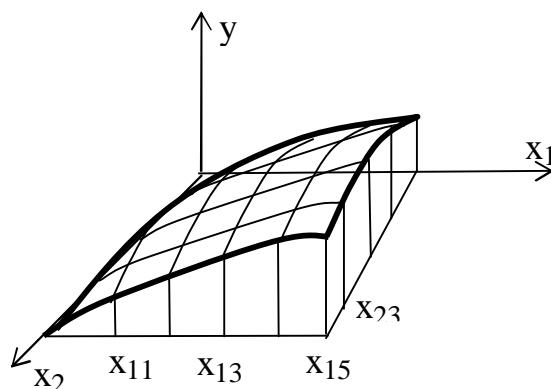


Рисунок 5.2 – Модель гиперповерхности в трехмерном двухфакторном пространстве

По этой модели можно узнать высоты участков поверхности, углы и направления склонов, определить направления и положения изолиний и т.д. Основным недостатком аддитивной модели является тот факт, что для каждой соседней грани все коэффициенты модели  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$  должны определяться заново, так как при переходе от грани к грани они принимают новые значения.

Допустимая протяженность грани при аддитивной модели будет определяться нарастающей на краях грани погрешностью адекватности, а выбор её аналогичен выбору длин участков кусочно-непрерывной кривой.

Первым условием для выбора допустимых границ изменения фактора  $x_i$  будет служить соотношение

$$\Delta x_i \ll x_i.$$

И аддитивная, и мультипликативная модели при  $k$  факторах требуют определения  $(k+1)$  коэффициента.

Протяженность каждой грани аддитивной модели увеличивается, если использовать не плоские грани, а искривленные. Это достигается переходом от аддитивной модели первого порядка к аддитивным моделям второго, третьего и более высоких порядков (включающих члены вида  $x_i^2, x_i^3, \dots, x_i^n$ ). Такие модели очень сложны.

Промежуточное положение между поверхностями более высоких порядков занимает **винтовая поверхность**. Её сечения как вдоль оси  $x_1$ , так и вдоль  $x_2$  являются прямыми линиями, но наклон их линейно изменяется с изменением координаты. Это можно рассматривать как частный случай многомерного гиперболоида. Для трех факторов  $x_1, x_2, x_3$  уравнение винтовой поверхности примет следующий вид:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + a_4 \cdot x_1 \cdot x_2 + a_5 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_6 \cdot x_1 \cdot x_3 + a_7 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

В качестве примера можно рассмотреть двухфакторную модель. Если провести на плоскости линии постоянных  $x_2$ , то проекции на плоскость  $y_1x_1$  дадут пучок параллельных прямых (рисунок 5.3, б). Для гиперboloида эти прямые не будут параллельными (рисунок 5.3, в).

Форму и расположение проекций гиперплоскости на плоскости  $(y, x_i)$  используют в качестве признака при выборе между моделью в виде гиперплоскости или в виде гиперboloида.

Модель поверхности в виде гиперboloида часто позволяет существенно уменьшить погрешность адекватности. Следовательно, в современной теории планирования эксперимента эта модель занимает доминирующее положение.

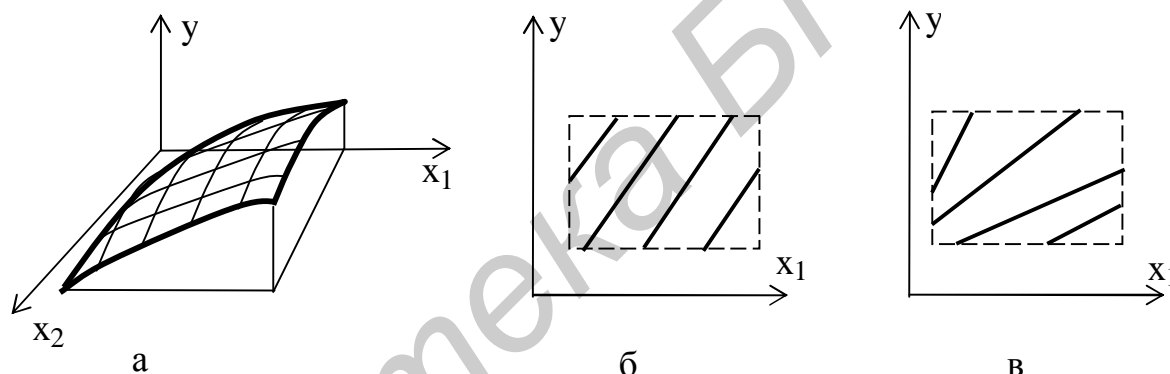


Рисунок 5.3 – Модель гиперплоскости для двухфакторного эксперимента

Члены модели, содержащие произведения  $x_i \cdot x_j$ , называют членами, отражающими попарные взаимодействия факторов; члены  $x_i \cdot x_j \cdot x_k$  – членами, отражающими тройное взаимодействие, и т.д. Однако при увеличении числа факторов  $k$  модель в виде гиперboloида становится слишком громоздкой.

Модель в виде гиперплоскости требует определения  $(k+1)$  коэффициента; чтобы их определить, в теории планирования эксперимента разработаны предельно экономные планы в виде так называемых **дробных регулярных реплик**.

В модели гиперboloида содержится  $2^k$  коэффициентов, следовательно, для их определения требуется постановка такого же числа опытов. Это уже будет **полный факторный эксперимент**.

## 5.2 Методы определения вида и параметров математической модели многофакторной зависимости по экспериментальным данным

Для определения вида многофакторной зависимости используют два метода:

- метод последовательной графоаналитической аппроксимации частных (базисных) функций отклика от отдельных групп факторов с последующей композицией их в общую многофакторную модель. Сюда относятся, например, метод медианных центров, метод выделения остатка, метод обведения контура (см. разд. 4.1);

- метод эвристического назначения какой-либо формальной модели. Этот метод противоположен первому.

Выбор любого из этих методов обусловлен наличием априорных сведений о возможном виде искомой математической модели исследуемого явления, а также степенью диффузности исходных экспериментальных данных.

В соответствии с этим основным правилом при поиске и построении математических моделей сложных явлений будет максимальное использование априорных данных, резко уменьшающих количество возможных моделей.

Одним из факторов, определяющих путь выбора модели, является диффузность экспериментальных данных (рисунок 5.4).

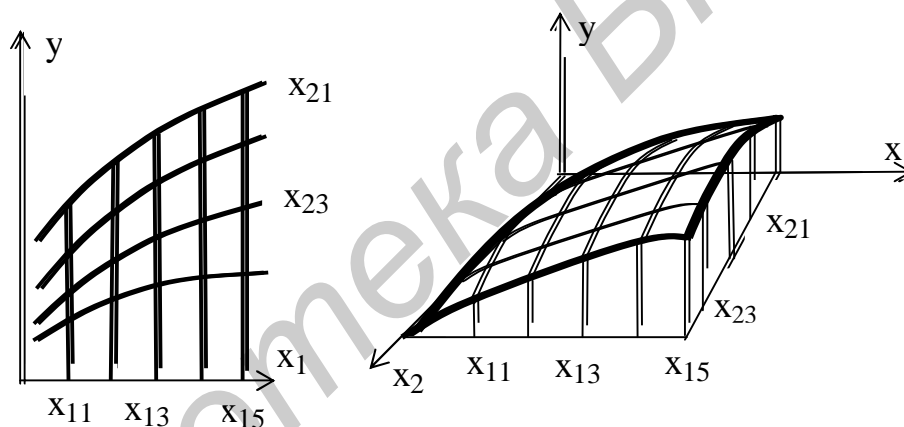


Рисунок 5.4 – Частные зависимости многофакторной модели

Диффузность экспериментальных данных позволяет выделить не только уровень, но и наклон, кривизну, а возможно, и изменение кривизны частных зависимостей (рисунок 5.4). Следовательно, при выборе математической модели необходима последовательная аппроксимация этих частных зависимостей, а затем отыскание их композиции между собой в единую математическую модель.

Если диффузность этих данных велика (как это показано на рисунке 4.3), то наиболее рациональным путем поиска решений является задание функции отклика в виде аддитивной или мультипликативной модели, т.к. при большом количестве факторов (больше трех) какие-либо попытки интерпретировать исходный материал путем построения частных зависимостей  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ , ...  $y_k = f_k(x_k)$  чаще всего оказываются бесперспективными.

Практическое ограничение области надежного использования МНК состоит в том, что переменные неравноправны между собой и перенос их из правой части уравнения в левую и наоборот приводит к появлению совершенно разных решений. Это различие определяется значением квадрата коэффициента множественной корреляции:

$$R_{xy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \dot{a} x_i y_i}{\dot{a} y_i^2} = \frac{\dot{a} x_i y_i}{\dot{a} y_i^2} = a_1 \frac{1}{a_2}. \quad (5.4)$$

Если  $R_{xy}^2$  близко к 1, то несимметричностью метода наименьших квадратов можно пренебречь и переносить переменные из одной части уравнения в другую, выполнять арифметические действия и т.д. можно совершенно свободно без ущерба для смысла, полагая, что при  $R_{xy}^2 \approx 1$   $a_1 \approx a_2$ .

Если  $R_{xy} < 1$ , то это приводит к существенным невязкам в решении методом наименьших квадратов.

Если  $R_{xy} \geq 0,96$ , то метод наименьших квадратов можно надежно использовать; при этом следует учитывать, что даже при  $R_{xy} = 0,96$  квадрат коэффициента взаимной корреляции  $R_{xy}^2 = 0,92$  и различия между параметрами  $a_1$  и  $a_2$ , возникающие из-за переноса их из левой части в правую и наоборот, составляют 8 %, хотя это отличие на глаз и не заметно. Следует иметь в виду, что если же при преобразовании уравнения возникают члены вида  $z = x^2 y$ , то различие  $a_1$  и  $a_2$  может утроиться. Следовательно, погрешность будет уже 24 %.

Чтобы уйти от этого противоречия, возникающего при использовании метода наименьших квадратов, были предприняты попытки разработать другие способы аппроксимации многофакторных зависимостей, результатом которых явилось внедрение в практику измерительного эксперимента **метода ортогональной регрессии**.

При многофакторном эксперименте результаты образуют облако рассеяния в многофакторном пространстве, а линия ортогональной регрессии должна совпадать с осью симметрии эллипса рассеяния экспериментальных точек (прямая 1 на рисунке 4.8 для однофакторного эксперимента). Следовательно, задача состоит в нахождении всех плоскостей симметрии этого облака. В этом случае все переменные факторы  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и отклик  $y$  равноправны между собой, т.к. представляют собой оси координат пространства размерности  $(k + 1)$ . В этом пространстве будут расположены все экспериментальные точки с координатами  $(y, x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

Если все переменные, входящие в уравнение регрессии ( $y, x_1, x_2, \dots, x_k$ ), переименовать в  $(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ , тогда необходимо составить систему уравнений вида

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{x}_{1i} - \bar{\mathbf{x}}_1) + \mathbf{a}_2(\mathbf{x}_{2i} - \bar{\mathbf{x}}_2) + \dots + \mathbf{a}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1,i} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}) = 0. \quad (5.5)$$

Такая система уравнений будет определять положение гиперплоскости в  $(k+1)$ -мерном пространстве. Для получения значений коэффициентов  $a_k$  находят отношение

$$M = \frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{a}_1 \mathbf{x}_{1i} + \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_{2i} + \dots + \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1,i})^2}{\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \dots + \mathbf{a}_{k+1}^2}. \quad (5.6)$$

Если принять  $\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \dots + \mathbf{a}_{k+1}^2 = 1$  (условие нормирования), то  $M$  преобразуется к следующему виду:

$$M = \mathbf{a}_1^2 D_{x_1}^2 + \mathbf{a}_2^2 D_{x_2}^2 + \dots + \mathbf{a}_{k+1}^2 D_{x_{k+1}}^2 + 2\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{B}(x_1 x_2) + \dots + 2\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{B}(x_i x_j), \quad i \neq j, \quad (5.7)$$

где  $D_{x_i}$  – дисперсия фактора  $x_i$ ,

$\mathbf{B}(x_i x_j)$  – ковариация факторов  $x_i$  и  $x_j$  при условии  $i \neq j, i = \overline{1, k+1}, j = \overline{1, k+1}$ .

Для решения такой задачи должна вычисляться ковариационная матрица всех  $(k+1)$  переменных:

$$\begin{matrix} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_1 & D_{x_1} & \mathbf{B}(x_1 x_2) & \dots & \mathbf{B}(x_1 x_{k+1}) \\ \mathbf{x}_2 & \dots & D_{x_2} & \dots & \mathbf{B}(x_2 x_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{x}_{k+1} & \dots & \dots & \dots & D_{x_{k+1}} \end{matrix} \quad (5.8)$$

Величина  $M$  сохраняет свое постоянное значение в  $(k+1)$ -мерном эллипсоиде.

Уравнения всех плоскостей симметрии эллипсоида поля экспериментальных точек можно представить в следующем виде:



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{k+1,1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{k+1,2}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{c}_2, \\ \dots \\ \mathbf{a}_{1,k+1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{2,k+1}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{k+1,k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{c}_{k+1} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Одновременно с коэффициентами  $\mathbf{a}_{ij}$  вычисляются суммы квадратов расстояний экспериментальных точек до этих плоскостей. Остаточные дисперсии расстояний точек от найденных плоскостей симметрии носят название **собственных значений матрицы**. Коэффициенты  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+1}$  образуют **собственный вектор матрицы**. Следовательно, решение задачи состоит в нахождении всех собственных векторов и всех собственных значений матрицы.

Система уравнений (5.9) описывает  $(k+1)$  возможную модель. Число этих моделей равно числу всех переменных и всех гиперплоскостей. Из множества моделей, которые могут описывать данный процесс, физическому смыслу решаемой задачи соответствует только одна модель, которую и необходимо отыскать среди них.

Одним из способов упрощения задачи нахождения модели, соответствующей физическому смыслу заданной величины, является сравнение всех полученных решений по значениям остаточной дисперсии и выбор из всех гиперплоскостей ту, которой соответствует минимальное значение остаточной дисперсии. Эта гиперплоскость называется **плоскостью ортогональной регрессии**.

Однако на практике чаще всего получается то же абсурдное решение, которое не соответствует действительности с физической точки зрения. Поэтому к данному методу прибегают только тогда, когда решение методом наименьших квадратов дает ответ, характеризующийся очень малым значением коэффициента множественной корреляции ( $\mathbf{R}_{yy'} = 0,96$ ).

Если коэффициент множественной корреляции  $\mathbf{R}_{yy'} < 0,96$ , то можно использовать метод ортогональной регрессии.

Если коэффициент множественной корреляции  $\mathbf{R}_{yy'} = 0,7$ , то сигнал и шум будут равны между собой по мощности. Здесь под шумом понимается изменение отклика  $y$  под действием факторов, не включенных по тем или иным причинам в рассматриваемую модель. При коэффициенте множественной корреляции  $\mathbf{R}_{yy'} < 0,7$  модель не позволит отличить зависимость отклика от шума и зависимость отклика от исследуемого физического явления. Следовательно, при данных условиях выбор искомой модели должен производиться не по минимуму остаточной дисперсии, а по физическому, экономическому либо другому смыслу решаемой задачи.

### 5.3 Методы отбора наиболее значимых факторов и наиболее значимых членов аддитивной модели

Для отбора наиболее значимых членов аддитивной модели можно выделить следующие группы методов.

Для определения уровня значимости членов модели **по изменению коэффициента множественной корреляции** после выбора ее вида из нее поочередно исключается каждый из членов, проводится новое решение МНК и определяются оценки коэффициента множественной корреляции  $R_{yyc}$ . Зная величины  $R_{yyc}$ , устанавливаются места по значимости каждого из факторов и определяют, каким из членов модели можно пренебречь без ущерба для физического смысла, что приводит к упрощению аналитического выражения.

Некоторым упрощением предыдущего метода является **метод пошаговой регрессии** с одновременной полной или частичной его автоматизацией.

Пусть имеется массив данных о факторах  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , составляющих аддитивную модель вида  $y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k$ . Необходимо сначала найти поочередно решения МНК для моделей  $y_0 = a_0; y_1 = a_0 + a_1x_1; y_2 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots$ . Далее для каждой модели следует найти остаточные дисперсии  $D_0, D_1, D_2, \dots$ , а также их разности, определяемые введением в модель каждого последующего фактора:

$$\Delta_1 = D_0 - D_1; \Delta_2 = D_1 - D_2; \dots, \Delta_k = D_{k-1} - D_k.$$

Разности дисперсий  $\Delta_i$  рассматриваются как оценки значимости факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Сопоставляя их между собой, можно сделать заключение о значимости факторов.

Данный процесс можно автоматизировать, задавая желаемое значение остаточной дисперсии  $D_{ост}$ . Программа останавливается и выдает полученные значения коэффициентов регрессии той модели, для которой  $D_i \leq D_{ост}$ .

Недостатком данной модели является зависимость значений  $\Delta_i$  от того, в каком порядке различные факторы вводились в модель. И если при ручной обработке это обстоятельство можно отследить, то применяя автоматизированные методы, необходимо учесть порядок введения данного фактора в конкретной программе.

**Метод приближенного расчета коэффициентов значимости (метод b-коэффициентов).** Как уже указывалось ранее, путем замены переменных любое уравнение модели можно привести к виду

$$y' = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k. \quad (5.10)$$

Следовательно, необходимо определить относительный вес членов этого уравнения по их относительным вкладам в результирующее значение отклика  $y$ .

Метод  $\beta$ -коэффициентов заключается в следующем. Если изменить систему отсчета, перенеся начало координат в точку пространства с координатами  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ , уравнение (5.10) преобразуется к виду

$$y_i^c - \bar{y} = a_1(x_{i1} - \bar{x}_1) + a_2(x_{i2} - \bar{x}_2) + \dots + a_k(x_{ik} - \bar{x}_k), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.11)$$

Проведя операцию нормирования и умножив и разделив каждый член уравнения (5.11) на  $\sigma_{xi}$ , получим выражение

$$\frac{y_i^c - \bar{y}}{\sigma_y} = \frac{a_1 \sigma_{x1}}{\sigma_y} \times \frac{(x_{i1} - \bar{x}_1)}{\sigma_{x1}} + \frac{a_2 \sigma_{x2}}{\sigma_y} \times \frac{(x_{i2} - \bar{x}_2)}{\sigma_{x2}} + \dots + \frac{a_k \sigma_{xk}}{\sigma_y} \times \frac{(x_{ik} - \bar{x}_k)}{\sigma_{xk}}. \quad (5.12)$$

В уравнении (5.12) значения  $\frac{y_i^c - \bar{y}}{\sigma_y}$ ,  $\frac{(x_{ik} - \bar{x}_k)}{\sigma_{xk}}$  есть центрированные и нормированные случайные величины, представленные выборками объемом  $n$ , а величины  $\beta_i = \frac{a_i \sigma_{xi}}{\sigma_y}$  называются  $\beta$ -коэффициентами и являются весами

относительно вклада вышеназванных случайных величин в значение отклика. Здесь очевидна простота расчета  $\beta$ -коэффициентов, а их значения позволяют судить о значимости членов модели. Поскольку  $\beta$ -коэффициенты могут быть как положительными, так и отрицательными, то знаки их во внимание не принимаются, а значимость оценивается по соотношению их модулей. Если  $\beta_1 / \beta_2 < (1,3 - 1,5)$ , то такие члены модели признаются равнозначными.

#### **5.4 Оценка параметров области неопределенности исходных данных многофакторной зависимости**

При многофакторном эксперименте для определения многомерной зависимости  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  влияние погрешностей  $x_i$  на результат измерения усиливается, так как разделить погрешности, вносимые  $x_i$  или  $y$ , невозможно. Следовательно, область неопределенности в данном случае представляет собой не интервал и не полосу, а  $(k+1)$ -мерный слой, располагающийся по обе стороны от  $(k+1)$ -мерной поверхности отклика. Для двухфакторного эксперимента (в трехмерном пространстве) это можно проиллюстрировать рисунком 5.5.

Как видно из рисунка, экспериментальные точки занимают трехмерный слой толщиной в  $\Delta$  направлении оси  $y$ . Эта толщина не обязательно будет

постоянной для любого сочетания факторов, входящих в функцию отклика  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

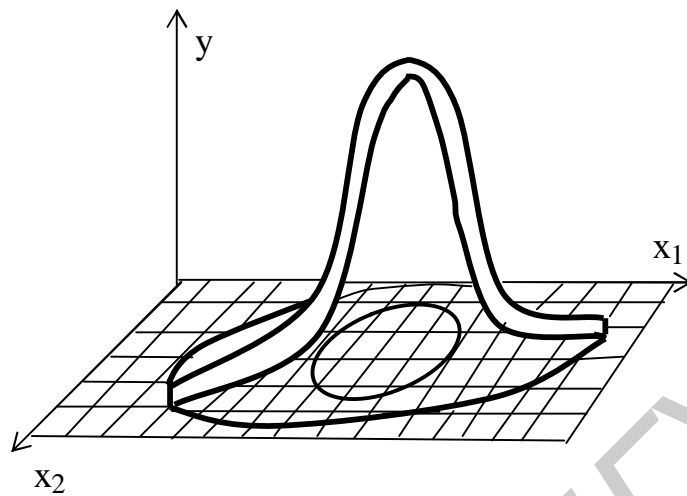


Рисунок 5.5 – Слой неопределенности в трехмерном пространстве

Наиболее полное описание состоит в указании также многофакторной зависимости для СКО или доверительных границ погрешности в виде функции от всех значений факторов  $\Delta = f(x_1, \dots, x_k)$ . Зная эту зависимость, можно оценить погрешность  $\Delta_i$  каждого результата измерения при любом сочетании факторов.

Располагая фактическими данными об изменении этой погрешности как функции от различных сочетаний факторов, находят коэффициенты модели в соответствии с фактическими данными.

**Упрощенное описание погрешностей** состоит в нахождении значений погрешностей, возникающих в характерных точках слоя, т.е. при некоторых определенных сочетаниях факторов. Это могут быть максимальное значение  $y$ , локальные максимумы  $\Delta$ , точки при крайних значениях  $x_i$ , в которых погрешность достигает больших значений, некоторые промежуточные точки.

**Предельно упрощенного указания погрешности  $\Delta y$**  как функции от  $\Delta y'$  можно добиться путем следующих операций. Если толщину слоя неопределенности представить в виде полосы на плоскости  $(y - y')$ , то вместо многомерного слоя сложной конфигурации получается изображение полосы неопределенности (для функции, представленной на рисунке 5.5), показанное на рисунке

5.6, а.

В этом случае зависимость текущего значения погрешности  $\Delta y'$  как функции от значений  $y'$  будет представлять собой кривую, изображенную на рисунке 5.6, б.

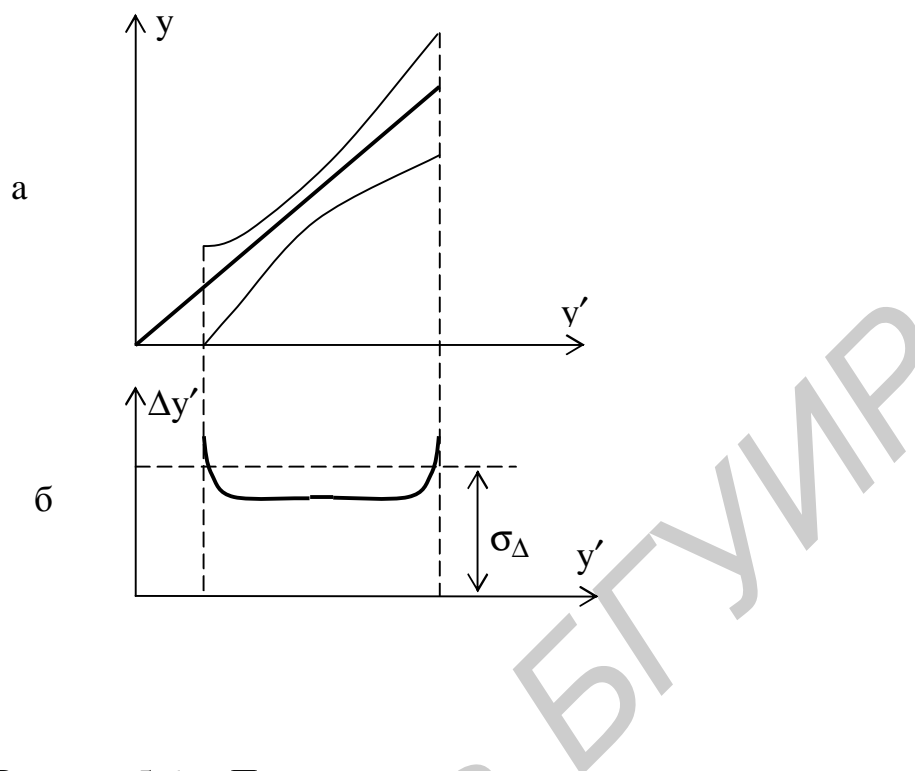


Рисунок 5.6 – Полоса неопределенности на плоскости

Зависимость текущего значения погрешности  $\Delta y'$  в функции от значений  $y'$  отклика будет иметь вид, представленный на рисунке 5.6, б. Здесь  $\sigma_{\Delta}$  представляет собой дисперсию точек модели.

На практике такой однозначной зависимости может не существовать. Поэтому эти графики имеют смысл лишь для конкретной случайной выборки, т.е. это будет лишь частный случай реализации полосы неопределенности в данной выборке, соответствующей данному значению результата  $y'$  при конкретном сочетании факторов  $x_i$ . Статистическая оценка ширины этой полосы соответствует некоторому усредненному значению фактической погрешности.

### ***5.5 Расчет параметров многомерного слоя полосы неопределенности усредненной модели многофакторной зависимости***

Соотношения между полосой неопределенности экспериментальных данных и полосой неопределенности получаемой усредненной модели для многофакторной зависимости аналогичны соотношениям для однофакторной модели, но рассматриваются в многомерном пространстве.

Слой, в котором разбросаны значения  $\Delta_i$  случайных погрешностей экспериментальных данных, имеет форму параллелепипеда (рисунок 5.7).

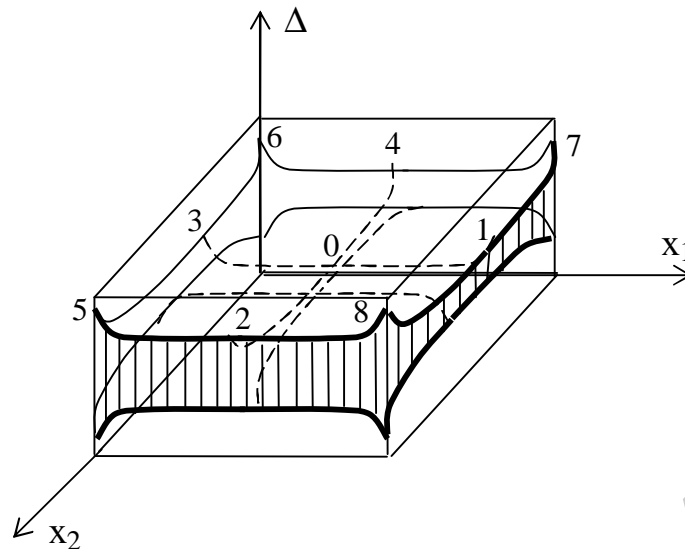


Рисунок 5.7 – Мениск погрешностей усредненной многофакторной модели

Слой неопределенности полученной усредненной модели представляет собой тело, имеющее форму двояковогнутой линзы (см. рисунок 5.7). В общем случае  $k$ -мерного пространства это будет  $k$ -вогнутое тело, которое называется **мениском погрешности**.

Задача определения параметров области неопределенности усредненной модели сводится к расчету характерных размеров многомерного мениска погрешности, к которым относятся:

- толщина мениска в точке 0 (при  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ ), в которой погрешность минимальна;
- толщина мениска в точках 1, 2, 3, 4, которая определяется отдельно значением максимального отклонения каждого из факторов от центра экспериментально обследованной области;
- толщина мениска в точках 5, 6, 7, 8, которая определяется совместным отклонением всех факторов от среднего значения.

Если считать, что толщина слоя разброса экспериментальных данных характеризуется значением СКО  $\sigma_\Delta$ , то погрешность в точке 0 определяется по формуле

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sigma_\Delta^2}{n - l}}, \quad (5.13)$$

где  $\sigma_\Delta$  – величина СКО результатов измерения,  
 $n$  – объем выборки экспериментальных данных,  
 $l$  – число параметров модели.

Погрешность в точках 1, 2, 3, 4 определяется по формуле

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta}^2}{n-1} + \frac{a_i^2(x_{im} - \bar{x}_{i1})(1 - R_{xy}^2)}{(n-1)R_{xy}^2}}, \quad i = \overline{1,4}. \quad (5.14)$$

Погрешность в точках 5, 6, 7, 8 определяется по формуле

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta}^2}{n-1} + \frac{1 - R_{xy}^2}{(n-1)R_{xy}^2} \times \sum_{j=1}^k a_j(x_{jm} - \bar{x}_j)^2}. \quad (5.15)$$

Все эти формулы действительны при допущении, что толщина слоя разброса экспериментальных данных всюду одинакова. В реальности толщина слоя будет неравномерна, и можно ввести два допущения:

- неравномерность **симметрична** относительно центра описываемой модели области пространства факторов, следовательно, использование вместо функциональной зависимости  $\sigma = F(x_1, x_2, \dots, x_k)$  постоянной величины  $\sigma_{\Delta}$  не приводит к какой-либо ошибке, так как все коэффициенты модели определяются путем усреднения по всему полю экспериментальных точек. Если неравномерность слоя экспериментальных точек несимметрична относительно центра описываемой области, то различие погрешности в различных зонах приведет к существенной несимметричности толщины слоя. Здесь целесообразно разбить пространство факторов на некоторые участки, которые будут более или менее равномерны, вычислить параметры менисков погрешности для каждого участка и попытаться составить по этим данным общую картину и найти общую математическую модель для приближенного расчета параметров единого мениска погрешностей;

- полученные экспериментальные точки равномерно заполняют всю исследуемую область. Такое расположение экспериментальных точек, когда обеспечивается равноточность исследования по всем направлениям пространства факторов, в теории эксперимента называется **ротатабельным**. При этом дисперсия оценки функции отклика зависит только от расстояния от центра плана (см. рисунок 5.5). Матрица моментов плана инвариантна к ортогональному вращению координат. При постановке опытов в соответствии с ротатабельным планом конфигурация области неопределенности полученной модели будет иметь вид центросимметричного мениска (см. рисунок 5.7). Однако если эксперимент выполняется не в соответствии с заранее разработанным ротатабельным планом, а произвольным образом, то мениск области неопределенности полученной модели будет несимметричным.

При постановке активного эксперимента согласно заранее разработанному ротатабельному плану расчет погрешности существенно

упрощается, и наоборот, при пассивном эксперименте, т.е. при стихийной постановке исследования, оценка погрешностей усложняется.

## **6 ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Эффективность эксперимента определяется не только точностью результата, но и затратами, которые потребовались для ее достижения. В этом плане задача экспериментатора состоит в разработке путей предельной экономии затрат по следующим направлениям:

- использование предельно упрощенных математических моделей исследуемых явлений;
- предельное сокращение числа экспериментальных точек.

### **6.1 Оптимальный выбор точности СИ в зависимости от соотношения диффузности объекта и погрешности измерений**

Разброс экспериментальных данных вызывается не только погрешностями СИ и остаточной неадекватностью принятой модели, но и невозпроизводимостью от опыта к опыту самого исследуемого явления. В связи с этим разброс исходных данных  $\Delta$  будет складываться из трех составляющих:

- диффузности объекта измерений  $\Delta_0$ ;
- погрешности адекватности модели  $\Delta_m$ ;
- погрешности СИ  $\Delta_{СИ}$ :

$$\Delta = \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_m^2 + \Delta_{СИ}^2} . \quad (6.1)$$

Это наиболее общая формула для суммирования составляющих погрешностей. Более строгие методы суммирования приводятся в курсе теоретической метрологии.

Для рационального выбора самой модели СИ и ее погрешности важно ее соотношение с суммарной погрешностью объекта и модели:

$$\Delta_{0m} = \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_m^2} . \quad (6.2)$$

Пусть модель выбрана так, что она является достаточно адекватной, т.е.  $\Delta_m \ll \Delta_0$ ;  $\Delta_m \ll \Delta_{СИ}$ .

В этом случае можно пренебречь размером  $\Delta_m$  ( $\Delta_m \approx 0$ ). Рассмотрим три случая.

- 1 Погрешность СИ много меньше погрешности разброса данных:



$$\Delta_{\text{СИ}} \ll \Delta_0.$$

Тогда  $\Delta \approx \Delta_0$ . Чтобы усреднить этот разброс при этих условиях, необходимо произвести большое количество отсчетов; кроме того, более точная аппаратура требует и больших затрат времени на каждое измерение.

Для нахождения оптимального соотношения между  $\Delta_0$  и  $\Delta_{\text{СИ}}$  необходимо уменьшать погрешность аппаратуры до тех пор, пока она не станет равной

$$\Delta_0 = \frac{\Delta_{\text{СИ}}}{3}. \quad (6.3)$$

После этого момента при уменьшении  $\Delta_{\text{СИ}}$  результирующая погрешность будет оставаться неизменной, а затраты времени на проведение измерений будут меньше. Следовательно, эффективность эксперимента будет возрастать. При дальнейшем снижении погрешности СИ единственным путем повышения эффективности эксперимента остается статистическая обработка многократных отсчетов, и в этом случае, как это ни парадоксально, повышение эффективности эксперимента может быть достигнуто только путем снижения точности используемых средств измерений.

2 Погрешность СИ приблизительно равна погрешности диффузности объекта:

$$\Delta_{\text{СИ}} \approx \Delta_0.$$

Тогда  $\Delta = \sqrt{2} \Delta_{\text{СИ}} = 1,4 \Delta_0$ . Погрешность измерения возрастает на 40 % по сравнению с первым случаем. При проведении многократных измерений и их усреднении влияние  $\Delta_{\text{СИ}}$ , и погрешности из-за диффузности результатов измерений уменьшится в  $\sqrt{n}$  раз:

$$\delta_x = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \delta_{\bar{x}}, \quad (6.4)$$

где  $n$  – количество наблюдений.

Следовательно, статическая обработка результатов измерений весьма эффективна. При этом случайная погрешность уменьшается, а систематическая погрешность остается неизменной.

3 Погрешность СИ намного больше погрешности диффузности объекта измерений:

$$\Delta_{\text{СИ}} \gg \Delta_0.$$

Тогда  $\Delta \approx \Delta_{\text{СИ}}$ , а следовательно, достаточно провести измерение 1 раз. Если значение результирующей погрешности полностью устраивает

экспериментатора, то нет необходимости в многократных измерениях и их статистическом усреднении. Если нужно снизить погрешность, то целесообразность проведения многократных наблюдений или замена СИ более точными определяется путем специальных дополнительных исследований.

Сопоставив все три случая, можно сделать следующие выводы:

- для обеспечения большей эффективности эксперимента нет смысла уменьшать случайную погрешность СИ больше, чем до  $\Delta_0 / 3$ ;
- увеличивать объем выборки усредненных наблюдений имеет смысл только до тех пор, пока величина  $\sqrt{\Delta_{СИ}^2 + \Delta_0^2} / \sqrt{n}$  не будет сопоставима с погрешностью адекватности модели явления или систематической погрешностью СИ.

## ***6.2 Зависимость точности достигаемого результата от времени измерения***

Утверждение, что с увеличением числа усредняемых отсчетов  $n$  точность измерения возрастает, справедливо лишь при полном отсутствии систематических погрешностей и абсолютной независимости отсчетов между собой. К чему может привести присутствие даже небольшой доли неисключенных систематических погрешностей?

Пусть известна приведенная погрешность измерительного канала:

$$\gamma_k = \gamma_{сл} + \gamma_{сист} \cdot \quad (6.5)$$

Число усредняемых отсчетов равно  $n$  с учетом общих затрат времени на их получение. Если величина меняется со временем (допустим, по гармоническому закону), то присутствует и динамическая погрешность  $\gamma_d$ . Она тоже будет иметь систематический характер.

Ее первой составляющей является погрешность из-за времени установления показаний  $\gamma_{д\ уст}$ . Время установления показаний определяется как время, по истечении которого приведенная динамическая погрешность при ступенчатом входном воздействии равна 1 % независимо от класса точности прибора. Она будет отрицательной. Для заданного времени эта погрешность является систематической и должна суммироваться с систематической погрешностью измерительного канала  $\gamma_{сист}$ .

Второй составляющей будет динамическая погрешность от усреднения мгновенных отсчетов синусоидального процесса  $\gamma_{д\ уср}$ . Она возрастает с увеличением времени усреднения, отрицательна и приводит к тому, что амплитуда будет уменьшаться (рисунок 6.1, штриховая линия).

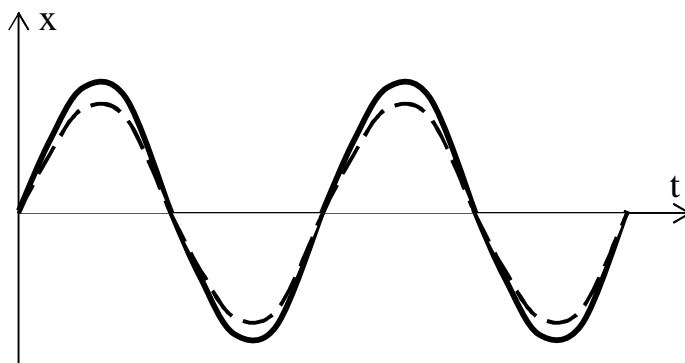


Рисунок 6.1 – Влияние наличия систематической составляющей погрешности измерения на измеряемую величину

Тогда погрешности от времени установления показаний и времени усреднения суммируются:

$$\gamma_d = \gamma_{d \text{ уст}} + \gamma_{d \text{ уср}} \quad (6.6)$$

Систематическая погрешность измерительного канала  $\gamma_{\text{сист}}$  может быть положительной или отрицательной в разных частях диапазона. Тогда суммарная приведенная погрешность будет равна (она носит систематический характер):

$$\gamma_{\dot{a}} = \sqrt{\gamma_d^2 + \gamma_{\text{сист}}^2} \quad (6.7)$$

При усреднении случайная погрешность канала будет убывать как  $\gamma_{\text{сл}} / \sqrt{n}$ . Тогда для результирующей погрешности (в процентах) получим

$$\gamma_k = \frac{\gamma_{\text{сл}}}{\sqrt{n}} + \gamma_{\dot{a}} \quad (6.8)$$

Следовательно, повышение точности будет возможно лишь в ограниченном диапазоне числа усредняемых отсчетов.

### **6.3 Оптимальная эффективность эксперимента с учетом выбора уровня факторов**

Задача состоит в определении того, сколько уровней должен иметь каждый фактор и какими эти уровни должны быть. Для факторов, в которых уровни качественно различны, выбор в большой степени диктуется интересами

экспериментатора. Если уровни различаются по количественным показателям, то тогда решение будет зависеть от типа информации, ожидаемой от эксперимента, и от имеющихся знаний о том, как связаны уровни факторов, и от связи между результатом и уровнем фактора. Если о природе регрессии известно слишком мало, то предпочтительным будет большое количество уровней, широко разбросанных на интервале изменения аргумента, а если природа регрессии известна, то для уточнения модели можно провести многократные измерения (в сомнительных точках). Наибольший интерес представляют промежуточные ситуации, в которых о связи фактора и отклика кое-что известно, но информации нельзя полностью доверять. Можно отметить три случая промежуточных ситуаций.

1 Опыт экспериментальной практики показал, что на представляющем интерес интервале измерений линия регрессии почти всегда линейна, но иногда появляются отклонения. Эти отклонения необходимо уметь обнаружить, и в случае обнаружения этих точек следует изменить метод анализа или даже отказаться от эксперимента.

2 Истинная зависимость между фактором и откликом почти наверняка имеет сложную форму. В этом случае следует использовать линейную регрессию в качестве приближения на рассматриваемом интервале. Уровни должны быть выбраны таким образом, чтобы приближение было возможно лучшим. Область, в которой используется приближение, обычно выбирается прямоугольной, чтобы исключить все значения в каждой из независимых переменных между верхней и нижней границей.

3 Предполагается, что математическая форма связи между факторами и откликами однозначно (адекватно) определена. Тогда целью эксперимента будет являться оценивание контролируемой характеристики в условиях, которые делают оптимальный выбор уровней зависящим от оцениваемой величины.

Когда вопрос о количестве уровней и их значениях решен, желательно использовать меньшее количество уровней, но более тщательно выбранных. Все три случая характеризуются тем, что недостаточность наблюдений для точного соответствия с математической моделью не будет серьезно портить оптимальные свойства этой модели.

Чем большее количество объектов будет проверяться, тем менее интенсивной будет проверка каждого из них и тем большими будут выборочные ошибки его оценок. Следовательно, перед экспериментатором встает задача выбора оптимального количества объектов для проведения эксперимента с заданной точностью. Для отбора применяется своя теория в зависимости от задачи эксперимента.

#### ***6.4 Оптимальная эффективность эксперимента с учетом затрат времени на его подготовку***

В теории эксперимента формальным критерием эффективности принимают отношение затрат к размеру достигаемого эффекта. Основное

требование, предъявляемое к таким оценкам, является требование их линейности, т.е. чтобы установленная таким образом эффективность была постоянной для любого измерения, сколько бы их ни проводилось.

Зависимость формального критерия, например требуемой точности,  $A$  от времени  $t$  показана на рисунке 6.2.

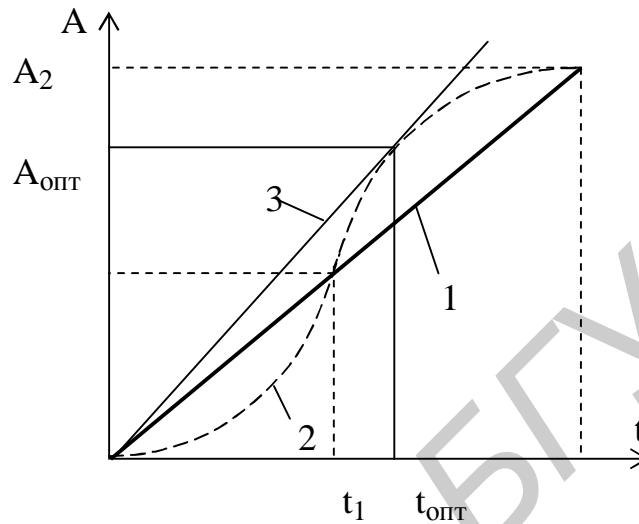


Рисунок 6.2 – Зависимость точности от времени измерения

В идеале эта зависимость является линейной (прямая 1). В реальности же она имеет нелинейный характер (кривая 2).

При фактической зависимости эффективности от времени при малых значениях времени ( $t_1$ ) достигается значение эффективности  $E_1 = A_1 / t_1$ , а при больших затратах времени – значение  $E_2 = A_2 / t_2$ . Следовательно, максимально возможное значение эффективности – это касательная к реальной зависимости (прямая 3 на рисунке 6.2). В точке касания  $t_{\text{опт}}$  – оптимальное время измерения, которому соответствует оптимальный эффект ( $A_{\text{опт}}$ ).

При увеличении затрат времени от  $t_1$  до  $t_{\text{опт}}$  эффективность затрат возрастает, а при увеличении затрат времени от  $t_{\text{опт}}$  до  $t_2$  эффект возрастает медленно, а следовательно, эффективность будет падать.

Затраты времени на получение результата складываются из двух составляющих:

- время на подготовку эксперимента  $t_{\text{п}}$ ;
- время, необходимое для получения отсчета  $t_0 = n \cdot t_{oi}$ , где  $n$  – количество отсчетов,  $t_{oi}$  – время получения  $i$ -го отсчета.

Отказ от проведения подготовительных операций приводит к существенному увеличению систематических и прогрессирующих погрешностей, а отказ от многократных измерений – к увеличению случайной составляющей погрешности.

С учетом  $t_{\text{п}}$  и  $t_0$  результирующая эффективность эксперимента будет определяться как

$$E = \frac{A}{t_{\text{п}} + t_0}.$$

В этом случае зависимость  $A(t)$  будет иметь следующий вид (рисунок 6.3):

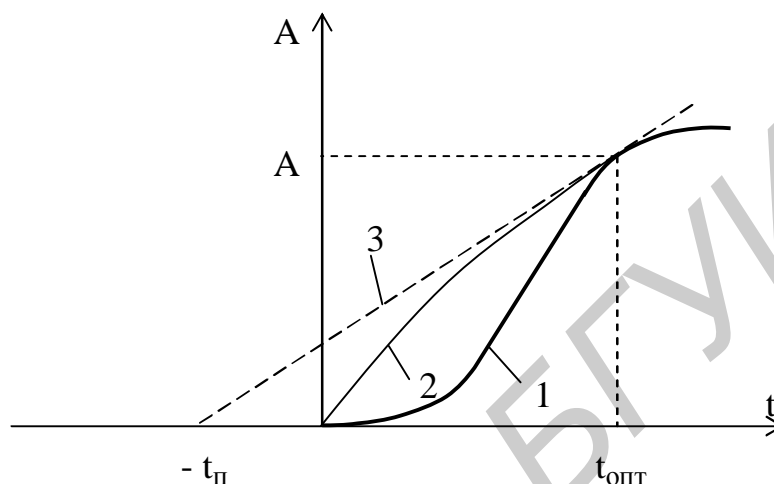


Рисунок 6.3 – Эффективность с учетом затрат времени на подготовку эксперимента

Обычно реальную кривую (1) аппроксимируют степенной функцией вида  $A = at^{\alpha}$  (кривая 2).

Эффективность характеризует наклон касательной (прямая 3) к оси  $t$ :

$$\frac{dA}{dt} = a\alpha t^{\alpha-1} = \frac{A}{t_{\text{п}} + t_{\text{опт}}}. \quad (6.9)$$

В результате время на проведение эксперимента

$$t_{\text{п}} = t_{\text{опт}} \frac{\alpha - 1}{\alpha}. \quad (6.10)$$

Это соотношение соответствует только тому случаю, когда размер случайной погрешности известен заранее. Если случайная погрешность заранее неизвестна и вычисляется по данным того же эксперимента, то доверительный интервал  $\Delta = t(n)\sigma$ . Здесь  $t(n)$  – квантильный коэффициент, зависящий от количества измерений  $n$ . В этом случае точность будет определяться из соотношения

$$\gamma = \frac{t(n)}{\sqrt{n}} \cdot \sigma. \quad (6.11)$$

На практике получается, что при количестве измерений меньше трех точность возрастает как  $n^3$ , а при  $n > 5$  она приближается к зависимости  $\sqrt{n}$ .

Следовательно, распространенное мнение, что усреднение двух, трех или пяти отсчетов не является целесообразным, является ошибочным, так как на этом участке происходит самое крутое возрастание точности.

Особой строгости при выборе оптимального объема выборки исходных данных не требуется, так как при планировании оптимального эксперимента речь идет лишь о выборе числа повторений всех отсчетов. Предпочтение следует отдавать большему значению количества наблюдений, близкому к оптимальному.

Оптимальные по эффективности затраты времени на измерения соответствуют наиболее эффективному плану проведения эксперимента, а достигаемая при этом точность усредненного результата существенно меньше максимально возможной. Следовательно, при необходимости достижения большей точности можно сознательно идти на большие затраты времени, жертвуя эффективностью эксперимента.

## **7 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ**

Большинство значений физических величин при переходе от объекта к объекту или при повторных определениях для одного и того же объекта проявляют большие колебания. Поскольку часто практические выводы и действия должны основываться на одной малой выборке, необходимо принимать во внимание сведения о физической величине, полученные в результате предыдущих измерений.

Принцип последовательного эксперимента заключается в следующем: вместо того, чтобы фиксировать объем выборки на первой стадии эксперимента, его делают зависимым от результатов самого эксперимента или от результатов самой выборки. Это возможно только в том случае, когда сбор данных представляет собой длительный процесс.

Целью последовательного экспериментирования является составление такого плана, при котором удовлетворительные результаты достигнуты наиболее экономичным образом в отношении суммарного расхода экспериментальных объектов.

Первая возможность последовательного экспериментирования – это приспособление последовательного выбора к экспериментальным процедурам. Применимость процедур ограничена, но так как на основе априорной информации скорее получаются результаты сравнения, нежели абсолютные значения, то исчезает неоднозначность, связанная с произволом в выборе объектов из генеральной совокупности.

Предположим, что есть методы измерения А и В. Сначала методы А и В распределяются случайным образом среди всех объектов измерения. После проведения эксперимента определяют долю совпадений результатов, полученных методом А и методом В. На основании этого можно сделать выводы об эффективности этих методов.

Второй вариант последовательного экспериментирования – разделение всех объектов на пары по различным признакам. К каждому объекту из пары применяют случайным образом либо метод А, либо метод В. При этом может получиться 4 группы результатов:

- 1-я группа: для всех объектов измерения обоими методами результаты неудовлетворительны;

- 2-я группа: результаты измерения методом А удовлетворительны, а методом В – неудовлетворительны;

- 3-я группа: результаты измерения методом А неудовлетворительны, а методом В – удовлетворительны;

- 4-я группа: для всех объектов измерения обоими методами удовлетворительны.

Информацию об эффективности проведения эксперимента дают результаты 2- и 3-й групп. В результате анализа этих групп принимается одно из возможных решений:

- если число положительных результатов в группе 2 превышает некоторую величину  $A_r$  (некоторое оптимальное число), то тогда метод А считают более эффективным, чем метод В;

- если число положительных результатов в группе 3 превосходит  $B_r$ , то метод В считают более эффективным, чем метод А;

- если не выполняется ни первое, ни второе условие, эксперимент продолжают дальше.

Функции  $A_r$ ,  $B_r$  зависят от рисков неверных суждений, которые экспериментатор готов принять, и от величины разности в отношениях, которую ему хотелось бы обнаружить.

Предварительно перед проведением эксперимента можно сформулировать свои требования, касающиеся отличий вероятности положительных результатов для методов А и В, величины вероятности заключения того, что метод А лучше, тогда как в действительности результаты, полученные методом В, по крайней мере не хуже тех, которые он может допустить, и т.д. Чем более малых вероятностей экспериментатор будет желать, тем дольше должен продолжаться эксперимент. Поэтому эффективнее будет заранее определить подходящие  $A_r$  и  $B_r$ , хотя бы с помощью трудоемких вычислений (например расчетом критериев значимости).

Однако слабость последовательного экспериментирования состоит в том, что момент окончания эксперимента становится зависимым от результатов, создает трудности в несмещенном оценивании средних значений и т.д.



## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Назаров, Н. Г. Метрология. Основные понятия и математические модели / Н. Г. Назаров. – М. : Высш. шк., 2002.
- 2 Финни, Д. Введение в теорию планирования экспериментов / Д. Финни. – М. : Наука, 1970 .
- 3 Математическая теория планирования эксперимента / под ред. С. М. Ермакова. – М. : Наука, 1983.
- 4 Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л. : Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 1985.
- 5 Мудров, В. И. Методы обработки измерений / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. – М. : Советское радио, 1976.
- 6 Цветков, Э. И. Основы теории статистических измерений / Э. И. Цветков. – Л. : Энергия, Лен. отделение, 1979.
7. Кузнецов, В. А. Основы эксплуатации средств измерений / В. А. Кузнецов, А. Н. Пашков, О. А. Подольский. – М. : Радио и связь, 1984.
- 8 Метрологическое обеспечение и эксплуатация измерительной техники / под ред. В. А. Кузнецова. – М. : Радио и связь, 1990.
- 9 Фрумкин, В. Д. Достоверность контроля средств радиоизмерений и контрольные допуски / В. Д. Фрумкин, Н. А. Рубичев, А. Д. Котляр. – М. : Изд-во стандартов, 1975.
- 10 СТБ П 8021-2003. Метрология. Основные термины и определения.
- 11 ГОСТ 24026-80 Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения.
- 12 МИ 2091-90 (рекомендация). ГСИ. Измерения физических величин. Общие требования.
- 13 МИ 1552–86. ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешности результата измерения.
- 14 ГОСТ 8.207–76. Измерения прямые многократные. Оценивание погрешности результата измерения.
- 15 МИ 2083–90. Измерения косвенные. Определение результата измерений и оценивание их погрешностей.
- 16 МИ 1832–88. ГСИ. Сличение групп средств поверки одинакового уровня точности. Основные правила.
- 17 МИ 1317–86. ГСИ. Результаты и характеристики погрешностей измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.
- 18 МИ 2091–90. Способы выражения результата измерения.

Учебное издание

**Дерябина** Марина Юрьевна

**ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА  
И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие

Редактор *Н. В. Гриневич*  
Корректор *М. В. Тезина*  
Компьютерная верстка *Е. Г. Реут*

Подписано в печать 10.07.2007. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 5,7. Тираж 100 экз. Заказ 126.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.  
220013, Минск, П. Бровки, 6